ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

V. NAVARRO AZNAR

Sur la connexion de Gauss-Manin en homotopie rationnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, n° 1 (1993), p. 99-148.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_1_99_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 26, 1993, p. 99 à 148.

SUR LA CONNEXION DE GAUSS-MANIN EN HOMOTOPIE RATIONNELLE (1)

PAR V. NAVARRO AZNAR

ABSTRACT. — Let k be a field of characteristic zero. Let $f: X \to S$ be a proper and smooth morphism of non-singular algebraic k-varieties. If $k \subset \mathbb{C}$, let $f^{an}: X^{an} \to S^{an}$ be the analytic morphism associated to f, then the cohomology groups of the fibers, $H^i(X_s^{an}, \mathbb{C})$, $s \in S$, form a complex local system over S^{an}, which is the system of local solutions of the Gauss-Manin connection. By results of Fuchs, Grothendieck, Griffiths,..., it is known that this connection has relevant properties: it is defined over k, has regular singular points, its exponents are rational and it supports a variation of Hodge structures. The rational homotopy of the fibers of f also gives other important complex local systems over S^{an}. The aim of this article consists in proving that the holomorphic connections associated to every local system that comes from the rational homotopy of the fibers have the same algebraic properties than the connections coming from the cohomology.

0. Introduction

Soit X une variété algébrique sur un corps k de caractéristique zéro, non-singulière pour fixer les idées, et soit $\Omega^*_{X/k}$ le complexe de De Rham des formes différentielles régulières sur X. Il est connu, depuis Grothendieck [9], que l'hyper-cohomologie de $\Omega^*_{X/k}$ calcule la cohomologie singulière complexe de X, c'est-à-dire que, si $k \subseteq \mathbf{C}$ et X^{an} est la variété complexe associée à $X_{\mathbf{C}}$, on a alors un isomorphisme naturel

$$\mathbf{H}^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes_k \mathbf{C} \simeq H^*(X^{an}, \mathbf{C}).$$

Dans un travail antérieur ([16], *voir* aussi [11]), nous avons introduit une k-algèbre dgc $\mathbf{R}_{TW}\Gamma(X, \Omega^*_{X/k})$ dont la cohomologie est $\mathbf{H}^*(X, \Omega^*_{X/k})$ et qui, d'après la théorie de Sullivan des modèles minimaux [20] et le théorème de comparaison antérieur, calcule l'homotopie complexe de X. Cette k-algèbre dgc $\mathbf{R}_{TW}\Gamma(X, \Omega^*_{X/k})$ s'obtient à partir d'un formalisme introduit dans [16], sous le nom de foncteurs dérivés de Thom-Whitney, et qui répond en théorie des faisceaux au problème des cochaînes commutatives de Thom (*cf.* [19]).

Dans le présent travail, nous étudions la situation relative de ce qui précède. On considère un morphisme $f: X \to S$ lisse et propre entre des k-variétés algébriques, non-singulières. Il est bien connu que si $k \subseteq \mathbf{C}$ et $f^{an}: X^{an} \to S^{an}$ est le morphisme analytique

(1) Ce travail a été partiellement subventionné par le project CICYT PB86-0348.

associé, f^{an} est une fibration topologique localement triviale et, par suite, le type d'homotopie des fibres est localement constant. Au point de vue cohomologique, on obtient que les groupes de cohomologie des fibres $H^i(X_s^{an}, \mathbf{C})$, $s \in S$, forment un système local complexe sur S^{an}, qui est donc le système local des solutions d'une connexion holomorphe intégrable sur un fibré vectoriel holomorphe sur S^{an} : la connexion de Gauss-Manin (*cf.* [4]).

D'après les travaux de Fuchs et autres (*cf.* [7]), on sait que la connexion de Gauss-Manin a des propriétés très remarquables; on sait en effet que cette connexion provient d'une connexion algébrique déjà définie sur k qui est à points singuliers réguliers, que ses exposants sont rationnels et qu'elle supporte une variation de structures de Hodge sur S^{an}.

Or, ne considérer que la cohomologie des fibres, ce serait négliger une bonne partie de la topologie algébrique de la situation, car l'homotopie rationnelle des fibres fournit aussi d'autres systèmes locaux complexes sur S^{an} qui sont intéressants (*cf.* [3]). Par exemple, si les fibres X_s sont simplement connexes, les groupes d'homotopie complexe $\pi_i(X_s) \otimes \mathbf{C}$, $s \in S$, $i \geqq 2$, forment un système local sur S^{an}; ou bien, si les X_s ne sont pas simplement connexes et σ est une section de f, les complétions de Malcev de $\pi_1(X_s, \sigma(s))/\Gamma_n$ tensorisées par $\mathbf{C}$ forment aussi des systèmes locaux complexes sur S^{an}.

Le propos de cet article est de prouver que les connexions holomorphes associées aux systèmes locaux qui proviennent de l'homotopie rationnelle possèdent les mêmes propriétés algébriques que les connexions provenant de la cohomologie des fibres, *i. e.* elles sont définies sur k, sont à points singuliers réguliers et leurs exposants sont rationnels.

Considérons, par exemple, X_s le plan complexe moins deux points : 0 et s, où $s \neq 0, 1$, et prenons comme point base de X_s le 1. Quand s varie dans $\mathbf{C} - \{0, 1\}$, on obtient une famille lisse de variétés sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ dont l'homotopie rationnelle nous définit d'intéressants systèmes locaux sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$. (Dans cet exemple la famille n'est pas propre, mais cette hypothèse n'était donnée que pour fixer les idées, *voir* la section 6). Bien que les systèmes locaux définis par la cohomologie des fibres soient triviaux et que l'homotopie rationnelle des fibres soit formelle, les $\pi_1(X_s, 1)/\Gamma_3 \otimes \mathbf{C}$, où $\Gamma_3 = [\pi_1, [\pi_1, \pi_1]]$, forment un système local de rang 3 sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ qu'on peut vérifier comme étant le système local des sections horizontales de la connexion définie par

$$\nabla v = dv + \frac{ds}{s(1-s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & s-1 & 0 \end{pmatrix} v$$

qui, manifestement, est définie sur $\mathbf{Q}$, est à singularités régulières en 0, 1 et ∞, et dont les exposants sont entiers. En termes de périodes non-abéliennes, on a que toutes les intégrales itérées de longueur $\leqq 2$, v. g. les dilogarithmes $\int_\gamma (dz/z)\, dz/(z-s)$, vérifient l'équation différentielle

$$s(1-s) f''' + (2-4s) f'' - 2 f' = 0,$$

et il est tentant de dire que celle-ci serait donc l'équation différentielle de Picard-Fuchs des périodes non-abéliennes de longueur $\leqq 2$ de la famille $(X_s, 1)_{s \in \mathbf{C}-\{0, 1\}}$.

L'organisation de l'article est la suivante. Après quelques préliminaires dans la section 1 sur les homotopies entre les morphismes de complexes, on étudie dans la section 2 les homotopies et modèles minimaux de Sullivan dans la catégorie des R-algèbres dgc, où R est une k-algèbre associative, commutative et unitaire, puis on introduit dans ce paragraphe les ho-faisceaux de $\mathcal{O}_S$-algèbres dgc, qui sont des objets de catégories dérivées donnés localement, et on étend l'étude antérieure à ce contexte. La section 3 étudie les homotopies et modèles minimaux des dérivations d'une R-algèbre dgc. Dans ces deux sections, nous suivrons de près la théorie des modèles minimaux de Sullivan, or la non-existence en général de modèles minimaux dans notre cadre fait que l'organisation des résultats et quelques-unes de ses preuves s'écartent un peu ici du cas classique. Il faut également signaler que l'existence des modèles minimaux étudiés dans ces deux sections ne sera prouvée que dans la section 5 dans un contexte légèrement différent.

Dans la section 4, on introduit et étudie les connexions homotopiquement intégrables, celles-ci étant les connexions sur les complexes de $\mathcal{O}_S$-modules qui vérifient la condition d'intégrabilité $\nabla_{[v, w]} = [\nabla_v, \nabla_w]$ du moins homotopiquement.

Dans la section 5, on prouve l'existence d'un modèle minimal d'une connexion ho-intégrable sur un ho-faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres dgc à cohomologie cohérente, et on en déduit que les invariants homotopiques finis du ho-faisceau sont des fibrés algébriques à connexion intégrable. L'existence des modèles minimaux se prouve comme dans [20] par récurrence et le principal problème est de s'assurer à chaque pas que le module engendré par les générateurs qu'on doit ajouter est libre, ce qui résulte dans la situation considérée de la présence d'une connexion, car un $\mathcal{O}_S$-module cohérent muni d'une connexion intégrable est toujours localement libre.

Dans la section 6, on justifie les hypothèses du théorème abstrait de la section précédente : si $f : X \to S$ est un morphisme lisse et propre, on construit, en utilisant les foncteurs de Thom-Whitney introduits dans [16], un ho-faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres dgc muni d'une connexion ho-intégrable, qui est isomorphe, dans la catégorie dérivée correspondante, à $\mathbf{R} f_* \Omega^*_{X/S}$ avec sa connexion de Gauss-Manin.

J'exprime ma profonde reconnaissance à F. Guillén, P. Pascual et A. Roig pour les discussions que nous avons eues au sujet de cet article. Je remercie aussi vivement P. Deligne pour m'avoir communiqué ses résultats non publiés ([5]), qui ont stimulé ma recherche sur le sujet.

1. Préliminaires

(1.1) Soit A une catégorie abélienne, rappelons (*cf.* [16], § 1) que, si $C^+(A)$ est la catégorie des complexes de cochaînes de A, un complexe cosimplicial strict de A est une suite $\{C^{n,*}\}_{n \geqq 0}$ d'objets de $C^+(A)$, avec des morphismes $d^i : C^{n-1,*} \to C^{n,*}$, $n > 0$, $0 \leqq i \leqq n$, qui vérifient la relation

$$d^{j+1} d^i = d^i d^j, \qquad i \leqq j,$$

et que, si $\Delta^+_{\mathrm{mon}}\mathrm{C}^+(\mathrm{A})$ est la catégorie des complexes cosimpliciaux stricts dans A, on a un foncteur

$$s: \quad \Delta^+_{\mathrm{mon}}\mathrm{C}^+(\mathrm{A}) \to \mathrm{C}^+(\mathrm{A}),$$

le foncteur « simple d'un complexe cosimplicial strict ». En particulier, si $\mathrm{C}^{\bullet,*}$ est le complexe cosimplicial strict

$$\mathrm{C}^{0,*} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{C}^{1,*},$$

où $d^0=\alpha$ et $d^1=0$, alors $s(\mathrm{C}^{\bullet,*})$ n'est autre que le simple de ce complexe double, *i.e.* $s(\mathrm{C}^{\bullet,*})$ est le complexe qui a pour composante n-ième

$$s(\mathrm{C}^{\bullet,*})^n=\mathrm{C}^{0,n}\oplus\mathrm{C}^{1,n-1},$$

et pour différentielle

$$d(x, y)=(d(x), \alpha(x)-d(y)), \qquad (x, y)\in s(\mathrm{C}^{\bullet,*}).$$

Dans ce cas nous désignerons par $\mathrm{H}^*(\mathrm{C}^{0,*}, \mathrm{C}^{1,*})$ la cohomologie du complexe $s(\mathrm{C}^{\bullet,*})$.

(1.2) Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}^0 & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{C}^1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathrm{D}^0 & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{D}^1 \end{array}$$

un diagramme de complexes de A, et soit h une homotopie de $g\alpha$ à βf (notée $h: g\alpha\simeq\beta f$), donc $\beta f-g\alpha=dh+hd$.

On définit un morphisme $s_h: s(\mathrm{C}^{\bullet,*})\to s(\mathrm{D}^{\bullet,*})$ par

$$s_h(x, y)=(f(x), h(x)+g(y)),$$

qui est un morphisme de complexes.

Puisque le morphisme s_h rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{C}^{1,*}[-1] & \to & s(\mathrm{C}^{\bullet,*}) & \to & \mathrm{C}^{0,*} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle s_h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{D}^{1,*}[-1] & \to & s(\mathrm{D}^{\bullet,*}) & \to & \mathrm{D}^{0,*}, \end{array}$$

il résulte que, si f, g sont des quasi-isomorphismes, alors s_h est aussi un quasi-isomorphisme.

(1.3) Si h' est une autre homotopie de $g\alpha$ à βf, et s'il existe une homotopie seconde H de h' à h, *i.e.* H est une suite de morphismes

$$\mathrm{H}_n: \quad \mathrm{C}^{0,n}\to\mathrm{D}^{1,n-2}, \qquad n\geqq 0,$$

telle que

$$h-h'=dH_n-H_{n+1}d, \qquad n\geqq 0,$$

alors les morphismes

$$s_h \text{ et } s_{h'}: \quad s(C^{\bullet,*})\to s(D^{\bullet,*}),$$

sont homotopes par l'homotopie

$$s_H: \quad s(C^{\bullet,*})\to s(C^{\bullet,*})$$

définie par $s_H(x, y)=(0, H(x))$.

(1.4) Avec les notations antérieures, supposons qu'on a des morphismes

$$f': \quad C^{0,*}\to D^{0,*},$$
$$g': \quad C^{1,*}\to D^{1,*},$$

et des homotopies $k: f'\simeq f$ et $l: g'\simeq g$, alors $h':=h-\beta k+l\alpha$ est une homotopie de $g'\alpha$ à $\beta f'$.

Par (1.2) on obtient donc un morphisme de complexes

$$s_{h'}: \quad s(C^{\bullet,*})\to s(D^{\bullet,*}),$$

morphisme qui est homotope à s_h par l'homotopie

$$H: \quad s(C^{\bullet,*})\to s(D^{\bullet,*})$$
$$(x, y)\to(k(x), \ -l(y)).$$

2. Homotopies et modèles minimaux de Sullivan

Soient k un corps de caractéristique zéro et R une k-algèbre associative, commutative et unitaire.

Toutes les R-algèbres dgc non nulles considérées dans cet article sont supposées unitaires et cohomologiquement connexes, et tous les morphismes non nuls sont supposés unitaires.

Le propos de ce paragraphe est d'étendre aux R-algèbres dgc quelques-uns des concepts et résultats de la théorie de Sullivan du modèle minimal d'une k-algèbre dgc [20].

(2.1) Soient A une R-algèbre dgc et n un entier $\geqq 0$, une extension de Hirsch de A de degré n [15] est une inclusion $A\to A\otimes_R \Lambda(E)_n$ de R-algèbres dgc, où E est un R-module libre, homogène de degré n, $\Lambda(E)_n$ est la R-algèbre graduée commutative libre engendrée par E, et la différentielle de $A\otimes\Lambda(E)_n$ applique E dans A. L'extension est dite finie si E est un R-module de type fini.

Soit A une R-algèbre dgc, une extension de Hirsch généralisée de A est une inclusion

$$A \to B$$

de R-algèbres dgc, où B admet une filtration exhaustive $\{B(\alpha)\}_{\alpha \in I}$ indexée par un ensemble bien ordonné I, telle que :

(i) $B(0)=A$, où $0=\min I$,

(ii) si α a comme prédécesseur β (*i.e.* $\beta=\max[0, \alpha[$), $B(\alpha)$ est une extension de Hirsch de $B(\beta)$,

(iii) si α n'a pas de prédécesseur, alors

$$B(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha} B(\beta).$$

Une R-algèbre dgc A est nilpotente généralisée (*cf.* [20]), si elle est une extension de Hirsch généralisée de R.

Une R-algèbre dgc A est minimale (*cf.* [2], [8], [12], [15], [18], [20]) si elle est une extension de Hirsch généralisée de R, où la filtration $\{A(\alpha)\}_{\alpha \in I}$ vérifie :

(i) $I=\{(n,q),\ n \geqq 1,\ q \geqq 0\}$ ordonné lexicographiquement,

(ii) pour tout $q>0$, $A(n, q)$ est une extension de Hirsch de degré n de $A(n, q-1)$.

(2.2) Si A est une R-algèbre dgc, un modèle (resp. modèle minimal) de A est une R-algèbre dgc M nilpotente généralisée (resp. minimale) et un morphisme

$$\rho: \quad M \to A$$

qui est une équivalence faible.

Nous aurons besoin aussi des (n, q)-modèles minimaux, définis ci-dessous.

Soit A une R-algèbre dgc, un (n, q)-modèle minimal de A, $n \geqq 1$, $q \geqq 0$, est une R-algèbre dgc $M(n, q)$ et un morphisme

$$\rho_{(n, q)}: \quad M(n, q) \to A,$$

tels que :

(i) $M(1, 0) \cong R$ et $\rho_{(1, 0)}: M(1, 0) \to A$ est l'inclusion,

(ii) si $q>0$, $M(n, q)$ est une extension de Hirsch de degré n d'un modèle $(n, q-1)$-minimal $M(n, q-1)$, et $\rho_{(n, q)}$ est tel que

$$\rho^*_{(n, q)}: \quad H^i(M(n, q)) \to H^i(A)$$

est un isomorphisme si $i \leqq n$, et le morphisme

$$H^{n+1}(M(n, q-1), A) \to H^{n+1}(M(n, q), A)$$

est nul.

(iii) si $n>1$, $q=0$, $\mathrm{M}(n, 0)$ est l'union d'une suite de $(n-1, q)$-modèles minimaux de A, $q \geqq 0$,

$$\ldots \subset \mathrm{M}(n-1, q) \subset \mathrm{M}(n-1, q+1) \ldots$$

et $\rho_{(n, 0)}$ est le morphisme induit.

Il résulte aisément de la définition que, si $\mathrm{M}(n, 0)$ est un $(n, 0)$-modèle minimal de A, $n>1$, le morphisme

$$\rho_{(n, 0)}^{*}: \quad \mathrm{H}^{i}(\mathrm{M}(n, 0)) \rightarrow \mathrm{H}^{i}(\mathrm{A})$$

est un isomorphisme si $i<n$, et un monomorphisme si $i=n$ (*cf.* [15], § 5).

Si A est augmentée, un (n, q)-modèle minimal de A est pointé si tous les morphismes qui interviennent dans la définition sont pointés.

Il faut signaler qu'un résultat central de la théorie de Sullivan est que toute k-algèbre dgc admet des (n, q)-modèles minimaux, pour tout $n \geqq 1$, $q \geqq 0$. Nous ne démontrerons l'existence de (n, q)-modèles minimaux des R-algèbres dgc qu'avec des hypothèses supplémentaires (*voir* le § 5). Mais, nous prouverons par la suite que, s'ils existent, les (n, q)-modèles minimaux d'une R-algèbre dgc sont essentiellement uniques.

(2.3) Soient $f_0, f_1: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ des R-morphismes de R-algèbres dgc, une homotopie de Sullivan de f_0 à f_1 est un R-morphisme de R-algèbres dgc

$$h: \quad \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{R}(t, dt) \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{B},$$

tel que

$$h_{\mid t=0, dt=0}=f_0 \qquad \text{et} \qquad h_{\mid t=1, dt=0}=f_1,$$

où $\mathrm{R}(t, dt)$ est la R-algèbre dgc $\mathrm{R}[t] \oplus \mathrm{R}[t]\, dt$.

Une homotopie de Sullivan de f_0 à f_1 induit une homotopie de R-complexes de f_0 à f_1 (*voir* [8], X), notée $\displaystyle\int_0^1 h$.

Si A est une extension de Hirsch $\mathrm{M} \otimes \Lambda(\mathrm{E})_n$ et $h: \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{R}(t, dt) \otimes \mathrm{B}$ est une homotopie de Sullivan de $f_{0 \mid \mathrm{M}}$ à $f_{1 \mid \mathrm{M}}$, une extension de h en une homotopie de Sullivan $\tilde{h}: \mathrm{M} \otimes \Lambda(\mathrm{E})_n \rightarrow \mathrm{R}(t, dt) \otimes \mathrm{B}$ de f_0 à f_1 est définie par un R-morphisme

$$\kappa: \quad \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{B}^{n-1}$$

tel que

$$f_1(e)-f_0(e)=d \kappa(e)+\left(\int_0^1 h\right)(de). \tag{2.3.1}$$

En effet, on peut définir $\tilde{h}$ à partir de h et κ par

$$\tilde{h}(e)=f_0(e)+\int_0^t h(de)+d(t \otimes \kappa(e)), \qquad e \in \mathrm{E}, \tag{2.3.2}$$

où

$$\int_0^t : \quad \mathrm{R}(t, dt) \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{B} \to \mathrm{B}$$

est définie par

$$\int_0^t t^i \otimes b = 0$$

et

$$\int_0^t t^i \, dt \otimes b = \frac{t^{i+1}}{i+1} \otimes b,$$

(*voir* [8], X). Que l'on obtienne ainsi une homotopie de Sullivan $\tilde{h}$ de f_0 à f_1, telle que $\left(\int_0^1 h\right)(e) = \kappa(e)$, $e \in \mathrm{E}$, résulte immédiatement des définitions. Nous appelons ces extensions $\tilde{h}$ de h extensions naturelles de h.

Si A est nilpotente généralisée, nous appelons homotopies naturelles de Sullivan les homotopies de Sullivan définies par induction sur la filtration $\{\mathrm{A}(\alpha)\}$ par des extensions naturelles successives.

(2.4) Si A et B sont des R-algèbres dgc augmentées et f_0, f_1 sont des R-morphismes de R-algèbres dgc augmentées (nous dirons R-morphismes pointés), une homotopie de Sullivan h de f_0 à f_1 est pointée si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{h} & \mathrm{R}(t, dt) \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{R} & \rightarrow & \mathrm{R}(t, dt) \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles qui sont induites par les augmentations, est commutatif.

Si h est pointée, l'homotopie de complexes $\int_0^1 h$ vérifie

$$\left(\varepsilon \int_0^1 h\right)(x) = 0, \qquad x \in \mathrm{A}^+,$$

où ε désigne l'augmentation de A; et inversement, si $\mathrm{A} = \mathrm{M} \otimes \Lambda(\mathrm{E})_n$, $h : \mathrm{M} \to \mathrm{R}(t, dt) \otimes \mathrm{B}$ est une homotopie de Sullivan pointée et le R-morphisme

$$\kappa : \quad \mathrm{E} \to \mathrm{B}^{n-1}$$

en plus de (2.3.1) vérifie

$$\varepsilon\kappa = 0,$$

alors l'extension $\tilde{h}$ de h définie par (2.3.2) est pointée.

Nous appelons ces extensions $\tilde{h}$ de h extensions naturelles de h pointées.

Si A est nilpotente généralisée, nous appelons homotopies naturelles de Sullivan pointées les homotopies définies par induction sur la filtration $\{A(\alpha)\}$ par des extensions naturelles pointées successives.

(2.5) LEMME (*cf.* [8], 10.4). — *Soit* $M \otimes \Lambda(E)_n$ *une extension de Hirsch de* M, *et soit*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ M \otimes \Lambda(E)_n & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

un diagramme tel qu'il existe une homotopie de Sullivan h de $f_{|M}$ *à* φg. *Il existe des cocycles dans* $s^{n+1}(A \overset{\varphi}{\to} B)$, *définis par*

$$\tilde{o}(e) = (g(de), f(e) + \int_0^1 h(de)),$$

pour tout e de E, *tels que tous ces cocycles soient des cobords si, et seulement si, il existe une extension*

$$\tilde{g}:\quad M \otimes \Lambda(E)_n \to A$$

de g et une extension naturelle $\tilde{h}$ *de h en une homotopie de f à* φg, *dans ce cas une primitive de* $\tilde{o}(e)$ *est donnée par* $\left(\tilde{g}(e), \int_0^1 \tilde{h}(e)\right)$.

Si tous les algèbres, morphismes et homotopies sont pointés, g et h sont pointés aussi.

La preuve est la même que celle de [8], 10.4 et 10.5.

(2.6) Si $f: A \to A'$ est une équivalence faible de R-algèbres dgc et

$$\rho:\quad M \to A$$

est un modèle [resp. (n, q)-modèle minimal] de A, il est clair que

$$f \circ \rho:\quad M \to A'$$

est un modèle [resp. (n, q)-modèle minimal] de A'. Réciproquement, il résulte de (2.5), que si

$$\rho':\quad M' \to A'$$

est un modèle [resp. (n, q)-modèle minimal] de A', il existe

$$\rho:\quad M' \to A$$

qui est un modèle [resp. (n, q)-modèle minimal] de A et tel que $f \circ \rho$ est homotope à ρ'.

(2.7) LEMME (*cf.* [2], 6.3, *et* [8], 10.7). — *Si A est nilpotente généralisée la relation définie entre les morphismes (resp. pointés)* $A \to B$ *par les homotopies de Sullivan (resp. pointées) est d'équivalence.*

La preuve est la même que celle de [8], 10.7.

En général, si A n'est pas nécessairement nilpotente généralisée, nous dirons que deux morphismes $f, g : A \to B$ sont homotopes de Sullivan, et nous écrirons $f \simeq_{Su} g$, s'il existe un modèle de A $\rho : M \to A$, tel que les morphismes $f\rho$ et $g\rho$ sont homotopes de Sullivan. Il résulte immédiatement de (2.6) et du lemme précédent que cette relation d'homotopie de Sullivan est d'équivalence, et est stable par composition.

(2.8) LEMME. — *Soient* A, B *et* M *des* R-*algèbres dgc augmentées, et supposons* $\varepsilon : A^0 \xrightarrow{\sim} R$ *et* $H^1(A, B) = 0$. *Soit* $M \otimes \Lambda(E)_1$ *une extension de Hirsch de* M *de degré* 1, *et*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ M \otimes \Lambda(E)_1 & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

un diagramme de morphismes pointés tel qu'il existe une homotopie de Sullivan pointée h de $f_{|M}$ *à* φg. *Si*

$$\tilde{g}_i : \quad M \otimes \Lambda(E)_1 \to A$$

est une extension de g et $\tilde{h}_i$ *est une extension naturelle de h en une homotopie de Sullivan pointée de f à* φg_i, $i = 0, 1$, *on a*

$$\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1 \qquad et \qquad \tilde{h}_0 = \tilde{h}_1.$$

Démonstration. — Puisque les éléments $(\tilde{g}_i(e), \int_0^1 \tilde{h}_i(e))$, $i = 0, 1$, sont des primitives du cocycle $\tilde{o}(e)$ de (2.5), on a

$$d\left(\tilde{g}_1(e) - \tilde{g}_0(e), \left(\int_0^1 \tilde{h}_1\right)(e) - \left(\int_0^1 \tilde{h}_0\right)(e)\right) = 0,$$

et puisque $H^1(A, B) = 0$, il existe un élément $a_e \in A^0$ tel que

$$d(a_e, 0) = \left(\tilde{g}_1(e) - \tilde{g}_0(e), \left(\int_0^1 \tilde{h}_1\right)(e) - \left(\int_0^1 \tilde{h}_0\right)(e)\right)$$

d'où

$$da_e = \tilde{g}_1(e) - \tilde{g}_0(e)$$

et

$$\varphi(a_e)=\left(\int_0^1 \tilde{h}_1\right)(e)-\left(\int_0^1 \tilde{h}_0\right)(e).$$

Or, les homotopies $\tilde{h}_i$, $i=0, 1$, étant pointées, on a

$$\varepsilon\int_0^1 \tilde{h}_i(e)=0, \qquad i=0, 1,$$

d'où $\varepsilon\varphi(a_e)=0$, et ainsi $a_e=0$, car $\varepsilon: A^0 \to R$ est un isomorphisme et φ est pointé. On en déduit donc que $\tilde{g}_0=\tilde{g}_1$ et $\int_0^1 \tilde{h}_0=\int_0^1 \tilde{h}_1$.

(2.9) PROPOSITION. — *Soient* A *et* A′ *des* R-*algèbres dgc augmentées, et* $f: A \to A'$ *un morphisme pointé. Si* $M(1, q)$ *et* $M'(1, q)$ *sont des* $(1, q)$-*modèles minimaux pointés de* A *et* A′ *respectivement,* $q \geqq 0$, *il existe un morphisme unique*

$$\varphi: \quad M(1, q) \to M'(1, q)$$

pour lequel il existe une homotopie naturelle de Sullivan pointée h de $\rho'_{(1, q)} \circ \varphi$ *à* $f \circ \rho_{(1, q)}$, *et il existe seulement une telle homotopie h. Nous dirons que* (φ, h), *ou simplement* φ, *est le* $(1, q)$-*modèle minimal de f, qui correspond aux modèles minimaux* $M(1, q)$ *et* $M'(1, q)$.

Si $A=A'$ *et f est l'identité, le morphisme* φ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Puisque pour $q=0$ le résultat est évident à partir des définitions, on peut supposer le théorème prouvé pour $q-1$. On a donc un morphisme unique

$$\varphi_{q-1}: \quad M(1, q-1) \to M'(1, q-1)$$

et une homotopie naturelle unique h_{q-1} de $\rho'_{(1, q-1)} \circ \varphi_{q-1}$ à $f \circ \rho_{(1, q-1)}$, d'où un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(1, q-1) & \xrightarrow{\varphi_{q-1}} & M'(1, q) \\ \downarrow & & \downarrow \rho'_{(1, q)} \\ M(1, q) & \xrightarrow[f \circ \rho_{(1, q)}]{} & A'. \end{array}$$

Puisque les classes des cocycles $\tilde{o}(e)$ de (2.5) sont dans l'image du morphisme

$$s_h^*: \quad H^2(M(1, q-1), M(1, q)) \to H^2(M'(1, q), A')$$

et que ce morphisme se factorise par

$$H^2(M(1, q-1), M(1, q)) \to H^2(M'(1, q-1), A') \xrightarrow{0} H^2(M'(1, q), A'),$$

il existe d'après (2.5) une extension de φ_{q-1}

$$\varphi_q: \quad M(1, q) \to M'(1, q)$$

et une extension naturelle de h_{q-1} en une homotopie naturelle de Sullivan pointée de $\rho'_{(1, q)} \circ \varphi_q$ à $f \circ \rho_{(1, q)}$, extensions qui, d'après (2.8), sont uniques.

Finalement, on déduit de l'unicité de φ_q que φ_q est un isomorphisme si $A = A'$ et f est l'identité.

Remarque. — Si

$$M(1, q) = M(1, q-1) \otimes \Lambda(E)_1 \quad \text{et} \quad M'(1, q) = M'(1, q-1) \otimes \Lambda(E')_1,$$

où

$$E = H^2(M(1, q-1), A) \quad \text{et} \quad E' = H^2(M'(1, q-1), A'),$$

le couple (φ_{q-1}, h_{q-1}) induit par (1.2) un morphisme

$$\varphi_E: \quad E \to E',$$

et alors

$$\varphi_q: \quad M(1, q) \to M'(1, q)$$

vérifie

$$\varphi_q(m \otimes 1) = \varphi_{q-1}(m) \otimes 1, \qquad m \in M(1, q-1)$$
$$\varphi_q(1 \otimes e) = 1 \otimes \varphi_E(e) + m' \otimes 1, \qquad e \in E, \ m' \in M(1, q-1).$$

(2.10) PROPOSITION. — *Soient* A *et* A′ *des* R-*algèbres dgc augmentées, et* $f: A \to A'$ *un morphisme pointé. Si* $M(n, 0)$ *et* $M'(n, 0)$ *sont des* $(n, 0)$-*modèles minimaux pointés de* A *et* A′, *respectivement, il existe un morphisme*

$$\varphi: \quad M(n, 0) \to M'(n, 0)$$

et une homotopie de Sullivan pointée h de $\rho'_{(n, 0)} \circ \varphi$ *à* $f \circ \rho_{(n, 0)}$.

Nous dirons que (φ, h), *ou simplement* φ, *est un* $(n, 0)$-*modèle minimal de f.*

Si (φ', h') *est un autre* $(n, 0)$-*modèle minimal de f, on a une homotopie de Sullivan pointée* h_n *de* φ *à* φ'.

Démonstration. — La même que dans le cas $R = k$, *voir* [8], X et XII.

(2.11) Soit M une R-algèbre dgc minimale augmentée, on définit le p-ième groupe d'homotopie de M, $p \geqq 0$, par

$$\pi^p(M) = \left(\frac{M^+}{M^+ \wedge M^+}\right)^p.$$

(2.12) PROPOSITION. — *Soient* M *et* M′ *des* R-*algèbres dgc minimales augmentées. Si* $\varphi_0, \varphi_1 : M \to M'$ *sont des morphismes pointés, tels qu'il existe une homotopie de Sullivan pointée h de* φ_0 *à* φ_1, *alors les morphismes induits*

$$\varphi_0^{\#}, \varphi_1^{\#}: \quad \pi^p(M) \to \pi^p(M')$$

sont égaux.

Démonstration. — De la formule d'homotopie

$$\varphi_0(x) - \varphi_1(x) = d\int_0^1 h(x) + \int_0^1 h(dx), \qquad x \in M^p, \quad p \geqq 1,$$

il suit que

$$\varphi_0(x) - \varphi_1(x) = 0, \qquad \operatorname{mod}(M'^{+} \wedge M'^{+})^p,$$

car il résulte de (2.2) que

$$d\int_0^1 h(x) \in (M'^{+} \wedge M'^{+})^p,$$

et il résulte de (2.2) et (2.4) que

$$\int_0^1 h(dx) \in (M'^{+} \wedge M'^{+})^p.$$

(2.13) Soient A et A′ des R-algèbres dgc augmentées et $f: A \to A'$ un morphisme pointé. Si $M(n, 0)$ et $M'(n, 0)$ sont des $(n, 0)$-modèles minimaux pointés de A et A′, respectivement, il résulte de (2.10) et (2.12) que f induit un morphisme

$$f^{\#}: \quad \pi^*(M(n, 0)) \to \pi^*(M'(n, 0)),$$

qui ne dépend que de la classe d'homotopie (de Sullivan pointée) de f. On en déduit que si $A = A'$ et f est l'identité, les morphismes $f^{\#}$ sont des isomorphismes, et on définit alors le p-ième groupe d'homotopie de A par

$$\pi^p(A) = \pi^p(M(n, 0)), \qquad n > p.$$

(2.14) Dans ce qui suit nous aurons besoin de travailler avec des objets de catégories dérivées donnés localement, pour ceci nous donnons les définitions suivantes qui suffiront à notre propos.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique annelé, où $\mathcal{O}$ est un faisceau de k-algèbres associatives, commutatives et unitaires.

Un ho-faisceau $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}$-algèbres dgc sur X consiste en :

(i) un crible couvrant d'ouverts $\mathcal{U}$ de X, *i.e.* un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X par des ouverts, tel que tous les ouverts des U_α sont aussi dans $\mathcal{U}$,

(ii) pour tout $U_\alpha \in \mathcal{U}$, une $\mathcal{O}(U_\alpha)$-algèbre dgc A_α,

(iii) pour tout couple $U_\alpha \subset U_\beta \in \mathscr{U}$, une équivalence faible

$$\varphi_{\alpha\beta}: \quad A_{\beta|U_\alpha} \to A_\alpha,$$

définie à homotopie près, et telle que, si $U_\alpha \subset U_\beta \subset U_\gamma \in \mathscr{U}$, on a

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma|U_{U_\alpha}} \simeq_{\mathrm{Su}} \varphi_{\alpha\gamma}.$$

Par la suite nous ne préciserons pas les cribles, qui seront clairs par le contexte, et nous dirons que U_α est suffisamment petit au lieu de $U_\alpha \in \mathscr{U}$.

Il résulte immédiatement des définitions que si $\mathscr{A}$ est un ho-faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres dgc sur X, les groupes de cohomologie $H^n(A_\alpha)$ définissent un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur X, que nous noterons $H^n(\mathscr{A})$.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ des ho-faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres dgc sur X, un ho-morphisme $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est la donnée pour tout ouvert U_α suffisamment petit d'un morphisme $f_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha$, tel que, si $U_\alpha \subset U_\beta$ sont suffisamment petits, on a

$$f_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} \simeq_{\mathrm{S}u} \varphi_{\alpha\beta} \circ f_\beta.$$

Si $f, g: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ sont des ho-morphismes, une homotopie h de f à g, notée $h: f \simeq g$, est la donnée d'une homotopie de Sullivan

$$h_\alpha: \quad f_\alpha \simeq_{\mathrm{Su}} g_\alpha,$$

pour tout ouvert U_α suffisamment petit.

Un ho-morphisme $f: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une quasi-équivalence si les morphismes f_α sont des quasi-équivalences.

Nous dirons qu'un ho-faisceau $\mathscr{A}$ est de $\mathcal{O}$-algèbres dgc augmentées si les algèbres A_α et les morphismes $\varphi_{\alpha\beta}$ sont pointés. Nous dirons qu'un ho-morphisme f est pointé si les morphismes f_α sont pointés.

L'extension des concepts et résultats des numéros antérieurs de cette section au contexte des ho-faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres dgc est claire et nous la laissons au lecteur.

3. Homotopies et modèles minimaux de dérivations

Soient k un corps de caractéristique zéro, R une k-algèbre commutative, associative et unitaire, et v une k-dérivation de R.

(3.1) Soit $\varphi: A \to B$ un morphisme de R-algèbres dgc. Une (v, φ)-dérivation [resp. (v, φ)-antidérivation] de A dans B est un morphisme de k-modules gradués de degré pair (resp. de degré impair)

$$\delta: \quad A \to B$$

tel que

(i) $\delta(rx)=v(r)\,\varphi(x)+r\,\delta(x)$, $r\in\mathrm{R}$, $x\in\mathrm{A}$, et

(ii) $\delta(x\wedge y)=\delta(x)\wedge\varphi(y)+\varphi(x)\wedge\delta(y)$, $x, y\in\mathrm{A}$, [resp.

(ii′) $\delta(x\wedge y)=\delta(x)\wedge\varphi(y)+(-1)^{\deg(x)}\varphi(x)\wedge\delta(y)$, $x, y\in\mathrm{A}$].

Si $v=0$, *i.e.* si δ est un R-morphisme, on dit simplement φ-dérivation (resp. φ-antidérivation) au lieu de $(0, \varphi)$-dérivation [resp. $(0, \varphi)$-antidérivation]. Si $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ et φ est l'identité, on dit simplement v-dérivation (resp. v-antidérivation). Si $f:\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ est un morphisme de R-algèbres dgc et δ, δ', sont des v-dérivations de A, A′, respectivement, on dit que f et δ, δ', sont compatibles si $f\delta=\delta' f$.

On a des définitions analogues pour les R-modules gradués. Ainsi, si $\psi:\mathrm{K}\to\mathrm{L}$ est un morphisme de R-modules gradués, une (v, ψ)-dérivation de K dans L est un morphisme de k-modules gradués

$$\delta:\quad \mathrm{K}\to\mathrm{L}$$

tel que

$$\delta(rx)=v(r)\,\psi(x)+r\,\delta(x),\qquad r\in\mathrm{R},\quad x\in\mathrm{K}.$$

(3.2) Soient $\delta_i:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ des (v, φ)-dérivations dg, *i.e.* de degré 0 telles que $[\delta_i, d]=0$, $i=0, 1$. Nous appelons homotopie de dérivations de δ_0 à δ_1 toute φ-antidérivation de degré -1 $\lambda:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ telle que

$$\delta_1-\delta_0=d\lambda+\lambda d,$$

et nous la noterons par

$$\lambda:\quad \delta_0\simeq_d\delta_1.$$

Si λ_0, $\lambda_1:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ sont des homotopies de dérivations de δ_0 à δ_1, nous appelons homotopie seconde de dérivations de λ_0 à λ_1 toute φ-dérivation de degré -2 $\Lambda:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ telle que

$$\lambda_1-\lambda_0=d\Lambda-\Lambda d,$$

et nous la noterons

$$\Lambda:\quad \lambda_0\simeq_d\lambda_1.$$

(3.3) Si A et B sont des R-algèbres dgc augmentées, nous dirons qu'une (v, φ)-dérivation $\delta:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ est pointée si

$$\varepsilon\circ\delta=v\circ\varepsilon.$$

Nous dirons qu'une homotopie de dérivations λ entre des (v, φ)-dérivations *dg* pointées est pointée si

$$\varepsilon\circ\lambda=0,$$

et nous dirons qu'une homotopie seconde de dérivations λ entre des homotopies de dérivations pointées est pointée si

$$\varepsilon \circ \Lambda = 0.$$

Il est clair que si M et M′ sont des R-algèbres dgc minimales augmentées et $\delta : M \to M'$ est une (v, φ)-dérivation pointée de degré 0, δ induit une $(v, \varphi^{\#})$-dérivation

$$\delta^{\#} : \quad \pi^*(M) \to \pi^*(M').$$

Il résulte comme dans (2.12) que si δ_0 et δ_1 sont des (v, φ)-dérivations pointées de degré 0 de M dans M′ et $\delta_0 \simeq_d \delta_1$ alors on a

$$\delta_0^{\#} = \delta_1^{\#}.$$

(3.4) Soient $f_0, f_1 : A \to B$ des R-morphismes de R-algèbres dgc, et h une homotopie de Sullivan de f_0 à f_1. Si $\delta_i : A \to B$ sont des (v, f_i)-dérivations dg, $i = 0, 1$, une homotopie de Sullivan (sur h) de δ_0 à δ_1 est une (v, h)-dérivation dg

$$\lambda : \quad A \to R(t, dt) \otimes B$$

telle que

$$\lambda_{|\, t=0,\, dt=0} = \delta_0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_{|\, t=1,\, dt=0} = \delta_1.$$

L'homotopie $\int_0^1 \lambda$ vérifie alors

$$\left(\int_0^1 \lambda\right)(rx) = v(r)\left(\int_0^1 h\right)(x) + r\left(\int_0^1 \lambda\right)(x), \qquad r \in R, \quad x \in A.$$

Un argument parallèle à celui de (2.3) prouve que, si $A = M \otimes \Lambda(E)_n$ et si λ est une homotopie de Sullivan de $\delta_{0\,|\,M}$ à $\delta_{1\,|\,M}$, une extension naturelle de λ en une homotopie de Sullivan $\tilde{\lambda}$ de δ_0 à δ_1 est définie par une application k-linéaire

$$\kappa : \quad E \to B^{n-1}$$

telle que

$$\kappa(re) = v(r)\left(\int_0^1 h\right)(e) + r\,\kappa(e), \qquad r \in R, \quad e \in E, \tag{3.4.1}$$

et

$$\delta_1(e) - \delta_0(e) = d\kappa(e) + \left(\int_0^1 \lambda\right)(de), \qquad e \in E. \tag{3.4.2}$$

Si A est nilpotente généralisée, nous appelons homotopies naturelles de Sullivan entre les (v, f_i)-dérivations les homotopies définies par induction sur la filtration $\{A(\alpha)\}$ par des extensions naturelles successives.

Notons que si le morphisme $f: A \to B$ est fixé (*i.e.* $f_0 = f_1 = f$) et on prend comme homotopie de Sullivan h le morphisme $1 \otimes f: A \to R(t, dt) \otimes B$, pour toute homotopie de Sullivan λ sur h entre deux (v, f)-dérivations δ_0 et δ_1, $\int_0^1 \lambda$ est une homotopie de dérivations entre δ_0 et δ_1. Réciproquement, si A est minimale, toute homotopie de dérivations entre δ_0 et δ_1 définit par induction sur la filtration $\{A(n, q)\}$ par extensions naturelles successives une homotopie de Sullivan sur h entre δ_0 et δ_1; par conséquent, la relation d'homotopie de Sullivan sur h et la relation d'homotopie de dérivations coïncident dans ce cas.

(3.5) Avec les notations de (3.4), si A et B sont augmentées, et f_0, f_1, h, δ_0 et δ_1 sont pointées, nous dirons que l'homotopie de Sullivan λ de δ_0 à δ_1 est pointée si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & R(t, dt) \otimes B \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ R & \xrightarrow[v]{} & R(t, dt) \end{array}$$

est commutatif.

Si λ est pointée, l'homotopie de complexes $\int_0^1 \lambda$ vérifie

$$\varepsilon\left(\int_0^1 \lambda\right)(x) = 0, \qquad x \in A^+;$$

et inversement, si $A = M \otimes \Lambda(E)_n$, $n \geqq 1$, $\lambda: M \to R(t, dt) \otimes B$ est une homotopie de Sullivan pointée et l'application k-linéaire

$$\kappa: \quad E \to B^{n-1}$$

en plus de (3.4.1), (3.4.2), vérifie

$$\varepsilon\kappa = 0,$$

alors l'extension naturelle de λ définie par κ est pointée.

Il résulte comme dans (2.12) que si M et M′ sont des R-algèbres dgc minimales augmentées et δ_0 et δ_1 sont des (v, f)-dérivations pointées de degré 0 de M dans M′ pour lesquelles il existe une homotopie de Sullivan pointée de δ_0 à δ_1, alors on a

$$\delta_0^{\#} = \delta_1^{\#}.$$

Dans le reste de la section, nous étudions l'existence, l'unicité et la fonctorialité du modèle minimal d'une v-dérivation. Le lecteur qui désire avoir d'abord une idée des résultats peut lire directement les propositions (3.7), (3.11), (3.13), (3.18) et (3.20), et se rapporter aux lemmes restants pour leurs démonstrations.

Dans les n^{os} (3.6)-(3.7) qui suivent on considère la question de l'existence du modèle minimal d'une v-dérivation.

(3.6) LEMME. — *Soit* $M \otimes \Lambda(E)_n$ *une extension de Hirsch de* M *et soit*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ \downarrow & {}^{\tilde g}\nearrow & \downarrow{}^{\varphi} \\ M \otimes \Lambda(E)_n & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de R*-algèbres dgc.*

Soient $\delta : M \to A$ *une* (v, g)*-dérivation dg,* $\delta^E : M \otimes \Lambda(E)_n \to B$ *une* (v, f)*-dérivation dg et* λ *une homotopie de dérivations de* $\delta^E_{|M}$ *à* $\varphi\delta$. *Il existe des cocycles dans* $s^{n+1}(A \xrightarrow{\varphi} B)$ *définis par*

$$\tilde{o}(e) = (\delta(de), \delta^E(e) + \lambda(de)), \qquad e \in E,$$

tels que tous ces cocycles sont des cobords si, et seulement si, il existe une $(v, \tilde g)$*-dérivation dg*

$$\tilde\delta : \quad M \otimes \Lambda(E)_n \to A$$

extension de δ, *et une extension de* λ *en une homotopie de dérivations* $\tilde\lambda$ *de* δ^E *à* $\varphi\tilde\delta$, *une primitive de* $\tilde o(e)$ *étant donnée alors par* $(\tilde\delta(e), \tilde\lambda(e))$.

Si tous les algèbres, morphismes, dérivations et homotopies sont pointés, $\tilde\delta$ *et* $\tilde\lambda$ *sont pointées aussi.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle de [8], X.

(3.7) PROPOSITION. — *Soient* A *une* R*-algèbre dgc augmentée et* $\delta : A \to A$ *une* v*-dérivation dg pointée. Si* $\rho_{(n,q)} : M(n, q) \to A$ *est un* (n, q)*-modèle minimal pointé de* A, *il existe une* v*-dérivation dg pointée*

$$\delta_{(n,q)} : \quad M(n, q) \to M(n, q)$$

et une homotopie de dérivations pointée $\lambda_{(n,q)}$ *de* $\rho_{(n,q)} \circ \delta_{(n,q)}$ *à* $\delta \circ \rho_{(n,q)}$. *Nous dirons que* $(\delta_{(n,q)}, \lambda_{(n,q)})$, *ou simplement* $\delta_{(n,q)}$, *est un* $M(n, q)$*-modèle minimal de* δ.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de (3.6) par induction sur (n, q), *voir* la preuve de (2.9).

Remarque. — Si

$$M(n, q) = M(n, q-1) \otimes \Lambda(E)_n,$$

où

$$E = H^{n+1}(M(n, q-1), A),$$

le couple $(\delta_{(n, q-1)}, \lambda_{(n, q-1)})$ induit par (1.2) un morphisme

$$\delta_E : \quad E \to E,$$

qui est une v-dérivation sur le R-module E, et alors

$$\delta_{(n, q)} : \quad M(n, q) \to M(n, q)$$

vérifie

$$\begin{aligned} \delta_{(n, q)}(m \otimes 1) &= \delta_{(n, q-1)}(m) \otimes 1, \qquad m \in M(n, q-1) \\ \delta_{(n, q)}(1 \otimes e) &= 1 \otimes \delta_E(e) + m' \otimes 1, \qquad e \in E, m' \in M(n, q-1). \end{aligned}$$

Dans les n^{os} (3.8)-(3.14) suivants, on considère la question de l'unicité des modèles minimaux d'une v-dérivation.

(3.8) LEMME. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M \otimes \Lambda(E)_n & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de R-*algèbres dgc, et soient* $\delta_i : M \to A$ *des* (v, g)-*dérivations dg*, $i = 0, 1$, $\delta_i^E : M \otimes \Lambda(E)_n \to B$ *des* (v, f)-*dérivations dg*, $i = 0, 1$, *et des homotopies*

$$\begin{aligned} \lambda_i : \quad & \delta_{i \mid M}^E \simeq_d \varphi\delta_i, \qquad i = 0, 1, \\ \eta : \quad & \delta_0 \simeq_d \delta_1, \\ \eta^E : \quad & \delta_0^E \simeq_d \delta_1^E, \end{aligned}$$

et

$$\Lambda : \quad \lambda_0 + \varphi\eta \simeq_d \eta_{\mid M}^E + \lambda_1.$$

Si $\tilde{o}_i(e)$ *sont les cocycles introduits dans* (3.6) *pour* δ_i, δ_i^E *et* λ_i, $i = 0, 1$, *on a*

$$\tilde{o}_1(e) - \tilde{o}_0(e) = d(\eta(de), -\Lambda(de) - \eta^E(e)),$$

pour tout $e \in E$.

Démonstration. — De la définition des cocycles $\tilde{o}_i(e)$, $i = 0, 1$, il résulte

$$\begin{aligned} \tilde{o}_1(e) - \tilde{o}_0(e) &= ((\delta_1 - \delta_0)(de), (\delta_1^E - \delta_0^E)(e) + (\lambda_1 - \lambda_0)(de)) \\ &= (d\eta(de), d\eta^E(e) + \eta^E(de) + \lambda_1(de) - \lambda_0(de)), \end{aligned}$$

et puisque

$$d(\eta(de),\ -\Lambda(de)-\eta^{\mathrm{E}}(e))=(d\eta(de),\ \varphi\eta(de)+d\Lambda(de)+d\eta^{\mathrm{E}}(e)),$$

on déduit que

$$\tilde{o}_1(e)-\tilde{o}_0(e)=d(\eta(de),\ -\Lambda(de)-\eta^{\mathrm{E}}(e)),$$

car, par hypothèse,

$$(\eta^{\mathrm{E}}+\lambda_1-\lambda_0-\varphi\eta)(de)=(d\Lambda-\Lambda d)(de).$$

(3.9) LEMME. — *Avec les notations et hypothèses de* (3.8), *soient* $\tilde{\delta}_i$ *une* (v, g)*-dérivation dg, extension de* δ_i, *et* $\tilde{\lambda}_i$ *une extension de* λ_i *en une homotopie de dérivations de* δ_i^{E} *à* $\varphi\tilde{\delta}_i$, $i=0,\ 1$. *Si* $\mathrm{H}^n(\mathrm{A}, \mathrm{B})=0$, *il existe une extension de* η

$$\tilde{\eta}:\quad \tilde{\delta}_0\simeq_d\tilde{\delta}_1$$

et une extension de Λ

$$\tilde{\Lambda}:\quad \tilde{\lambda}_0+\varphi\eta\simeq\eta^{\mathrm{E}}+\tilde{\lambda}_1.$$

Si tous les algèbres, morphismes, dérivations et homotopies sont pointés, alors $\tilde{\eta}$ *et* $\tilde{\Lambda}$ *sont pointées aussi.*

Démonstration. — D'après (3.6), les éléments

$$(\tilde{\delta}_i(e),\ \tilde{\lambda}_i(e))$$

sont des primitives de $\tilde{o}_i(e)$, $i=0,\ 1$, pour tout $e\in\mathrm{E}$.

On obtient donc de (3.8)

$$d(\tilde{\delta}_1(e)-\tilde{\delta}_0(e)-\eta(de),\ \tilde{\lambda}_1(e)-\tilde{\lambda}_0(e)+\Lambda(de)+\eta^{\mathrm{E}}(e))=0,$$

pour tout $e\in\mathrm{E}$.

Puisque $\mathrm{H}^n(\mathrm{A}, \mathrm{B})=0$, il existe des éléments $(a_e, b_e)\in\mathrm{A}^{n-1}\oplus\mathrm{B}^{n-2}$, qui dépendent R-linéairement de e, $e\in\mathrm{E}$, tels que

$$d(a_e, b_e)=(\tilde{\delta}_1(e)-\tilde{\delta}_0(e)-\eta(de),\ \tilde{\lambda}_1(e)-\tilde{\lambda}_0(e)+\Lambda(de)+\eta^{\mathrm{E}}(e)),$$

d'où

$$d(a_e)=\tilde{\delta}_1(e)-\tilde{\delta}_0(e)-\eta(de)$$

et

$$\varphi(a_e)-d(b_e)=\tilde{\lambda}_1(e)-\tilde{\lambda}_0(e)+\Lambda(de)+\eta^{\mathrm{E}}(e).$$

Il suffit donc de définir $\tilde{\eta}$ par

$$\tilde{\eta}_{|\mathrm{M}}=\eta$$

et

$$\tilde{\eta}(e)=a_e, \qquad e\in \mathrm{E},$$

et de définir $\tilde{\Lambda}$ par

$$\tilde{\Lambda}_{|\mathrm{M}}=\Lambda,$$

et

$$\tilde{\Lambda}(e)=-b_e, \qquad e\in \mathrm{E}.$$

(3.10) LEMME. — *Avec les notations et hypothèses de* (3.9), *supposons que tous les algèbres, morphismes, dérivations et homotopies soient pointés,* $\varepsilon : \mathrm{A}^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}$ *et* $n=1$. *Si* $\delta_0=\delta_1$ *et* $\lambda_0=\eta^{\mathrm{E}}_{|\mathrm{M}}+\lambda_1$, *on a*

$$\tilde{\delta}_0=\tilde{\delta}_1 \qquad \textit{et} \qquad \tilde{\lambda}_0=\eta^{\mathrm{E}}+\tilde{\lambda}_1.$$

Démonstration. — Avec les notations de la preuve de (3.9), on a $b_e=0$ et, puisque toutes les homotopies sont pointées,

$$\varepsilon\varphi(a_e)=0,$$

d'où $a_e=0$ aussi.

(3.11) PROPOSITION. — *Soient* A *une* R-*algèbre dgc augmentée et* $\delta : \mathrm{A}\to\mathrm{A}$ *une* v-*dérivation dg pointée de* A. *Si* $\rho_{(1,q)} : \mathrm{M}(1,q)\to\mathrm{A}$ *est un* $(1, q)$-*modèle minimal de* A, $q\geqq 0$, *il existe un unique* $\mathrm{M}(1, q)$-*modèle minimal de* δ $(\delta_{(1,q)}, \lambda_{(1,q)})$.

Démonstration. — D'après (3.7), il suffit de prouver l'unicité de $(\delta_{(1,q)}, \lambda_{(1,q)})$, ce qui résulte de (3.10) par induction sur q.

(3.12) COROLLAIRE. — *Soient* A *une* R-*algèbre dgc augmentée,* $\delta^i : \mathrm{A}\to\mathrm{A}$ *des* v-*dérivations dg pointées de* A, $i=0, 1$, *et* η *une homotopie de dérivations pointée de* δ^0 *à* δ^1.

Si $\rho_{(1,q)} : \mathrm{M}(1, q)\to\mathrm{A}$ *est un* $(1, q)$-*modèle minimal pointé de* A, $q\geqq 0$, *et* $(\delta^i_{(1,q)}, \lambda^i_{(1,q)})$ *sont les* $\mathrm{M}(1, q)$-*modèles minimaux de* δ^i, $i=0, 1$, *on a*

$$\delta^0_{(1,q)}=\delta^1_{(1,q)},$$

et

$$\lambda^0_{(1,q)}=\eta\rho_{(1,q)}+\lambda^1_{(1,q)}.$$

Démonstration. — Ceci résulte de (3.10) et de la transitivité de la relation d'homotopie de dérivations.

(3.13) PROPOSITION. — *Soient* A *une* R-*algèbre dgc augmentée,* $\delta^i : \mathrm{A}\to\mathrm{A}$ *une* v-*dérivation dg pointée de* A, $i=0, 1$, *et* η *une homotopie de dérivations pointée de* δ^0 *à* δ^1. *Si* $\rho_{(n,q)} : \mathrm{M}(n,q)\to\mathrm{A}$ *est un* (n, q)-*modèle minimal pointé de* A, $n\geqq 2$, *et* $(\delta^i_{(n,q)}, \lambda^i_{(n,q)})$ *est un* $\mathrm{M}(n, q)$-*modèle minimal de* δ^i, $i=0, 1$, *on a une homotopie de dérivations pointée* $\eta_{(n,q)}$

de $\delta^0_{(n,q)}$ *à* $\delta^1_{(n,q)}$, *et une homotopie seconde de dérivations pointée*

$$\Lambda_{(n,q)}:\quad \lambda^0_{(n,q)}+\rho_{(n,q)}\eta_{(n,q)}\simeq_d \eta\rho_{(n,q)}+\lambda^1_{(n,q)}.$$

Démonstration. — Par induction sur (n, q), il suffit d'appliquer (3.9).

(3.14) COROLLAIRE. — *Soient* A *une* R*-algèbre dgc augmentée et* $\delta: A \to A$ *une* v*-dérivation dg pointée de* A. *Si* $M(n, q)$ *est un* (n, q)*-modèle minimal de* A, *tous les* $M(n, q)$*-modèles minimaux de* δ *induisent une unique* v*-dérivation dg* δ^* *dans* $H^*(M(n, p))$ *et une unique* v*-dérivation dg* $\delta^{\#}$ *dans* $\pi^*(M(n, p))$.

Ces v*-dérivations* δ^* *et* $\delta^{\#}$ *ne dépendent que de la classe d'homotopie de* δ, *et sont compatibles avec les morphismes naturels*

$$H^*(M(m,p)) \to H^*(M(n,q)), \qquad (m,p)<(n,q),$$
$$H^*(M(n,q)) \to H^*(A),$$
$$H^*(M(n,q)) \to \pi^*(M(n,q))$$
$$\pi^m(M(m+1,0)) \to H^{m+1}(M(m,0)), \qquad m<n.$$

Démonstration. — Ceci se déduit immédiatement de (3.13) et des définitions.

Dans les numéros (3.15)-(3.20) qui suivent, on considère les questions relatives à la fonctorialité du modèle minimal d'une v-dérivation.

(3.15) LEMME. — *Soient* $M\otimes\Lambda(E)_n$, *une extension de Hirsch de* M *et*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ M\otimes\Lambda(E)_n \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\tilde g"] & B \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de R*-algèbres, tel que*: $\tilde g$ *est une extension de* g, *il existe une homotopie de Sullivan* h *de* $f_{|M}$ *à* φg, *et il existe une extension* $\tilde h$ *de* h *en une homotopie de Sullivan de* f *à* $\varphi\tilde g$.

Soient $\delta: M\to A$ *une* (v, g)*-dérivation dg*, $\delta^E: M\otimes\Lambda(E)_n\to B$ *une* (v, f)*-dérivation dg et* λ *une homotopie de Sullivan sur* h *de* $\delta^E_{|M}$ *à* $\varphi\delta$. *Il existe des cocycles dans* $s^{n+1}(A\xrightarrow{\varphi}B)$ *définis par*

$$\tilde o(e)=\left(\delta(de),\ \delta^E(e)+\int_0^1\lambda(de)\right), \qquad e\in E,$$

tels que tous ces cocycles sont des cobords si, et seulement si, il existe une (v, g)*-dérivation dg*

$$\tilde\delta:\quad M\otimes\Lambda(E)_n\to A$$

extension de δ, *et une extension naturelle* $\tilde{\lambda}$ *de* λ *en une homotopie de Sullivan sur* $\tilde{h}$ *de* δ^E *à* $\varphi\tilde{\delta}$, *une primitive de* $\tilde{o}(e)$ *étant donnée alors par* $\left(\tilde{\delta}(e), \int_0^1 \tilde{\lambda}(e)\right)$.

Si tous les algèbres, morphismes, dérivations et homotopies sont pointés, $\tilde{\delta}$ *et* $\tilde{\lambda}$ *sont pointées aussi.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle de [8], 10.4.

(3.16) LEMME. — *Si* A *est nilpotente généralisée la relation d'homotopie de Sullivan (resp. pointée) entre les* (v, f)*-dérivations (resp. pointées)* $A \to B$ *est d'équivalence.*

La preuve est parallèle à celle de [8], 10.7.

En général, si A n'est pas nécessairement nilpotente généralisée, nous dirons que deux (v, f_i)-dérivations $\delta_i : A \to B$, $i=0, 1$, sont homotopes de Sullivan, et nous écrirons $\delta_0 \simeq_{Su} \delta_1$, s'il existe un modèle de $A : M \to A$, tel que les (v, f_i)-dérivations $\delta_i \rho$, $i=0, 1$, sont homotopes de Sullivan. Il résulte du lemme précédent que cette relation d'homotopie de Sullivan est d'équivalence.

(3.17) LEMME. — *Soient* A, B *et* M *des* R*-algèbres dgc augmentées, et supposons* $\varepsilon : A^0 \xrightarrow{\sim} R$ *et* $H^1(A, B)=0$. *Soient* $M \otimes \Lambda(E)_1$ *une extension de Hirsch de* M *de degré* 1, *et*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ \downarrow & \overset{\tilde{g}}{\nearrow} & \downarrow \varphi \\ M \otimes \Lambda(E)_1 & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

un diagramme de morphismes pointés tel que: $\tilde{g}$ *est une extension de* g, *il existe une homotopie de Sullivan* h *de* $f_{|M}$ *à* φg, *et il existe une extension* $\tilde{h}$ *de* h *en une homotopie de Sullivan de* f *à* $\varphi \tilde{g}$.

Soient $\delta : M \to A$ *une* (v, g)*-dérivation dg pointée,* $\delta^E : M \otimes \Lambda(E)_1 \to B$ *une* (v, f)*-dérivation dg pointée et* λ *une homotopie de Sullivan sur* h *pointée de* $\delta^E_{|M}$ *à* $\varphi\delta$.

Si $\delta_i : M \otimes \Lambda(E)_1 \to A$ *est une* (v, g)*-dérivation dg pointée, extension de* δ, *et* $\tilde{\lambda}_i$ *est une extension naturelle de* λ *en une homotopie de Sullivan sur* $\tilde{h}$ *pointée de* δ^E *à* $\varphi\delta_i$, $i=0, 1$, *on a*

$$\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_1 \qquad et \qquad \tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_1.$$

Démonstration. — Elle est analogue à celle de (2.8).

(3.18) PROPOSITION. — *Soient* A *et* A′ *des* R*-algèbres dgc augmentées,* δ *et* δ' *des* v*-dérivations dg pointées de* A *et* A′, *respectivement, et* $f : A \to A'$ *un morphisme pointé tel qu'il existe une homotopie de dérivations pointée*

$$\lambda : \quad \delta' f \simeq_d f\delta.$$

Si $M(1, q)$ *et* $M'(1, q)$ *sont des* $(1, q)$*-modèles minimaux de* A *et* A' *respectivement,* $q \geqq 0$, *et* $(\varphi_{(1, q)}, h_{(1, q)})$, $(\delta_{(1, q)}, \lambda_{(1, q)})$ *et* $(\delta'_{(1, q)}, \lambda'_{(1, q)})$ *sont les modèles minimaux qui correspondent à* f, δ *et* δ', *respectivement, on a*

$$\delta'_{(1, q)} \varphi_{(1, q)} = \varphi_{(1, q)} \delta_{(1, q)}$$

et

$$h_{(1, q)} \delta_{(1, q)} + f \lambda_{(1, q)} = \delta' h_{(1, q)} + \lambda'_{(1, q)} \varphi_{(1, q)}.$$

Démonstration. — Par induction sur q, on peut supposer le résultat prouvé pour $q-1$, car pour $q=0$ ceci est immédiat à partir des définitions. On déduit alors le résultat de (3.17), en considérant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
M(1, q-1) & \longrightarrow & M(1, q-1) & \xrightarrow{\delta_{(1, q-1)}} & M(1, q-1) & \xrightarrow{\varphi_{(1, q-1)}} & M'(1, q) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{(1, q)}} \\
M(1, q) & \xrightarrow[\rho_{(1, q)}]{} & A & \xrightarrow[\delta]{} & A & \xrightarrow[f]{} & A'
\end{array}$$

les extensions de $\varphi_{(1, q-1)} \delta_{(1, q-1)} (= \delta'_{(1, q-1)} \varphi_{(1, q-1)}) \varphi_{(1, q)} \delta_{(1, q)}$ et $\delta'_{(1, q)} \varphi_{(1, q)}$, et les homotopies $h_{(1, q)} \delta_{(1, q)} + f \lambda_{(1, q)}$ et $\delta' h_{(1, q)} + \lambda'_{(1, q)} \varphi_{(1, q)}$, extensions de l'homotopie $h_{(1, q-1)} \delta_{(1, q-1)} + f \lambda_{(1, q-1)} (= \delta' h_{(1, q-1)} + \lambda'_{(1, q-1)} \varphi_{(1, q-1)})$.

(3.19) Lemme. — *Soient* A *et* A' *des* R*-algèbres dgc augmentées,* $M(n,0)$ *et* $M'(n,0)$ *des* $(n, 0)$*-modèles minimaux pointés de* A *et* A', *respectivement,* $\varphi : M(n,0) \to M'(n,0)$ *un morphisme pointé et* $\delta^i : M(n,0) \to M'(n,0)$ *une* (v, φ)*-dérivation pointée dg,* $i=0, 1$.

S'il existe une homotopie de Sullivan pointée de $\rho'_{(n, 0)} \delta^0$ *à* $\rho'_{(n, 0)} \delta^1$, *alors il existe une homotopie de Sullivan pointée de* δ^0 *à* δ^1.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de [8], 10.8.

(3.20) Proposition. — *Soient* A *et* A' *des* R*-algèbres dgc augmentées,* δ *et* δ' *des* v*-dérivations dg pointées de* A *et* A', *respectivement, et* $f: A \to A'$ *un morphisme pointé tel qu'il existe une homotopie de dérivations pointée*

$$\delta' f \simeq_d f\delta.$$

Si $M(n, 0)$ *et* $M'(n,0)$ *sont des* $(n, 0)$*-modèles minimaux pointés de* A *et* A', *respectivement,*

$$\varphi_{(n, 0)} : \quad M(n,0) \to M'(n, 0)$$

est un $(n, 0)$*-modèle minimal de* f, *et*

$$\delta_{(n, 0)} : \quad M(n, 0) \to M(n, 0).$$
$$\delta'_{(n, 0)} : \quad M'(n, 0) \to M'(n, 0)$$

sont des $(n, 0)$*-modèles minimaux de* δ *et* δ', *respectivement, alors on a une homotopie de Sullivan pointée de* $\varphi_{(n, 0)} \delta_{(n, 0)}$ *à* $\delta'_{(n, 0)} \varphi_{(n, 0)}$.

Démonstration. — L'assertion résulte immédiatement de (3.19) et (3.16), car on a les homotopies de Sullivan pointées

$$\begin{aligned}\rho'_{(n,0)}\,\varphi_{(n,0)}\,\delta_{(n,0)} &\simeq_{\mathrm{Su}} f\,\rho_{(n,0)}\,\delta_{(n,0)}\\ &\simeq_{\mathrm{Su}} f\delta\rho_{(n,0)}\end{aligned}$$

et, d'un autre côté, on a les homotopies de Sullivan pointées

$$\begin{aligned}\rho'_{(n,0)}\,\delta'_{(n,0)}\,\varphi_{(n,0)} &\simeq_{\mathrm{Su}} \delta'\,\rho'_{(n,0)}\,\varphi_{(n,0)}\\ &\simeq_{\mathrm{Su}} \delta' f\rho_{(n,0)}\\ &\simeq_{\mathrm{Su}} f\delta\rho_{(n,0)},\end{aligned}$$

d'où une homotopie de Sullivan pointée

$$\rho'_{(n,0)}\,\varphi_{(n,0)}\,\delta_{(n,0)} \simeq_{\mathrm{Su}} \rho'_{(n,0)}\,\delta'_{(n,0)}\,\varphi_{(n,0)}.$$

(3.21) COROLLAIRE. — *Avec les notations et hypothèses de* (3.20), *les morphismes*

$$\varphi^*:\quad \mathrm{H}^*(\mathrm{M}(n,0)) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{M}'(n,0))$$

et

$$\varphi^{\#}:\quad \pi^*(\mathrm{M}(n,0)) \to \pi^*(\mathrm{M}'(n,0))$$

sont compatibles avec les v-dérivations dg induites par δ *et* δ'.

4. Connexions homotopiquement intégrables

(4.1) Soient k un corps de caractéristique zéro et $(\mathrm{X}, \mathcal{O})$ un schéma lisse de type fini sur k.

Rappelons (*voir* [13]) que si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}$-module quasi-cohérent, une connexion sur $\mathcal{E}$ est un morphisme $\mathcal{O}$-linéaire

$$\begin{aligned}\nabla:\quad \mathcal{D}er(\mathrm{X}/k) &\to \mathcal{E}nd_k(\mathcal{E}),\\ v &\to \nabla_v\end{aligned}$$

du faisceau des dérivations de X sur k dans le faisceau des k-endomorphismes de $\mathcal{E}$, tel que

(L) $$\nabla_v(fe) = v(f)\,e + f\nabla_v(e),$$

pour toutes les sections v de $\mathcal{D}er(\mathrm{X}/k)$, f de $\mathcal{O}$ et e de $\mathcal{E}$. La connexion ∇ est dite intégrable si

(I) $$\nabla_{[v,w]} = [\nabla_v, \nabla_w]$$

pour toutes les sections v, w de $\mathcal{D}er(\mathrm{X}/k)$.

(4.2) La catégorie des $\mathcal{O}$-modules quasi-cohérents munis d'une connexion (resp. connexion intégrable) étant de façon naturelle une catégorie abélienne, on peut considérer la catégorie des complexes de modules à connexion (resp. à connexion intégrable). Dans cette catégorie, les objets sont les complexes $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{O}$-modules quasi-cohérents munis d'une connexion, *i.e.* d'un morphisme $\mathcal{O}$-linéaire

$$\nabla: \quad \mathcal{D}er\,(\mathrm{X}/k) \to \mathcal{E}nd_{k-dg}(\mathcal{E}^*)$$

qui vérifie l'égalité (L) correspondante, (resp. les égalités (L) et (I)), et les morphismes de $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ à $(\mathcal{F}^*, \nabla)$ sont les morphismes de complexes de $\mathcal{O}$-modules

$$\varphi: \quad \mathcal{E}^* \to \mathcal{F}^*$$

tels que

(M) $$\nabla_v \circ \varphi = \varphi \circ \nabla_v,$$

pour toute section v de $\mathcal{D}er\,(\mathrm{X}/k)$.

Nous considérons dans ce qui suit des catégories plus grandes que celles obtenues précédemment, en affaiblissant les égalités (M) et (I).

(4.3) Soient $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ et $(\mathcal{F}^*, \nabla)$ des complexes de $\mathcal{O}$-modules à connexion, nous appellerons ho-morphisme de $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ en $(\mathcal{F}^*, \nabla)$ tout couple (φ, h), où $\varphi: \mathcal{E}^* \to \mathrm{F}^*$ est un morphisme de complexes de $\mathcal{O}$-modules et h est un morphisme $\mathcal{O}$-linéaire

$$\begin{aligned} h: \quad \mathcal{D}er\,(\mathrm{X}/k) &\to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}-\mathrm{gr}}(\mathcal{E}^*, \mathcal{F}^*[-1]), \\ v &\to h_v \end{aligned}$$

tel que

(hM) $$h_v: \quad \nabla_v \circ \varphi \simeq \varphi \circ \nabla_v,$$

pour toute section v de $\mathcal{D}er\,(\mathrm{X}/k)$.

(4.4) Soit $(\varphi, h): (\mathcal{E}^*, \nabla) \to (\mathcal{F}^*, \nabla)$ un ho-morphisme et posons

$$\mathcal{G}^* = s\,(\mathcal{E}^* \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^*).$$

D'après (1.2), on peut définir un morphisme

$$\begin{aligned} \nabla: \quad \mathcal{D}er\,(\mathrm{X}/k) &\to \mathcal{E}nd_{k-\mathrm{dg}}(\mathcal{G}^*) \\ v &\to \nabla_v \end{aligned}$$

par

$$\nabla_v(x, y) = (\nabla_v(x), h_v(x) + \nabla_v(y)),$$

qui est $\mathcal{O}$-linéaire car h_v est $\mathcal{O}$-linéaire en v, et qui vérifie (L) car

$$\begin{aligned}\nabla_v(fx, fy) &= (\nabla_v(fx), h_v(fx)+\nabla_v(fy))\\ &= (v(f)x+f\nabla_v(x), fh_v(x)+v(f)y+f\nabla_v(y))\\ &= v(f)(x, y)+f(\nabla_v(x), h_v(x)+\nabla_v(y))\\ &= v(f)(x, y)+f\nabla_v(x, y).\end{aligned}$$

(4.5) Soit $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ un complexe de $\mathcal{O}$-modules à connexion, nous dirons que la connexion ∇ est ho-intégrable si, pour toutes les sections v, w de $\mathcal{D}er(X/k)$, il existe une homotopie

(hI) $$k_{v,w}:\quad [\nabla_v, \nabla_w]\simeq\nabla_{[v,w]}.$$

(4.6) Soit $(\varphi, h):(\mathcal{E}^*, \nabla)\to(\mathcal{F}^*, \nabla)$ un ho-morphisme, si on pose

$$l_{v,w}=[\nabla_v, h_w]+[h_v, \nabla_w],$$

on a

$$l_{v,w}:\quad [\nabla_v, \nabla_w]\circ\varphi\simeq\varphi\circ[\nabla_v, \nabla_w],$$

car on a

$$\begin{aligned}[\varphi, [\nabla_v, \nabla_w]] &= [[\varphi, \nabla_v], \nabla_w]+[[\nabla_w, \varphi], \nabla_v]\\ &= dh_v\nabla_w+h_v d\nabla_w-\nabla_w dh_v-\nabla_w h_v d\\ &\quad -dh_w\nabla_v-h_w d\nabla_v+\nabla_v dh_w+\nabla_v h_w d\\ &= d([\nabla_v, h_w]-[\nabla_w, h_v])+([\nabla_v, h_w]-[\nabla_w, h_v])d\\ &= dl_{v,w}+l_{v,w}d.\end{aligned}$$

(4.7) Soient $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ et $(\mathcal{F}^*, \nabla)$ des complexes de $\mathcal{O}$-modules à connexion ho-intégrable et soit $(\varphi, h):(\mathcal{E}^*, \nabla)\to(\mathcal{F}^*, \nabla)$ un ho-morphisme, nous dirons que (φ, h) est un ho-morphisme de connexions ho-intégrables si pour toutes les sections v, w de $\mathcal{D}er(X/k)$ il existe une homotopie seconde $H_{v,w}$ entre les homotopies

$$h_{[v,w]}+k_{v,w}\circ\varphi:\quad [\nabla_v, \nabla_w]\circ\varphi\simeq\nabla_{[v,w]}\circ\varphi\simeq\varphi\circ\nabla_{[v,w]}$$

et

$$\varphi\circ k_{v,w}+l_{v,w}:\quad [\nabla_v, \nabla_w]\circ\varphi\simeq\varphi\circ[\nabla_v, \nabla_w]\simeq\varphi\circ\nabla_{[v,w]},$$

donc si

(hMI) $$h_{[v,w]}+[k_{v,w}, \varphi]-[\nabla_v, h_w]+[\nabla_w, h_v]=dH_{v,w}-H_{v,w}d.$$

(4.8) LEMME. — *Si $(\varphi, h):(\mathcal{E}^*, \nabla)\to(\mathcal{F}^*, \nabla)$ est un ho-morphisme de connexions ho-intégrables, la connexion induite dans $s(\mathcal{E}^*\xrightarrow{\varphi}\mathcal{F}^*)$ est ho-intégrable.*

En effet, il résulte des définitions et de (1.3) et (1.4). On peut aussi prouver le lemme directement en vérifiant que dans $\mathscr{G}^* = s(\mathscr{E}^* \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F}^*)$ on a

$$\nabla_{[v, w]} - [\nabla_v, \nabla_w] = dk^{\mathscr{G}}_{v, w} + k^{\mathscr{G}}_{v, w} d,$$

où $k^{\mathscr{G}}_{v, w}$ est l'homotopie définie par

$$k^{\mathscr{G}}_{v, w} = \begin{pmatrix} k^{\mathscr{E}}_{v, w} & 0 \\ -\mathrm{H}_{v, w} & -k^{\mathscr{F}}_{v, w} \end{pmatrix}.$$

5. Le modèle minimal d'une connexion

(5.1) Soient k un corps de caractéristique zéro et $(\mathrm{X}, \mathscr{O})$ un schéma lisse de type fini sur k.

Si $\mathscr{A}$ est un faisceau de $\mathscr{O}$-algèbres dgc, dont les composantes $\mathscr{A}^n$, $n \geqq 0$, sont des $\mathscr{O}$-modules quasi-cohérents, une connexion sur $\mathscr{A}$ est un morphisme $\mathscr{O}$-linéaire

$$\nabla : \quad \mathscr{D}er(\mathrm{X}/k) \to \mathscr{D}er_{k-\mathrm{dg}}(\mathscr{A}),$$

du faisceau des dérivations de X sur k dans le faisceau des k-dérivations dg de A, tel que

$$\text{(L)} \qquad \nabla_v(fs) = v(f)\, s + f\, \nabla_v(s),$$

pour toutes les sections v de $\mathscr{D}er(\mathrm{X}/k)$, f de $\mathscr{O}$ et s de $\mathscr{A}$.

(5.2) Si $(\mathscr{A}, \varepsilon)$ est une $\mathscr{O}$-algèbre dgc augmentée, avec $\varepsilon : \mathscr{A} \to \mathscr{O}$ le morphisme d'augmentation, nous dirons qu'une connexion ∇ sur $\mathscr{A}$ est pointée, si on a

$$\varepsilon \circ \nabla_v = v \circ \varepsilon,$$

pour toute section v de $\mathscr{D}er(\mathrm{X}/k)$.

(5.3) Soient $(\mathscr{A}, \nabla)$ et $(\mathscr{B}, \nabla)$ des $\mathscr{O}$-algèbres dgc munies de connexions, un ho-morphisme de $(\mathscr{A}, \nabla)$ en $(\mathscr{B}, \nabla)$ est un couple (φ, h) comme dans (4.3), où $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres et h_v est une φ-antidérivation, pour toute section v de $\mathscr{D}er(\mathrm{X}/k)$.

De façon analogue, on définit dans le contexte des $\mathscr{O}$-algèbres dgc les connexions ho-intégrables et les ho-morphismes de connexions ho-intégrables, par les variantes naturelles de (4.5) et (4.7).

(5.4) Si $\mathscr{A}$ est un ho-faisceau de $\mathscr{O}$-algèbres dgc sur X, une connexion ho-intégrable sur $\mathscr{A}$ est la donnée, pour tout ouvert U_α suffisamment petit, d'une connexion ho-intégrable ∇_α sur $\mathscr{A}_\alpha$, tel que, si $\mathrm{U}_\alpha \subset \mathrm{U}_\beta$ sont des ouverts suffisamment petits, il existe un ho-morphisme de connexions

$$(\varphi_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}): \quad (\mathscr{A}_\beta, \nabla_\beta)_{|\,U_\alpha} \to (\mathscr{A}_\alpha, \nabla_\alpha),$$

où les morphismes de restriction $\varphi_{\alpha\beta}$ vérifient (2.14) (iii).

Il résulte immédiatement des définitions que si $\mathscr{A}$ est un ho-faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres dgc muni d'une connexion ho-intégrable, les connexions induites sur les $H^n(\mathscr{A}_\alpha)$ définissent une connexion intégrable sur $H^n(\mathscr{A})$.

Soient $(\mathscr{A}, \nabla)$ et $(\mathscr{B}, \nabla)$ des ho-faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres dgc sur X à connexion ho-intégrable, un ho-morphisme $f:(\mathscr{A}, \nabla) \to (\mathscr{B}, \nabla)$ est la donnée pour tout ouvert U_α suffisamment petit d'un ho-morphisme de connexions ho-intégrables $f_\alpha:(\mathscr{A}_\alpha, \nabla) \to (\mathscr{B}_\alpha, \nabla)$, tel que, si $U_\alpha \subset U_\beta$ sont suffisamment petits, on a une homotopie

$$f_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} \simeq_{\mathrm{Su}} \varphi_{\alpha\beta} \circ f_\beta.$$

Un ho-morphisme $f:(\mathscr{A}, \nabla) \to (\mathscr{B}, \nabla)$ est une quasi-équivalence si les f_α le sont.

Si $f, g:(\mathscr{A}, \nabla) \to (\mathscr{B}, \nabla)$ sont des ho-morphismes, une homotopie de f à g est une homotopie des ho-morphismes $f, g: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Nous désignerons par **HACI** (X) la catégorie dont les objets sont les ho-faisceaux de $\mathcal{O}$-algèbres dgc à connexion ho-intégrable et les morphismes sont les ho-morphismes de tels ho-faisceaux.

Nous désignerons par $\mathbf{HACI}_*$ (X) la catégorie analogue qui correspond aux objets pointés.

(5.5) Soit $(\mathscr{A}, \nabla)$ un objet de **HACI** (X), une extension de Hirsch de $(\mathscr{A}, \nabla)$ de degré n est un objet $(\mathscr{B}, \nabla)$ de **HACI** (X) et un morphisme

$$(\mathscr{A}, \nabla) \to (\mathscr{B}, \nabla)$$

tel que si U_α est un ouvert afin de X suffisamment petit, alors $\mathscr{B}_\alpha$ est une extension de Hirsch de $\mathscr{A}_\alpha$ de degré n et la connexion de $\mathscr{B}_\alpha$ est une extension de la connexion de $\mathscr{A}_\alpha$.

On définit maintenant dans **HACI** (X) les extensions de Hirsch généralisées, les algèbres nilpotentes généralisées et les algèbres minimales par les variantes naturelles de (2.1); et si $(\mathscr{A}, \nabla)$ est un ho-faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres dgc à connexion ho-intégrable on définit les modèles minimaux et les (n, q)-modèles minimaux de $(\mathscr{A}, \nabla)$ par les variantes naturelles de (2.2). On introduit de façon analogue les concepts qui correspondent aux objets pointés.

(5.6) THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{A}$ un ho-faisceau de $\mathcal{O}$-algèbres* dgc *augmentées et cohomologiquement connexes, muni d'une connexion ∇ pointée et ho-intégrable.*

Si les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{A}$: $H^i(\mathscr{A})$, $i=0, 1, 2$, sont des $\mathcal{O}$-modules cohérents, il existe pour tout $q \geqq 0$ un $(1, q)$-modèle minimal de $(\mathscr{A}, \nabla)$

$$\rho_{(1,q)}: \quad (\mathscr{M}(1, q), \nabla) \to (\mathscr{A}, \nabla),$$

tel que ($\mathcal{M}(1, q), \nabla$) *est un faisceau de* $\mathcal{O}$*-algèbres augmentées à connexion intégrable et pointée, dont les composantes homogènes sont des* $\mathcal{O}$*-modules localement libres de type fini.*

Si $f: (\mathcal{A}, \nabla) \to (\mathcal{A}', \nabla)$ *est un morphisme de* $\mathbf{HACI}_*(\mathrm{X})$, *et*

$$\rho_{(1,q)}: \quad (\mathcal{M}(1, q), \nabla) \to (\mathcal{A}, \nabla),$$
$$\rho'_{(1,q)}: \quad (\mathcal{M}'(1, q), \nabla) \to (\mathcal{A}', \nabla),$$

sont des $(1, q)$*-modèles minimaux de* (A, ∇) *et* (A', ∇), *respectivement, il existe un morphisme unique de faisceaux de* $\mathcal{O}$*-algèbres dgc à connexion intégrable*

$$f_{(1,q)}: \quad (\mathcal{M}(1, q), \nabla) \to (\mathcal{M}'(1, q), \nabla),$$

tel que

$$f\rho_{(1,q)} \simeq \rho'_{(1,q)} f_{(1,q)}.$$

Le morphisme $f_{(1,q)}$ *est un isomorphisme si* f *est une quasi-équivalence.*

Démonstration. — Bien que le résultat ne soit pas vraiment local, car il y a des conditions de recollement à satisfaire, étant donné que ces conditions seront vérifiées grâce aux propriétés d'unicité des objets construits, on peut supposer que X est afin, tous les ho-faisceaux sur X sont des faisceaux sur X, tous les ho-morphismes de ho-faisceaux sont des morphismes de faisceaux, la connexion ∇ de $\mathcal{A}$ ho-intégrable et les $\mathcal{O}$-modules $\mathrm{H}^i(\mathcal{A})$, $i=0, 1, 2$, et $\mathcal{D}er_k(\mathrm{X}/k)$ libres, car ils sont localement libres *à priori*, les premiers étant cohérents et à connexion intégrable (*voir* [13] (8.8) ou [17] 10.3) et le dernier puisque X est non-singulière.

Par abus de langage nous identifierons dans ce qui suit les $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O})$-modules et les $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$-modules quasi-cohérents, quelque soit l'ouvert afin U de X.

Il suffit de prouver :

(5.6.1) Il existe une suite décroissante $\{\mathcal{U}_q, q \geqq 0\}$ de cribles couvrants de X par des ouverts afins, telle que pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}_q$, si on pose

$$\mathrm{R} = \mathcal{O}(\mathrm{U}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} = \mathcal{A}(\mathrm{U}),$$

la R-algèbre dgc augmentée A munie de la connexion ∇ a un $(1, q)$-modèle minimal

$$\rho_{(1,q)}: \quad \mathrm{M}(1, q) \to \mathrm{A}$$

qui vérifie :

(i) $\mathrm{M}(1, q)$ est à composantes homogènes des R-modules libres de type fini et est munie d'une connexion intégrable ∇^q, par rapport à laquelle $\rho_{(1,q)}$ est un ho-morphisme de connexions ho-intégrables;

(ii) si $f: (\mathrm{A}, \nabla) \to (\mathrm{A}', \nabla)$ est un morphisme et

$$\rho'_{(1,q)}: \quad (\mathrm{M}'(1, q), \nabla^q) \to (\mathrm{A}', \nabla)$$

est un $(1, q)$-modèle minimal de (A', ∇), il existe un morphisme unique de R-algèbres dgc à connexion intégrable

$$f_{(1,q)}: \quad (M(1, q), \nabla) \to (M'(1, q), \nabla)$$

tel que

$$f_{\rho(1,q)} \simeq \rho'_{(1,q)} f_{(1,q)}.$$

Le morphisme $f_{(1,q)}$ est un isomorphisme si f est une quasi-équivalence;

(iii) si $p<q$ et

$$\rho_{(1,p)}: \quad M(1, \grave{a}) \to A$$

est un $(1, p)$-modèle minimal de A qui vérifie (i) et (ii), il existe un $(1, q)$-modèle minimal de A $M(1, q)$ qui vérifie (i) et (ii), et une inclusion canonique

$$M(1, p) \to M(1, q)$$

compatible avec les connexions, et avec les isomorphismes canoniques de (ii), et qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M(1, p) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho_{(1,p)}"] & \\ & A \\ M(1, q) \arrow[ur, "\rho_{(1,q)}"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, par induction sur q, le cas $q=0$ étant immédiat, on peut supposer construite la suite $\{\mathscr{U}_p, 0 \leqq p \leqq q-1\}$.

Soit $U \in \mathscr{U}_{q-1}$. Si on pose $A = \mathscr{A}(U)$, le morphisme

$$\rho_{(1,q-1)}: \quad M(1, q-1) \to A$$

est un ho-morphisme de connexions ho-intégrables, et par (4.8), le simple

$$s(M(1, q-1) \xrightarrow{\rho_{(1,q-1)}} A)$$

est muni d'une connexion induite qui est ho-intégrable, et par suite $H^2(M(1, q-1), A)$ est à connexion intégrable.

Puisqu'on a une suite exacte

$$0 \to H^2(M(1, q-1), A) \to H^2(M(1, q-1)) \to H^2(A) \to .$$

et $H^2(M(1, q-1))$ et $H^2(A)$ sont cohérents, on en déduit que $H^2(M(1, q-1), A)$ est aussi cohérent, donc localement libre de type fini car il est à connexion intégrable.

Soit $\mathscr{U}_q$ un raffinement de $\mathscr{U}_{q-1}$ tel que si $U \in \mathscr{U}_q$, $H^2(M(1, q-1), A)$ est libre de type fini sur U.

Nous prouverons que $\mathscr{U}_q$ convient.

Soit $U \in \mathscr{U}_q$, et posons $R = \mathscr{O}(U)$ et $A = \mathscr{A}(U)$. Pour construire le $(1, q)$-modèle minimal de A, on suit l'argument de Sullivan (*voir* [12], XII). On choisit une section R-linéaire

$$\sigma: \quad H^2(M(1, q-1), A) \to Z^2(M(1, q-1), A),$$

où $Z^*(M(1, q-1), A)$ est le sous-module des cocycles de $s(M(1, q-1) \xrightarrow{\rho_{(1, q-1)}} A)$, de la projection naturelle

$$Z^2(M(1, q-1), A) \to H^2(M(1, q-1), A).$$

Si on pose

$$E = H^2(M(1, q-1), A)$$

on a donc

$$\rho(e) = (m_e, a_e) \in M(1, q-1)^2 \oplus A^1, \qquad e \in E,$$

où (m_e, a_e) vérifie les relations

$$d(m_e) = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho_{(1, q-1)}(m_e) - d(a_e) = 0.$$

On définit $M(1, q)$ par

$$M(1, q) = M(1, q-1) \otimes \Lambda(E)_1,$$

avec

$$d(e) = m_e, \qquad e \in E,$$

et on définit

$$\rho_{(1, q)}: \quad M(1, q) \to A$$

par

$$\rho_{(1, q) \mid M(1, q-1)} = \rho_{(1, q-1)}$$

et

$$\rho_{(1, q)}(e) = a_e \qquad \text{si} \quad e \in E.$$

Il résulte aussitôt des définitions que

$$H^i(M(1, q), A) = 0 \qquad \text{si} \quad i = 0, 1,$$

et que le morphisme

$$H^2(M(1, q-1), A) \to H^2(M(1, q), A)$$

est nul, donc

$$\rho_{(1,q)} : \quad \mathrm{M}(1, q) \to \mathrm{A}$$

est un $(1, q)$-modèle minimal de A.

Il est clair que les composantes homogènes de $\mathrm{M}(1, q)$ sont des R-modules libres de type fini.

Prouvons que $\mathrm{M}(1, q)$ est munie d'une connexion ∇^q, intégrable et pointée, qui étend la connexion ∇^{q-1} de $\mathrm{M}(1, q-1)$, et par rapport à laquelle le morphisme

$$\rho_{(1,q)} : \quad \mathrm{M}(1, q) \to \mathrm{A}$$

est un ho-morphisme de connexions.

Si v est une section de $\mathscr{D}er(\mathrm{U}/k)$, ∇_v est une v-dérivation dg pointée de A donc, par (3.11), il existe un unique $(1, q)$-modèle minimal de ∇_v, que nous désignerons par $(\nabla_v^q, \lambda_v^q)$. Ainsi, si on définit

$$\nabla^q : \quad \mathscr{D}er(\mathrm{U}/k) \to \mathscr{D}er_{k-\mathrm{dg}}(\mathrm{M}(1, q))$$

par

$$\nabla^q(v) = \nabla_v^q,$$

il résulte aussitôt de l'unicité des $(1, q)$-modèles minimaux $(\nabla_v^q, \lambda_v^q)$ que ∇^q est un morphisme R-linéaire et puisque, par la définition des v-dérivations, ∇_v^q vérifie (L), on conclut que ∇^q est une connexion pointée sur $\mathrm{M}(1, q)$.

Puisque λ_v^q est une homotopie de $\rho_{(1,q)} \nabla_v^q$ à $\nabla_v \rho_{(1,q)}$, $\rho_{(1,q)}$ est un ho-morphisme de connexions.

Compte tenu que ∇ est ho-intégrable, il résulte de (3.12) que la connexion ∇^q est intégrable et que le morphisme $\rho_{(1,q)}$ est un ho-morphisme de connexions ho-intégrables.

L'assertion (ii) résulte immédiatement de (3.18), et l'assertion (iii) suit directement de la définition de $\mathrm{M}(1, q)$.

(5.7) Soit $\mathscr{A}$ un ho-faisceau de $\mathscr{O}$-algèbres dgc augmentées et cohomologiquement connexes, nous dirons que $\mathscr{A}$ est nilpotente si pour tout U_α suffisamment petit la $\mathscr{O}$-algèbre dgc A_α est nilpotente, *i.e.* toute suite de modèles minimaux de A_α

$$\mathrm{M}(n, 0) \subset \ldots \subset \mathrm{M}(n, q) \subset \mathrm{M}(n, q+1) \subset \ldots$$

est stationnaire. Par exemple, si $\mathscr{A}$ est simplement connexe, *i.e.* si $\mathrm{H}^1(\mathscr{A}) = 0$, il est immédiat de vérifier que $\mathscr{A}$ est nilpotente.

(5.8) THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{A}$ un ho-faisceau de $\mathscr{O}$-algèbres dgc augmentées, cohomologiquement connexes et nilpotentes, et muni d'une connexion ∇ pointée et ho-intégrable.*

Si tous les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{A}$ sont cohérents, il existe pour tout $n \geqq 1$, un $(n, 0)$-modèle minimal de $(\mathscr{A}, \nabla)$

$$\rho_{(n,0)} : \quad (\mathscr{M}(n, 0), \nabla) \to (\mathscr{A}, \nabla),$$

tel que les composantes homogènes des $\mathcal{O}$-modules

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}(n, 0)), \qquad n \geqq 1, \quad et \quad \pi^*(\mathcal{A}),$$

sont localement libres de type fini, munies de connexions intégrables, et les morphismes naturels

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}(n, 0)) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{A}), \qquad n \geqq 1,$$
$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}(m, 0)) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{M}(n, 0)), \qquad 1 \leqq m < n,$$
$$\mathrm{H}^*(\mathcal{M}(n, 0)) \to \pi^*(\mathcal{A}), \qquad n \geqq 1,$$
$$\pi^n(\mathcal{M}(n+1, 0)) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathcal{M}(n, 0)), \qquad n \geqq 1,$$

sont compatibles avec les connexions.

Démonstration. — Elle est parallèle à celle de (5.6). La seule différence à noter est que dans ce cas les modèles minimaux qu'on doit construire ne sont que des ho-faisceaux munis de ho-connexions ho-intégrables. Ainsi arrivés à l'étape (n, q) de la récurrence, pour définir le morphisme

$$\nabla^{(n, q)}: \quad \mathcal{D}er(\mathrm{U}/k) \to \mathcal{D}er_{k-dg}(\mathrm{M}(n, q)),$$

puisqu'on n'a maintenant d'unicité des (n, q)-modèles minimaux qu'à homotopies près par (3.13), on doit choisir une base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathcal{D}er(\mathrm{U}/k)$, choisir un (n, q)-modèle minimal $(\nabla_i^{(n, q)}, \lambda_i^{(n, q)})$ de ∇_{v_i}, qui existe par (3.7), et définir $\nabla^{(n, q)}$ R-linéairement par

$$\nabla^{(n, q)}(v_i) = \nabla_i^{(n, q)}.$$

Il résulte alors que $\nabla^{(n, q)}(v)$ est un (n, q)-modèle minimal de ∇_v, pour tout $v \in \mathcal{D}er(\mathrm{U}/k)$ et ainsi, d'après l'unicité à homotopies près des modèles, ceci définit une connexion ho-intégrable sur $\mathrm{M}(n, q)$. D'où on obtient d'après (3.20) une ho-connexion ho-intégrable sur le ho-faisceau $\mathcal{M}(n, q)$. Finalement, les propriétés de cette ho-connexion résultent immédiatement de (3.14) et (3.21).

(5.9) Rappelons que si $(\mathcal{E}, \nabla)$ est un fibré vectoriel à connexion intégrable sur S, on dit que $(\mathcal{E}, \nabla)$ est régulier si, pour toute courbe algébrique lisse C tracée sur S et localement fermée dans S, le fibré $(\mathcal{E}_{|\mathrm{C}}, \nabla)$ est régulier (*voir* [4], II, 4.5). Si $(\mathcal{E}, \nabla)$ est régulier nous appelons exposants de $(\mathcal{E}, \nabla)$ les exposants des différents $(\mathcal{E}_{|\mathrm{C}}, \nabla)$, dans tous les points fermés de la compactification lisse de C (*voir* [13], 12). En particulier, par exemple, si les exposants de $(\mathcal{E}, \nabla)$ sont rationnels et $\bar{\mathrm{S}}$ est une compactification lisse de S telle que $\bar{\mathrm{S}} - \mathrm{S}$ est un diviseur à croisements normaux, les monodromies locales à l'infini du système local complexe $(\mathcal{E}^{an})^{\nabla}$ sont quasi-unipotentes.

(5.10) THÉORÈME. — *Avec les hypothèses de* (5.6) [resp. (5.8)], *si les connexions induites sur les faisceaux de cohomologie* $\mathrm{H}^i(\mathcal{A})$, $i = 0, 1, 2$, (*resp.* $i \geqq 0$), *sont régulières à exposants rationnels, alors toutes les connexions qui résultent du théorème* (5.6) [*resp.* (5.8)], *sont aussi régulières à exposants rationnels.*

Démonstration. — Elle suit immédiatement par récurrence de la démonstration du théorème (5.6) compte tenu de (3.7) et des propriétés de stabilité de la catégorie des connexions régulières à exposants rationnels ([4], 4.6).

Dans le cas cas nilpotent, il résulte de la preuve de (5.8) et (3.7) que la suite spectrale

$$H^r(M(n, q-1)) \otimes \Lambda^s(E) \quad \Rightarrow \quad H^{r+s}(M(n, q))$$

est compatible avec les connexions, donc la connexion sur $H^{r+s}(M(n, q))$ est régulière à exposants rationnels d'après [4], (4.6).

Remarque. — Essentiellement, ce qu'on vient de prouver aux numéros précédents est une équivalence de catégories (ou, plutôt, deux équivalences de catégories: l'une pour le cas non nilpotent et l'autre pour le cas nilpotent) entre des catégories qu'on laisse préciser au lecteur.

6. La connexion de Gauss-Manin en homotopie rationnelle

Soient k un corps de caractéristique zéro et $f : X \to S$ un morphisme lisse de schémas séparés lisses de type fini sur k, à fibres géométriquement connexes.

Dans [14], Katz-Oda ont construit une connexion intégrable sur les faisceaux de cohomologie de De Rham relative $\mathbf{R}^i f_* (\Omega^*_{X/S})$, qu'on appelle la connexion de Gauss-Manin, et qui rende compte algébriquement de la variation sur S de la cohomologie des fibres de f (*voir* aussi [4], [13] et, pour une formulation en termes de $\mathscr{D}$-modules, [17]).

Le propos de ce paragraphe est de construire une connexion ho-intégrable sur un ho-faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres dgc adéquates, qui rend compte algébriquement aussi de la variation sur S de « l'homotopie rationnelle » des fibres de f.

(6.1) Le faisceau $\Omega^*_{X/S}$ étant un faisceau de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-algèbres dgc, l'image directe de Thom-Whitney ([16], § 4) $\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre dgc, dont les faisceaux de cohomologie sont identifiés à travers le morphisme d'intégration aux faisceaux de cohomologie de $\mathbf{R} f_* \Omega^*_{X/S}$:

$$\mathbf{I}: \quad \mathbf{R}^i_{TW} f_* \Omega^*_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^i f_* \Omega^*_{X/S}.$$

Nous aurons besoin d'une incarnation à la Cech de $\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}$.

Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts afins, et soit $\iota : U_. \to X$ le schéma simplicial strict augmenté associé.

Les faisceaux $\Omega^*_{U_\alpha/S}$ définissent un faisceau de $f^{-1}\,\mathcal{O}_S$-algèbres dgc sur $U_.$, et ainsi $f_* \iota_* \Omega^*_{U_./S}$ est un faisceau cosimplicial strict sur S de $\mathcal{O}_S$-algèbres dgc, dont le simple de Thom-Whitney ([16], § 3) $s_{TW}(f_* \iota_* \Omega^*_{U_./S})$, est une $\mathcal{O}_S$-algèbre dgc quasi-équivalente à $\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}$, et quasi-isomorphe comme complexe de $\mathcal{O}_S$-modules au simple ordinaire

$s(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S})$ à travers le morphisme d'intégration

$$\mathbf{I}: \quad s_{TW}(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S}) \to s(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S}),$$

([16], § 2 et § 3).

Il est clair que les composantes homogènes de $s_{TW}(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S})$ sont des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents, et que $s_{TW}(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S})$ est indépendant, à quasi-équivalence près, du recouvrement $\mathcal{U}$.

(6.2) Rappelons la construction de la connexion de Gauss-Manin dans $s(f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S})$, en modifiant légèrement l'exposition de Deligne ([4]).

On suppose que le recouvrement $\mathcal{U}$ est tel que si v est un champ de vecteurs sur S, v admet un relèvement v_i sur chaque U_i, $i \in I$.

Les dérivées de Lie

$$L_{v_i}: \quad \Omega^*_{U_i/S} \to \Omega^*_{U_i/S}$$

sont alors des v-dérivations dg des $f^{-1}\mathcal{O}_S$-algèbres dgc $\Omega^*_{U_i/S}$, et, d'après la formule d'homotopie de Cartan, les produits intérieurs

$$(v_i - v_j)_\llcorner: \quad \Omega^*_{U_i \cap U_j/S} \to \Omega^*_{U_i \cap U_j/S}$$

sont des homotopies de dérivations de L_{v_j} à L_{v_i}, qui vérifient

$$(v_i - v_j)_\llcorner + (v_j - v_k)_\llcorner = (v_i - v_k)_\llcorner.$$

Si on pose

$$\mathcal{A}^{\bullet,*} = f_* \iota_* \Omega^*_{U_\bullet/S},$$

$\mathcal{A}^{\bullet,*}$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre dgc cosimpliciale stricte, *i.e.* on a des morphismes

$$\delta^i: \quad \mathcal{A}^{p,*} \to \mathcal{A}^{p+1,*}, \qquad i = 0, 1, \ldots, p+1,$$

qui vérifient

$$\delta^i \delta^j = \delta^{j+1} \delta^i, \qquad \text{si} \quad i \leqq j,$$

et

$$\delta^i \delta^j = \delta^j \delta^{i-1}, \qquad \text{si} \quad i > j.$$

On définit sur chaque $\mathcal{A}^{p,*}$ des v-dérivations dg

$$u_i: \quad \mathcal{A}^{p,*} \to \mathcal{A}^{p,*}, \qquad i = 0, 1, \ldots, p,$$

par

$$u_i = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(\Delta_p, I)} f_* \iota_{p*} L_{v_{\sigma(i)}},$$

dérivations qui vérifient

$$u_i \delta^j = \delta^j u_i, \quad \text{si} \quad i<j, \tag{6.2.1}$$

et

$$u_{i+1} \delta^j = \delta^j u_i, \quad \text{si} \quad i \geqq j. \tag{6.2.2}$$

On définit, finalement, sur chaque $\mathscr{A}^{p,*}$ des homotopies de dérivations $h_{i,j}$ de u_j à u_i, $i, j=0, \ldots, p$, par

$$h_{i,j} = \prod_{\sigma \in \operatorname{Hom}(\Delta_p, \mathrm{I})} f_* \iota_{p^*}(v_{\sigma(i)} - v_{\sigma(j)})_{\llcorner},$$

homotopies qui vérifient

$$h_{i,j} + h_{j,k} = h_{i,k}, \tag{6.2.3}$$

$$h_{ii} = 0, \tag{6.2.4}$$

$$\delta^k h_{i,j} = h_{i,j} \delta^k, \quad \text{si} \quad i<j<k, \tag{6.2.5}$$

$$\delta^k h_{i,h} = h_{i,j+1} \delta^k, \quad \text{si} \quad i<k \leqq j, \tag{6.2.6}$$

et

$$\delta^k h_{i,j} = h_{i+1,j+1} \delta^k, \quad \text{si} \quad k \leqq i<j. \tag{6.2.7}$$

La connexion de Gauss-Manin, d'après Katz-Oda, est alors le morphisme de complexes

$$u_{\mathrm{KO}}: \quad s(\mathscr{A}^{\bullet,*}) \to s(\mathscr{A}^{\bullet,*})$$

défini par

$$u_{\mathrm{KO}} = u_0 + (-1)^{k+1} h_{0,1} \delta^0, \quad \text{sur } \mathscr{A}^{k,*}.$$

Notons que dans $s(\mathscr{A}^{\bullet,*})$ nous considérons la différentielle

$$d_s(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \delta^i(\alpha) + (-1)^k d(\alpha), \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathscr{A}^{k,l},$$

en accord avec [6] et [10], tandis que dans [4], [13], [14], on considère la différentielle

$$d_{\mathrm{KO}}(\alpha) = d(\alpha) + (-1)^l \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \delta^i(\alpha), \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathscr{A}^{k,l};$$

avec cette différentielle le morphisme de complexes défini à l'origine par Katz-Oda, est

$$u_{or} = u_0 + (-1)^l h_{0,1} \delta^0, \quad \text{sur } \mathscr{A}^{k,l}.$$

Il est clair que, à travers l'isomorphisme de complexes

$$\varphi:\quad (s(\mathscr{A}^{\cdot,*}), d_s) \to (s(\mathscr{A}^{\cdot,*}), d_{\mathrm{KO}})$$

défini par

$$\varphi = (-1)^{kl}, \quad \text{sur } \mathscr{A}^{k,l},$$

les morphismes u_{KO} et u_{or} s'identifient.

(6.3) Supposons que $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ admette une compactification $\bar{\mathrm{X}}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{\mathrm{X}} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

propre et lisse sur S, et telle qu'il existe un diviseur à croisements normaux relatif Y dans $\bar{\mathrm{X}}$ dont X est le complément.

En prenant un recouvrement $\mathscr{U}$ de $\bar{\mathrm{X}}$ par des ouverts afins, tel que si v est un champ de vecteurs sur S, v admet un relèvement v_i tangent à Y sur chaque U_i, $i \in \mathrm{I}$, on peut définir sur l'algèbre dgc cosimpliciale stricte

$$\mathscr{A}^{\cdot,*} = \bar{f}_* \iota_* \Omega^*_{\mathrm{U}_\cdot/\mathrm{S}}(\log \mathrm{Y}),$$

et par les mêmes expressions que dans (6.2), des v-dérivations dg

$$u_i:\quad \mathscr{A}^{p,*} \to \mathscr{A}^{p,*}, \qquad i=0, \ldots, p,$$

qui vérifient (6.2.1-2), et des homotopies de dérivations $h_{i,j}$ de u_j à u_i, $i, j = 0, \ldots, p$, qui vérifient (6.2.3-7).

La connexion de Gauss-Manin est, dans ce cas aussi, le morphisme de complexes

$$u_{\mathrm{KO}}:\quad s(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \to s(\mathscr{A}^{\cdot,*})$$

défini par

$$u_{\mathrm{KO}} = u_0 + (-1)^{k+1} h_{0,1} \delta^0, \quad \text{sur } \mathscr{A}^{k,*},$$

(*voir* [13], § 4).

(6.4) Considérons maintenant en général une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre dgc cosimpliciale stricte $\mathscr{A}^{\cdot,*}$, avec des v-dérivations *dg*

$$u_i:\quad \mathscr{A}^{k,*} \to \mathscr{A}^{k,*}, \qquad i=0, \ldots, k,$$

qui vérifient (6.2.1-2), et des homotopies de dérivations $h_{i,j}$, $i, j = 0, \ldots, k$, de u_j à u_i, qui vérifient (6.2.3-7).

Si $u_i = u_j$ et $h_{i,j} = 0$, $i, j = 0, \ldots, k$, les v-dérivations $dg\,u_i$ définissent par fonctorialité un morphisme de complexes

$$u_{\mathrm{TW}}: \quad s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \to s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}),$$

qui est une v-dérivation dg.

En général, une construction de Bott ([1]) nous a suggéré le résultat suivant

(6.5) THÉORÈME. — *Soit* $\mathscr{A}^{\cdot,*}$ *une* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbre dgc cosimpliciale stricte, avec des* v*-dérivations dg*

$$u_i: \quad \mathscr{A}^{k,*} \to \mathscr{A}^{k,*}, \qquad i = 0, \ldots, k,$$

qui vérifient (6.2.1-2), *et des homotopies de dérivations* $h_{i,j}$, $i, j = 0, \ldots, k$, *de* u_j *à* u_i, *qui vérifient* (6.2.3-7).

Si on définit

$$u_{\mathrm{TW}}: \quad \prod_{p \geqq 0} \mathrm{L}_p^* \otimes \mathscr{A}^{p,*} \to \prod_{p \geqq 0} \mathrm{L}_p^* \otimes \mathscr{A}^{p,*}$$

par

$$u_{\mathrm{TW}}(\Phi) = u_{\mathrm{T}}(\Phi) + u_{\mathrm{W}}(\Phi),$$

où

$$\Phi = (\Sigma\, \varphi_p \otimes \alpha_p,\ p \geqq 0),$$

et

$$u_{\mathrm{T}}(\Phi)_p = \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p\, t_j \otimes u_j(\alpha_p),$$

$$u_{\mathrm{W}}(\Phi)_p = \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,p}(\alpha_p),$$

alors u_{TW} *définit par restriction une application*

$$u_{\mathrm{TW}}: \quad s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \to s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}),$$

qui est une v-dérivation dg.

Si $\mathscr{A}^{\cdot,*}$ *est augmentée et toutes les* u_i *et* $h_{i,j}$ *sont pointées,* u_{TW} *est pointée aussi.*

Démonstration. — 1. Prouvons que si $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*})$, $u_{\mathrm{TW}}(\Phi) \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*})$. Nous prouverons de fait que $u_{\mathrm{T}}(\Phi)$ et $u_{\mathrm{W}}(\Phi)$ appartiennent à $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*})$.

Puisqu'on a

$$(\delta_i \otimes 1)[u_{\mathrm{T}}(\Phi)_{p+1}] = \sum \sum_{j=0}^{p+1} \delta_i(\varphi_{p+1} t_j) \otimes u_j(\alpha_{p+1})$$
$$= \sum \sum_{j<i} \delta_i(\varphi_{p+1}) t_j \otimes u_j(\alpha_{p+1}) + \sum \sum_{j>i} \delta_i(\varphi_{p+1}) t_{j-1} \otimes u_j(\alpha_{p+1})$$

et

$$(1 \otimes \delta^i)[u_{\mathrm{T}}(\Phi)_p] = \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes \delta^i(u_j(\alpha_p))$$
$$= \sum \sum_{j<i} \varphi_p t_j \otimes u_j(\delta^i \alpha_p) + \sum \sum_{j \geqq i} \varphi_p t_j \otimes u_{j+1}(\delta^i \alpha_p)$$

on déduit que $u_{\mathrm{T}}(\Phi) \in s_{\mathrm{TW}}$, car $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$.

Puisqu'on a

$$(\delta_i \otimes 1)[u_{\mathrm{W}}(\Phi)_{p+1}] = \sum \sum_{j=0}^{p} \delta_i(\varphi_{p+1} \wedge dt_j) \otimes h_{j,\, p+1}(\alpha_{p+1})$$
$$= \sum \sum_{j<i} \delta_i(\varphi_{p+1}) \wedge dt_j \otimes h_{j,\, p+1}(\alpha_{p+1})$$
$$+ \sum \sum_{j>i} \delta_i(\varphi_{p+1}) \wedge dt_{j-1} \otimes h_{j,\, p+1}(\alpha_{p+1})$$

et

$$(1 \otimes \delta^i)[u_{\mathrm{W}}(\Phi)_p] = \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes \delta^i h_{j,\, p}(\alpha_p)$$
$$= \sum \sum_{j<i} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,\, p+1}(\delta^i \alpha_p) + \sum \sum_{j \geqq i} \varphi_p dt_j \otimes h_{j+1,\, p+1}(\delta^i \alpha_p),$$

on déduit que $u_{\mathrm{W}}(\Phi) \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$, car $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$.

2. Prouvons que u_{TW} est un morphisme de complexes. Si $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}^{k,\, l}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$, on a

$$d(u_{\mathrm{TW}}(\Phi))_p = d\left(\sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes u_j(\alpha_p) + \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,\, p}(\alpha_p)\right)$$
$$= \sum \sum_{j=0}^{p} d\varphi_p t_j \otimes u_j(\alpha_p) + (-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge dt_j \otimes u_j(\alpha_p)$$
$$+ (-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes u_j(d\alpha_p) + (-1)^{k+1} \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes dh_{j,\, p}(\alpha_p)$$
$$+ \sum \sum_{j=0}^{p-1} d\varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,\, p}(\alpha_p),$$

et on a

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{TW}}(d\Phi)_p &= u_{\mathrm{TW}}\left(\sum d\varphi_p \otimes \alpha_p + (-1)^k \sum \varphi_p \otimes d\alpha_p\right)\\
&= \sum \sum_{j=0}^{p} d\varphi_p\, t_j \otimes u_j(\alpha_p) + \sum \sum_{j=0}^{p-1} d\varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,\,p}(\alpha_p)\\
&\quad + (-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p\, t_j \otimes u_j(d\alpha_p) + (-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,\,p}(d\alpha_p).
\end{aligned}
$$

Or, de

$$u_j(\alpha_p) - u_p(\alpha_p) = dh_{j,\,p}(\alpha_p) + h_{j,\,p}\, d(\alpha_p),$$

il résulte que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} dt_j \otimes u_j(\alpha_p) &= \sum_{j=0}^{p} dt_j \otimes [u_p(\alpha_p) + dh_{j,\,p}(\alpha_p) + h_{j,\,p}\, d(\alpha_p)]\\
&= \sum_{j=0}^{p} dt_j \otimes u_p(\alpha_p) + \sum_{j=0}^{p} dt_j \otimes [dh_{j,\,p}(\alpha_p) + h_{j,\,p}(d\alpha_p)]\\
&= \sum_{j=0}^{p} dt_j \otimes [dh_{j,\,p}(\alpha_p) + h_{j,\,p}\, d(\alpha_p)],
\end{aligned}
$$

car $\sum_{j=0}^{p} dt_j = 0$. On en déduit que

$$d(u_{\mathrm{TW}}(\Phi))_p = u_{\mathrm{TW}}(d\Phi)_p.$$

3. Prouvons que u_{TW} est une v-dérivation. Nous prouverons de fait que u_{T} est une v-dérivation et que u_{W} est une dérivation.

Si $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}^{k,\,l}(\mathscr{A}^{\bullet,\,*})$ et $\Phi' \in s_{\mathrm{TW}}^{k',\,l'}(\mathscr{A}^{\bullet,\,*})$ on a

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{T}}(\Phi \wedge \Phi')_p &= (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge \varphi'_p\, t_j \otimes u_j(\alpha_p \wedge \alpha'_p)\\
&= (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge \varphi'_p\, t_j \otimes [u_j(\alpha_p) \wedge \alpha'_p + \alpha_p \wedge u_j(\alpha'_p)],
\end{aligned}
$$

et puisqu'on a

$$
\begin{aligned}
[u_{\mathrm{T}}(\Phi) \wedge \Phi' + \Phi \wedge u_{\mathrm{T}}(\Phi')]_p &= (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge \varphi'_p\, t_j \otimes u_j(\alpha_p) \wedge \alpha'_p\\
&\quad + (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge \varphi'_p\, t_j \otimes \alpha_p \wedge u_j(\alpha'_p).
\end{aligned}
$$

on conclut que

$$u_T(\Phi \wedge \Phi') = u_T(\Phi) \wedge \Phi' + \Phi \wedge u_T(\Phi').$$

Comme il est clair que si $f \in \mathcal{O}_S$ et $\Phi \in s_{TW}(\mathcal{A}^{\bullet, *})$, on a

$$u_T(f\,\Phi) = v(f)\,\Phi + f u_T(\Phi),$$

ceci montre que u_T est une v-dérivation.

Soient Φ et Φ' comme plus haut, on a

$$\begin{aligned} u_W(\Phi \wedge \Phi')_p &= (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge \varphi'_p \wedge dt_j \otimes h_{j,p}(\alpha_p \wedge \alpha'_p) \\ &= (-1)^{lk'} \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge \varphi'_p \wedge dt_j \\ &\qquad \otimes [h_{j,p}(\alpha_p) \wedge \alpha'_p + (-1)^l \alpha_p \wedge h_{j,p}(\alpha'_p)] \end{aligned}$$

et puisqu'on a

$$\begin{aligned} [u_W(\Phi) \wedge \Phi']_p &= \left[\sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_{j,p}(\alpha_p)\right] \wedge \left(\sum \varphi'_p \otimes \alpha'_p\right) \\ &= (-1)^{(l-1)k'+k'} \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge \varphi'_p \wedge dt_j \otimes h_{j,p}(\alpha_p) \wedge \alpha'_p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\Phi \wedge u_W(\Phi')]_p &= \left(\sum \varphi_p \otimes \alpha_p\right) \wedge \left[\sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi'_p \wedge dt_j \otimes h_{j,p}(\alpha'_p)\right] \\ &= (-1)^{l(k'+1)} \sum \sum_{j=0}^{p-1} \varphi_p \wedge \varphi'_p \wedge dt_j \otimes \alpha_p \wedge h_{j,p}(\alpha'_p), \end{aligned}$$

on conclut que

$$u_W(\Phi \wedge \Phi') = u_W(\Phi) \wedge \Phi' + \Phi \wedge u_W(\Phi').$$

Les $h_{j,p}$ étant des antidérivations, il résulte immédiatement que, si $f \in \mathcal{O}_S$ et $\Phi \in s_{TW}(\mathcal{A}^{\bullet, *})$ on a

$$u_W(f\,\Phi) = f u_W(\Phi),$$

il en résulte que u_W est une dérivation, ce qui termine la démonstration du théorème.

(6.6) THÉORÈME. — *Avec les notations et hypothèses de* (6.5):

(i) *L'application*

$$u_{KO}: \quad s(\mathcal{A}^{\bullet, *}) \to s(\mathcal{A}^{\bullet, *})$$

définie par

$$u_{\mathrm{KO}} = u_0 + (-1)^{k+1} h_{0,1} \delta^0, \quad sur \ \mathscr{A}^{k,*},$$

est un morphisme de complexes.

(ii) *Si* $\mathbf{I} : s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*})$ *est le morphisme d'intégration, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}) & \xrightarrow{u_{\mathrm{TW}}} & s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \\ {\scriptstyle \mathbf{I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{I}} \\ s(\mathscr{A}^{\cdot,*}) & \xrightarrow[u_{\mathrm{KO}}]{} & s(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif. Plus explicitement, si $\mathbf{E} : s(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \to s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\cdot,*})$ *est le quasi-inverse de Whitney de* $\mathbf{I}$ (*voir* [16], § 2), *et*

$$h : \quad s(\mathscr{A}^{\cdot,*}) \to s(\mathscr{A}^{\cdot,*})$$

est définie par

$$h(\alpha) = (-1)^k \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} h_{0,j}, \qquad si \quad \alpha \in \mathscr{A}^{k,*},$$

alors h *est une homotopie de* $\mathbf{I}\, u_{\mathrm{TW}}\, \mathbf{E}$ *à* u_{KO}.

Démonstration. — La preuve de l'assertion (i) étant presque identique à celle de [4], 7.4, nous ne prouverons que l'assertion (ii).

Calculons d'abord $\mathbf{I} u_{\mathrm{TW}} \mathrm{E}$. Il résulte des définitions que, si $\alpha \in \mathscr{A}^{k,*}$, on a

$$(\mathbf{I}\, u_{\mathrm{TW}}\, \mathbf{E})(\alpha) = k! \sum_{j=0}^{k} \int_{\Delta^k} (w_k\, t_j)\, u_j(\alpha) + k! \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathrm{I} \in \mathrm{I}(k,\, k+1)} \int_{\Delta^{k+1}} (w_{\mathrm{I}} \wedge dt_j)\, h_{j,\, k+1}(\delta^{\bar{\mathrm{I}}} \alpha),$$

les notations étant celles de [16], section 2.

D'un côté, puisque

$$w_k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s t_s\, dt_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_s} \wedge \ldots \wedge dt_k$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^k} w_k\, t_j &= \int_{\Delta^k} t_j\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k \\ &= \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, si $\mathrm{I}=(0, 1, \ldots, \hat{l}, \ldots, k+1)$ on a

$$\int_{\Delta^{k+1}} w_{\mathrm{I}} \wedge dt_j = \sum_{s=0}^{l-1} \int_{\Delta^{k+1}} (-1)^s t_s dt_0 \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_s \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_l \wedge \ldots \wedge dt_{k+1} \wedge dt_j$$

$$+ \sum_{s=l+1}^{k+1} \int_{\Gamma\Delta^{k+1}} (-1)^{s+1} t_s dt_0 \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_l \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_s \wedge \ldots \wedge dt_{k+1} \wedge dt_j,$$

et pour calculer ces intégrales, on distingue deux cas: si $j=l$, on a

$$\int_{\Delta^{k+1}} w_{\mathrm{I}} \wedge dt_j = (-1)^{k+l+1} \sum_{s=0,\, s\neq l}^{k+1} \int_{\Delta^{k+1}} (-1)^s t_s dt_0 \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_s \wedge \ldots \wedge dt_{k+1}$$

$$= (-1)^{k+l+1} \frac{k+1}{(k+2)!},$$

et si $j\neq l$, on a

$$\int_{\Delta^{k+1}} w_{\mathrm{I}} \wedge dt_j = \int_{\Delta^{k+1}} (-1)^k t_j dt_0 \wedge \ldots \wedge \hat{dt}_l \wedge \ldots \wedge dt_{k+1}$$

$$= (-1)^{k+l} \frac{1}{(k+2)!}.$$

En mettant ensemble ces résultats, on trouve que

$$(\mathbf{I}\, u_{\mathrm{TW}}\, \mathbf{E})(\alpha) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_j(\alpha)$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} \left[\sum_{l=0,\, l\neq j}^{k+1} \frac{(-1)^{k+l}}{(k+2)(k+1)} h_{j,\,k+1}(\delta^l \alpha) + \frac{(-1)^{k+j+1}}{k+2} h_{j,\,k+1}(\delta^j \alpha) \right],$$

donc, si on pose

$$(\mathbf{I}\, u_{\mathrm{TW}}\, \mathbf{E})(\alpha) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_j(\alpha) + (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{i,\,j} h_{j,\,k+1}(\delta^i \alpha),$$

les coefficients $a_{i,\,j}$ sont

$$a_{i,\,j} = \frac{1}{(k+2)(k+1)}, \qquad \text{si} \quad i\neq j,$$

et

$$a_{i,\,j} = \frac{-1}{k+2}, \qquad \text{si} \quad i=j.$$

Calculons maintenant $u_{\mathrm{KO}} - d_s h - h d_s$.

Il résulte des définitions que, si $\alpha \in \mathscr{A}^{k,l}$, on a

$$(u_{\mathrm{KO}} - d_s h - h d_s)(\alpha) = u_0(\alpha) + (-1)^{k+1} h_{0,1}\, \delta^0 \alpha$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \delta^i \left(\sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(\alpha) \right) - \frac{1}{k+1} d \left(\sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(\alpha) \right)$$
$$+ \frac{(-1)^k}{k+2} \sum_{j=0}^{k+1} h_{0,j} \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \delta^i \alpha \right) - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(d\alpha),$$

et comme

$$u_0(\alpha) - \frac{1}{k+1} d \left(\sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(\alpha) \right) - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(d\alpha) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_j(\alpha),$$

il résulte que

$$(u_{\mathrm{KO}} - d_s h - h d_s)(\alpha) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} u_j(\alpha) + (-1)^{k+1} h_{0,1}\, \delta^0 \alpha$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \delta^i \left(\sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(\alpha) \right) + \frac{(-1)^k}{k+2} \sum_{j=0}^{k+1} h_{0,j} \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \delta^i \alpha \right).$$

De (6.2.3-7), on déduit qu'on peut écrire

$$-h_{0,1}\, \delta^0 \alpha - \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \delta^i \left(\sum_{j=0}^{k} h_{0,j}(\alpha) \right)$$
$$+ \frac{1}{k+2} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{k+1} h_{0,j}(\delta^j \alpha) \right) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i b_{i,j} h_{j,k+1}(\delta^i \alpha),$$

et il suffit, pour prouver le théorème, de vérifier que

$$a_{i,j} = b_{i,j}, \qquad i = 0, \ldots, k+1, \qquad j = 0, \ldots, k.$$

Pour cela, on va distinguer les différents cas suivant les valeurs de i et j.

Si $i = j = 0$, on a

$$b_{0,0} = -1 + \frac{k+1}{k+2} = -\frac{1}{k+2}.$$

Si $i > 0$, $j = 0$, on a

$$b_{i,0} = -\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Si $i=0, j=1$, on a

$$b_{0,1}=1-\frac{k}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Si $i=1, j=1$, on a

$$b_{1,1}=-\frac{1}{k+2}.$$

Si $i>1, j=1$, on a

$$b_{i,1}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Si $i<j, j>1$, on a

$$b_{i,j}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Si $i=j, j>1$, on a

$$b_{i,j}=-\frac{1}{k+2}.$$

Si $i>j, j>1$, on a

$$b_{i,j}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Ce qui termine la démonstration de (6.6).

(6.7) PROPOSITION. — *Avec les notations et hypothèses de* (6.5), *supposons qu'on a des v-dérivations dg*

$$u'_i: \quad \mathscr{A}^{k,*}\to\mathscr{A}^{k,*}, \qquad i=0,\ldots,k.$$

qui vérifient (6.2.1-2), *des homotopies de dérivations* $h'_{i,j}$, $i, j=0,\ldots,k$, *de* u'_j *à* u'_i, *qui vérifient* (6.2.3-7), *et des homotopies de dérivations* h_i *de* u_i *à* u'_i, $i=0,\ldots,k$, *qui vérifient*

$$h_i+h_{i,j}=h'_{i,j}+h_j,$$
$$\delta^j h_i=h_i\,\delta^j, \qquad si \quad i<j,$$

et

$$\delta^j h_i=h_{i+1}\,\delta^j, \qquad si \quad i\geqq j,$$

et soient u_{TW} *et* u'_{TW} *les v-dérivations associées aux* u_i, $h_{i,j}$, *et aux* u'_i, $h'_{i,j}$, *respectivement, par le théorème* (6.5).

Si on définit

$$h_{\mathrm{TW}}: \quad \prod_{p \geqq 0} \mathrm{L}_p^* \otimes \mathscr{A}^{p,*} \to \prod_{p \geqq 0} \mathrm{L}_p^* \otimes \mathscr{A}^{p,*}$$

par

$$h_{\mathrm{TW}}(\Phi)_p = (-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes h_j(\alpha_p),$$

où

$$\Phi = \left(\sum \varphi_p \otimes \alpha_p,\ p \geqq 0\right) \in \prod_{p \geqq 0} \mathrm{L}_p^k \otimes \mathscr{A}^{p,*},$$

alors h_{TW} définit par restriction une application

$$h_{\mathrm{TW}}: \quad s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*}) \to s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$$

qui est une homotopie de dérivations de u_{TW} à u'_{TW}.

Si $\mathscr{A}^{\bullet,*}$ est augmentée et toutes les u_i, u'_i, $h_{i,j}$, $h'_{i,j}$ et h_i sont pointées, h_{TW} est aussi pointée.

Démonstration. — La preuve que $h_{\mathrm{TW}}(\Phi) \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$ si $\Phi \in s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet,*})$ est la même que celle de (6.5) pour u_{T}, en remplaçant u_{T} par h_{TW}. De même, la preuve que h_{TW} est une antidérivation est parallèle à la partie de celle de (6.5) qui prouve que u_{T} est une v-dérivation.

Prouvons que h_{TW} est une homotopie de u_{TW} à u'_{TW}.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(u'_{\mathrm{TW}} - u_{\mathrm{TW}})(\Phi)_p \\
&= \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes (u'_j - u_j)(\alpha_p) + \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge dt_j \otimes (h'_{j,p} - h_{j,p})(\alpha_p) \\
&= \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes (u'_j - u_j)(\alpha_p) + \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_j(\alpha_p),
\end{aligned}$$

et d'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
(dh_{\mathrm{TW}} + h_{\mathrm{TW}}\, d)(\Phi)_p &= d\left((-1)^k \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes h_j(\alpha_p)\right) \\
&\quad + h_{\mathrm{TW}}\left(\sum d\varphi_p \otimes \alpha_p + (-1)^k \sum \varphi_p \otimes d\alpha_p\right) \\
&= \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p \wedge dt_j \otimes h_j(\alpha_p) + \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes dh_j(\alpha_p) \\
&\quad + \sum \sum_{j=0}^{p} \varphi_p t_j \otimes h_j(d\alpha_p).
\end{aligned}$$

Comme h_j est une homotopie de u_j à u'_j, cela montre que

$$u'_{\mathrm{TW}} - u_{\mathrm{TW}} = dh_{\mathrm{TW}} + h_{\mathrm{TW}}\, d,$$

d'où la proposition.

(6.8) Revenons aux notations et hypothèses de (6.3). Il résulte alors de [4], II, 3.16, que

$$\mathbf{R}^i \bar{f}_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}}(\log \mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^i f_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}}$$

et ainsi, par le théorème de finitude des images directes, les faisceaux $\mathbf{R}^i f_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}}$ sont cohérents.

Si v est un champ de vecteurs sur S, d'après (6.5), on a une v-dérivation dg

$$\nabla_v: \quad s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *}) \to s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *}),$$

qui par (6.6) induit sur les faisceaux de cohomologie $\mathbf{R}^i f_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}}$ la connexion de Gauss-Manin qui est régulière à exposants rationnels (*voir* [4], II, 7.7 et III, 2.3 ou [13], (14.3)).

Comme $\mathscr{D}er(\mathrm{S}/k)$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini, on peut définir localement un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-morphisme

$$\nabla: \quad \mathscr{D}er(\mathrm{S}/k) \to \mathscr{D}er_{k-\mathrm{dg}}(s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})),$$

qui vérifie (L), et par (6.7) ceci définit une connexion ho-intégrable sur le ho-faisceau $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$. Il résulte aussi de (6.7) que le ho-faisceau $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$ muni de la connexion ∇ est indépendant, à quasi-équivalence près, des choix faits pour sa définition. Nous l'appellerons la connexion de Gauss-Manin sur $\mathbf{R}_{\mathrm{TW}} f_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}}$.

Si on a une section $\sigma: \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ du morphisme $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, il est clair qu'on peut choisir un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts afins, tels que si v est un champ de vecteurs sur S, v admet un relèvement v_i tangent à $\sigma(\mathrm{S})$ sur chaque U_i. Il résulte alors des définitions que σ induit une augmentation sur $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$ et que la connexion de Gauss-Manin sur $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$ est pointée. On peut conclure donc d'après (5.6) et (5.10) qu'il existe pour tout $q > 0$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre dgc munie d'une connexion intégrable régulière à exposants rationnels $(\mathscr{M}(1, q), \nabla^{(1, q)})$, dont les composantes homogènes sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de type fini, et qui est un $(1, q)$-modèle minimal de $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$.

Si le ho-faisceau $s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *})$ est nilpotent, il existe, d'après (5.8) et (5.10), un $(n, 0)$-modèle minimal $(\mathscr{M}(n, 0), \nabla)$ de $(s_{\mathrm{TW}}(\mathscr{A}^{\bullet, *}), \nabla)$, pour tout $n \geqq 1$, qui vérifie les différentes conclusions de (5.8) et (5.10). En particulier, les $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\pi^n(\mathbf{R}_{\mathrm{TW}} f_* \Omega^*_{\mathrm{X/S}})$, $n \geqq 1$, sont localement libres de type fini et munis de connexions intégrables régulières à exposants rationnels.

(6.9) Continuons avec les notations et hypothèses précédentes, et supposons que k est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Puisque $\bar{f}$ est propre et lisse, et Y est un diviseur à croisements normaux relatif sur S, le morphisme

$$f^{an}: \quad X^{an} \to S^{an}$$

est une fibration topologique localement triviale et par conséquent le faisceau de $\mathbf{C}$-algèbres dgc $\mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \mathbf{C}_{X^{an}}$ a, pour tout $q \geqq 0$, un $(1, q)$-modèle minimal dont la composante homogène de degré 1 est, par la théorie de Sullivan [20], le dual du système local complexe défini par les algèbres de Lie $\mathscr{L}_q \pi_1(X_s, \sigma(s)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ (*voir* [8], XII, pour la définition de $\mathscr{L}_q$).

(6.10) THÉORÈME. — *Le fibré vectoriel sur* S *à connexion intégrable régulière* $(\mathscr{M}(1, q)^1, \nabla)$, *qui est la composante homogène de degré* 1 *de* $\mathscr{M}(1, q)$, *vérifie que le faisceau sur* S^{an} *des sections locales horizontales de* $(\mathscr{M}(1, q)^1, \nabla)^{an}$ *est celui qui est défini par les duaux des espaces* $\mathscr{L}_q \pi_1(X_s, \sigma(s)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$.

Démonstration. — En effet, la composante homogène de degré 1 du $(1, q)$-modèle minimal de $\mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \mathbf{C}_{X^{an}}$ est la partie horizontale de la composante homogène de degré 1 du $(1, q)$-modèle minimal de la $\mathcal{O}_{S^{an}}$-algèbre dgc $\mathcal{O}_{S^{an}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \mathbf{C}_{X^{an}}$ munie de sa connexion canonique : la connexion de Gauss-Manin.

Or, il résulte de [4], I, 2.2.8 et II, 7.7 une quasi-équivalence

$$(\mathcal{O}_S^{an} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \mathbf{C}_X{}^{an}, \nabla) \to (\mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \Omega^*_{X^{an}/S^{an}}, \nabla),$$

où la connexion ∇ sur $\mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \Omega^*_{X^{an}/S^{an}}$ est construite en appliquant (6.5) à la variante analytique de (6.1), (6.2). Et il résulte de [4], II, 6.14 et II, 7.7 une quasi-équivalence

$$(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}, \nabla)^{an} \to (\mathbf{R}_{TW} f_*^{an} \Omega^*_{X^{an}/S^{an}}, \nabla),$$

donc le dual du système local $\mathscr{L}_q \pi_1(X_s, \sigma(s)) \otimes \mathbf{C}$ est la partie horizontale de la composante homogène de degré 1 du $(1, q)$-modèle minimal de $(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}, \nabla)^{an}$.

Finalement, il est clair que si $(\mathscr{M}(1, q), \nabla)$ est le $(1, q)$-modèle minimal de $(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}, \nabla)$ et $(\mathscr{M}(1, q)(an), \nabla)$ est le $(1, q)$-modèle minimal de $(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S}, \nabla)^{an}$, alors

$$(\mathscr{M}(1, q), \nabla)^{an} \cong (\mathscr{M}(1, q)(an), \nabla),$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Dans le cas nilpotent, on obtient des théorèmes de comparaison comme le suivant dont la preuve, analogue à la précédente, est laissée au lecteur.

(6.11) THÉORÈME. — *Si les fibres du morphisme* f^{an} *sont des espaces topologiques nilpotents, le fibré vectoriel sur* S *à connexion intégrable régulière* $\pi^n(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega^*_{X/S})$, $n \geqq 1$, *vérifie que le faisceau sur* S^{an} *des sections locales horizontales de* $[\pi^n(\mathbf{R}_{TW} f_* \Omega_{X/S})]^{an}$ *est celui qui est définit par les duaux des espaces* $\pi_n(X_s, \sigma(s)) \otimes \mathbf{C}$.

Remarque. — Dans les résultats précédents, le complexe logarithmique $\Omega^*_{X/S}(\log Y)$ et la connexion de Gauss-Manin définie sur $\mathbf{R}_{TW} \bar{f}_* \Omega^*_{X/S}(\log Y)$ n'ont joué qu'un rôle auxiliaire, ce complexe étant quasi-isomorphe à $\mathbf{R}_{\mathrm{TW}} f_* \Omega^*_{X/S}$. Toutefois, si on s'intéresse aux filtrations de Hodge et par le poids qu'on peut introduire dans la situation considérée, alors le complexe $\Omega^*_{X/S}(\log Y)$ et la connexion sur $\mathbf{R}_{\mathrm{TW}} \bar{f}_* \Omega^*_{X/S}(\log Y)$ sont essentiels, Mais ceci est une autre histoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Bott, *Lectures on Characteristic Classes and Foliations*, in *Lectures on Algebraic and Differential Topology* (*Lect. Notes in Math.*, vol. 279, Springer-Verlag, 1972).

[2] A. Bousfield et V. K. A. M. Gugenheim, *On PL De Rham Theory and Rational Homotopy Type* (*Mem. A.M.S.*, vol. 179, 1976).

[3] J. Carlson, H. Clemens et J. Morgan, *On the Mixed Hodge Structure Associated to* π_3 *of a Simply Connected Complex Projective Manifold* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 14, 1981, p. 323-338).

[4] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, (*Lect. Notes in Math.*, 163, Springer-Verlag, 1970).

[5] P. Deligne, *Lettre à Wojtkowiak*, 25 oct. 1983.

[6] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[7] P. Griffiths, *Periods of Integrals on Algebraic Manifolds: Summary of Main Results and Discussion of Open Problems* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 76, 1970, p. 228-296).

[8] P. Griffiths et J. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* (*Progress in Math.*, 16, Birkhaüser, 1981).

[9] A. Grothendieck, *On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 29, 1966, p. 96-103).

[10] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, III, Première Partie* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 11, 1961).

[11] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual et F. Puerta, *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique* (*Lect. Notes in Math.*, vol. 1335, Springer-Verlag, 1988).

[12] S. Halperin, *Lectures on Minimal Models*, (*Memoire Soc. Math. de France*, n° 9/10, 1983).

[13] N. Katz, *Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem. Applications of a Result of Turritin* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 39, 1971, p. 175-232).

[14] N. Katz et T. Oda, *On the Differentiation of De Rham Cohomology Classes with Respect to Parameters* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 8, 1968, p. 199-213).

[15] J. Morgan, *The Algebraic Topology of Smooth Algebraic Varieties* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 48, 1978, p. 137-204).

[16] V. Navarro Aznar, *Sur la théorie de Hodge-Deligne* (*Invent. Math.*, vol. 90, 1987, p. 11-76).

[17] F. Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin* (*Progress in Math.*, 2, Birkhaüser, 1979).

[18] A. Roig, *Thèse*, en préparation.

[19] D. Quillen, *Rational Homotopy Theory* (*Ann. of Math.*, vol. 90, 1969, p. 205-295.

[20] D. Sullivan, *Infinitesimal Computations in Topology* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 47, 1977, p. 269-331).

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1991,
révisé le 6 décembre 1991).

V. Navarro Aznar,
Departament d'Àlgebra i Geometria,
Facultat de Matemàtiques,
Universitat de Barcelona,
Gran Via 585,
08007 Barcelona, Espagne.