

**Joan de Solà-Morales i Rubió**  
**Barcelona, novembre de 2015**

La meva recerca:  
Equacions en Derivades Parcial  
Matemàtica i Enginyeria  
Sistemes Dinàmics  
Transformacions amb Jacobià donat

### **Equacions en Derivades Parcial**

Aquest és el tema amb el que m'identifico com a investigador. Les EDP's tenen una llarga història dins de la Matemàtica, i han afectat de manera molt intensa punts centrals de l'Anàlisi Matemàtica, de la Geometria Diferencial, etc. Les EDP's són un dels camps actualment més actius dins de la Matemàtica de tot el món, com confirmen les bases de dades d'articles publicats. Però les EDP's han tingut la major part de les vegades un origen no matemàtic i unes importants aplicacions fora de la Matemàtica:

L'Equació de la Calor i el matemàtic que la va plantejar primer, Joseph Fourier, el 1822, estaven òbviament motivats per la Física i l'Enginyeria. El mateix Fourier, tot i ser un gran matemàtic, a causa de la importància de les seves aplicacions es va deixar portar en els seus primers treballs per l'entusiasme en valorar l'eficàcia dels seus mètodes de solució (que usen les que avui coneixem per Sèries de Fourier), sense fixar-se massa en si l'ús d'aquestes sèries estava ben fonamentat o no. Aquesta és l'equació que de manera més o menys explícita segueixen utilitzant els enginyers.

El mateix havia passat cent anys abans amb l'Equació de Laplace, que aquest havia escrit pensant en la determinació del potencial gravitatori creat per la Terra o un astre qualsevol, inhomogeni o de forma irregular. I no oblidem que la finalitat d'aquests estudis, que Laplace va denominar Mecànica Celeste, estava en gran part motivat per una necessitat ben pràctica: la conveniència de disposar de taules que permetessin determinar l'hora local a partir d'observacions astronòmiques.

I el mateix va passar, més o menys a la mateixa època que la de Laplace, amb el plantejament de l'Equació d'Ones per part de D'Alembert, immediatament continuat pels treballs d'Euler, en que l'objectiu era determinar la forma i la freqüència del moviment vibratori d'una corda sotmesa a tensió.

Amb la referència a aquestes tres equacions he volgut deixar clar que les EDP's, tot i que són un objecte de gran interès dins de la Matemàtica, apareixen principalment motivades per problemes pràctics. Però també he volgut deixar dit que hi ha almenys aquests tres tipus principals d'equacions, que en terminologia més abstracta reben el nom, respectivament, de Parabòliques, El·líptiques i Hiperbòliques.

La meva recerca no s'ha allunyat mai massa d'aquestes tres classes, calor, potencial i ones, encara que en versions més elaborades i actuals, que inclouen termes no lineals. Així, pel que fa a l'Equació de la Calor (també anomenada Equació de la Difusió), tinc una sèrie de treballs

publicats sobre equacions de reacció i difusió, en particular els que inclouen estudis del cas en que la reacció es produeix només a la frontera, allò que en Química se'n podria dir Catàlisi Heterogènia. Puc esmentar, per exemple, el treball següent:

N. Consul; J. Sola-Morales, "Stable nonconstant equilibria in parabolic equations with nonlinear boundary conditions", *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris s. I*, 321 (1995) pp 299-304.

També vaig estudiar equacions parabòliques definides en grafs, conjuntament amb J.A. Lubary. Per cert, que quan jo parlo dels meus treballs, amb molt poques excepcions sempre vull dir treballs fets en col·laboració amb altres col·legues coautors, i molt poques vegades en solitari.

De l'equació de Laplace he publicat també treballs sobre versions semilineals de la mateixa en dominis de forma cilíndrica, en que l'objectiu principal era estudiar el comportament de les solucions prop de l'infinit. Per exemple,

Á. Calsina; X. Mora; J. Solà-Morales, "The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains, and a study of their parabolic singular limit". *J. Differential Equations* 102 (1993), no. 2, 244–304

i també treballs sobre problemes amb condicions de contorn no lineals, com ara el següent:

X. Cabre; J. Sola-Morales: "Layer Solutions in a Halfspace for Boundary Reactions" *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58 (2005), pp. 1678-1732.

I sobre l'equació de la corda vibrant també tinc treballs publicats, amb diverses motivacions, en el cas semilineal i dissipatiu, com el següent:

M. Pellicer and J. Solà-Morales: "Spectral analysis and limit behaviours in a spring-mass system", *Communications on Pure and Applied Analysis* 7 (2008), pp 563-577.

També he treballat una mica en un sistema d'equacions molt important, que és el de la Mecànica dels Fluids Viscosos, les conegudes (i difícils) Equacions de Navier Stokes. Els sistemes d'equacions no es classifiquen tan fàcilment com les equacions escalars, però si haguéssim de buscar una similitud formal, diríem que les Equacions de Navier Stokes s'assemblen més a l'Equació de la Calor que a les altres dues. Un treball d'aquest tema seria:

J. Solà-Morales, "Conditions au bord sur la vitesse et la pression pour les equations de Navier-Stokes dans une conduite finie" *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, s. I* 229 (1984), pp. 499-502

## **Matemàtica i Enginyeria**

Jo soc Catedràtic de Matemàtica Aplicada a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB), a la Universitat Politècnica de Catalunya, des de l'any 1989. La veritat és que els meus temes de recerca em fan sentir molt còmode en aquest medi. Unes de les meves darreres publicacions són

M. Aguarales; J. Haro; J. Rius; J. Solà-Morales, "On an asymptotic formula for the maximum voltage drop in a on-chip power distribution network". *European Journal of Applied Mathematics* 23 (2012), pp 245-265,

en la que precisament tres matemàtics hem col·laborat amb el professor Josep Rius, del Departament d'Enginyeria Electrònica de la UPC en l'obtenció d'una fórmula asimptòtica pel potencial elèctric en un cert tipus de xip, i també

J. Menacho; J. Solà-Morales: "Convergence to Steady-state and Boundary Layer Profiles in a Linear Chromatography System". *SIAM J. Appl. Math.* 75 (2015), no. 2, 745–761,

En la que he col·laborat amb un altre professor en un tema d'Enginyeria Química.

Una major aproximació entre matemàtics i enginyers crec que és un dels objectius importants que encara ens queden per assolir. En cert sentit, la creació de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC l'any 1992, de la que jo vaig ser el primer Degà (entre el 1992 i el 1997) va sorgir amb la idea d'avançar en aquesta direcció. Una mes gran implicació de la Matemàtica Aplicada catalana en l'activitat econòmica, industrial i interdisciplinària crec que és un dels deures pendents de la comunitat matemàtica catalana dels nostres dies.

No puc deixar d'esmentar la influència que en mi ha tingut el Prof. Carles Perelló i Valls, catedràtic de Matemàtica Aplicada de la UAB, actualment emèrit. Ell, que és matemàtic i enginyer, va ser el meu director de tesi i qui em va introduir en la recerca matemàtica en aquests temes. També el Prof. Carles Simó, actualment a la UB, és matemàtic i enginyer, i va tenir una important influència en la meua formació. Un altre enginyer i matemàtic important va ser el Prof. Albert Dou, que va fer néixer el cultiu de les EDP's a la Universidad Complutense de Madrid, i puc dir que ell i la seva escola també han influït en la meua carrera. Finalment no puc deixar d'esmentar l'antiga i molt valorada figura del Prof. Esteve Terrades i Illa, també matemàtic i enginyer, que va dur a terme una activitat científica de gran nivell com a membre que va ser de l'Institut d'Estudis Catalans. La meua (humil) carrera científica ha trobat sempre en aquestes figures orientació i referència.

## **Sistemes Dinàmics**

Sobretot en el principi de la meua carrera, a mi m'agradava dir que jo treballava en Sistemes Dinàmics definits per EDP's, o Sistemes Dinàmics de dimensió infinita. En això jo seguia la tendència de l'escola del Prof. Jack K. Hale, mestre del meu mestre. Durant la dècada dels 80 va haver-hi una gran dedicació a estendre a EDP's d'evolució coses que ja es coneixien per a sistemes d'equacions diferencials ordinàries, de dimensió finita. Alguns dels meus treballs d'aquella època, i també d'anys posteriors, s'entenen més be si es miren des d'aquesta òptica. Actualment no és pas que jo hagi renunciat a aquest punt de vista, però d'alguna manera el dono per integrat dins de la tasca general d'analitzar i entendre les EDP's.

En aquesta direcció, jo he mantingut una línia de col·laboració al llarg de molts anys amb el Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues, de la Universitat de São Paulo, dedicada a un problema una mica abstracte, que és un problema específicament de Sistemes Dinàmics de Dimensió Infinita. Es tracta del problema de la linealització i de la linealització diferenciable de sistemes dinàmics. Aquests resultats, encara que siguin abstractes, també poden aplicar-se a algunes EDP's. Però la veritat és que només els hem pogut aplicar a EDP's hiperbòliques. Al cas parabòlic els nostres mètodes encara no són aplicables, i algunes aplicacions que poden imaginar-se al cas el·líptic estan verdaderament molt lluny.

Aquests resultats amb el Prof. Munhoz Rodrigues en molts casos acaben dient que el que passa en dimensió infinita no és diferent del que passa en dimensió finita. Per això vull destacar el treball següent, en el que es mostra un exemple de dimensió infinita que es comporta de manera verdaderament diferent als seus anàlegs en dimensió finita:

H. M. Rodrigues, J. Solà-Morales, "Invertible contractions and asymptotically stable ODE's that are not  $C^1$ -linearizable", J. Dynam. Differential Equations 18 (2006), pp. 961-974.

Es podria dir, en termes d'Àlgebra Lineal, que aquest exemple està construït a partir d'un bloc de Jordan de dimensió infinita.

## Transformacions amb Jacobià donat

Aquest és un problema geomètric, al que hem dedicat força atenció durant alguns anys. Es tracta de construir una transformació d'un subconjunt del pla en ell mateix de manera que el determinant Jacobià d'aquesta transformació en cada punt valgui una quantitat fixada, donada per una funció escalar. La aplicació típica d'aquest problema està en el que s'anomenen Cartogrames Geogràfics, mapes simbòlics en els que l'àrea de cada regió o país es veu modificada en proporció a una quantitat que es vulgui representar.

Un dels procediments per a construir aquesta transformació (que mai és única) està precisament basat en l'equació de la calor, i encara nosaltres hi vam afegir una variant que usava equacions que provenien de la mecànica de fluids. Aquesta capacitat de la Matemàtica de resoldre problemes, en aquest cas de representació geogràfica, usant mètodes que venen de la Termologia o de la Mecànica ens mostra significativament als valors i la utilitat del pensament abstracte. La nostra contribució al problema ha estat en l'estudi de les propietats de regularitat de la solució a partir de la regularitat de les dades. El problema essencial està en l'obtenció de solucions contínues a partir de dades que poden tenir discontinuïtats, i els nostres darrers resultats s'aproximen ja molt a la solució definitiva, almenys en els casos considerats a les aplicacions. Els nostres primers resultats, potser més elegants des del punt de vista matemàtic, es referien només a dades que havien de ser contínues en el sentit de Hölder, una condició encara una mica més forta que la condició habitual de continuïtat. Aquests primers resultats es troben en el treball

A. Avinyó; J. Solà-Morales; M. València, "On maps with given jacobians involving the heat equation". Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) 54 (2003), pp. 919-936.