Éléments de la théorie des systèmes différentiels. Images directes et constructibilité (Nice, 1990)
Travaux en Cours, **46,** Hermann, Paris, 1993. 47-98

Le Théorème de Constructibilité de Kashiwara

Zoghman Mebkhout[1] Luis Narváez-Macarro

Introduction

0.1.— Soit U un ouvert de la droite complexe $\mathbb{C}$ et

$$P(z, \frac{d}{dz}) := a_m(z)\frac{d^m}{dz^m} + \cdots + a_0(z)$$

un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes sur U. Une question essentielle consiste à chercher à "résoudre" l'équation différentielle *non homogène*

$$P(f) = g.$$

C'est à dire, étant donnée une fonction holomorphe g sur U, trouver une solution f de l'équation différentielle précédente. Bien entendu, à une solution eventuelle de l'équation non homogène on peut rajouter toute solution de l'équation *homogène*

$$P(h) = 0$$

et $f + h$ reste toujours solution de l'équation non homogène. Aussi, il est important de bien comprendre la "structure" de toutes les solutions de l'équation homogène qui constituent un espace vectoriel complexe, *noyau* de l'opérateur différentiel P. D'autre part, il se peut qu'il existe des fonctions g pour lesquelles il n'existe aucune solution de l'équation non homogène. Ceci revient à comprendre la structure du *conoyau* de P, c'est à dire l'espace quotient des fonctions holomorphes sur U modulo l'image de l'opérateur différentiel P. Bien entendu, ces questions dépendent de P mais aussi de l'ouvert U.

0.2.— Un premier résultat fondamental est donné par le théorème de Cauchy qui traite le cas où U est un disque ouvert et la fonction $a_m(z)$ n'admet pas de zéro sur U. Dans cette situation, le théorème de Cauchy affirme que le noyau de P est un espace vectoriel complexe de dimension finie égale à m et que son conoyau de P est nul. Autrement dit, on peut toujours trouver une solution de l'équation non

[1]Pendant la réalisation de ces notes, le premier auteur a bénéficié d'un programme *Mercure*, DGICYT du Ministère d'Education d'Espagne et DCCT du Ministère des Affaires Etrangères de France.

homogène mais de façon non unique; il faut fixer à l'avance la valeur de la solution au centre du disque ainsi que de ses $m-1$ premières dérivées pour la déterminer complètement.

0.3.— Le théorème de Cauchy amène à définir les zéros de la fonction $a_m(z)$ comme les *points singuliers* de l'opérateur P. Si P admet un point singulier dans un disque le théorème de Cauchy n'a plus lieu. En efffet, considérons l'opérateur différentiel

$$P = z\frac{d}{dz} - \alpha$$

pour un nombre complexe α, qui admet l'origine de la droite complexe comme point singulier. Formellement le symbole z^α est solution de cette équation mais ce symbole ne représente une fonction holomorphe que si α est un entier non négatif. On trouve alors que le noyau de P, pour tout disque centré à l'origine, est de dimension un si α est entier non négatif et est nul sinon. D'autre part, un calcul direct montre que le conoyau de P est de dimension un, lorsque α est un entier non négatif, engendré par la classe de z^α, et qu'il est nul si α n'est pas un entier non négatif. On voit ainsi que la situation d'un point singulier est bien différente de celle d'un point régulier.

0.4.— En fait c'est là un résultat général. Le noyau et le conoyau d'un opérateur différentiel P ayant une singularité au centre d'un disque U, opérant dans l'espace des fonctions holomorphes sur ce disque, sont des espaces vectoriels complexes de *dimension finie*. S'il est facile de voir que la dimension du noyau est au plus égale à l'ordre de P il n'en est plus de même de la finitude du conoyau. Alors que la démonstration du théorème de Cauchy est élémentaire, celle du résultat précédent ne l'est plus. Curieusement ce résultat date du début des années soixante-dix cf. [13].

0.5.— Si le cas d'une équation différentielle ayant une singularité au centre d'un disque de rayon fixé est réglé par les résultats précédents, pour comprendre le cas d'un opérateur différentiel P sur un ouvert U général, il faut utiliser la théorie des faisceaux: regarder une équation différentielle comme un morphisme du faisceau $\mathcal{O}_U$ dans lui même et considérer le noyau $Ker(P, \mathcal{O}_U)$ et le conoyau $Coker(P, \mathcal{O}_U)$ qui sont alors des faisceaux d'espaces vectoriels complexes sur U. On peut alors déduire du théorème de Cauchy que le faisceau $Ker(P, \mathcal{O}_U)$ est un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie égale à l'ordre de P, et le faisceau $Coker(P, \mathcal{O}_U)$ est nul si P n'admet pas de points singuliers sur U. D'autre part, les dimensions du noyau et du conoyau de l'opérateur P sur l'espace des fonctions holomorphes sur un disque assez petit ne dépendent plus du rayon de ce disque. C'est là une propriété des faisceaux constructibles. En résumé, on peut dire que

$Ker(P, \mathcal{O}_U)$ et $Coker(P, \mathcal{O}_U)$ sont des faisceaux *constructibles* de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. De plus le support du faisceau $Coker(P, \mathcal{O}_U)$ est formé par les points singuliers de P.

0.6.— On ne peut pas lire sur P les dimensions des fibres en chaque point des faisceaux $Ker(P, \mathcal{O}_U)$ et $Coker(P, \mathcal{O}_U)$ mais on peut lire la différence des dimensions des fibres de ces faisceaux. C'est l'objet du théorème d'indice cf. [13].

0.7.— Si au lieu de considérer une équation on considère un système d'équations diférentielles sur un ouvert U les analogues des notions et des résultats précédents ne sont pas bien clairs. Il y a intérêt à substituer ce système par l'idéal à gauche $\mathcal{I}$ qui engendre dans le faisceau $\mathcal{D}_U$ des opérateurs différentiels sur U, puis à considérer le $\mathcal{D}_U$-module à gauche $\mathcal{M} := \mathcal{D}_U/\mathcal{I}$. L'analogue des points singuliers se lit sur la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, l'analogue du faisceau des solutions holomorphes est le faisceau $Hom_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_U)$ et l'analogue du conoyau est le faisceau $Ext^1_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_U)$. À ce moment-là, on peut montrer sans beaucoup de problèmes et à partir du cas d'une équation différentielle que $Hom_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_U)$ et $Ext^1_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_U)$ sont des faisceaux constructibles de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur U.

0.8.— En dimension supérieure les choses sont plus compliquées. En effet, à deux variables x, y, si l'on considère l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ son noyau est formé par toutes les fonctions qui ne dépendent que de y qui est loin d'être un espace vectoriel de dimension finie. Pour avoir des propriétés raisonables de finitude il faut au moins considérer des *systèmes d'opérateurs différentiels.*

0.9.— Un point fondamental de la théorie des $\mathcal{D}$-modules est d'avoir dégagé en dimension supérieure la classe des systèmes différentiels dont les solutions holomorphes ont des propriétés de finitude analogues à celles d'une équation différentielle en dimension un, à savoir les *systèmes holonomes* qui est une notion purement algébrique.

0.10.— La notion de faisceau constructible garde un sens en dimension supérieure: sur un espace analytique complexe un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie est constructible s'il existe une stratification de cet espace telle que la restriction du faisceau à chaque strate est un système local.

0.11.— Sur toute variété analytique complexe X et pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, on a les faisceaux $Ext^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ qui sont les faisceaux des solutions holomorphes "supérieures". Le théorème de constructibilité affirme que pour un $\mathcal{D}_X$-module *holonome* $\mathcal{M}$ les faisceaux $Ext^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ sont *constructibles.*

0.12.— Le but de ce cours et de donner une démonstration géométrique du théorème de constructibilité. Géométrique parce que contrairement à la démonstration originale de Kashiwara [11] elle ne fait appel à aucun résultat concernant les équations aux dérivées partielles au théorème de Cauchy près et nous l'obtenons des propriétés de finitude de la Geométrie Algébrique. En ce sens, elle peut être considérée comme de nature élémentaire tout en étant très instructive sur la théorie des $\mathcal{D}$-modules.

Nous remercions A. Arabia d'avoir relu le texte.

Chapitre I
Faisceaux constructibles

I.1. Systèmes locaux

Dans cette section nous allons donner les définitions et les résultats fondamentaux sur les systèmes locaux (ou faisceaux localement constants). Nous allons nous placer dans le cadre des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, suffisant pour la théorie des faisceaux constructibles. La plupart des résultats qui suivent sont valables pour un anneau de base quelconque et sans hypothèse de finitude.

Définition I.1.1.— *Soit X un espace topologique et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On définit le faisceau E_X comme le faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels associé au préfaisceau qui à chaque ouvert $U \subseteq X$ non vide, associe le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et à chaque inclusion d'ouverts non vides associe l'identité sur E. Nous dirons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels est un faisceau constant (de rang fini) s'il est isomorphe à un faisceau E_X, E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie).*

I.1.2.— Dans la situation de la définition précédente, si F est un autre $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u : E \to F$ est une application linéaire, on définit de la façon évidente un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $u_X : E_X \to F_X$. On a donc un foncteur additif de la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Notons que si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{F}(X))$$

est un isomorphisme. Ceci nous dit que le foncteur $E \mapsto E_X$ est un adjoint à gauche du foncteur "sections globales".

Proposition I.1.3.— (Sorites sur les faisceaux constants) *Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. On a les propriétés suivantes:*

1) *Si $f : Y \to X$ est une application continue entre deux espaces topologiques, $f^{-1}\mathcal{F}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y.*

2) *Si $U \subseteq X$ est un ouvert* connexe *et $x \in U$, le morphisme naturel $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ est un isomorphisme. Réciproquement, si X est un espace topologique connexe et*

$\mathcal{G}$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X tel que le morphisme naturel $\mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}_x$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$, alors $\mathcal{G}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. En particulier, si X est un espace topologique connexe et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, l'espace des section globales de E_X s'identifie naturellement à E.

3) *Si E, F sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on a des isomorphismes canoniques:*

$$(E \oplus F)_X \simeq E_X \oplus F_X, \qquad (E \otimes F)_X \simeq E_X \otimes F_X,$$

et si de plus E est de dimension finie ou X est localement connexe

$$[\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)]_X \quad \simeq \quad \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(E_X, F_X).$$

4) *Le foncteur défini dans I.1.2 est exact. De plus, si X est connexe ce foncteur est pleinement fidèle.*

5) *Si X est un espace topologique connexe, le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme entre faisceaux constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sont des faisceaux constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Preuve.—

1) Il suffit de prendre $\mathcal{F} = E_X$, avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Notons E_X° le préfaisceau constant $U \mapsto E$, de manière que E_X est le faisceau associé à E_X°. Notons aussi $(f^{-1})^\circ E_X^\circ$ le préfaisceau image inverse par f de E_X°. Le faisceau $f^{-1}E_X$ est (canoniquement) isomorphe au faisceau associé à $(f^{-1})^\circ E_X^\circ$. Or, le préfaisceau $(f^{-1})^\circ E_X^\circ$ est (canoniquement) isomorphe à E_Y°, d'où le résultat.

2) Soit $U \subseteq X$ un ouvert connexe et $x \in U$. La surjectivité du morphisme naturel $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ est claire. Montrons l'injectivité. Soit $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s_x = 0$ et considérons l'ensemble ouvert $V = \{y \in U \mid s_y = 0\}$. Comme $\mathcal{F}$ est constant, on voit que le complémentaire de V dans U est un ouvert de U. Or, comme U est connexe et V est un ouvert-fermé non vide ($x \in V$) on a $V = U$, d'où $s = 0$.

Voyons la réciproque sous l'hypothèse X connexe. Notons E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sections globales de $\mathcal{G}$. D'après la propriété d'adjonction de I.1.2 il existe un morphisme $E_X \to \mathcal{G}$, qui d'après les hypothèses induit des isomorphismes sur toutes les fibres, d'où $\mathcal{G}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

3) L'isomorphisme $(E \oplus F)_X \simeq E_X \oplus F_X$ provient de l'additivité du foncteur $E \mapsto E_X$.

Le morphisme $(E \otimes F)_X \simeq E_X \otimes F_X$ provient d'un morphisme évident au niveau des préfaisceaux. Pour conclure il suffit de remarquer que ce dernier induit des isomorphismes sur les fibres au-dessus des points de X.

Par fonctorialité on a une application lineáire $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X,F_X)$ qui nous donne, par adjonction, un morphisme $u\colon [\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)]_X \to \mathit{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X,F_X)$. Montrons que ce morphisme est un isomorphisme sous une des hypothèses suivantes.

Si E est de <u>dimension finie</u>, d'après la compatibilité du morphisme u et des foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(?,F)$ et $\mathit{Hom}_{\mathbb{C}_X}(?_X,F_X)$ par rapport aux sommes directes finies, on est réduit au cas $E = \mathbb{C}$, dans lequel le résultat est clair.

Supposons maintenant que X est un espace <u>localement connexe</u>. Pour chaque $x \in X$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) \arrow[r, "u_x"] \arrow[d, equal] & \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_V}(E_V,F_V) \arrow[d, "\cong"', "\text{adj.}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \varinjlim F_V(V)) & \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F_V(V)) \arrow[l, "\alpha_x"']
\end{tikzcd}$$

les limites inductives étant prises par rapport aux voisinages ouverts connexes V de x, d'où le résultat, car le système inductif $\{F_V(V)\}_{V \ni x}$ est constant égal à F d'après 2) et donc α_x est un isomorphisme.

4) L'exactitude du foncteur en question est claire. Supposons X connexe. D'après 2) et l'isomorphisme naturel $[\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)]_X \xrightarrow{\cong} \mathit{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X,F_X)$ de 3), on déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X,F_X)$, d'où la pleine fidélité.

5) Soit $v\colon E_X \to F_X$ un morphisme entre deux faisceaux constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. D'après 4), v est le morphisme associé à une application linéaire $\omega\colon E \to F$, et par l'exactitude du foncteur $E \mapsto E_X$, on a des isomorphismes

$$\mathit{Ker}(v) \simeq (\mathrm{Ker}(\omega))_X,\ \ \mathit{Coker}(v) \simeq (\mathrm{Coker}(\omega))_X,\ \ \mathit{Im}(v) \simeq (\mathrm{Im}(\omega))_X.$$

$\square$

I.1.4. Exercice.— Soit $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite et $F = \mathbb{C}$.

a) Prouver que $F_X(X)$ s'identifie au sous-espace de l'espace des fonctions $f\colon X \to \mathbb{C}$ constantes au voisinage de 0.

b) Soit E le sous-espace vectoriel de $F_X(X)$ formé par les sections à support fini, ou de façon équivalente, les sections dont le germe en 0 est nul. Notons, pour chaque $e \in E$, par N_e le plus petit $n \in \mathbb{N}_+$ tel que $e|_{\{\frac{1}{n'} \mid n' \geq n\}} = 0$. Montrer que $\inf\{N_e \mid e \in E\} = 0$.

c) Conclure que $\mathit{Hom}_{\mathbb{C}_X}(E_X, F_X)$ n'est pas un faisceau constant.

I.1.5. Remarque.— Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $h : E \to \mathcal{F}(X)$ une application linéaire qui induit des isomorphismes $E \simeq \mathcal{F}_x, \forall x \in X$, alors, d'après la propriété d'adjonction de I.1.2, on a un isomorphisme $E_X \simeq \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

I.1.6. Exemple.— Soit $X \subseteq \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide et $P = a_m D^m + \cdots + a_0$ un opérateur différentiel linéaire holomorphe sur X avec $a_m(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Alors le théorème de Cauchy nous dit que les solutions de l'équation $P(f) = 0$ forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension m et que pour toute fonction holomorphe h sur X il existe une fonction holomorphe g sur X telle que $P(g) = h$. Du point de vue faisceautique, si l'on considère P comme un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X, ceci veut dire, d'après la remarque I.1.5, que $\mathit{Ker}(P)$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension m et que $\mathit{Coker}(P) = 0$.

Dorénavant tous les espaces topologiques considérés seront des espaces séparés, localement connexes par arcs et localement simplement connexes par arcs (cf. [4]).

DÉFINITION I.1.7.— *Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Nous dirons que $\mathcal{F}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels si tout point $x \in X$ admet un voisinage U tel que $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si $\mathcal{F}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $x \in X$, le rang de $\mathcal{F}$ au point x, noté $\mathrm{rg}_x(\mathcal{F})$, est par définition $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_x)$.*

LEMME I.1.8.— *Soit $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. L'application $x \in X \mapsto \mathrm{rg}_x(\mathcal{L})$ est localement constante. Si cette application est constante de valeur r, on dira que $\mathcal{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de rang r. En particulier ceci sera le cas si X est connexe.*

Preuve.— C'est clair d'après la proposition I.1.3, 2). $\square$

Proposition I.1.9.— *Si $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ sont deux systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et $\varphi\colon \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, alors $\mathcal{L} \oplus \mathcal{M}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, Hom_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{M}), Ker(\varphi), Im(\varphi)$ et $Coker(\varphi)$ sont aussi des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Preuve.— C'est une conséquence de la proposition I.1.3, 3), 5). □

Corollaire I.1.10.— *La catégorie des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X.*

Proposition I.1.11.— *Considérons une suite exacte de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \rightarrow 0.$$

Alors si deux d'entre eux sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels le troisième l'est aussi.

Preuve.— D'après la proposition I.1.9 la seule chose à démontrer est que si $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels alors $\mathcal{F}$ l'est aussi. Soit $x \in X$ et $U \subseteq X$ un voisinage ouvert connexe de x au-dessus duquel $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont des faisceaux constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Soient $\{e'_1, \ldots, e'_r\}$ une base de $\mathcal{F}'(U)$ et $\{e''_{r+1}, \ldots, e''_{r+s}\}$ une base de $\mathcal{F}''(U)$. Soit $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+s}\}$ une base de $\mathcal{F}_x$ telle que $\sigma_j = i_x((e'_j)_x), j = 1, \ldots, r$ et $p_x(\sigma_j) = (e''_j)_x, j = r+1, \ldots, r+s$. Quitte à restreindre U on peut supposer qu'il existe $e_1, \ldots, e_{r+s} \in \mathcal{F}(U)$ tels que $(e_j)_x = \sigma_j, j = 1, \ldots, r+s$, $i(U)(e'_j) = e_j, j = 1, \ldots, r$ et $p(U)(e_j) = e''_j, j = r+1, \ldots, r+s$. Soient

$$u'\colon \mathbb{C}^r_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}'|_U \quad \text{et} \quad u''\colon \mathbb{C}^s_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}''|_U$$

les isomorphismes correspondants aux bases $\{e'_1, \ldots, e'_r\}$ et $\{e''_{r+1}, \ldots, e''_{r+s}\}$ respectivement et posons $u\colon \mathbb{C}^{r+s}_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ le morphisme déduit par adjonction (cf. I.1.2) des éléments $e_1, \ldots, e_{r+s} \in \mathcal{F}(U)$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^r_U \arrow[r, "\text{nat.}"] \arrow[d, "u'"'] & \mathbb{C}^{r+s}_U \arrow[r, "\text{nat.}"] \arrow[d, "u"'] & \mathbb{C}^s_U \arrow[r] \arrow[d, "u''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'|_U \arrow[r, "i"] & \mathcal{F}|_U \arrow[r, "p"] & \mathcal{F}''|_U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et d'après le lemme des cinq, u est un isomorphisme d'où $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. □

I.1.12. Remarque.— Le faisceau d'anneaux $\mathbb{C}_X$ est un faisceau cohérent et les systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X coïncident avec les $\mathbb{C}_X$-modules cohérents (cf. [19]).

PROPOSITION I.1.13.— *Soit $f : Y \to X$ una application continue entre deux espaces topologiques et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Alors $f^{-1}\mathcal{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y.*

Preuve.— Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathcal{L}|_U$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour tout $U \in \mathcal{U}$. Or, $(f^{-1}\mathcal{L})|_{f^{-1}(U)} \simeq (f|_{f^{-1}(U)})^{-1}(\mathcal{L}|_U)$ et donc le résultat est une conséquence de la proposition I.1.3, 1). $\square$

I.1.14. Exemple.— Soit $X \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide et $P = a_m D^m + \cdots + a_0$ un opérateur différentiel linéaire holomorphe sur X, i.e. les a_i sont des fonctions holomorphes sur X et $D = \frac{d}{dz}$. Supposons que a_m n'est pas identiquement nulle (P est d'ordre m) et soit X' l'ensemble ouvert des points $x \in X$ tels que $a_m(x) \neq 0$. Le théorème de Cauchy (voir l'exemple I.1.6) nous dit que $Ker(P)|_{X'}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de rang m et que $Coker(P)|_{X'} = 0$.

I.1.15. Exemple.— Soit X une variéte analytique complexe de dimension pure d et soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel (holomorphe) sur X de rang m muni d'une connexion intégrable, i.e. un $\mathcal{D}_X$-module à gauche holonome dont la variété caractéristique se réduit à la section nulle du fibré cotangent (cf. [6, IV.2]). D'après le théorème de Cauchy à plusieures variables (loc. cit.) $\mathcal{E}$ est localement isomorphe comme $\mathcal{D}_X$-module à $\mathcal{O}_X^m$, le complexe de De Rham de $\mathcal{E}$, $\mathbf{DR}(\mathcal{E})$, est concentré en degré 0 et $\mathbf{DR}^0(\mathcal{E})$ (= sections horizontales de $\mathcal{E}$) est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de rang m. En fait le foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathbf{DR}^0(\mathcal{E})$ établit une équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels à connexion intégrable et les systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X, dont un quasi-inverse est $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}$.

I.2. Rapport avec l'homotopie

PROPOSITION I.2.1.— *Soit X un espace topologique connexe simplement connexe. Alors tout système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Preuve.— Soit $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Soit $E(\mathcal{L})$ la réunion disjointe des fibres $\mathcal{L}_x$ quand $x \in X$, et soit $\pi : E(\mathcal{L}) \to X$ la projection naturelle. Munissons $E(\mathcal{L})$ de la topologie dont une base d'ouverts est formée par les sous-ensembles de la forme $\{(x, s_x) \mid x \in U, s \in \mathfrak{L}(U)\}$, $U \subseteq X$ étant ouvert non vide[1]. L'application π est un homéomorphisme local et comme $\mathfrak{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, π est en fait un revêtement étale. Notons qu'étant donné un ouvert $U \subseteq X$, il y a une bijection canonique entre les section continues de π au dessus de U et les éléments de $\mathfrak{L}(U)$. Comme X est simplement connexe, π est un revêtement trivial et donc, pour chaque point $x \in X$, l'application qui à chaque section continue σ de π au-dessus de X associe sa valeur au point x, $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x) = \mathfrak{L}_x$, est bijective, d'où le morphisme naturel $\mathfrak{L}(X) \to \mathfrak{L}_x$ est un isomorphisme, et d'après la proposition I.1.3, 2) $\mathfrak{L}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. □

I.2.2.— Soit X un espace topologique, $\mathfrak{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et $\gamma : I = [0,1] \to X$ un chemin (= application continue). Posons $x_0 = \gamma(0), x_1 = \gamma(1)$. Le faisceau $\gamma^{-1}\mathfrak{L}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels d'après la proposition précédente et la proposition I.1.13. On a donc un isomorphisme, noté $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}} \colon \mathfrak{L}_{x_0} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{L}_{x_1}$, composition des isomorphismes naturels

$$\mathfrak{L}_{x_0} \xleftarrow{\cong} (\gamma^{-1}\mathfrak{L})_0 \xleftarrow{\cong} (\gamma^{-1}\mathfrak{L})(I) \xrightarrow{\cong} (\gamma^{-1}\mathfrak{L})_1 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{L}_{x_1}.$$

Il est clair que si $\mathfrak{L}'$ est un autre système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et $\varphi \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ est un morphisme, alors $\varphi_{x_1} \circ \tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}} = \tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}'} \circ \varphi_{x_0}$.

Proposition I.2.3.— *Soit X un espace topologique et $\mathfrak{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. On a les propriétés suivantes:*

1) *Si $\gamma, \gamma' \colon I \to X$ sont deux chemins avec $x_0 = \gamma(0) = \gamma'(0), x_1 = \gamma(1) = \gamma'(1)$ et homotopes, alors $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}} = \tilde{\gamma'}_{\mathfrak{L}}$.*
2) *Si $\gamma, \delta \colon I \to X$ sont deux chemins avec $\delta(1) = \gamma(0)$ et $\gamma * \delta$ désigne la composition des deux chemins[2], alors $(\widetilde{\gamma * \delta})_{\mathfrak{L}} = \tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}} \circ \tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$.*

Preuve.— 1) Soit $H : I \times I \to X$ une homotopie entre γ et γ', i.e. H est une application continue telle que $H(0,t) = \gamma(t), H(1,t) = \gamma'(t), H(s,0) = x_0, H(s,1) =$

[1] $\pi \colon E(\mathfrak{L}) \to X$ s'appelle l'espace étalé associé au faisceau $\mathfrak{L}$. En fait la donnée de π est équivalente à la donnée du faisceau lui même (cf. [5]).

[2] $\gamma * \delta \colon I \to X$ est défini par

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \delta(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

x_1 pour tous $s, t \in I$. Il est clair que $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}}$ (resp. $\tilde{\gamma'}_{\mathfrak{L}}$) coïncide avec la composition des isomorphismes

$$\mathfrak{L}_{x_0} \xleftarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})_{(0,0)} \xleftarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})(I \times I) \xrightarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})_{(0,1)} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{L}_{x_1}$$

$$\text{(resp.} \qquad \mathfrak{L}_{x_0} \xleftarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})_{(1,0)} \xleftarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})(I \times I) \xrightarrow{\cong} (H^{-1}\mathfrak{L})_{(1,1)} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{L}_{x_1}).$$

Or, comme $H(-,0)$ (resp. $H(-,1)$) est constante, l'automorphisme de $\mathfrak{L}_{x_0}$ (resp. de $\mathfrak{L}_{x_1}$) composition des isomorphismes $\mathfrak{L}_{x_0} \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})_{(0,0)} \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})(I \times I) \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})_{(1,0)} \simeq \mathfrak{L}_{x_0}$ (resp. $\mathfrak{L}_{x_1} \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})_{(0,1)} \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})(I \times I) \simeq (H^{-1}\mathfrak{L})_{(1,1)} \simeq \mathfrak{L}_{x_1}$) est l'identité, d'où le résultat.

2) Posons $\epsilon = \gamma * \delta$. Soit $\sigma, \tau \colon I \to I$ les applications continues définies par $\sigma(t) = \frac{t+1}{2}, \tau(t) = \frac{t}{2}$, où $t \in I$. On a $\epsilon \circ \sigma = \gamma, \epsilon \circ \tau = \delta$, d'où l'existence d'isomorphismes naturels:

$$(\delta^{-1}\mathfrak{L})(I) \xleftarrow{\cong \varphi} (\epsilon^{-1}\mathfrak{L})(I) \xrightarrow{\cong \psi} (\gamma^{-1}\mathfrak{L})(I)$$

tels que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\delta^{-1}\mathfrak{L})_1 \arrow[r, "\cong"] & \mathfrak{L}_{\delta(1)} \arrow[rr, equal] & & \mathfrak{L}_{\gamma(0)} & (\gamma^{-1}\mathfrak{L})_0 \arrow[l, "\cong"'] \\
(\delta^{-1}\mathfrak{L})_0 \arrow[d, "\cong"] & (\delta^{-1}\mathfrak{L})(I) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[ul, "\cong"] & (\epsilon^{-1}\mathfrak{L})(I) \arrow[l, "\cong\ \varphi"'] \arrow[r, "\cong\ \psi"] \arrow[ddl, "\cong"] \arrow[ddr, "\cong"] & (\gamma^{-1}\mathfrak{L})(I) \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] & (\gamma^{-1}\mathfrak{L})_1 \arrow[d, "\cong"] \\
\mathfrak{L}_{\delta(0)} \arrow[d, equal] & & & & \mathfrak{L}_{\gamma(1)} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{L}_{\epsilon(0)} & (\epsilon^{-1}\mathfrak{L})_0 \arrow[l, "\cong"'] & & (\epsilon^{-1}\mathfrak{L})_1 \arrow[r, "\cong"] & \mathfrak{L}_{\epsilon(1)}
\end{tikzcd}$$

Ceci entraîne l'égalité cherchée. □

I.2.4.— Soit X un espace topologique connexe et $x_0 \in X$ un point de base. Posons $G = \pi_1(X, x_0)$. Soit $\mathfrak{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et $g \in G$. Prenons un lacet (= chemin fermé) γ dont la classe d'homotopie soit

g. D'après la proposition I.2.3, 1) l'automorphisme $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L}_{x_0} \to \mathfrak{L}_{x_0}$ ne dépend que de g. Appelons-le $\tilde{g}_{\mathfrak{L}}$. D'après la partie 2) de la même proposition l'application $g \in G \mapsto \tilde{g}_{\mathfrak{L}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{L}_{x_0})$ est un homomorphisme de groupes, c'est-à-dire, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}_{x_0}$ est muni d'une action à gauche de G, ou ce qui revient au même, $\mathfrak{L}_{x_0}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel sous-jacent à une réprésentation (à gauche) du groupe G. Il est clair que cette structure est compatible avec les morphismes de systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On a donc un foncteur additif exact de la catégorie des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels dans la catégorie des réprésentations complexes de dimension finie du groupe G.

Ce foncteur admet aussi la description suivante. Soit $\pi : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ le révêtement universel de (X, x_0). Notons $\lambda \colon \mathrm{Aut}(\pi) \to \pi_1(X, x_0)$ le anti-isomorphisme naturel qui associe à chaque automorphisme $T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, $\pi \circ T = \pi$, la classe d'homotopie du lacet $\pi \circ \alpha$, où $\alpha : I \to \widetilde{X}$ est n'importe quel chemin d'origine $\tilde{x}_0$ et but $T(\tilde{x}_0)$. Pour tout système local $\mathfrak{L}$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X considérons $\widetilde{\mathfrak{L}} = \pi^{-1}\mathfrak{L}$. D'après les propositions I.1.13 et I.2.1, $\widetilde{\mathfrak{L}}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $\widetilde{X}$. Posons $E = \widetilde{\mathfrak{L}}(\widetilde{X})$. En tant qu'image inverse par π d'un faisceau sur X, $\widetilde{\mathfrak{L}}$ est muni d'une famille d'isomorphismes $\{\beta_T : \widetilde{\mathfrak{L}} \to T_*\widetilde{\mathfrak{L}}\}_{T \in \mathrm{Aut}(\pi)}$ vérifiant les conditions de transitivité usuelles. En prenant sections globales on obtient une action à droite du groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ sur E. Il est facile à voir que l'isomorphisme naturel $E \simeq \mathfrak{L}_{x_0}$ est compatible avec λ.

Proposition I.2.5.— *Le foncteur précédent est une équivalence de catégories.*

Preuve.— Nous allons esquisser brièvement la construction d'un quasi-inverse. Gardons les notations précédentes et posons $G = \mathrm{Aut}(\pi)$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action à gauche de $\pi_1(X, x_0)$, ou, ce qui revient au même, d'une action à droite de G. Considérons le faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E_{\widetilde{X}}$, qui est muni aussi d'une action à droite de G. En prenant l'image directe par π on obtient une action à droite sur $\pi_* E_{\widetilde{X}}$. On peut voir facilement que $(\pi_* E_{\widetilde{X}})^G$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et que le foncteur $E \mapsto (\pi_* E_{\widetilde{X}})^G$ est un quasi-inverse du foncteur de I.2.4. □

I.2.6. Exercice.— Démontrer en détail la proposition précédente.

I.2.7. Exemple.— *(Diviseur à croissements normaux)* Prenons l'espace affine $\mathbb{C}^n$ et soit Y la réunion des hyperplans de coordonnées. Soit $X = \mathbb{C}^n - Y = (\mathbb{C}^*)^n$. Posons $x_0 = (1, \ldots, 1) \in X$. On a un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)^n$ provenant des morphismes induits sur les groupes fondamentaux par les projections coordonnées. Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est donc un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n, dont une base est $\{g_1, \ldots, g_n\}$, g_j étant la classe d'homotopie du lacet $\gamma_j : I \to X$ dont la composante k-ième est constante égale à 1 pour $k \neq j$ et la composante j-ième est l'application $t \in I \mapsto \exp(2\pi i t) \in \mathbb{C}^*$. La donnée d'une représentation complexe de dimension finie de $\pi_1(X, x_0)$ est donc équivalente à la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E et de n automorphismes $M_1, \ldots, M_n \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ commutant deux à deux, M_j étant l'action de g_j.

I.2.8. Exemple.— Dans la situation de l'exemple précédent prenons un $j \in \{1, \ldots, n\}$ et un $\alpha \in \mathbb{C}$, et considérons le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module à gauche $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est l'idéal à gauche engendré par les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k \neq j, \qquad x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \alpha$$

où $k \in \{1, \ldots, n\}$. Le module $\mathcal{M}$ est holonome et les composantes verticales de sa variété caractéristique se projettent sur Y, donc $\mathcal{M}|_X$ est un fibré à connexion intégrable. Le faisceau $\mathcal{L} = \mathbf{Sol}(\mathcal{M}|_X)$ s'identifie au sous-faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathcal{O}_X$, engendré par la fonction multiforme x_j^α. La représentation complexe associée à $\mathcal{L}$ est donc de dimension 1 et les M_j de l'exemple précédent sont donnés par:

$$M_k = \text{l'identité} \quad \forall k \neq j, \qquad M_j = \text{multiplication par } \exp(2\pi i \alpha).$$

I.2.9. Exercice.— Dans la situation des exemples précédents, trouver explicitement un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module holonome qui n'ait pas des singularités en dehors de Y et tel que la représentation associée au système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels des solutions sur X soit de dimension 2 avec

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall k \neq l, j, \qquad M_l = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad M_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\beta \in \mathbb{C}^*$. (Indication: Trouver une fonction multiforme avec les monodromies requises)

Proposition I.2.10.— *Soit $p : X \to Y$ un revêtement fini étale d'espaces topologiques et $\mathcal{L}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\mathcal{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X.

b) $p_*\mathcal{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y.

Preuve.— Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de Y par des ouverts simplement connexes. Pour tout $V \in \mathcal{V}$, $p^{-1}\mathcal{L}$ est la somme disjointe d'un nombre fini de copies de V. Le résultat est donc une conséquence de la proposition I.2.1 et du lemme suivant. $\square$

LEMME I.2.11.— *Soit V un espace topologique connexe, $U = \bigsqcup_{i=1}^{d} U_i$ la somme disjointe de $d \geq 1$ copies de V, $p\colon U \to V$ l'application identique sur chaque copie et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur U. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\mathcal{F}|_{U_i}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur U_i pour chaque $i = 1, \ldots, d$.

b) $p_*\mathcal{F}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur V.

Preuve.— a) $\Rightarrow$ b) Posons $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{U_i}$. Il est clair que $p_*\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{F}_i$ et donc il est constant.
b) $\Rightarrow$ a) Soit $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$ et $x \in U_{i_0}$. Posons $y = p(x)$ et $p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_d\}$ avec $x_i \in U_i$ et $x_{i_0} = x$. On a par hypothèse que $(p_*\mathcal{F})(V) \simeq (p_*\mathcal{F})_y$. Il existe donc un isomorphisme <u>scindé</u> $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{F}_i(U_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} (\mathcal{F}_i)_{x_i}$, d'où $\mathcal{F}_{i_0}(U_{i_0}) \simeq (\mathcal{F}_{i_0})_x$ et $\mathcal{F}_{i_0}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. $\square$

I.2.12. Exercice.— Considérons le revêtement $p\colon x \in \mathbb{C}^* \mapsto p(x) = x^d \in \mathbb{C}^*$ fini et de degré d. Prenons comme point de base $x_0 = 1 \in \mathbb{C}^*$. Soit $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $\mathbb{C}^*$, correspondant à une représentation complexe E de dimension finie du groupe $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \simeq \mathbb{Z}$. Décrire la représentation qui correspond au système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $p_*\mathcal{L}$ en fonction de E.

I.3. Propriétés cohomologiques des systèmes locaux

Dans cette section on supposera que les espaces topologiques sont séparés, localement compacts, localement connexes par arcs et localement simplement connexes. On notera $I = [0, 1]$.

Commençons par rappeler la formule de changement de base.

PROPOSITION I.3.1.— *Soit $f : Y \to X$ une application continue entre deux* *espaces topologiques, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens (ou d'espaces vectoriels) sur Y, $X' \subseteq X$ un sous-espace, $Y' = f^{-1}(X')$ et $f' = f|_{Y'} \colon Y' \to X'$. Alors, il existe des morphismes canoniques:*

$$\mathbf{R}^i f'_*(\mathcal{F}|_{Y'}) \to (\mathbf{R}^i f_* \mathcal{F})|_{X'}$$

que sont des isomorphismes lorsque f est propre.

Preuve.— Voir [1]. □

Lemme I.3.2.— *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de sur I, alors $\mathbf{H}^i(I, \mathcal{L}) = 0$ pour $i \geq 1$.*

Preuve.— La cohomologie ordinaire de $\mathcal{L}$ sur I coïncide avec celle de Čech. Pour chaque entier $n \geq 2$ cosidérons le recouvrement ouvert de

$$\mathcal{U}_n = \{[0, \frac{2}{n}[,]\frac{1}{n}, \frac{3}{n}[, \ldots,]\frac{n-2}{n}, 1]\}.$$

La famille $\{\mathcal{U}_n\}_{n \geq 2}$ est cofinale dans l'ensemble des recouvrements ouverts de I et donc la cohomologie de Čech de $\mathcal{L}$ sur I est la limite inductive en n des cohomologies de $\mathcal{L}$ par rapport aux recouvrements $\mathcal{U}_n$. Or, un calcul direct montre que ces dernières sont nulles en degré $i \geq 1$. □

Proposition I.3.3.— *Soit X un espace topologique. Notons $p \colon X \times I \to X$ la première projection et $\sigma_t \colon x \in X \mapsto (x, t) \in X \times I$ pour $t \in I$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $X \times I$ tel que ses restrictions aux fibres de p sont des faisceaux constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On a les propriétés suivantes:*

1) $\mathbf{R}^i p_* \mathcal{F} = 0$, $\forall i \geq 1$.

2) Le morphisme d'adjonction $p^{-1} p_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

3) Pour chaque $t \in I$, le morphisme naturel $p_* \mathcal{F} \to \sigma_t^{-1} \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

4) Pour tout $i \geq 0$, le morphisme naturel $\mathbf{H}^i(X, p_* \mathcal{F}) \to \mathbf{H}^i(X \times I, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Preuve.— 1) D'après la formule de changement de base I.3.1 et le lemme I.3.2 on a

$$(\mathbf{R}^i p_* \mathcal{F})_x \simeq \mathbf{H}^i(p^{-1}(x), \mathcal{F}) = 0$$

pour $i \geq 0$ et $x \in X$, d'où le résultat.

2) Pour $x \in X$, le morphisme $(p^{-1}p_*\mathcal{F})_{(x,t)} \to \mathcal{F}_{(x,t)}$ induit par le morphisme d'adjonction est isomorphe au morphisme naturel $(p_*\mathcal{F})_x \to \mathcal{F}_{(x,t)}$ qui est encore isomorphe par changement de base au morphisme de restriction $\Gamma(p^{-1}(x), \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{(x,t)}$. Or, ce dernier est un isomorphisme car $\mathcal{F}|_{p^{-1}(x)}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

3) Le morphisme naturel $p_*\mathcal{F} \to \sigma_t^{-1}\mathcal{F}$ est la composition du morphisme d'adjonction $\sigma_t^{-1}p^{-1}p_*\mathcal{F} \to \sigma_t^{-1}\mathcal{F}$ avec l'isomorphisme canonique $p_*\mathcal{F} = (p \circ \sigma_t)^{-1}p_*\mathcal{F} \simeq \sigma_t^{-1}p^{-1}p_*\mathcal{F}$. Il est donc un isomorphisme d'après 2).

4) Il s'agit d'une conséquence de 1), car la suite spectrale de Leray

$$\mathbf{H}^i(X, \mathbf{R}^j p_*\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(X \times I, \mathcal{F})$$

dégénère. □

Proposition I.3.4.— *Soient $f, g\colon X \to Y$ deux applications continues homotopes entre deux espaces topologiques. Alors, pour chaque système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{L}$ sur Y il existe un isomorphisme*[3] $\eta\colon f^{-1}\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} g^{-1}\mathcal{L}$, *naturel par rapport à $\mathcal{L}$, tel que le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{H}^*(X, f^{-1}\mathcal{L}) \arrow[dd, "\mathbf{H}^*(X,\eta)", "\cong"'] \\
\mathbf{H}^*(Y, \mathcal{L}) \arrow[ur, "nat."] \arrow[dr, "nat."'] & \\
& \mathbf{H}^*(X, g^{-1}\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

Preuve.— Soit $H\colon X \times I \to Y$ une homotopie entre f et g. Posons $\mathcal{F} = H^{-1}\mathcal{L}$. Il s'agit d'un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $X \times I$ et vérifie donc les hypothèses de la proposition I.3.3. D'après *loc. cit.*, 3) et avec les mêmes notations, les morphismes naturels $p_*\mathcal{F} \to \sigma_0^{-1}\mathcal{F} \simeq f^{-1}\mathcal{L}$ et $p_*\mathcal{F} \to \sigma_1^{-1}\mathcal{F} \simeq g^{-1}\mathcal{L}$ sont des isomorphismes, d'où l'isomorphisme $\eta\colon f^{-1}\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} g^{-1}\mathcal{L}$ cherché. La commutativité du diagramme ci-dessus est une conséquence de la commutativité de

[3]Cet isomorphisme dépend de l'homotopie choisie entre f et g.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \mathbf{H}^*(X, \sigma_0^{-1}\mathcal{F}) \arrow[dd, "\cong"', "\mathbf{H}^*(X,\eta)"] \\
\mathbf{H}^*(X \times I, \mathcal{F}) \arrow[ur, "\text{nat.}"] \arrow[dr, "\text{nat.}"'] & \\
 & \mathbf{H}^*(X, \sigma_1^{-1}\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

qui résulte directement de la définition de η. □

Corollaire I.3.5.— *Soit $f\colon X \to Y$ une équivalence d'homotopie entre deux espaces topologiques et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y. Alors le morphisme naturel $\varphi^*\colon \mathbf{H}^*(Y, \mathcal{L}) \to \mathbf{H}^*(X, f^{-1}\mathcal{L})$ est un isomorphisme.*

Preuve.— Soit $g\colon Y \to X$ une inverse de f au sens homotopique, i.e. $f \circ g$ est homotope à 1_Y et $g \circ f$ est homotope à 1_X. D'après la proposition I.3.4 il existe un isomorphisme $\eta\colon (f \circ g)^{-1}\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^*(X, f^{-1}\mathcal{L}) \arrow[r, "\psi^* \ (\text{nat.})"] & \mathbf{H}^*(Y, g^{-1}f^{-1}\mathcal{L}) \arrow[d, "\cong"', "\mathbf{H}^*(Y,\eta)"] \\
\mathbf{H}^*(Y, \mathcal{L}) \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "1"] & \mathbf{H}^*(Y, \mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

d'où l'injectivité de φ^* et la surjectivité de ψ^*. De manière analogue en utilisant le fait que $g \circ f$ est homotope à 1_X on démontre l'injectivité de ψ^*. Par conséquent ψ^* et φ^* sont des isomorphismes. □

Corollaire I.3.6.— *Si X un espace topologique contractile et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X, alors $\mathbf{H}^i(X, \mathcal{L}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

I.3.7. Remarque.— La proposition I.3.4 reste valable sous les hypothèses suivantes: $f, g\colon X \to Y$ deux applications continues, $H\colon X \times I \to Y$ une homotopie entre f et g et $\mathcal{L}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y tel que la restriction de $H^{-1}\mathcal{L}$ aux fibres de la projection $p : X \times I \to X$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Ceci s'applique notamment au cas suivant, qui est une généralisation du corollaire I.3.5 pour des faisceaux qui ne sont pas forcément des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Proposition I.3.8.— *Soit B un espace topologique contractile en un point b_0, X un espace topologique et $Y = B \times X$. Notons $q \colon Y \to X$ la deuxième projection et $i : X \hookrightarrow Y$ l'immersion fermée de niveau b_0. Alors pour tout faisceau $\mathcal{L}$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y dont la restriction aux fibres de q est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, le morphisme naturel $\varphi^* : \mathbf{H}^*(Y, \mathcal{L}) \to \mathbf{H}^*(X, f^{-1}\mathcal{L})$ est un isomorphisme.*

Preuve.— Soit $H_0 \colon B \times I \to B$ une homotopie qui réalise la contraction de B sur b_0, i.e. $H_0(b, 0) = b, H_0(b, 1) = b_0$ pour tout $b \in B$. Considérons l'applicaction continue $H \colon Y \times I \to Y$ définie par:

$$H(b, x, t) := (H_0(b, t), x).$$

Il s'agit d'une homotopie entre 1_Y et $i \circ q$. Il est clair que $H^{-1}\mathcal{L}$ vérifie les hypothèses de la proposition I.3.3 et d'après la remarque précédente, il existe un isomorphisme $\eta \colon \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (i \circ q)^{-1}\mathcal{L}$ tel que le diagramme de la proposition I.3.4 est commutatif. On peut récopier la preuve du corollaire I.3.5 pour en déduire le résultat. □

I.4. Faisceaux constructibles

Dans cette section X désignera un espace analytique complexe réduit arbitraire, les strates de toutes les stratifications considerées seront connexes et vérifieront la condition de frontière, et tous les systèmes locaux seront de rang fini.

La notion de faisceau constructible a été introduite dans [2, exposé IX], dans le contexte de la topologie étale des schémas. La notion correspondante en Géométrie Analytique Complexe a été étudiée dans [21, 11].

Définition I.4.1.— *Nous dirons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X est constructible s'il existe une stratification analytique Σ de X telle que $\mathcal{F}|_S$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur S pour chaque $S \in \Sigma$. Dans ce cas nous dirons que Σ est une stratification adaptée à $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{F}$ est constructible par rapport à Σ.*

I.4.2. Remarque.— Notons que si Σ est une stratification adaptée au faisceau constructible $\mathcal{F}$ et si Σ' est une stratification analytique plus fine que Σ, alors Σ' est aussi adaptée à $\mathcal{F}$. En particulier, tout faisceau constructible l'est par rapport à une stratification de Whitney (cf. [17, §5]).

Proposition I.4.3.— *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux constructibles sur X et $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, alors $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, Ker(\varphi), Im(\varphi), Coker(\varphi)$ sont aussi des faisceaux constructibles sur X.*

Preuve.— Soit Σ et Σ' des stratifications adaptées à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement. Prenons Σ'' une stratification plus fine que Σ et Σ'. Il suffit d'appliquer la proposition I.1.9 aux restrictions des faisceaux à chaque strate de Σ''. □

Corollaire I.4.4.— *La catégorie des faisceaux constructibles sur X est une sous-catégorie abélienne pleine de la catégories des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Proposition I.4.5.— *Considérons une suite exacte de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

Alors si deux d'entre eux sont des faisceaux constructibles (resp. par rapport à une stratification Σ) le troisième l'est aussi (resp. par rapport à la même stratification).

Preuve.— La preuve se fait à partir de la proposition I.1.11 de façon analogue à la proposition I.4.3. □

I.4.6. Exemple.— Reprenons la situation de l'exemple I.1.14. Posons $Y = \{x \in X \mid a_m(x) = 0\} = X - X'$. Il s'agit d'un sous-ensemble fermé de X qui n'a que des points isolés. Le théorème d'indice de Malgrange [13] nous dit en particulier que pour tout $x \in Y$, $Ker(P)_x$ et $Coker(P)_x$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Nous pouvons donc conclure que $Ker(P)$ et $Coker(P)$ sont des faisceaux constructibles sur X par rapport à la stratification dont les strates sont X' et les points de Y.

I.4.7. Exemple.— Soit $X \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert centré à l'origine. Posons $Y = \{0\}$ et $j : U = X - Y \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Considérons le faisceau des fonctions méromorphes à poles sur Y, $\mathcal{O}_X[\star Y]$. Il s'agit d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome d'après [18, §I.4]. Le faisceau $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X[\star Y], \mathcal{O}_X)$ est naturellement isomorphe à $j_!\mathbb{C}_U$ et les faisceaux $Ext^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X[\star Y], \mathcal{O}_X)$ sont nuls pour $i \geq 1$. Ceci peut se voir directement en utilisant la présentation $\mathcal{O}_X[\star Y] \simeq \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}_X \cdot (zD+1)}$, où z est la coordonnée locale de X centrée à l'origine et D est la dérivée par rapport à z. En particulier le complexe $\mathbf{Sol}(\mathcal{O}_X[\star Y])$ est à cohomologie constructible. On peut traiter de façon analogue le cas du complexe de De Rham de $\mathcal{O}_X[\star Y]$. En fait on a:

–) $\mathbf{DR}^0(\mathcal{O}_X[\star Y])$ est (naturellement) isomorphe au faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}_X$.

–) $\mathbf{DR}^1(\mathcal{O}_X[\star Y])$ est supporté par l'origine et sa fibre à l'origine est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.

–) $\mathbf{DR}^i(\mathcal{O}_X[\star Y]) = 0$ pour tout $i \neq 0, 1$.

Proposition I.4.8.— *Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre deux espaces analytiques complexes et soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Alors $f^{-1}\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur Y.*

Preuve.— Soit Σ une stratification de X adaptée à $\mathcal{F}$. Soit Σ' une stratification de Y telle que pour tout $S \in \Sigma$, $f^{-1}(S)$ est réunion de strates de Σ'. Prenons $S' \in \Sigma'$ et soit $S \in \Sigma$ telle que $f(S') \subseteq S$. Posons $g = f|_{S'} : S' \to S$. Comme $(f^{-1}\mathcal{F})|_{S'} = g^{-1}(\mathcal{F}|_S)$, on peut appliquer la proposition I.1.13 pour conclure. $\square$

Corollaire I.4.9.— *Si Y est un sous-espace analytique de X et $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur X, alors la restriction $\mathcal{F}|_Y$ est aussi un faisceau constructible sur Y.*

Dans le reste de cette section nous allons démontrer quelques propriétés fondamentales des faisceaux constructibles. La technique la plus souvent utilisée est celle de *dévissage* dans les catégories dérivées concernées cf. II.5.. Commençons par énoncer une conséquence du premier théorème d'isotopie de Thom-Whitney, sur laquelle réposent les résultats qui suivent.

Théorème I.4.10.— (Trivialité et finitude topologiques des couples de Whitney) *Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert et (X, Y) un couple de Whitney dans U, i.e. X et Y sont des sous-variétés analytiques lisses, connexes et localement fermées de U telles que ses adhérences dans U sont des sous-ensembles analytiques de U, $X \subseteq \overline{Y} - Y$ et (X, Y) sont deux strates d'une stratification de Whitney (cf. [17, §5]). Alors pour tout point $x_0 \in X$, toute boule ouverte (resp. fermée) B centrée en x_0 de rayon assez petit et tout point $x \in B \cap X$ assez proche de x_0, il existe un nombre réel $\epsilon_x > 0$ tel que l'inclusion dans $B \cap Y$ de l'intersection de Y avec la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et rayon $\epsilon \leq \epsilon_x$ est une équivalence d'homotopie. De plus, $B \cap Y$ a le type d'homotopie d'un complexe simplicial fini de dimension plus petite ou égale à $2\dim(Y)$.*

Corollaire I.4.11.— (Enoncé local) *Avec les hypothèses du théorème précédent, soit* $\mathcal{L}$ *un système local de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels sur* Y *et notons* $j\colon Y \hookrightarrow U$ *l'inclusion. Alors on a les propriétés suivantes:*

1) *Pour tout point* $x_0 \in X$*, toute boule ouverte* B *centrée en* x_0 *de rayon assez petit et tout point* $x \in B \cap X$ *assez proche de* x_0*, les morphismes naturels* $\mathbf{H}^i(B \cap Y, \mathcal{L}) = \mathbf{H}^i(B, \mathbf{R}j_*\mathcal{L}) \rightarrow (\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})_x, i \geq 0$ *sont des isomorphismes.*

2) $(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})_x$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie pour tout point* $x \in X$.

3) *Le complexe* $(\mathbf{R}j_*\mathcal{L})|_X$ *est borné et ses faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*

Preuve.— Comme $(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})_x$ est la limite inductive des $\mathbf{H}^i(B' \cap Y, \mathcal{L})$ par rapport aux boules ouvertes B' centrées en x, la propriété 1) est une conséquence du théorème précédent et du corollaire I.3.5. La propriété 2) est une conséquence de 1) et de la finitude topologique (type d'homotopie d'un complexe simplicial fini) de $B \cap Y$. Voyons la propriété 3). Soit x_0 un point de X, B une boule ouverte centrée en x_0 de rayon assez petit et $W \subset X$ un voisinage ouvert de x_0 dans X tel que pour tout point $x \in W$ et toute boule B' centrée en x de rayon assez petit, l'inclusion $B' \cap Y \hookrightarrow B \cap Y$ est une équivalence d'homotopie. Considérons l'espace vectoriel (de dimension finie) $E = \mathbf{H}^i(B \cap Y, \mathcal{L})$ et le morphisme naturel $E \rightarrow (\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})(W)$. D'après ce qu'on vient de dire, ce morphisme induit des isomorphismes $E \simeq (\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})_x$ pour tout $x \in W$, d'où $(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})|_W$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, isomorphe à E_W (cf. remarque I.1.5). Par conséquent, les faisceaux $(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})|_X, i \geq 0$ sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. $\square$

Corollaire I.4.12.— (Enoncé global) *Soit* X *un espace analytique complexe,* Σ *une stratification de Whitney de* X *et* T *une strate de* Σ*. Notons* $j\colon T \hookrightarrow X$ *l'inclusion. Alors pour tout système local de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels* $\mathcal{L}$ *sur* T*, le complexe* $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}$ *est un complexe constructible (i.e., à cohomologie constructible) par rapport à* Σ.

Preuve.— Il faut démontrer que $(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L})|_S$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour toute strate $S \in \Sigma$. Or, S étant fixée, cette question est locale en S et en X, d'où elle est une conséquence du corollaire précédent. $\square$

I.4.13. Exemple.— Soit $X = \mathbb{C}$ et $T = \{0\}$. Soit E la représentation complexe de dimension finie associée au système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{L}$ sur l'espace pointé $(\mathbb{C}^*, 1)$ (voir I.2.4). Notons $M\colon E \to E$ l'action du générateur "positif" de $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ (voir l'exemple I.2.7). Alors on a des isomorphismes canoniques $(\mathbf{R}^0 j_* \mathcal{L})_0 \simeq \mathrm{Ker}(M)$, $(\mathbf{R}^1 j_* \mathcal{L})_0 \simeq \mathrm{Coker}(M)$ et $\mathbf{R}^i j_* \mathcal{L} = 0$ si $i \geq 2$.

Proposition I.4.14.— (Dévissage des faisceaux constructibles) *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X et Σ une stratification adaptée à $\mathcal{F}$. Alors, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $\mathcal{F}|_U$ admet une filtration finie par des sous-faisceaux constructibles telle que les quotients succéssifs sont de la forme $\sigma_! \mathcal{L}$ avec $\sigma : S \cap U \hookrightarrow U$ l'inclusion (localement fermée), $S \in \Sigma$ et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $S \cap U$.*

Preuve.— Comme la question est locale, on peut supposer que Σ est finie et $x \in \overline{S}$ pour tout $S \in \Sigma$. Prenons dans ce cas $U = X$. Nous allons procéder par récurrence sur $\mathrm{card}(\Sigma)$. Si $\mathrm{card}(\Sigma) = 1$, X est un espace connexe non singulier, $\Sigma = \{X\}$ et $\mathcal{F}$ est déjà un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Supposons le résultat vrai pour $\mathrm{card}(\Sigma) = e \geq 1$. Si $\mathrm{card}(\Sigma) = e+1$ prenons $X_0 \in \Sigma$ une strate ouverte de X. On a $x \notin X_0$. Posons $Y = X - X_0$ le fermé analytique complémentaire et $j\colon X_0 \hookrightarrow X, i\colon Y \hookrightarrow X$ les inclusions. On a une suite exacte

$$0 \to j_! j^{-1} \mathcal{F} \to F \to i_* i^{-1} \mathcal{F} \to 0.$$

$\Sigma' = \Sigma - \{X_0\}$ est une stratification de Y adaptée à $i^{-1}\mathcal{F}$ et $\mathrm{card}(\Sigma') = e$. Par l'hypothèse de récurrence $i_* i^{-1} \mathcal{F}$ admet une filtration finie où les quotients succéssifs sont de la forme $(i \circ \tau)_!(\mathcal{L}) = i_*(\tau_! \mathcal{L})$ avec $\tau : S \hookrightarrow Y$ l'inclusion, $S \in \Sigma'$ et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur S. Or, $j^{-1}\mathcal{F}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X_0, d'où le résultat. $\square$

Proposition I.4.15.— *Soit X un espace analytique complexe, $Y \subseteq X$ un sous-espace analytique fermé, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, Σ une stratification de Whitney de X telle que Y est réunion de strates et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible par rapport à Σ. Alors les faisceaux de cohomologie locale à support $\mathbf{R}^i\Gamma_Y(\mathcal{F})$ et d'image directe $\mathbf{R}^i j_* j^{-1}\mathcal{F}$ sont des faisceaux constructibles sur X par rapport à Σ pour tout $i \geq 0$.*

Preuve.— Par le triangle de cohomologie locale à support (cf. II.4.7)

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R} j_* j^{-1} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

il suffit de démontrer le théorème pour l'image directe. C'est à dire, pour chaque $S \in \Sigma$ et chaque $i \geq 0$, on doit démontrer que $(\mathbf{R}^i j_* j^{-1}\mathcal{F})|_S$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, et ceci, étant un problème local dans X, est une conséquence de la proposition I.4.14 et du corollaire I.4.12. $\square$

Théorème I.4.16.— *Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ un complexe borné de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur U à cohomologie constructible par rapport à une stratification de Whitney Σ de U. Alors pour toute strate $S \in \Sigma$, tout point $x_0 \in S$ et toute boule ouverte B centrée en x_0 et de rayon assez petit, on a que le morphisme naturel $\mathbf{R}\Gamma(B, \boldsymbol{\mathcal{K}}) \to \boldsymbol{\mathcal{K}}_x$ est un (quasi)isomorphisme pour tout $x \in S \cap B$ assez proche de x_0.*

Preuve.— Remarquons que l'on peut se borner aux strates $S \in \Sigma$ qui sont adhérentes à $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}})$, et que, dans ce cas, $S \subseteq \overline{\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}})}$. Nous allons procéder par récurrence sur $\dim \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}})$. Si $\dim \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) = 0$ alors $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ est à support discret, réunion de strates ponctuelles de Σ. Si $S \in \Sigma$ est contenue dans $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) = \overline{\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}})}$ alors S est un point x_0 et il existe une boule ouverte B_0 centrée en x_0 telle que $B_0 \cap \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) = \{x_0\}$, et le théorème est vrai pour toute boule $B \subseteq B_0$ centrée en x_0.

Supposons le théorème vrai chaque fois que $\dim \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) < d$. Soit maintenant $\dim \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) = d$. D'après II.5., il suffit de traiter le cas où $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ est un faisceau constructible. Soient donc $\mathcal{K}$ un faisceau constructible, $S \in \Sigma$ une strate contenue dans $\overline{\operatorname{supp}(\mathcal{K})}$ et $x_0 \in S$. Comme la question est locale et grâce à la proposition I.4.14, on peut supposer que $\mathcal{K} = \sigma_! \mathcal{L}$ où $\sigma : T \hookrightarrow U$ est l'inclusion d'une strate $T \in \Sigma$ telle que $S \subset \overline{T} - T$ et $\mathcal{L}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur T. On a un triangle

$$\sigma_! \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{R}\sigma_* \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}' \xrightarrow{+1}$$

de complexes bornés à cohomologie constructible d'après les propositions I.4.3, I.4.5 et le théorème I.4.11. Or, le support de $\mathcal{K}'$ est contenu dans la frontière de T d'où $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{K}') < d$ et par l'hypothèse de récurrence le résultat est vrai pour $\mathcal{K}'$. D'autre part, le théorème I.4.11, 1) nous fournit le résultat cherché pour le complexe $\mathbf{R}\sigma_* \mathcal{L}$. Le résultat est donc aussi vrai pour le premier terme du triangle $\sigma_! \mathcal{L}$, et la preuve du théorème I.4.16 est terminée. □

Corollaire I.4.17.— (Théorèmes A et B pour les faisceaux constructibles) *Soit X un espace analytique complexe et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X par rapport à une stratification Σ de Whitney de X. Alors pour chaque strate $S \in \Sigma$ et chaque point $x_0 \in S$, il existe un voisinage ouvert connexe V de x_0 tel que les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(A) Le morphisme naturel $\Gamma(V, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_x$ est un isomorphisme pour $x \in S$ assez proche de x_0.

(B) $\mathbf{H}^i(V, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$.

Preuve.— [4] La question, étant locale par rapport au couple (S, x_0), est une conséquence directe du théorème I.4.16. Notons que la connexité de V résulte de la propriété (A). $\square$

I.4.18. Exemple.— Soit $X \subseteq \mathbb{C}$ un disque ouvert centré à l'origine, $j : U = X - \{0\} \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire et $\mathcal{L}$ un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur U. Alors $\mathbf{H}^i(X, j_!\mathcal{L}) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Définition I.4.19.— *Soit X un espace analytique complexe et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. On définit l'ouvert de lissité de $\mathcal{F}$, noté* $\mathrm{reg}(\mathcal{F})$*, comme l'ouvert des points $x \in X$ pour lesquels il existe un voisinage ouvert V tel que, $\mathcal{L}|_V$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Il est clair que* $\mathrm{reg}(\mathcal{F})$ *est le plus grand ouvert de X dont la restriction de $\mathcal{F}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

Théorème I.4.20.— *Soit X un espace analytique complexe et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X par rapport à une stratification de Whitney Σ. Alors $Z = X - \mathrm{reg}(\mathcal{F})$ est réunion de strates de Σ de codimension plus grande ou égale que 1 et donc c'est un sous-ensemble analytique fermé de X dont toute composante irréductible est* <u>*strictement*</u> *contenue dans une composante irréductible de X.*

Preuve.— Montrons que $U = \mathrm{reg}(\mathcal{F})$ est réunion de strates de Σ. Pour cela on doit démontrer que si $S \in \Sigma, S \cap U \neq \emptyset$ alors $S \subseteq U$. Il est clair que toutes les strates ouvertes $S \in \Sigma$ sont contenues dans U. Nous allons procéder par récurrence descendente sur $\dim(S)$.

Si $\dim(S) = \dim(X)$ alors S est une strate ouverte et elle est contenue dans U.

Supposons le résultat vrai si $\dim(S) \geq d+1$. Soit maintenant $S \in \Sigma$ une strate de dimension d telle que $S \cap U \neq \emptyset$. Montrons que $S \cap U$ est un fermé de S, d'où par connexité on aura $S \cap U = S$ et $S \subseteq U$.

Soit $x_0 \in S$ un point adhérent à $S \cap U$. Notons $\Sigma' = \{T \in \Sigma \mid x_0 \in \overline{T}\}$ et soit X' la réunion de toutes les strates de Σ'. Il s'agit d'un voisinage ouvert connexe de x_0 dont Σ' est une stratification (finie) de Whitney et S est la seule strate fermée. Si T est une strate de Σ' différente de S on a, par la condition de frontière, $S \subseteq \overline{T} - T$, d'où $\dim(T) > \dim(S) = d$, $T \cap U \neq \emptyset$, et par l'hypothèse de récurrence, $T \subset U$. Par conséquent, $X' - S \subset U$. D'après le théorème I.4.17 il existe un voisinage ouvert (dans X') connexe $X_0 \subseteq X'$ de x_0 et un voisinage ouvert (dans S) $W \subseteq S \cap X_0$ de

[4] A. Baran propose une démonstration de la propriété (A) pour les faisceaux constructibles, indépendante de la propriété (B) et de la notion de stratification de Whitney. Elle ne fait donc appel au premier theórème d'isotopie de Thom-Whitney.

x_0 tels que

$$\Gamma(X_0, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x \tag{1.1}$$

pour tout $x \in W$.

Soit Σ_0 la stratification de Whitney de X_0 induite par Σ'. Les strates de Σ_0 sont les composantes connexes des traces sur X_0 des strates de Σ'. Soit $S_0 \in \Sigma_0$ la composante connexe de $S \cap X_0$ qui contient x_0. Quitte à restreindre X_0 et Σ_0 nous pouvons supposer que x_0 est adhérent à toutes les strates de Σ_0 et que S_0 est la seule strate fermée, qui est donc contenue dans la frontière des autres strates. Posons $U_0 = U \cap X_0, W_0 = W \cap X_0, \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{X_0}, E = \Gamma(X_0, \mathcal{F})$ et soit $\varphi\colon E_{X_0} \to \mathcal{F}_0$ le morphisme induit par adjonction (cf. I.1.2). Notons $\mathcal{G} = Ker(\varphi), \mathcal{H} = Coker(\varphi)$. Les restrictions de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ à U_0 et S_0 sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et, d'après (1.1), on a $\mathcal{G}|_{W_0} = \mathcal{H}|_{W_0} = 0$, d'où par connexité

$$\mathcal{G}|_{S_0} = \mathcal{H}|_{S_0} = 0. \tag{1.2}$$

Soit T_0 une strate de Σ_0 différente de S_0. Elle est contenue dans U_0. L'espace $\widetilde{T_0} = \overline{T_0} \cap U_0 \supset T_0$ est connexe car T_0 l'est et $W_0 \cap \widetilde{T_0}$ est non vide car x_0 est adhérent à $U \cap S$, donc à $U_0 \cap S_0$ et $\emptyset \neq W_0 \cap U_0 \cap S_0 \subset W_0 \cap \widetilde{T_0}$. Les restrictions de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ à $\widetilde{T_0} \subset U_0$ sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et ses fibres au-dessus de tout point de $W_0 \cap \widetilde{T_0}$ sont nulles. Donc par connexité $\mathcal{G}|_{\widetilde{T_0}} = \mathcal{H}|_{\widetilde{T_0}} = 0$. En particulier, les restrictions de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ à T_0 sont nulles pour toute strate $T_0 \in \Sigma_0$ différente de S_0. Ceci, joint à (1.2), nous donne la nullité de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, par conséquent $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{X_0}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. De là, on déduit $x_0 \in X_0 \subseteq U_0 \subset U \cap S$.

Nous avons donc démontré que $U \cap S$ est fermé dans S et $S \subset U$. Ceci termine la preuve du fait que reg($\mathcal{F}$) et $Z = X -$ reg($\mathcal{F}$) sont réunions de strates de Σ. Comme tous les strates ouvertes sont contenues dans reg($\mathcal{F}$), on a que Z est réunion de strates de Σ de codimension plus grande ou égale à 1. En particulier Z et X n'ont pas des composantes irréductibles communes et la codimension de Z dans X est plus grande ou égale à 1 en tout point. $\square$

Le théorème suivant nous dit que pour un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur un espace analytique, la propriété d'être constructible est locale. Ce résultat jouera un rôle très important dans la preuve que nous donnerons du Théorème de Constructibilité dans le chapitre 3.

Théorème I.4.21.— *Soit $\mathcal{F}$ un faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible.

b) *Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X tel que $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau constructible sur U pour tout $U \in \mathcal{U}$.*

Preuve.— L'implication a) $\Rightarrow$ b) est triviale. Montrons b) $\Rightarrow$ a). On raisonne par récurrence sur $\dim(X)$. Si $\dim(X) = 0$ le résultat est clair. Supposons le résultat vrai pour $\dim(X) \leq d$. Soit X de dimension $d+1$ et pour chaque $U \in \mathcal{U}$ posons $U_0 = \mathrm{reg}(\mathcal{F}|_U)$. Posons aussi $X_0 = \mathrm{reg}(\mathcal{F})$. Il est clair que $X_0 \cap U = U_0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. D'après le théorème I.4.20, $X - X_0$ est un fermé analytique de dimension $\leq d$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{F}|_{X-X_0}$ est un faisceau constructible, d'où le résultat. $\square$

Pour terminer cette section nous allons donner quelques compléments sur certaines opérations des faisceaux constructibles qu'on utilisera dans le chapitre 3.

Proposition I.4.22.— *Soit $p : Y \to X$ un morphisme fini d'espaces analytiques complexes et $\mathcal{F}$ un faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *$\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur Y.*

b) *$p_*\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur X.*

Preuve.— Remarquons que le cas ou p est une immersion fermée est trivial. Comme p est fini, $p(Y)$ est un sous-espace analytique fermé de X et nous pouvons donc supposer que p est surjectif. Dans ce cas il existe une stratification Σ de X telle que pour tout $S \in \Sigma$, $p|_{p^{-1}(S)} : p^{-1}(S) \to S$ est un revêtement fini étale.
a) $\Rightarrow$ b) Soit Λ une stratification de Y adaptée à $\mathcal{F}$. On peut raffiner Σ et Λ de façon que pour tout $S \in \Sigma$, $p^{-1}(S)$ soit une somme disjointe de strates de Λ. D'après la proposition I.2.10, $(p|_{p^{-1}(S)})_*(\mathcal{F}|_{p^{-1}(S)})$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur chaque $S \in \Sigma$. En appliquant la formule de changement de base I.3.1, on obtient la constructibilité de $p_*\mathcal{F}$.
b) $\Rightarrow$ a) On peut supposer que Σ est une stratification adaptée à $p_*\mathcal{F}$. D'après la formule de changement de base et la proposition I.2.10, on a la constructibilité de $\mathcal{F}$ par rapport à la stratification de Y dont les strates sont les composantes connexes des images inverses par p des strates de Σ. $\square$

Si $f : Y \to X$ est un morphisme propre d'espaces analytiques complexes et $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur Y, un résultat général nous dit que les $\mathbf{R}^i f_*\mathcal{F}$ sont des faisceaux constructibles sur X pour $i \geq 0$ (cf. [21]). A part le cas où f est fini, qui a été traité dans la proposition précédente, nous n'aurons besoin de ce résultat que dans le cas particulier suivant

Proposition I.4.23.— *Soit X un espace analytique complexe, $Y = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times X$, $p\colon Y \to X$ la projection et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur $Y = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times X$ tel que le fermé analytique $Z = Y - \mathrm{reg}(\mathcal{F})$ est fini sur X. Alors les $\mathbf{R}^i p_* \mathcal{F}$ sont des faisceaux constructibles sur X pour $i \geq 0$.*

Preuve.— D'après la formule de changement de base I.3.1 et en passant par une stratification Σ de X telle que pour tout $S \in \Sigma$, $p|_{p^{-1}(S)\cap Z} : p^{-1}(S) \cap Z \to S$ est un revêtement fini étale, on peut supposer que X est lisse et que Z est un revêtement fini étale de X. D'après la proposition I.4.21, la question est locale sur la base X et donc il suffit de traiter le cas où X est une boule ouverte de $\mathbb{C}^n$, $Z \subset Y = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times X$ est une somme disjointe d'un nombre fini de fermés analytiques $Z_1, \ldots, Z_d$ isomorphes par p à X, $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur Y tel que $\mathcal{F}|_{Z_i}$ est un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $\mathcal{F}|_{Y-Z}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Dans ce cas, le couple $(p : Y \to X, \mathcal{F})$ est homéomorphe au produit $X \times (p|_{Y_x}\colon Y_x \to \{x\}, \mathcal{F}|_{Y_x})$, $Y_x = p^{-1}(x) = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \{x\}$ pour tout $x \in X$. La proposition I.3.8 nous donne des isomorphismes $\mathbf{H}^i(Y, \mathcal{F}) \simeq \mathbf{H}^i(Y_x, \mathcal{F}|_{Y_x})$ pour tout $i \geq 0$ et $x \in X$. Pour conclure il reste à montrer la finitude de $\mathbf{H}^i(Y_x, \mathcal{F}|_{Y_x})$, qui est l'objet du lemme suivant. □

Lemme I.4.24.— *Si $\mathcal{G}$ est un faisceau constructible sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ alors les espaces $\mathbf{H}^i(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{G})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie pour $i \geq 0$.*

Preuve.— Soit $U = \mathrm{reg}(\mathcal{G})$ et $Y = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - U$ le fermé complémentaire, qui est un sous-ensemble fini. Notons $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ les inclusions et $\mathcal{L} = j^{-1}\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est à support ponctuel, i.e. $\mathcal{L} = 0$, alors $\mathcal{G} = i_* i^{-1}\mathcal{G}$, $\mathbf{H}^0(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{G}) = \mathbf{H}^0(Y, i^{-1}\mathcal{G}) = \bigoplus_{x \in Y} \mathcal{G}_x$ et $\mathbf{H}^i(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{G}) = \mathbf{H}^i(Y, i^{-1}\mathcal{G}) = 0$ pour $i \geq 0$.

Supposons que le support de $\mathcal{G}$ est de dimension 1, i.e. $\mathcal{L} \neq 0$. On a le triangle de cohomologie locale à support II.4.7:

$$\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}j_* \mathcal{L} \xrightarrow{+1}$$

où $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{G}$ et $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}$ sont des complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie constructible concentrés en degrés 0 et 1. De plus, $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{G}$ est à cohomologie à support dans Y. D'après II.5., $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{G})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie de dimension finie. Pour terminer il suffit de voir que $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{R}j_*\mathcal{L}) = \mathbf{R}\Gamma(U, \mathcal{L})$ est aussi à cohomologie de dimension finie. Ceci peut se voir par un calcul de Čech ou bien en tenant compte que U a le type d'homotopie d'un complexe simplicial fini de dimension 1. □

Chapitre II
Catégories et foncteurs dérivés

On se propose dans ce chapitre de donner un formulaire des résultats de la Théorie des Catégories Dérivées et des Foncteurs Dérivés qui peut servir de guide au lecteur. Ce chapitre ne contient pas de démonstrations qui sont parfois de longues vérifications (voir à ce propos [10, 8, 20, 12, 22]). Il est un complément naturel indispensable à la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules et des faisceaux constructibles. On suppose le lecteur familiarisé avec l'Algèbre Homologique classique: catégories abéliennes, foncteurs additifs et foncteurs exactes, objets projectifs et objets injectifs, complexes, foncteurs "Ext" et foncteurs "Tor", etc. (cf. [9]).

II.1. Introduction

Une des motivations principales de l'introduction des catégories et des foncteurs dérivés a été l'étude des formules généralisées de (bi)dualité en Topologie et Géométrie. Partons d'un exemple classique et élémentaire. Soit k un corps et notons $\mathrm{Vect}(k)$ la catégorie abélienne des k-espaces vectoriels. Considérons le foncteur "dualité":

$$\mathbb{D}_k = \mathrm{Hom}_k(-,k) : \mathrm{Vect}(k) \longrightarrow \mathrm{Vect}(k) \tag{2.1}$$

qui associe à chaque espace vectoriel V son dual $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ et à chaque application linéaire $u\colon V \to W$ sa transposée $u^t\colon W^* \to V^*$.

Il existe un morphisme de "bidualité"

$$\mathrm{Bd}_k : \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}(k)} \longrightarrow \mathbb{D}_k \circ \mathbb{D}_k \tag{2.2}$$

défini par

$$\begin{aligned} \mathrm{Bd}_k(V) : v \in V &\mapsto \mathrm{Bd}_k(V)(v) \in (V^*)^* \\ \mathrm{Bd}_k(V)(v) : \theta \in V^* &\mapsto \theta(v) \in k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le résultat qui résume la dualité au niveau des espaces vectoriels est le fait que $\mathrm{Bd}_k(V)$ est un isomorphisme si V est de dimension finie. Autrement dit, le foncteur $\mathbb{D}_k$ est une antiéquivalence de catégories si l'on se restreint à la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie et dont un quasi-inverse est lui même. Ceci nous dit en particulier qu'on peut "récupérer" les espaces vectoriels de dimension finie à partir de ses duaux ainsi que les applications linéaires entres ces espaces à partir de leurs transposées. L'application du foncteur $\mathbb{D}_k$ conserve donc toute l'information des objets de départ, pourvu qu'ils soient de dimension finie.

Si l'on remplace k par un anneau commutatif arbitraire R et $\mathrm{Vect}(k)$ par la catégorie des R-modules R-*Mod*, on dispose aussi d'un foncteur de dualité $\mathbb{D}_R = \mathrm{Hom}_R(-, R)$ comme dans (2.1) et d'un morphisme de bidualité Bd_R défini de façon analogue à (2.2) et (2.3). Si M est un R-module libre de rang fini $\mathrm{Bd}_R(M)$ est aussi un isomorphisme, mais si M n'est pas libre, même s'il est de type fini, $\mathrm{Bd}_R(M)$ n'est pas en général un isomorphisme. Examinons plus en détail le cas où $R = \mathbb{Z}$ et R-*Mod* est la catégorie des groupes abéliens $\mathfrak{Ab}$.

Considérons le groupe abélien $M = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ avec $n \geq 2$. Il est clair que $\mathbb{D}_\mathbb{Z}(M) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n, \mathbb{Z}) = 0$ et donc $\mathrm{Bd}_\mathbb{Z}(M) = 0$. Plus généralement, si M est un groupe abélien de torsion, $\mathbb{D}_\mathbb{Z}(M) = 0$ et donc, dans le passage $M \rightsquigarrow \mathbb{D}_\mathbb{Z}(M)$ il y a une perte totale d'information.

Parallèlement à ce phénomène, il y a une autre différence remarquable entre les foncteurs $\mathbb{D}_\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}_k$, k corps. Si

$$0 \to U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W \to 0$$

est une suite exacte de k-espaces vectoriels alors la suite

$$0 \to W^* \xrightarrow{v^t} V^* \xrightarrow{u^t} U^* \to 0$$

reste exacte, i.e. le foncteur $\mathbb{D}_k$ est un foncteur exact. Or, la situation change pour le foncteur $\mathbb{D}_\mathbb{Z}$. Par exemple, si l'on considère la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n \to 0$$

'$n\cdot$' étant la multiplication par n et v la surjection canonique, en appliquant $\mathbb{D}_\mathbb{Z}$ on obtient une suite isomorphe à

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z} \to 0$$

qui n'est pas exacte, car la multiplication par $n \geq 2$ n'est pas surjective.

Ces deux phénomènes sont liés des façon très étroite. En fait si l'on part du groupe abélien $M = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ avant d'appliquer le foncteur $\mathbb{D}_\mathbb{Z}$ nous pouvons le remplacer par le complexe

$$L^{\cdot} = \cdots \to 0 \to \overset{-1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{n\cdot} \overset{0}{\mathbb{Z}} \to 0 \to \cdots ,$$

concentré en degrés -1 et 0, et puis appliquer $\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}$. Ceci nous conduit à un complexe isomorphe à

$$\cdots \to 0 \to \overset{0}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{n \cdot} \overset{1}{\mathbb{Z}} \to 0 \to \cdots$$

qui n'a de la cohomologie qu'en degré 1. Plus généralement si M est un groupe abélien de type fini arbitraire et $L^{\cdot}$ est une résolution de M par des groupes abéliens libres de rang fini, appelons "dual dérivé de M", noté $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)$, le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L^{\cdot}, \mathbb{Z})$. On peut voir que $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)$ est un complexe qui n'a de la cohomologie qu'en degrés 0 et 1. Si M est libre (resp. de torsion) alors $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0 (resp. 1). Remarquons que le passage $M \rightsquigarrow L^{\cdot}$ ne représente aucune perte d'information, car à partir de $L^{\cdot}$ on recupère M : $M \simeq h^0(L^{\cdot})$. Dans le passage $L^{\cdot} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L^{\cdot}, \mathbb{Z})$ il n'y a pas non plus une perte d'information car $L^{\cdot}$ est formé par des groupes abéliens libres de rang fini et le morphisme de bidualité au niveau de complexes

$$\mathrm{Bd}_{\mathbb{Z}}(L^{\cdot}) : L^{\cdot} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L^{\cdot}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Dans cet approche il se pose alors les questions suivantes:

- l'indépendance, par rapport à la résolution libre $L^{\cdot}$ choisie, de la définition de $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)$,
- la définition de l'action de $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}$ sur les complexes de groupes abéliens, et non seulement sur les groupes abéliens, pour pouvoir l'itérer,
- une bonne notion de morphisme qui permette remplacer M par une résolution $L^{\cdot}$ dans la catégorie correspondante et qui nous fournisse un isomorphisme de bidualité
$$M \simeq \mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)).$$
- la définition de l'action de $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}$ sur les morphismes, pour que $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}$ devienne un foncteur,

La résolution ce ces problèmes et d'autres liés à eux est l'un des buts de la théorie des catégories et des foncteurs dérivés.

II.1.1. Exercice.— En théorie classique de groupes on définit le dual d'un groupe abélien M de type fini et de torsion comme $M^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Établir le rapport entre cette définition et celle de $\mathbf{R}\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M)$.

II.2. Les catégories des complexes d'une catégorie abélienne. Triangles

Dorénavant $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ désignéront deux catégories abéliennes.

II.2.1. Notations et rappels.— Un complexe d'objets de $\mathfrak{A}$ est par définition un couple $(\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d_C^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ où les C^n sont des objets de $\mathfrak{A}$ et les $d_C^n : C^n \to C^{n+1}$ sont des morphismes dans $\mathfrak{A}$ tels que $d_C^n \circ d_C^{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Nous utiliserons les lettres $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$,... pour désigner les complexes. Par exemple, "le complexe $\mathbf{C}$" est une abbréviation de "le complexe $(\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d_C^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$".

Si $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ sont deux complexes d'objets de $\mathfrak{A}$, un morphisme de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ est par définition une famille de morphismes $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^n : C^n \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{A}$ telle que $d_D^n \circ \eta^n = \eta^{n+1} \circ d_C^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Avec la définition évidente de composition de morphismes, on a la catégorie des complexes d'objets de $\mathfrak{A}$, notée $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$. Notons que $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ est aussi une catégorie abélienne.

Le foncteur "translation" $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}} \colon \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ est défini de la façon suivante:

–) $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{C}) := (\{C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{-d_C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}})$ pour $\mathbf{C}$ objet de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$.

–) $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{\eta}) := \{\eta^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $\boldsymbol{\eta} \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ morphisme de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$.

Le foncteur $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}$ est un automorphisme de catégorie abélienne. On écrira souvent $\mathbf{C}[m], \boldsymbol{\eta}[m]$ à la place de $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}^m(\mathbf{C}), \mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}^m(\boldsymbol{\eta})$ pour $m \in \mathbb{Z}$.

Notons $\boldsymbol{C}^+(\mathfrak{A})$ (resp. $\boldsymbol{C}^-(\mathfrak{A})$, $\boldsymbol{C}^b(\mathfrak{A})$) la sous-catégorie abélienne pleine de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ dont les objets sont les complexes $\mathbf{C}$ tels que $C^n = 0$ pour $n \ll 0$ (resp. pour $n \gg 0$, pour $n \ll 0$ et $n \gg 0$). Le foncteur translation $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}} : \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ induit aussi des automorphismes sur les catégories $\boldsymbol{C}^*(\mathfrak{A})$, $* = +, -, b$, notés aussi $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}$.

Si X est un espace topologique et $\mathcal{A}_X$ est un faisceau d'anneaux sur X, on notera $\mathcal{A}_X$-*Mod* (resp. *Mod*-$\mathcal{A}_X$) la catégorie abélienne des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche (resp. à droite) et $\boldsymbol{C}^*(\mathcal{A}_X^{(g)})$ (resp. $\boldsymbol{C}^*(\mathcal{A}_X^{(d)})$) la catégorie $\boldsymbol{C}^*(\mathcal{A}_X\text{-}Mod)$ (resp. $\boldsymbol{C}^*(Mod\text{-}\mathcal{A}_X)$).

La catégorie $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A}^{op})$ s'identifie naturellement à la catégorie $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})^{op}$, en associant à chaque complexe $\mathbf{C}$ dans $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A}^{op})$ le complexe

$$\mathbf{C}_{op} := (\{C_{op}^n = C^{-n}\}, \{d_{C_{op}}^n = d_C^{-n-1}\}).$$

On a $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}^{op}}(\mathbf{C})_{op} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}^{-1}(C_{op})$. Ceci permet aussi d'identifier la catégorie $\boldsymbol{C}^+(\mathfrak{A}^{op})$ (resp. $\boldsymbol{C}^-(\mathfrak{A}^{op})$, $\boldsymbol{C}^b(\mathfrak{A}^{op})$) à $\boldsymbol{C}^-(\mathfrak{A})^{op}$ (resp. $\boldsymbol{C}^+(\mathfrak{A})^{op}$, $\boldsymbol{C}^b(\mathfrak{A})^{op}$).

Si $i \in \mathbb{Z}$ on définit le foncteur "cohomologie i-ième", noté $h^i \colon \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$, de la façon suivante:

– $h^i(\mathbf{C}) := \mathrm{Ker}(d_C^i)/\mathrm{Im}(d_C^{i-1})$ pour tout objet $\mathbf{C}$ de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$

– $h^i(\boldsymbol{\eta}) :=$ morphisme induit par η^i, pour tout morphisme $\boldsymbol{\eta}$ de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$.

II.2.2. Suite exacte longue de cohomologie.— Notons que $h^i = h^0 \circ \mathfrak{t}^i_{\mathfrak{A}}$. Les h^i sont des foncteurs additifs non exacts en général. On a cependant la “suite exacte longue de cohomologie” suivante: Si $\mathcal{S} = 0 \to \mathbf{C}' \xrightarrow{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{C} \xrightarrow{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{C}'' \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$, il existe une famille de morphismes $\{\partial^i(\mathcal{S}) : h^i(\mathbf{C}'') \to h^{i+1}(\mathbf{C}')\}_{i\in\mathbb{Z}}$, naturelle par rapport aux morphismes de suites exactes, telle que la suite

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{i-1}(\mathcal{S})} h^i(\mathbf{C}') \xrightarrow{h^i(\boldsymbol{\eta})} h^i(\mathbf{C}) \xrightarrow{h^i(\boldsymbol{\xi})} h^i(\mathbf{C}'') \xrightarrow{\partial^i(\mathcal{S})} h^{i+1}(\mathbf{C}') \xrightarrow{h^{i+1}(\boldsymbol{\eta})} \cdots$$

est exacte.

II.2.3. Homotopie.— Si $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sont deux morphismes de complexes, une *homotopie* entre $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$ est une famille de morphismes $\{s^n : C^n \to D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\eta^n - \xi^n = d_D^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_C^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On dira que $\boldsymbol{\eta}$ est homotope à $\boldsymbol{\xi}$, noté $\boldsymbol{\eta} \sim \boldsymbol{\xi}$, s'il existe une homotopie entre les deux. La relation “être homotope à” est une relation d'équivalence entre les morphismes de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ qui est compatible avec la composition et l'addition.

On définit la catégorie des complexes d'objets de $\mathfrak{A}$ modulo homotopie, notée $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$, comme la catégorie quotient de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ par la relation d'équivalence $\sim$. Ses objets sont les mêmes que les objets de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ et ses morphismes sont ceux de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ modulo $\sim$. Il s'agit d'une catégorie additive non abélienne en général. On définit de la façon évidente les sous-catégories additives pleines $\boldsymbol{K}^*(\mathfrak{A}) \subset \boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ pour $* = +, -, b$. Notons que le foncteur translation $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}} : \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ passe au quotient et définit des automorphismes additifs de $\boldsymbol{K}^*(\mathfrak{A})$, pour $* = \emptyset, +, -, b$, tous notés aussi $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}$. De même, les foncteurs “cohomologie” $h^i : \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ passent au quotient et induisent des foncteurs de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ dans $\mathfrak{A}$, aussi notés h^i.

Si X est un espace topologique et $\mathcal{A}_X$ est un faisceau d'anneaux sur X, on notera $\boldsymbol{K}^*(\mathcal{A}_X^{(g)})$ (resp. $\boldsymbol{K}^*(\mathcal{A}_X^{(d)})$) la catégorie $\boldsymbol{K}^*(\mathcal{A}_X\text{-}Mod)$ (resp. $\boldsymbol{K}^*(Mod\text{-}\mathcal{A}_X)$).

Les identifications naturelles au niveau des catégories de complexes nous fournissent des identifications entre $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A}^{op})$ (resp. $\boldsymbol{K}^+(\mathfrak{A}^{op})$, $\boldsymbol{K}^-(\mathfrak{A}^{op})$, $\boldsymbol{K}^b(\mathfrak{A}^{op})$) et $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})^{op}$ (resp. $\boldsymbol{K}^-(\mathfrak{A})^{op}$, $\boldsymbol{K}^+(\mathfrak{A})^{op}$, $\boldsymbol{K}^b(\mathfrak{A})^{op}$).

II.2.4. Cône d'un morphisme de complexes.— Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux complexes d'objets de $\mathfrak{A}$ et $\boldsymbol{\eta} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un morphisme. On définit le cône de $\boldsymbol{\eta}$, noté $\mathbf{c}(\boldsymbol{\eta})$, comme le complexe

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\eta}) := \left(\{D^n \oplus C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \left\{ \begin{pmatrix} d_D^n & \eta^{n+1} \\ 0 & -d_C^{n+1} \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \right).$$

Notons $\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})\colon \mathbf{D}\to\mathbf{c}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{w}(\boldsymbol{\eta})\colon \mathbf{c}(\boldsymbol{\eta})\to\mathbf{C}[1]$ les morphismes évidents.

II.2.5. Triangles distingués.— Un triangle de la catégorie $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ (par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}$) est un diagramme du type

$$\mathbf{C}\to\mathbf{C}'\to\mathbf{C}''\to\mathbf{C}[1]=\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{C}).$$

On a la notion évidente de morphisme de triangles et donc d'isomorphisme. On utilisera souvent la notation $\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}'\longrightarrow\mathbf{C}''\xrightarrow{+1}$ pour désigner les triangles.

Etant donné un morphisme de complexes $\boldsymbol{\eta}:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, on définit le "triangle associé à $\boldsymbol{\eta}$", noté $T_{\boldsymbol{\eta}}$, comme le diagramme de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$

$$\mathbf{C}\xrightarrow{[\boldsymbol{\eta}]}\mathbf{D}\xrightarrow{[\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})]}\mathbf{c}(\boldsymbol{\eta})\xrightarrow{[\mathbf{w}(\boldsymbol{\eta})]}\mathbf{C}[1]$$

Nous dirons qu'un triangle de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ est distingué s'il est isomorphe à un $T_{\boldsymbol{\eta}}$. Si $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ sont homotopes alors $T_{\boldsymbol{\eta}}\simeq T_{\boldsymbol{\xi}}$.

La classe $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ des triangles (par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}$) distingués de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ vérifie les propriétés suivantes:

(TR1) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Tout morphisme $\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ dans $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ peut être completé en un triangle distingué $\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}'\longrightarrow\mathbf{C}''\xrightarrow{+1}$. Pour tout complexe $\mathbf{C}$, le triangle

$$\mathbf{C}\xrightarrow{1_{\mathrm{C}}}\mathbf{C}\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbf{C}[1]$$

est distingué.

(TR2) Le triangle $\mathbf{C}\xrightarrow{\mathbf{u}}\mathbf{C}'\xrightarrow{\mathbf{u}'}\mathbf{C}''\xrightarrow{\mathbf{u}''}\mathbf{C}[1]$ est distingué si et seulement si $\mathbf{C}'\xrightarrow{\mathbf{u}'}\mathbf{C}''\xrightarrow{\mathbf{u}''}\mathbf{C}[1]\xrightarrow{-\mathbf{u}[1]}\mathbf{C}'[1]$ l'est aussi.

(TR3) Etant donnés deux triangles distingués $T=\mathbf{C}\xrightarrow{a}\mathbf{C}'\xrightarrow{a'}\mathbf{C}''\xrightarrow{a''}\mathbf{C}[1]$, $T'=\mathbf{D}\xrightarrow{b}\mathbf{D}'\xrightarrow{b'}\mathbf{D}''\xrightarrow{b''}\mathbf{D}[1]$ et deux morphismes $f\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}, g\colon\mathbf{C}'\to\mathbf{D}'$ tels que $g\circ a=b\circ f$, il existe un morphisme $h:\mathbf{C}''\to\mathbf{D}''$, non unique en général, tel que (f,g,h) est un morphisme de triangles de T dans T'.

(TR4) Etant donnés trois triangles distingués $T=\mathbf{C}\xrightarrow{a}\mathbf{C}'\xrightarrow{a'}\mathbf{C}''\longrightarrow\mathbf{C}[1], T'=\mathbf{C}'\xrightarrow{b}\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}'\xrightarrow{b'}\mathbf{C}'[1], T''=\mathbf{C}\xrightarrow{b\circ a}\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}''\longrightarrow\mathbf{C}[1]$ il existe deux morphismes $f:\mathbf{C}''\to\mathbf{D}'', g:\mathbf{D}''\to\mathbf{D}'$ tels que $(1_{\mathrm{C}},b,f):T\to T'', (a,1_{\mathrm{D}},g):T''\to T'$ sont des morphismes de triangles et $\mathbf{C}''\xrightarrow{f}\mathbf{D}''\xrightarrow{g}\mathbf{D}'\xrightarrow{a'[1]\circ b'}\mathbf{C}''[1]$ est un triangle distingué.

Si $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}'' \xrightarrow{+1}$ est un triangle distingué de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$, on a une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to h^i(\mathbf{C}) \to h^i(\mathbf{C}') \to h^i(\mathbf{C}'') \to h^i(\mathbf{C}[1]) = h^{i+1}(\mathbf{C}) \to \cdots .$$

Voici le rapport entre les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes de complexes de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$ et aux triangles de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$. Si $\mathcal{S} = 0 \to \mathbf{C}' \xrightarrow{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{C} \xrightarrow{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{C}'' \to 0$ est une suite exacte dans $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$, on peut définir de façon évidente un morphisme de complexes $\boldsymbol{\zeta} : \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) \to \mathbf{C}''$ tel que $\boldsymbol{\zeta} \circ \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}$ et $h^i(\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})) \circ h^i(\boldsymbol{\zeta}) = \partial^i(\mathcal{S})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. D'après le "lemme des cinq", tous les $h^i(\boldsymbol{\zeta})$ sont des isomorphismes.

On appelle catégorie triangulée une catégorie additive $\mathfrak{L}$ munie d'un automorphisme additif $\mathfrak{s}$ et d'une classe de triangles par rapport à $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$, vérifiant les propriétés (TR1)-(TR4).

Si $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ est une catégorie triangulée, on peut considérer sur la catégorie additive oposée de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^{op}$, une structure naturelle de catégorie triangulée. Pour cela, il suffit de considérer l'automorphisme $\mathfrak{s}^{op} := \mathfrak{s}^{-1}$ de $\mathfrak{L}^{op}$ et la classe de triangles de $\mathfrak{L}^{op}$ (par rapport à $\mathfrak{s}^{op}$) $\mathfrak{S}^{op}$ définie de la façon suivante: un triangle $A \xrightarrow{a} A' \xrightarrow{a'} A'' \xrightarrow{a''} \mathfrak{s}^{op}(A)$ de $\mathfrak{L}^{op}$ appartient à $\mathfrak{S}^{op}$ si et seulement si le triangle $\mathfrak{s}^{-1}(A) \xrightarrow{a''} A'' \xrightarrow{a'} A' \xrightarrow{a} \mathfrak{s}(\mathfrak{s}^{-1}(A)) = A$ appartient à $\mathfrak{S}$. On appelle "catégorie triangulée oposée" de $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$, notée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})^{op}$, la catégorie triangulée ainsi construite.

Un "∂-foncteur covariant" de la catégorie triangulée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ dans la catégorie triangulée $(\mathfrak{L}', \mathfrak{s}', \mathfrak{S}')$ est un foncteur covariant additif $F : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ tel que $\mathfrak{s}' \circ F \simeq F \circ \mathfrak{s}$ et F transforme les triangles de $\mathfrak{S}$ dans des triangles de $\mathfrak{S}'$. Un "∂-foncteur contravariant" de $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ dans $(\mathfrak{L}', \mathfrak{s}', \mathfrak{S}')$ est un foncteur contravariant additif $F : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ tel que le foncteur covariant induit $F : \mathfrak{L}^{op} \to \mathfrak{L}'$ est un ∂-foncteur covariant de $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})^{op}$ dans $(\mathfrak{L}', \mathfrak{s}', \mathfrak{S}')$.

Notons qu'on a une identification naturelle entre les catégories $(\boldsymbol{K}(\mathfrak{A}^{op}), \mathfrak{t}_{\mathfrak{A}^{op}}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{A}^{op}})$ et $(\boldsymbol{K}(\mathfrak{A}), \mathfrak{t}_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{A}})^{op}$. Cette identification est en fait un "isomorphisme de catégories triangulées", i.e. un ∂-foncteur inversible, dont l'inverse est aussi un ∂-foncteur.

Un "foncteur cohomologique" covariant de la catégorie triangulée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ dans la catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ est un foncteur covariant additif $H : \mathfrak{L} \to \mathfrak{A}$ tel que si $C \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \xrightarrow{+1}$ est un triangle de $\mathfrak{S}$ alors la suite longue

$$\cdots \to H(\mathfrak{s}^i(C)) \to H(\mathfrak{s}^i(C')) \to H(\mathfrak{s}^i(C'')) \to H(\mathfrak{s}^{i+1}(C)) \to \cdots$$

est exacte. On définit de façon analogue les "foncteurs cohomologiques contravariants".

II.2.6. Exemple.—

a) Un foncteur additif covariant (resp. contravariant) entre deux catégories abéliennes $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ induit naturellement un ∂-foncteur covariant (resp. contravariant) entre les catégories des complexes modulo homotopie, qui sera aussi noté $F\colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{B})$.

b) Le foncteur de cohomologie 0-ième $h^0\colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ est un foncteur cohomologique covariant.

c) Si $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ est une catégorie triangulée et C est un objet de $\mathfrak{L}$, alors le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{L}}(C, -)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{L}}(-, C)$) est un foncteur cohomologique covariant (resp. contravariant) de $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ dans $\mathfrak{Ab}$.

d) On définit le bifoncteur biadditif covariant

$$\mathrm{Hom}^\bullet(-,-)\colon \boldsymbol{C}(\mathfrak{A})^{op} \times \boldsymbol{C}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \boldsymbol{C}(\mathfrak{Ab})$$

de la façon suivante:

– Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des objets de $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$, alors $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est le complexe $\mathbf{C}$, où

$$C^n = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A^p, B^{n+p})$$

$$d_C^n : \{p \in \mathbb{Z} \mapsto \alpha_p\} \in C^n \mapsto \{p \in \mathbb{Z} \mapsto d_B^{p+n} \circ \alpha_p + (-1)^{n+1} \alpha_{p+1} \circ d_A^p\} \in C^{n+1}.$$

– Si $\mathbf{u} \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})^{op}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1)$, $\mathbf{v} \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_1)$, alors $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est le morphisme $\boldsymbol{\eta}$ donné par

$$\eta^n : \{p \in \mathbb{Z} \mapsto \alpha_p\} \mapsto \{p \in \mathbb{Z} \mapsto v^{n+p} \circ \alpha_p \circ u^p\}.$$

On vérifie que $\mathrm{Hom}^\bullet(-,-)$ passe au quotient et définit un bifoncteur additif covariant de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})^{op} \times \boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ dans $\boldsymbol{K}(\mathfrak{Ab})$.

Si $\mathbf{A}$ est un objet de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ fixé, les foncteurs $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbf{A}, -)\colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{Ab})$ et $\mathrm{Hom}^\bullet(-, \mathbf{A})\colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A})^{op} \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{Ab})$ sont des ∂-foncteurs covariants.

e) Soit X un espace topologique et $\mathcal{A}_X$ un faisceau d'anneaux sur X. On peut définir un bifoncteur biadditif covariant

$$\mathit{Hom}^\bullet(-,-)\colon \boldsymbol{K}(\mathcal{A}_X^{(g)})^{op} \times \boldsymbol{K}(\mathcal{A}_X^{(g)}) \to \boldsymbol{K}(\mathbb{Z}_X)$$

comme dans d) en utilisant $\mathit{Hom}_{\mathcal{A}_X}(-,-)$ à la place de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_X}(-,-)$. Ce bifoncteur est aussi un ∂-foncteur en chaque variable.

f) Dans la situation précédente, on définit le bifoncteur biadditif covariant $-\otimes^{\bullet}_{\mathcal{A}_X} -\colon \boldsymbol{C}(\mathcal{A}_X^{(d)}) \times \boldsymbol{C}(\mathcal{A}_X^{(g)}) \to \boldsymbol{C}(\mathbb{Z}_X)$ de la façon suivante:

– Si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est un objet $\boldsymbol{C}(\mathcal{A}_X^{(d)})$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ un objet de $\boldsymbol{C}(\mathcal{A}_X^{(g)})$, alors $\boldsymbol{\mathcal{A}} \otimes^{\bullet}_{\mathcal{A}_X} \boldsymbol{\mathcal{B}}$ est le complexe $\mathfrak{C}$, où
$$\mathcal{C}^n = \bigoplus_{p+q=n} (\mathcal{A}^p \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{B}^q)$$
$$d^n_{\mathcal{C}}(a \otimes b) = d^p_{\mathcal{A}}(a) \otimes b + (-1)^n a \otimes d^q_{\mathcal{B}}(b), \quad a \in \mathcal{A}^p, b \in \mathcal{B}^q.$$

– L'action sur les morphismes est l'action évidente.

On vérifie que $- \otimes^{\bullet}_{\mathcal{A}_X} -$ passe au quotient et définit un bifoncteur additif covariant de $\boldsymbol{K}(\mathcal{A}_X^{(d)}) \times \boldsymbol{K}(\mathcal{A}_X^{(g)})$ dans $\boldsymbol{K}(\mathbb{Z}_X)$. Ce bifoncteur est aussi un ∂-foncteur en chaque variable.

II.2.7. Sous-catégories triangulées.— Une sous-catégorie pleine $\mathfrak{L}'$ d'une catégorie triangulée $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ est dite sous-catégorie triangulée si elle additive, $\mathfrak{s}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{L}'$ et si tout triangle de $\mathfrak{S}$ dont deux des objets sont des objets de $\mathfrak{L}'$, est isomorphe à un triangle dont les trois objets sont des objets de $\mathfrak{L}'$.

Soit $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ une sous-catégorie abélienne pleine stable par extension, i.e. si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\mathfrak{A}$ avec A', A'' objets de $\mathfrak{A}'$, alors A est aussi un objet de $\mathfrak{A}'$. Notons $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{K}^*(\mathfrak{A})$ dont les objets sont les complexes $\mathbf{C}$ tels que $h^i(\mathbf{C})$ est un objet de $\mathfrak{A}'$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, pour $* = \emptyset, +, -, b$. Il est clair que les $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ sont des sous-catégories triangulées de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$.

Notons que les catégories triangulées
$$\boldsymbol{K}_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op}),\ \boldsymbol{K}^+_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op}),\ \boldsymbol{K}^-_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op}),\ \boldsymbol{K}^b_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op})$$
sont isomorphes naturellement, en tant que catégories triangulées, aux catégories
$$\boldsymbol{K}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op},\ \boldsymbol{K}^-_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op},\ \boldsymbol{K}^+_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op},\ \boldsymbol{K}^b_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op}$$
respectivement.

II.2.8. Exemple.— Voici quelques exemples des catégories $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ vérifiant les propriétés précédentes:

– $\mathfrak{A}$ = catégorie des espaces vectoriels sur un corps k, $\mathfrak{A}'$ = catégorie des espaces vectoriels de dimension finie.

– $\mathfrak{A}$ = catégorie des modules sur un anneau noethérien R, $\mathfrak{A}'$ = catégorie des R-modules de type fini.

– $\mathfrak{A}$ = catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur un espace analytique X, $\mathfrak{A}'$ = catégorie des faisceaux constructibles sur X. Dans ce cas on note $\boldsymbol{K}^*_c(\mathbb{C}_X)$ la catégorie $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

– $\mathfrak{A}$ = catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules sur une variété analytique complexe X, $\mathfrak{A}'$ = catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents (resp. holonomes). Dans ce cas on note $\boldsymbol{K}^*_{coh}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\boldsymbol{K}^*_h(\mathcal{D}_X)$) la catégorie $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

– Plus généralement, $\mathfrak{A}$ = catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche (resp. à droite) sur un faisceau d'anneaux cohérents $\mathcal{A}_X$ sur un espace topologique X, $\mathfrak{A}'$ = catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche (resp. à droite) cohérents. Dans ce cas on note $\boldsymbol{K}^*_{coh}(\mathcal{A}^{(g)}_X)$ (resp. $\boldsymbol{K}^*_{coh}(\mathcal{A}^{(d)}_X)$) la catégorie $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

II.3. Localisation de catégories

Nous allons rappeler le procédé qui permet de passer d'une catégorie à une autre en inversant formellement une classe de morphismes. Ce procédé est l'analogue de la construction des anneaux de fractions. Nous n'allons pas nous placer dans une situation très générale, mais simplement celle qui conduit aux catégories dérivées des catégories abéliennes via les catégories des complexes modulo homotopie. Dans les sections qui suivent $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ désignera une sous-catégorie abélienne pleine stable par extensions.

Un quasi-isomorphisme dans $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ est un morphisme $u\colon \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ tel que $h^i(u)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Notons $\mathfrak{Qi}$ la classe des quasi-isomorphismes de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$. On a les propriétés suivantes:

(FR1) $\mathfrak{Qi}$ est stable par composition. Pour tout complexe $\mathbf{C}$, $1_\mathbf{C}$ appartient à $\mathfrak{Qi}$.

(FR2) Si $s : \mathbf{D}'\to\mathbf{D}, u : \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ sont deux morphismes avec $s \in \mathfrak{Qi}$, il existe deux morphismes $t\colon \mathbf{C}'\to\mathbf{C}, v\colon \mathbf{C}'\to\mathbf{D}'$ avec $t \in \mathfrak{Qi}$ et $u \circ t = s \circ v$. Même propriété avec les flèches renversées.

(FR3) Si $u, v\colon \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ sont deux morphismes, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe $s \in \mathfrak{Qi}$ tel que $s \circ u = s \circ v$.

(ii) Il existe $t \in \mathfrak{Qi}$ tel que $u \circ t = v \circ t$.

(FR4) Un morphisme u appartient à $\mathfrak{Qi}$ si et seulement si $\mathfrak{t}(u)$ appartient à $\mathfrak{Qi}$.

(FR5) Si $\mathbf{C}_i \xrightarrow{u_i} \mathbf{C}'_i \longrightarrow \mathbf{C}''_i \longrightarrow \mathbf{C}_i[1], i = 1,2$ sont deux triangles distingués et $s\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2, s'\colon \mathbf{C}'_1 \to \mathbf{C}'_2$ sont deux morphismes de $\mathfrak{Qi}$ tels que $s' \circ u_1 = u_2 \circ s$ il existe $s''\colon \mathbf{C}''_1 \to \mathbf{C}''_2$ dans $\mathfrak{Qi}$ tel que (s, s', s'') est un morphisme de triangles.

(sat) Un morphisme u appartient à $\mathfrak{Qi}$ si et seulement si il existe deux morphismes a et b tels que $a \circ u$ et $u \circ b$ appartiennent à $\mathfrak{Qi}$.

On a aussi des définitions et des résultats analogues pour les sous-catégories $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$.

Une classe de morphismes d'une catégorie vérifiant les propriétés (FR1), (FR2), (FR3) s'appelle "système multiplicatif". Si cette classe vérifie (sat) on dit qu'elle est "saturée". Si la catégorie est triangulée et la classe vérifie aussi (FR4), (FR5) on dit qu'elle est compatible avec la structure triangulée.

II.3.1. Exemple.— Si $(\mathfrak{L}, \mathfrak{s}, \mathfrak{S})$ est une catégorie triangulée et $H : \mathfrak{L} \to \mathfrak{A}$ est un foncteur cohomologique, alors la classe des morphismes u de $\mathfrak{L}$ tels que $H(\mathfrak{s}^i(u))$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$ est un système multiplicatif saturé compatible avec la structure triangulée.

II.3.2. Construction des catégories dérivées.— Etant donnée $\mathbf{C}, \mathbf{E}$ objets de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ et deux diagrammes $\mathcal{D} = \mathbf{C} \overset{s}{\leftarrow} \mathbf{D} \overset{u}{\rightarrow} \mathbf{E}, \mathcal{D}' = \mathbf{C} \overset{s'}{\leftarrow} \mathbf{D}' \overset{u'}{\rightarrow} \mathbf{E}$ dans $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$, avec s, s' quasi-isomorphismes, nous dirons que $\mathcal{D}$ est équivalent à $\mathcal{D}'$, noté $\mathcal{D} \backsim \mathcal{D}'$, s'il existe un autre diagramme du même type $\mathcal{D}'' = \mathbf{C} \overset{s''}{\leftarrow} \mathbf{D}'' \overset{u''}{\rightarrow} \mathbf{E}$ et deux morphismes $a : \mathbf{D}'' \to \mathbf{D}, b : \mathbf{D}'' \to \mathbf{D}'$ tels que $(1_{\mathrm{C}}, a, 1_{\mathrm{E}}), (1_{\mathrm{C}}, b, 1_{\mathrm{E}})$ sont des morphismes de diagrammes. On peut voir facilement que $\backsim$ est une relation d'équivalence entre tels diagrammes. On définit la catégorie dérivée de $\mathfrak{A}$, notée $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$, comme la catégorie dont les objets sonts les objets de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ et si $\mathbf{C}, \mathbf{E}$ sont deux complexes d'objets de $\mathfrak{A}$, un morphisme de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ est une classe d'équivalence par rapport à $\backsim$ de diagrammes du type précédent. La composition et l'addition de morphismes sont définies de la façon suivante: soit $\mathcal{D}_1 = \mathbf{C} \overset{s_1}{\leftarrow} \mathbf{D}_1 \overset{u_1}{\rightarrow} \mathbf{E}, \mathcal{D}_2 = \mathbf{E} \overset{s_2}{\leftarrow} \mathbf{D}_2 \overset{u_2}{\rightarrow} \mathbf{F}$ deux diagrammes du type précédent. D'après la propriété (FR2), il existe des morphismes $s_3 : \mathbf{D}_3 \to \mathbf{D}_1, u_3 : \mathbf{D}_3 \to \mathbf{D}_2$ avec $s_3 \in \mathfrak{Qi}$ et tels que $u_1 \circ s_3 = s_2 \circ u_3$. La classe d'équivalence du diagramme $\mathcal{D}_3 = \mathbf{C} \overset{s_1 \circ s_3}{\longleftarrow} \mathbf{D}_3 \overset{u_2 \circ u_3}{\longrightarrow} \mathbf{F}$, $[\mathcal{D}_3]$, ne dépend que des classe $[\mathcal{D}_1]$ et $[\mathcal{D}_2]$. Cette classe s'appelle "composition de $[\mathcal{D}_2]$ avec $[\mathcal{D}_1]$" et l'on note $[\mathcal{D}_3] = [\mathcal{D}_2] \circ [\mathcal{D}_1]$.

Soit $\mathcal{D} = \mathbf{C} \overset{s}{\leftarrow} \mathbf{D} \overset{u}{\rightarrow} \mathbf{E}, \mathcal{D}' = \mathbf{C} \overset{s'}{\leftarrow} \mathbf{D}' \overset{u'}{\rightarrow} \mathbf{E}$ deux diagrammes du type précédent. D'après la propriété (FR1) (avec les flèches renversées), il existe des morphismes v et $t \in \mathfrak{Qi}$ tels que $t \circ u = v \circ s$. Par la même propriété, il existe des morphismes v' et $t' \in \mathfrak{Qi}$ tels que $v' \circ s' = t' \circ (t \circ u')$, puis des morphismes u'' et

$s'' \in \mathfrak{Qi}$ tels que $(t' \circ t) \circ u'' = (t' \circ v + v') \circ s''$. La classe d'équivalence du diagramme $\mathcal{D}'' = \mathbf{C} \overset{s''}{\leftarrow} \mathbf{D}'' \overset{u''}{\rightarrow} \mathbf{E}$ ne dépend que des classes $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{D}']$. Cette classe s'appelle "somme de $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{D}']$" et l'on note $[\mathcal{D}''] = [\mathcal{D}] + [\mathcal{D}']$.

La catégorie $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ est donc une catégorie additive. Soit $Q_{\mathfrak{A}} \colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \mathbf{D}(\mathfrak{A})$ le foncteur qui est l'identité sur les objets et qui à un morphisme $u \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ associe la classe du diagramme $\mathbf{C} \overset{1_C}{\leftarrow} \mathbf{C} \overset{u}{\rightarrow} \mathbf{D}$. Le foncteur $Q_{\mathfrak{A}}$ est additif et transforme les quasi-isomorphismes dans des isomorphismes. Grâce aux propriétés (FR4) et (FR5), la catégorie $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ ainsi construite hérite d'une structure de catégorie triangulée en prenant l'automorphisme induit par $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}} \colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$, aussi noté $\mathfrak{t}_{\mathfrak{A}} \colon \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \to \mathbf{D}(\mathfrak{A})$ et la classe des triangles: image essentielle par $Q_{\mathfrak{A}}$ des triangles distingués de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$. Le foncteur $Q_{\mathfrak{A}}$ est un ∂-foncteur qui vérifie la propriété universelle suivante

(U) Si $\mathfrak{L}$ est une catégorie (resp. additive, triangulée) et $Q' : \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{L}$ est un foncteur (resp. additif, ∂-foncteur) tel que $Q'(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in \mathfrak{Qi}$, il existe alors un seul foncteur (resp. additif, ∂-foncteur) $G \colon \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{L}$ tel que $G \circ Q_{\mathfrak{A}} \simeq Q'$.

Le couple $(\mathbf{D}(\mathfrak{A}), Q_{\mathfrak{A}})$ s'appelle "la localisation de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$ par rapport au système multiplicatif $\mathfrak{Qi}$".

Si $\mathcal{S} = 0 \to \mathbf{C}' \overset{\boldsymbol{\xi}}{\rightarrow} \mathbf{C} \overset{\boldsymbol{\eta}}{\rightarrow} \mathbf{C}'' \to 0$ est une suite exacte dans $\boldsymbol{C}(\mathfrak{A})$, on a vu dans II.2.5 l'existence d'un quasi-isomorphisme $\boldsymbol{\zeta} \colon \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) \to \mathbf{C}''$ tel que

$$\mathbf{C}' \xrightarrow{\xi} \mathbf{C} \xrightarrow{\eta} \mathbf{C}'' \xrightarrow{\mu} \mathbf{C}'[1]$$

$$\xi = Q_{\mathfrak{A}}([\boldsymbol{\xi}]), \eta = Q_{\mathfrak{A}}([\boldsymbol{\eta}]), \mu = Q_{\mathfrak{A}}([\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})]) \circ Q_{\mathfrak{A}}([\boldsymbol{\zeta}])^{-1}$$

est un triangle dans $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$. En fait tous les triangles dans $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ sont obtenus par ce procédé, mais non ceux de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{A})$.

La propriété universelle (U) appliquée aux foncteurs de cohomologie $h^i \colon \boldsymbol{K}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ nous fournit des foncteurs de cohomologie de $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ dans $\mathfrak{A}$, aussi notés h^i.

La construction précédente s'applique également aux catégories $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$. On notera $\mathbf{D}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ dont les objets sont ceux de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$, pour $* = \emptyset, +, -, b$. On peut voir que la localisation de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes s'identifie de façon naturelle avec $\mathbf{D}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

Les catégories triangulées $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op})$, $\mathbf{D}^+_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op})$, $\mathbf{D}^-_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op})$, $\mathbf{D}^b_{\mathfrak{A}'^{op}}(\mathfrak{A}^{op})$ sont isomorphes naturellement, en tant que catégories triangulées, aux catégories $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op}$, $\mathbf{D}^-_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op}$, $\mathbf{D}^+_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op}$, $\mathbf{D}^b_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})^{op}$ respectivement.

II.3.3. Exemple.—

- Si $\mathfrak{A}$ = catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur un espace analytique X, et $\mathfrak{A}'$ = catégorie des faisceaux constructibles sur X, on note $\mathbf{D}_c^*(\mathbb{C}_X)$ la catégorie $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})$.
- Si $\mathfrak{A}$ = catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules sur une variété analytique complexe X, et $\mathfrak{A}'$ = catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents (resp. holonomes), on note $\mathbf{D}_{coh}^*(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\mathbf{D}_h^*(\mathcal{D}_X)$) la catégorie $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})$.
- Plus généralement, si $\mathfrak{A}$ = catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche (resp. à droite) sur un faisceau d'anneaux cohérents $\mathcal{A}_X$ sur un espace topologique X, et $\mathfrak{A}'$ = catégorie des $\mathcal{A}_X$-modules à gauche (resp. à droite) cohérents, on note $\mathbf{D}_{coh}^*(\mathcal{A}_X^{(g)})$ (resp. $\mathbf{D}_{coh}^*(\mathcal{A}_X^{(d)})$) la catégorie $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})$.

II.3.4. Exercice.— Montrer que le foncteur évident $I\colon \mathfrak{A}\to\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ qui associe à chaque objet A le complexe qui coïncide avec A en degré 0 et qui est nul en dehors de 0, établit une équivalence de catégories entre $\mathfrak{A}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(\mathfrak{A})$ dont les objets sont les complexes $\mathbf{C}$ tels que $h^i(\mathbf{C}) = 0$ pour $i \neq 0$.

II.4. Foncteurs dérivés

Soit $F : \boldsymbol{K}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})\to\boldsymbol{K}(\mathfrak{B})$ un ∂-foncteur covariant, par exemple le ∂-foncteur induit par un foncteur additif covariant de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Un foncteur dérivé à gauche (resp. à droite) de F est un couple $(\mathbf{R}_{\mathfrak{A}'}^*F,\xi)$ (resp. $(\mathbf{L}_{\mathfrak{A}'}^*F,\eta)$) où

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{A}'}^*F\colon \mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})\to\mathbf{D}(\mathfrak{B}) \quad (\text{resp.}\quad \mathbf{L}_{\mathfrak{A}'}^*F\colon \mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})\to\mathbf{D}(\mathfrak{B}))$$

est un ∂-foncteur covariant et $\xi\colon Q_{\mathfrak{B}}\circ F\to\mathbf{R}_{\mathfrak{A}'}^*F\circ Q_{\mathfrak{A}}$ (resp. $\eta\colon \mathbf{L}_{\mathfrak{A}'}^*F\circ Q_{\mathfrak{A}}\to Q_{\mathfrak{B}}\circ F$) est un morphisme de foncteurs tel que si $G : \mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}^*(\mathfrak{A})\to\mathbf{D}(\mathfrak{B})$ est un ∂-foncteur et $\xi'\colon Q_{\mathfrak{B}}\circ F\to G\circ Q_{\mathfrak{A}}$ (resp. $\eta'\colon G\circ Q_{\mathfrak{A}}\to Q_{\mathfrak{B}}\circ F$) est un morphisme de foncteurs, il existe un seul morphisme $\mu\colon \mathbf{R}_{\mathfrak{A}'}^*F\to G$ (resp. $\nu\colon G\to\mathbf{L}_{\mathfrak{A}'}^*F$) tel que $\xi' = (\mu\circ Q_{\mathfrak{A}})\circ\xi$ (resp. $\eta' = \eta\circ(\nu\circ Q_{\mathfrak{A}})$).

S'il n'y a pas danger de confusion, on écrira $\mathbf{R}F$ ou $\mathbf{R}^*F$ (resp. $\mathbf{L}F$ ou $\mathbf{L}^*F$) à la place de $\mathbf{R}_{\mathfrak{A}'}^*F$ (resp. $\mathbf{L}_{\mathfrak{A}'}^*F$).

On peut traiter aussi le cas des foncteurs contravariants en utilisant la "commutation" des formations des catégories dérivées et catégories oposées.

II.4.1. Exemple.— Si $F\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ est un foncteur exact, alors le foncteur induit sur les catégories de complexes modulo homotopie, respecte les quasi-isomorphismes et $\mathbf{R}F$ (resp. $\mathbf{L}F$) n'est rien d'autre que le foncteur induit par la propriété universelle (U) entre les catégories dérivées, ξ étant l'isomorphisme de foncteurs qui exprime la commutativité du diagramme correspondant (resp. $\eta = \xi^{-1}$).

II.4.2. Existence des foncteurs dérivés.— Nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence des foncteurs dérivés covariants à droite. Les cas des foncteurs dérivés à gauche et des foncteurs contravariants sont en quelque sorte duaux de celui-là et sa formulation est laissée au lecteur.

Soit $F : \boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{B})$ un ∂-foncteur covariant. Supposons qu'il existe une sous-catégorie triangulée $\mathfrak{I}$ de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) Tout objet de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ est la source d'un quasi-isomorphisme dans un objet de $\mathfrak{I}$.

(ii) Si $\mathbf{C}$ est un complexe acyclique de $\mathfrak{I}$ alors $F(\mathbf{C})$ est aussi acyclique.

Alors le foncteur dérivé à droite $(\mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'}F, \xi)$ existe.

Ce résultat s'applique notamment dans le cas d'un ∂-foncteur $F : \boldsymbol{K}^+(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{B})$ induit par un foncteur additif covariant $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ pour lequel existe une classe $\mathfrak{I}_0$ d'objets de $\mathfrak{A}$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i_0) Tout objet de $\mathfrak{A}$ s'injecte dans un objet de $\mathfrak{I}_0$.

(ii_0) Si $0 \to I' \to I \to I'' \to 0$ est une suite exacte dans $\mathfrak{A}$ et $I' \in \mathfrak{I}_0$, alors $I \in \mathfrak{I}_0$ si et seulement si $I'' \in \mathfrak{I}_0$.

(iii_0) Le foncteur F envoie les suites exactes courtes d'objets de $\mathfrak{I}_0$ dans des suites exactes courtes.

Dans ce cas le foncteur dérivé à droite $(\mathbf{R}^+F, \xi)$ existe. Si en plus on a la propriété

(iv_0) F a dimension cohomologique finie, i.e. il existe $n > 0$ tel que $h^i(\mathbf{R}^+F(A)) = 0$ pour tout $i \geq n$ et tout objet A de $\mathfrak{A}$

alors le foncteur dérivé à droite $(\mathbf{R}F, \xi)$ existe.

II.4.3. Exemple.— Soit X un espace topologique et $\mathcal{A}_X$ un faisceau d'anneaux sur X. Soit $\mathfrak{C}$ un objet de $\boldsymbol{K}^-(\mathcal{A}_X^{(g)})$ et notons $F = - \otimes^{\bullet}_{\mathcal{A}_X} \mathfrak{C} : \boldsymbol{K}^-(\mathcal{A}_X^{(d)}) \to \boldsymbol{K}(\mathbb{Z}_X)$. Si l'on prend $\mathfrak{I}$ la sous-catégorie triangulée de $\boldsymbol{K}^-(\mathcal{A}_X^{(d)})$ formée par les complexes de

$\mathcal{A}_X$-modules plats, on peut appliquer le "dual" du résultat précédent pour déduire l'existence du foncteur dérivé à gauche $(\mathbf{L}^- F, \eta)$ que l'on notera $- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} \mathfrak{C} \colon \mathbf{D}^-(\mathcal{A}_X^{(d)}) \to \mathbf{D}(\mathbb{Z}_X)$. En fait, quand $\mathfrak{C}$ varie on obtient un bi-∂-foncteur $- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} - \colon \mathbf{D}^-(\mathcal{A}_X^{(d)}) \times \boldsymbol{K}^-(\mathcal{A}_X^{(g)}) \to \mathbf{D}(\mathbb{Z}_X)$. On vérifie que celui-ci passe au quotient et définit un bi-∂-foncteur $- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} - \colon \mathbf{D}^-(\mathcal{A}_X^{(d)}) \times \mathbf{D}^-(\mathcal{A}_X^{(g)}) \to \mathbf{D}(\mathbb{Z}_X)$.

II.4.4. Exemple.— Si $F \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un foncteur additif covariant exact à gauche et la catégorie $\mathfrak{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs, alors le foncteur dérivé à droite $(\mathbf{R}^+ F, \xi)$ existe. En fait la suite de foncteurs $\{(h^i \circ \mathbf{R}^+ F)|_{\mathfrak{A}}\}_{i \geq 0}$ coïncide avec la suite des foncteurs satellites de Grothendieck [9]. Ceci s'applique en particulier quand:

1) $f \colon X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques, $\mathfrak{A} = \mathbb{C}_X$-*Mod*, $\mathfrak{B} = \mathbb{C}_Y$-*Mod* et l'on considère le foncteur "image directe" $F = f_* \colon \mathbb{C}_X\text{-}Mod \to \mathbb{C}_Y\text{-}Mod$.

   Si en plus X et Y sont des variétés analytiques complexes, et f est analytique, alors f_* a dimension cohomologique finie et le foncteur dérivé à droite $\mathbf{R} f_* \colon \mathbf{D}(\mathbb{C}_X) \to \mathbf{D}(\mathbb{C}_Y)$ existe.

2) X est un espace topologique, $Y \subset X$ est un fermé, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathbb{C}_X$-*Mod* et $F = \Gamma_Y$ est le foncteur "sections à support dans Y".

On rencontre souvent la situation suivante en théorie des $\mathcal{D}$-modules.

Soit $F \colon \boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{B})$ un ∂-foncteur covariant, $\boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ une sous-catégorie de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ et $F' = F|_{\boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})}$. Dans le cas où les foncteurs dérivés correspondants existent, il y a un morphisme naturel

$$\zeta \colon \mathbf{R}^{**}_{\mathfrak{A}''} F' \longrightarrow \mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'} F|_{\mathbf{D}^{**}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})}.$$

On peut se questionner sur les conditions suffisantes pour que ζ soit un isomorphisme. Voici une réponse utile dans un grand nombre de cas.

Supposons qu'il existe une sous-catégorie triangulée $\mathfrak{I}$ de $\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ vérifiant les propriétés (i), (ii) ci-dessus par rapport à F, et telle que $\mathfrak{I} \cap \boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ vérifie les mêmes propriétés par rapport à F'. Alors $\mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'} F$ et $\mathbf{R}^{**}_{\mathfrak{A}''} F'$ existent et le morphisme ζ est un isomorphisme.

II.4.5. Composition de foncteurs dérivés.— Une des propriétés caractéristiques de la théorie des catégories et des foncteurs dérivés et la possibilité de donner une formule pour la composition des foncteurs dérivés. En algèbre homologique "classique" un foncteur entre catégories abéliennes donne lieu à une suite de foncteurs liés par une suite longue de cohomologie: ces sont les foncteurs satellites de Grothendieck *(loc. cit.)*. Le rapport entre les foncteurs satellites d'une composition de deux foncteurs et les foncteus satellites de chaque foncteur n'est pas tout-à-fait explicite et se fait via une suite spéctrale. Du point de vue des foncteurs dérivés la situation est simple à comprendre. Un foncteur F et un objet de $\mathfrak{A}$ nous fournissent un complexe $\mathbf{R}F(A)$. Donc toute formule de "composition" doit contenir des termes où un foncteur dérivé est appliqué à un complexe et non seulement à un objet de la catégorie en question. Ceci a été déjà mis en évidence dans l'Introduction, quand on parlait des formules de bidualité.

Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ trois catégories abéliennes, $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ des sous-catégories abéliennes pleines stables par extension,

$$F\colon \boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{B}), \quad G\colon \boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}) \to \boldsymbol{K}(\mathfrak{C})$$

deux ∂-foncteurs covariants avec $F(\boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})) \subseteq \boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})$ et $\mathfrak{I} \subseteq \boldsymbol{K}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{J} \subseteq \boldsymbol{K}^{**}_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})$ deux sous-catégories triangulées vérifiant les propriétés (i), (ii) ci-dessus. Supposons de plus que $F(\mathfrak{I}) \subseteq \mathfrak{J}$. Alors les foncteurs dérivés $\mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'}F, \mathbf{R}^{**}_{\mathfrak{B}'}G, \mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'}(G \circ F)$ existent et le morphisme naturel

$$\lambda\colon \mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'}(G \circ F) \longrightarrow \mathbf{R}^{**}_{\mathfrak{B}'}G \circ \mathbf{R}^*_{\mathfrak{A}'}F$$

est un isomorphisme.

II.4.6. Exemple.— Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications continues entre espaces topologiques et prenons $\mathfrak{A} = \mathbb{C}_X$-*Mod*, $\mathfrak{B} = \mathbb{C}_Y$-*Mod*, $\mathfrak{C} = \mathbb{C}_Z$-*Mod* $F = f_*, G = g_*$. On a un isomorphisme de foncteurs

$$\lambda\colon \mathbf{R}^+(g \circ f)_* \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^+ g_* \circ \mathbf{R}^+ f_*.$$

II.4.7. Triangle de cohomologie locale à support.— Soit X un espace topologique, $Y \subseteq X$ un fermé et $U = X - Y$ l'ouvert complémentaire. Notons $i\colon Y \hookrightarrow X, j\colon U \hookrightarrow X$ les inclusions. Soit $\mathcal{A}_X$ un faisceau d'anneaux sur X. Pour chaque complexe $\mathcal{C}$ de $\mathbf{D}^+(\mathcal{A}_X)$ il existe des morphismes naturels par rapport à $\mathcal{C}$

$$\mathbf{R}^+\Gamma_Y(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{R}^+ j_*(j^{-1}\mathcal{C}) \tag{2.4}$$

provenant de l'inclusion $\Gamma_Y(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ et de l'adjonction $\mathcal{C} \to j_*(j^{-1}\mathcal{C})$.

Soit $\mathfrak{C}$ un objet de $\mathbf{D}^+(\mathcal{A}_X)$ et soit $\mathfrak{C}\to\mathfrak{I}$ une résolution injective. D'après l'injectivité, on a une suite exacte

$$0 \to \Gamma_Y(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{I} \to j_*(j^{-1}\mathfrak{I}) \to 0,$$

qui nous donne un triangle

$$\mathbf{R}^+\Gamma_Y(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{R}^+j_*(j^{-1}\mathfrak{C}) \xrightarrow{+1}$$

prolongeant (2.4). On vérifie que ce triangle est indépendant de la résolution injective choisie et qu'il est naturel par rapport à $\mathfrak{C}$. C'est le "triangle de cohomologie locale à support".

II.5. Foncteurs "way-out"

Dans cette section nous allons rappeler le lemme dit du "way-out functor" cf. [10]. Il s'agit de résultats essentiellement techniques qui permettent de ramener les énoncés portants sur les complexes, aux énoncés correspondants sur les objets. Ceci est largement utilisé en pratique et nous présente les catégories et les foncteurs dérivés comme des outils très puissants dans les questions de dévissage. Souvent, des propriétés d'un foncteur agissant sur un objet en dimension d (par exemple, un faisceau) se ramènent à des propriétés en dimension strictement plus petite que d, non pas du foncteur agissant sur un objet, mais du foncteur agissant sur un complexe d'objets. Sous des hypothèses convenables (voir le *lemme du "way-out functor"* ci-dessous) ces dernières propriétés se ramènent aussi à des propriétés du foncteur agissant sur des objets.

Soit $F\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ un foncteur additif covariant et supposons que les hypothèses (i_0), (ii_0), (iii_0) sont satisfaites. Il existe donc le foncteur dérivé $\mathbf{R}^+F : \mathbf{D}^+(\mathfrak{A})\to\mathbf{D}(\mathfrak{B})$ qui vérifie la propriété suivante, dite du "way-out" (à droite),

(W-O) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que si $\mathbf{C}$ est un objet de $\mathbf{D}^+(\mathfrak{A})$ avec $h^i(\mathbf{C}) = 0$ pour $i \leq m$, alors $h^i(\mathbf{R}^+F(\mathbf{C})) = 0$ pour $i \leq n$.

En fait dans ce cas on peut prendre $m = n - 1$. Il existe aussi la notion duale à gauche.

On a le résultat suivant:

Lemme du "way-out functor": Soit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ deux catégories abéliennes, $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ deux sous-catégories abéliennes pleines stables par extension,

$$F, G\colon \mathbf{D}^*_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})\to\mathbf{D}(\mathfrak{B})$$

deux ∂-foncteurs covariants et soit $\rho : F \to G$ un morphisme. On a les propriétés suivantes:

1) Si $\rho(C)$ est un isomorphisme pour tout objet C de $\mathfrak{A}'$ alors $\rho(\mathbf{C})$ est un isomorphisme pour tout objet $\mathbf{C}$ de $\mathbf{D}^b_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$. (Cette propriété ne fait pas intervenir (W-O)).

2) Si $\rho(C)$ est un isomorphisme pour tout objet C de $\mathfrak{A}'$ et si F et G sont "way-out" à droite (resp. à droite et à gauche), alors $\rho(\mathbf{C})$ est un isomorphisme pour tout objet $\mathbf{C}$ de $\mathbf{D}^+_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ (resp. de $\mathbf{D}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$).

3) Si $\mathfrak{I}_0$ est une classe d'objets de $\mathfrak{A}'$ telle que tout objet de $\mathfrak{A}'$ s'injecte dans un objet de $\mathfrak{I}_0$, F et G sont "way-out" à droite, et $\rho(C)$ est un isomorphisme pour tout $C \in \mathfrak{I}_0$, alors $\rho(C)$ est un isomorphisme pour tout objet C de $\mathfrak{A}'$.

4) Si $F(C) \in \mathbf{D}^*_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}), * = \emptyset, +, b$ pour tout objet C de $\mathfrak{A}'$, alors $F(\mathbf{C}) \in \mathbf{D}^*_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})$ pour tout objet $\mathbf{C}$ de $\mathbf{D}^b_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})$.

5) Si F est "way-out" à droite et $F(C) \in \mathbf{D}^*_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B}), * = \emptyset, +, b$ pour tout objet C de $\mathfrak{A}'$, alors $F(\mathbf{C}) \in \mathbf{D}^*_{\mathfrak{B}'}(\mathfrak{B})$ pour tout objet $\mathbf{C}$ de $\mathbf{D}^+_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

II.5.1. Exemple.— Revenons aux questions de bidualité traitées dans l'Introduction. Soit R un anneau commutatif et soit $\mathfrak{A}$ la catégorie abélienne des R-modules. Notons $\mathfrak{A}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ dont les objets sont les R-modules de type fini. Supposons R noethérien. Dans ce cas, $\mathfrak{A}'$ est une sous-catégorie abélienne pleine stable par extensions. Considérons le foncteur dualité $\mathbb{D}_R = \mathrm{Hom}_R(-, R) \colon \mathfrak{A}^{op} \to \mathfrak{A}$. Il existe un morphisme de bidualité $\mathrm{Bd}_R \colon 1_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{D}_R \circ \mathbb{D}_R$ qu'induit un morphisme $\widetilde{\mathrm{Bd}}_R \colon 1_{\mathrm{D}^+_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})} \to \mathbf{R}^+\mathbb{D}_R \circ \mathbf{R}^+\mathbb{D}_R$. Notons que $\widetilde{\mathrm{Bd}}_R(M)$ est un isomorphisme si M est un R-module libre de type fini. En appliquant le lemme du "way-out functor", 2), 3) on obtient que $\widetilde{\mathrm{Bd}}_R$ est un isomorphisme de foncteurs.

II.5.2. Exemple.— Soit $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un foncteur additif covariant pour lequel il existe une classe $\mathfrak{I}_0$ d'objets de $\mathfrak{A}$ vérifiant les propriétés (i_0), (ii_0), (iii_0), (iv_0). Alors le foncteur dérivé $\mathbf{R}F \colon \mathbf{D}(\mathfrak{A}) \to \mathbf{D}(\mathfrak{B})$ est "way-out" à droite et à gauche.

II.5.3. Exemple.— Soit X un espace topologique, $\mathcal{A}_X$ un faisceau d'anneaux sur X et $\mathfrak{C}$ un objet de $\boldsymbol{K}^b(\mathcal{A}_X^{(g)})$. Le foncteur $- \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} \mathfrak{C} : \mathbf{D}^-(\mathcal{A}_X^{(d)}) \to \mathbf{D}(\mathbb{Z}_X)$ est "way-out" à gauche. De plus, s'il existe une résolution bornée $\mathcal{A}_X$-plate $\mathfrak{P} \to \mathfrak{C}$, alors il est aussi "way-out" à droite.

Une application importante du lemme du "way-out functor" est la formule de projection:

II.5.4. Formule de projection.—

Soit $f\colon X\to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et $\mathcal{A}_Y$ un faisceau de $\mathbb{C}_Y$-algèbres centrales, i.e. les sections de $\mathbb{C}_Y$ commutent aux sections de $\mathcal{A}_Y$. Supposons que les propriétés suivantes sont satisfaites:

a) Le foncteur f_* est de dimension cohomologique finie.

b) Le faisceau $\mathcal{A}_Y$ est cohérent et tout $\mathcal{A}_Y$-module cohérent admet localement des résolutions finies par des $\mathcal{A}_Y$-modules libres de type fini.

Les propriétés précédentes sont satisfaites si $f : X\to Y$ est un morphisme de variétés analytiques complexes et $\mathcal{A}_Y = \mathcal{D}_Y$.

Notons $Q_X : \boldsymbol{K}(\mathbb{C}_X)\to\mathbf{D}(\mathbb{C}_X)$, $Q_Y : \boldsymbol{K}(\mathbb{C}_Y)\to\mathbf{D}(\mathbb{C}_Y)$ les foncteurs de passage au quotient.

D'après a), il existe les foncteurs

$$\mathbf{R}f_*\colon \mathbf{D}(f^{-1}\mathcal{A}_Y^{(g)})\to\mathbf{D}(\mathcal{A}_Y^{(g)}), \quad \mathbf{R}f_*\colon \mathbf{D}(\mathbb{C}_X)\to\mathbf{D}(\mathbb{C}_Y).$$

Ils sont "way-out" à droite et à gauche et ils envoient des complexes bornés dans des complexes bornés.

Soit $\mathfrak{D}$ un complexe de $\mathbf{D}^b(f^{-1}\mathcal{A}_Y^{(g)})$ et soit $\mathfrak{D} \xrightarrow{s} \mathfrak{I}$ une résolution bornée f_*-acyclique. Le complexe $\mathbf{R}f_*(\mathfrak{D})$ est quasi-isomorphe à $f_*(\mathfrak{I})$.

Considérons les ∂-foncteurs covariants suivants:

$$F_Y\colon \mathfrak{C}\in\mathbf{D}^-(\mathcal{A}_Y^{(d)}) \mapsto \mathfrak{C} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_Y} \mathbf{R}f_*(\mathfrak{D}) \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_Y),$$

$$G_Y\colon \mathfrak{C}\in\mathbf{D}^-(\mathcal{A}_Y^{(d)}) \mapsto \mathbf{R}f_*(f^{-1}\mathfrak{C} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{A}_Y} \mathfrak{D}) \in \mathbf{D}(\mathbb{C}_Y).$$

Ces deux foncteurs sont "way-out" à gauche.

Soit $\mathfrak{C}$ un objet de $\mathbf{D}^-(\mathcal{A}_Y^{(d)})$. En prenant une résolution $\mathcal{A}_Y$-plate $\mathfrak{P}\to\mathfrak{C}$, et en utilisant le morphisme de projection classique

$$\mathfrak{P}\otimes^{\bullet}_{\mathcal{A}_Y} f_*(\mathfrak{I})\longrightarrow f_*(f^{-1}\mathfrak{P}\otimes^{\bullet}_{f^{-1}\mathcal{A}_Y}\mathfrak{I}),$$

on trouve un morphisme $F_Y(\mathfrak{C})\to G_Y(\mathfrak{C})$, qui est indépendant de la résolution $\mathfrak{P}$ choisie et qui est naturel par rapport à $\mathfrak{C}$. On a donc un morphisme de foncteurs

$$\pi_Y\colon F_Y\longrightarrow G_Y$$

appélé “morphisme de projection”.

Nous allons montrer que $\pi_Y(\mathfrak{C})$ est un isomorphisme pour tout $\mathfrak{C}$ dans $\mathbf{D}^-_{coh}(\mathcal{A}_Y^{(d)})$. D'après le lemme du “way-out functor”, il suffit de vérifier que $\pi_Y(\mathcal{C})$ est un isomorphisme pour tout $\mathcal{A}_Y$-module à droite cohérent $\mathcal{C}$. Or, la question est locale sur Y. Soit $V \subseteq Y$ un ouvert sur lequel $\mathcal{C}$ admet une résolution finie par des $\mathcal{A}_Y$-modules libres de type fini. Comme $\pi_Y(\mathcal{C})|_V$ s'identifie à $\pi_V(\mathcal{C}|_V)$, tout le problème est réduit à démontrer que $\pi_V(\mathcal{A}_V)$ est un isomorphisme, et ceci est immédiat, car le morphisme de projection classique

$$\mathcal{A}_V \otimes^\bullet_{\mathcal{A}_V} f_*(\mathfrak{J}|_{f^{-1}(V)}) \longrightarrow f_*(f^{-1}\mathcal{A}_V \otimes^\bullet_{f^{-1}\mathcal{A}_V} (\mathfrak{J}|_{f^{-1}(V)}))$$

est trivialement un isomorphisme.

On a donc trouvé un isomorphisme fonctoriel

$$\pi_Y : \mathfrak{C} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}_Y} \mathbf{R}f_*(\mathfrak{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*(f^{-1}\mathfrak{C} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{A}_Y} \mathfrak{D})$$

pour $\mathfrak{C}$ objet de $\mathbf{D}^-_{coh}(\mathcal{A}_Y^{(d)})$ et $\mathfrak{D}$ objet de $\mathbf{D}^b(f^{-1}\mathcal{A}_Y^{(g)})$, appellée “formule de projection”.

II.5.5. Exemple.— Comme corollaire de la formule de projection on a la commutation du complexe de De Rham et des images directes de $\mathcal{D}$-modules. Plus précisement, soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes et $\mathcal{M}$ un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. Il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbf{DR}(\int_{f_*} \mathcal{M})[\dim(Y)] \simeq \mathbf{R}f_*(\mathbf{DR}(\mathcal{M}))[\dim(X)].$$

En effet, le terme à gauche s'exprime comme $\omega_Y \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathbf{R}f_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$, et d'après la formule de projection

$$\omega_Y \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathbf{R}f_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) \simeq \mathbf{R}f_*(f^{-1}\omega_Y \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} (\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}))$$

mais $f^{-1}\omega_Y \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} (\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) \simeq \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq \mathbf{DR}(\mathcal{M})[\dim(X)]$, d'où le résultat.

Chapitre III
Le théorème de constructibilité

Dans ce chapitre nous allons démontrer le théorème de constructibilité. La démonstration originale de Kashiwara [11] repose sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Celles que nous proposons ne fait appel qu'à la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules. Nous ramenons pour l'essentiel un théorème de finitude des solutions d'un système différentiel, le théorème de constructibilité, à un théorème de finitude pour les $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, le théorème des images directes par un morphisme projectif des faisceaux analytiques cohérents [7]. Afin de faciliter la comprehension du lecteur nous commençons par le cas d'une variable. La démonstration du cas général se fait par récurrence sur la dimension à partir du cas trivial de la dimension nulle.

III.1. Le cas de la dimension un

Soit X une variété analytique complexe de dimension 1 et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Le théorème de constructibilité affirme que le complexe de De Rham de $\mathcal{M}$, $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, est à cohomologie constructible. Soit $Y \subset X$ la projection sur X des composantes verticales de la variété caractéristique de $\mathcal{M}$. Il s'agit d'un fermé analytique propre et donc Y n'a que des points isolés.

Lemme III.1.1.— *Sous les hypothèses précédentes, pour tout point $x \in X$ il existe un disque ouvert $U \subset X$ centré en x et une bonne filtration $F^\bullet\mathcal{N}$ de $\mathcal{N} = \mathcal{M}|_U$ constante en dehors du point x.*

Preuve.— Si $x \in X - Y$ le résultat est clair. Suppossons que $x \in Y$. Soit $U' \subset X$ un disque ouvert centré en x tel que $U' \cap Y = \{x\}$. Quitte à restreindre U' nous pouvons supposer que $\mathcal{N}' = \mathcal{M}|_{U'}$ admet une bonne filtration $F^\bullet\mathcal{N}'$ sur U' avec $F^k\mathcal{N}' = \mathcal{D}_{U'}^{(k)}F^0\mathcal{N}', k \geq 0$. Si $\mathcal{N}'$ est à support $\{x\}$ le résultat est trivial. Supposons donc que le support de $\mathcal{N}'$ est U' tout entier. Soit z une coordonnée locale sur U' avec $z(x) = 0$ et soit ξ le symbole principal de la dérivée par rapport à z, ∂. On a $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U'}) = \mathcal{O}_{U'}[\xi]$. Comme $\mathrm{Ch}(\mathcal{N}') = \mathrm{T}^*_{U'}(U') \cup \mathrm{T}^*_x(U')$, on déduit que $\sqrt{\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U',x})}(\mathrm{gr}(\mathcal{N}'_x))} = (z\xi)$. Par cohérence, il existe un disque ouvert $U \subseteq U'$ centré en x et un entier $n \geq 1$ tel que $z^n\xi^n \cdot \mathrm{gr}(\mathcal{N}) = 0, \mathcal{N} = \mathcal{N}'|_U$, i.e. pour tout $k \geq 0$ et toute section locale s de $F^k\mathcal{N}$ on a que $z^n\partial^n s$ est une section locale de $F^{k+n-1}\mathcal{N}$. Or, z est une unité en dehors de x et $F^k\mathcal{N} = \mathcal{D}_U^{(k)}F^0\mathcal{N}, k \geq 0$, d'où $(F^k\mathcal{N})|_{U-\{x\}} = (F^{n-1}\mathcal{N})|_{U-\{x\}}, k \geq n-1$. Pour terminer il suffit de décaler la filtration en prenant $F^{\bullet+n-1}\mathcal{N}$. $\square$

D'après le théorème[1] I.4.21 et le lemme III.1.1 il suffit de démontrer la constructibilité dans le cas où X est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré à l'origine, $Y = \{0\}$, et $\mathcal{M}$ admet une bonne filtration $F^\bullet\mathcal{M}$ qui est stationnaire sur $X^* = X - Y$, ce que nous supposerons désormais.

III.1.2. Réduction du local au global.— Sous les hypothèses précédentes, notons $j\colon X^* \hookrightarrow X, i\colon Y \hookrightarrow X$ les inclusions. La restriction $j^{-1}\mathcal{M}$ n'a pas des singularités et d'après le théorème de Cauchy (voir exemple I.1.14) le complexe $j^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est un système local $\mathcal{L}$ concentré en degré 0. On a un triangle[2]:

$$j_!\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \longrightarrow i_* i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \xrightarrow{+1} . \tag{3.1}$$

La constructibilité de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est donc équivalente à celle du troisième terme. Appliquons le foncteur $\mathbf{R}\Gamma(X, -)$ à (3.1) pour obtenir un autre triangle de complexes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels:

$$\mathbf{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, i_* i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M})) = \mathbf{DR}(\mathcal{M})_0 \xrightarrow{+1} \tag{3.2}$$

La constructibilité de $i_* i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, et donc celle de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, est une conséquence du lemme III.1.3 et du théorème III.1.4 suivants.

Lemme III.1.3.— *Avec les notations précédentes, $\mathbf{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{L})$ est un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à cohomologie de dimension finie. En fait, il est cohomologiquement nul.*

Preuve.— Il s'agit d'un cas très particulier du théorème I.4.16, car celui-ci nous dit que le morphisme naturel $\mathbf{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{L}) \to (j_!\mathcal{L})_0 = 0$ est un quasi-isomorphisme (voir l'exemple I.4.18). □

Théorème III.1.4.— *Sous les hypothèses de III.1.2, $\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M}))$ est à cohomologie de dimension finie.*

Preuve.— Nous allons procéder en deux étapes. Dans la prémière nous allons étendre nos données de façon "triviale" de X à $\mathbb{C}$. Dans la deuxième nous les étendrons à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ en faisant un travail local à l'infini (extension de Deligne).

Prémière étape: Comme $j^{-1}\mathcal{M}$ est un fibré vectoriel à connexion intégrable et $X^* \subset \mathbb{C}^*$ est une équivalence d'homotopie, nous pouvons étendre $j^{-1}\mathcal{M}$ en un fibré vectoriel à connexion intégrable sur $\mathbb{C}^*$. Après, on peut recoller avec $\mathcal{M}$ pour obtenir

[1] Dans ce cas il n'est pas nécéssaire d'invoquer ce théorème, car les points de Y sont isolés et le théorème de Cauchy nous donne la constructibilité sur $X - Y$.

[2] Dans ce cas il s'agit en fait d'une suite exacte de complexes.

un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome $\widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\widetilde{\mathcal{M}}|_X = \mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\mathbb{C}^*}$ n'a pas des singularités. Par le même procédé, on construit une bonne filtration $F^\bullet\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui prolonge celle de $\mathcal{M}$ et qui est stationnaire en dehors de l'origine. Notons que $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}, \mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M}))$ car on a les triangles déduits des triangles de cohomologie locale à support cf. II.4.7

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}, \mathbf{R}\Gamma_0(\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}}))) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}, \mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})) \xrightarrow{+1}$$

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{R}\Gamma_0(\mathbf{DR}(\mathcal{M}))) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(X^*, \mathbf{DR}(\mathcal{M})) \xrightarrow{+1}$$

et

- les deux premiers termes sont isomorphes vu que
$$\mathbf{R}\Gamma_0(\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}\Gamma_0(\mathbf{DR}(\mathcal{M}))$$
sont nuls en dehors de 0 et ses fibres en 0 coïncident,
- les deux derniers termes sont isomorphes vu que $\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})|_X = \mathbf{DR}(\mathcal{M})$, que $\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})|_{\mathbb{C}^*}$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $X^* \subset \mathbb{C}^*$ est une équivalence d'homotopie (cf. cor. I.3.5).

Deuxième étape: Prenons un disque $\Delta \subset \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ centré à l'infini et considérons sur $\Delta^* = \Delta - \{\infty\} = \Delta \cap \mathbb{C}$ la restriction de $\widetilde{\mathcal{M}}$, notée $\mathcal{E}$. Il s'agit d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sur Δ^*. Son complexe de De Rham est un système local $\mathcal{S}$ et on a un isomorphisme de $\mathcal{D}_{\Delta^*}$-modules $\mathcal{E} \simeq \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\Delta^*}$. Prenons un point de base $x_0 \in \Delta^*$ et une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{x_0}$. Soit A la matrice de l'action $M\colon \mathcal{S}_{x_0} \to \mathcal{S}_{x_0}$ du générateur positif du $\pi_1(\Delta^*, x_0)$ par rapport à cette base. Soit ζ une coordonnée locale en Δ avec $\zeta(\infty) = 0$. Considérons le $\mathcal{D}_{\Delta^*}$-module dont le $\mathcal{O}_{\Delta^*}$-modules sous-jacent est $\mathcal{O}^r_{\Delta^*}$ et l'action des dérivations est donnée par:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \cdot (s_1, \dots, s_r) = (\frac{\partial s_1}{\partial\zeta}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial\zeta}) + \frac{1}{\zeta}(s_1, \dots, s_r)B \tag{3.3}$$

où B est l'unique matrice à coefficients complexes telle que $\exp(-2\pi i B) = A$ et dont les valeurs propres ont leur partie réelle dans l'intervalle $[-1, 0[$. Notons ce $\mathcal{D}_{\Delta^*}$-module par $\{\mathcal{O}^r_{\Delta^*}; B\}$. Les $\mathcal{D}_{\Delta^*}$-modules $\mathcal{E}$ et $\{\mathcal{O}^r_{\Delta^*}; B\}$ sont isomorphes car tous les deux sont des fibrés vectoriels à connexion intégrable et ses systèmes locaux de sections horizontales (= ses complexes de De Rham) sont isomorphes (voir exemple I.1.15). Considérons l'extension $\overline{\mathcal{E}}$ de $\{\mathcal{O}^r_{\Delta^*}; B\}$ dont le $\mathcal{O}_\Delta$-module sous-jacent est le faisceau des fonctions méromorphes à poles à l'infini $\mathcal{O}_\Delta[\star\infty]^r$ et l'action des dérivations est donnée par la même formule (3.3). Il sera noté aussi $\{\mathcal{O}_\Delta[\star\infty]^r; B\}$. Le $\mathcal{D}_\Delta$-module $\overline{\mathcal{E}}$ s'appelle *l'extension de Deligne* de $\mathcal{E}$ [3]. Il ne dépend pas, à isomorphisme près, de la base de $\mathcal{S}_{x_0}$ choisie et il a les propriétés suivantes:

1) $\overline{\mathcal{E}}|_{\Delta^*} \simeq \mathcal{E}$.

2) $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}_\Delta$-module holonome.

3) Notons $\sigma\colon \Delta^* \hookrightarrow \Delta$ l'inclusion. Le morphisme $\mathbf{DR}(\overline{\mathcal{E}}) \to \mathbf{R}\sigma_* \mathbf{DR}(\mathcal{E})$ déduit de 1) est un quasi-isomorphisme.

4) La filtration $\{F^k\overline{\mathcal{E}} = \zeta^{-k} \cdot \mathcal{O}^r_\Delta\}_{k\geq 0}$ est bonne et constante en dehors de l'infini. Plus précisément, $F^k\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{D}^{(k)}_\Delta \cdot F^0\overline{\mathcal{E}}$, pour tout $k \geq 0$.

La partie 1) est claire. Pour démontrer 2), 3) et 4) on peut raisonner par récurrence sur le rang du fibré $\mathcal{E}$. Si $\mathrm{rg}(\mathcal{E}) = 1$ on peut supposer que $\mathcal{E} = \{\mathcal{O}_{\Delta^*}; \beta\}$ avec $\mathrm{Re}(\beta) \in [-1, 0[$ et $\overline{\mathcal{E}} = \{\mathcal{O}_\Delta[\star\infty]; \beta\}$. Soit $q\colon \mathcal{D}_\Delta \to \overline{\mathcal{E}}$ le morphisme $\mathcal{D}_\Delta$-linéaire défini par $q(P) = P \cdot 1$ pour tout opérateur différentiel P. On voit facilement que q est surjectif et $Ker(q) = \mathcal{D}_\Delta(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \beta)$, d'où la partie 2). Pour établir la partie 3) remarquons que le morphisme indiqué s'identifie à l'inclusion verticale de complexes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\Delta[\star\infty] & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\beta}{\zeta}} & \mathcal{O}_\Delta[\star\infty] \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*\mathcal{O}_{\Delta^*} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\beta}{\zeta}} & j_*\mathcal{O}_{\Delta^*} \end{array} \tag{3.4}$$

Or, le morphisme (3.4) est l'dentité en dehors de l'infini. Pour terminer, il reste à voir que c'est un quasi-isomorphisme au niveau des fibres à l'infini, mais ceci est un calcul immédiat avec les séries en ζ. La partie 4) est une conséquence de l'hypothèse sur $\mathrm{Re}(\beta)$, car on a toujours l'inclusion $\mathcal{D}^{(k)}_\Delta \cdot \mathcal{O}_\Delta \subseteq \zeta^{-k} \cdot \mathcal{O}_\Delta$ et

$$q(\partial^r) = \partial^r \cdot 1 = \beta(\beta-1)\cdots(\beta-r+1)\zeta^{-r}, \quad r \geq 1$$

avec le coefficient de ζ^{-r} non nul. Supposons que les propriétés 2), 3) et 4) sont satisfaites si $\mathrm{rg}(\mathcal{E}) \leq r-1$ et soit $\mathcal{E}$ un fibré a connexion intégrable de rang r sur Δ^*. Quitte à choisir une base adéquate, on peut supposer que $\mathcal{E} = \{\mathcal{O}^r_{\Delta^*}; B\}$, où B est une matrice à coefficients complexes de la forme $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \star & B'' \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres, i.e. β et ceux de B'', ont leur partie réelle dans l'intervalle $[-1, 0[$. On a une suite exacte de fibrés à connexion intégrable sur Δ^*

$$0 \to \mathcal{E}' = \{\mathcal{O}_{\Delta^*}; \beta\} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{E}'' = \{\mathcal{O}^{r-1}_{\Delta^*}; B''\} \to 0$$

et une suite exacte de $\mathcal{D}_\Delta$-modules

$$0 \to \overline{\mathcal{E}'} = \{\mathcal{O}_\Delta[\star\infty]; \beta\} \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{E}} \xrightarrow{p} \overline{\mathcal{E}''} = \{\mathcal{O}_\Delta[\star\infty]^{r-1}; B''\} \to 0 \tag{3.5}$$

où i désigne l'inclusion de la prémière composante et p désigne la projection sur les $r-1$ dernières composantes. L'hypothèse de récurrence entraîne donc directement les propriétés 2) et 3) pour $\mathcal{E}$. La propriété 4) pour $\mathcal{E}$ est aussi une conséquence de l'hypothèse de récurrence et du fait que la suite (3.5) est stricte pour la filtration $F^\bullet$, i.e. $F^k\overline{\mathcal{E}''} = p(F^k\overline{\mathcal{E}})$, $F^k\overline{\mathcal{E}'} = \overline{\mathcal{E}}' \cap i^{-1}(F^k\overline{\mathcal{E}})$, pour tout $k \geq 0$. Nous déduissons des propriétés 1), 2) et 3) que $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}_\Delta$-module holonome qui prolonge $\mathcal{E}$ et tel que le morphisme naturel $\mathbf{R}\Gamma(\Delta, \mathbf{DR}(\overline{\mathcal{E}})) \to \mathbf{R}\Gamma(\Delta^*, \mathbf{DR}(\mathcal{E}))$ est un quasi-isomorphisme. Nous pouvons recoller $\widetilde{\mathcal{M}}$ avec $\overline{\widetilde{\mathcal{M}}|_{\Delta^*}}$ pour obtenir un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}$-module holonome $\overline{\mathcal{M}}$ tel que $\overline{\mathcal{M}}|_{\mathbb{C}} = \widetilde{\mathcal{M}}$ et $\mathbf{DR}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}\tau_*\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})$, $\tau\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ étant l'inclusion. On a donc des isomorphismes

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{DR}(\overline{\mathcal{M}})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}, \mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M})).$$

Or, $\overline{\mathcal{M}}$ peut être muni d'une bonne filtration globale $F^\bullet\overline{\mathcal{M}}$ en recollant celle de $\overline{\widetilde{\mathcal{M}}|_{\Delta^*}}$ et $F^\bullet\widetilde{\mathcal{M}}$, et d'après les suites de Spencer (cf. [6, chap. I, prop. 2.1.18]), $\overline{\mathcal{M}}$ admet une résolution finie par des $\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}$-modules de la forme $\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}$ module cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}$. La finitude de $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{DR}(\overline{\mathcal{M}}))$, et donc celle de $\mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{M}))$, est une conséquence de la finitude de $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{DR}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F}))$ (cf. II.5.), mais

$$\begin{aligned}\mathbf{DR}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F}) &\simeq (\omega_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{D}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F})[-1] \\ &\simeq (\omega_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F})[-1]\end{aligned}$$

et $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \omega_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F})$ est à cohomologie de dimension finie car $\omega_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}} \mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. □

III.1.5. Remarque.— Dans la preuve ci-dessus, pour démontrer la constructibilité du $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ il n'est pas nécessaire de démontrer le théorème III.1.4 pour $\mathcal{M}$. En fait on peut démontrer ce théorème pour $\widetilde{\mathcal{M}}$, ce qui évite la prémière étape. De là, on déduit la constructibilité de $\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})$, donc de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$. La preuve que nous allons donner dans le cas général suit cette démarche.

III.2. Le cas général

Nous allons démontrer par récurrence sur $\dim(X)$ le thérorème de constructibilité. Si $\dim(X) = 0$ alors X est réduite à un point, $\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X = \mathbb{C}_X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Son complexe de De Rham s'dentifie à lui-même et il est donc trivialement à cohomologie constructible. Supposons le résultat vrai si la dimension de la variété est plus petite que $d \geq 1$, et soit X une variété analytique complexe connexe de dimension d et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome.

III.2.1. Réduction du global au local, puis au semi-local.

LEMME III.2.2.— *Sous les hypothèses précédentes, pour tout point $x \in X$ il existe un polycylindre ouvert $U = D_1^{d-1} \times D_2 \subset X$ centré en x et une hypersurface $Z \subset U$ tels que*

1) *$\mathcal{M}|_{U-Z}$ est un fibré vectoriel à connexion intégrable.*
2) *La première projection $p\colon U \to D_1^{d-1}$ est finie sur Z.*
3) *$\mathcal{N} = \mathcal{M}|_U$ est muni d'une bonne filtration $F^\bullet\mathcal{N}$ constante en dehors du point Z.*

Preuve.— Soit $Y \subset X$ le fermé analytique propre de X obtenu en projettant les composantes verticales de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$. La restriction de $\mathcal{M}$ à $X - Y$ est un fibré à connexion intégrable. Soit $(U'; z_1, \ldots, z_d) \subset X$ une carte locale centrée en x telle que $\mathcal{N}' = \mathcal{M}|_{U'}$ admet une bonne filtration $F^\bullet\mathcal{N}'$, $F^k\mathcal{N}' = \mathcal{D}_{U'}^{(k)} \cdot F^0\mathcal{N}', k \geq 0$. Soit $Z' = \{f(\underline{z}) = 0\}$ une hypersurface de U' contenant $Y \cap U'$. Si $\pi : \mathrm{T}^*(U') \to U'$ est la projection de l'espace cotangent, on a $\mathrm{Ch}(\mathcal{N}') \subset \mathrm{T}^*_{U'}(U') \cup \pi^{-1}(Z')$, d'où $f(\underline{z})\xi_i \in \sqrt{\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{U',x})}(\mathrm{gr}(\mathcal{N}'_x))}$, $i = 1, \ldots, d$, ξ_i étant le symbole principal de la dérivée par rapport à z_i, ∂_i. Par cohérence, il existe un polycylindre ouvert $U'' \subseteq U'$ centré en x et un entier $n \geq 1$ tel que $f^n\xi_i^n \cdot \mathrm{gr}(\mathcal{N}'') = 0, i = 1, \ldots, d$, $\mathcal{N}'' = \mathcal{N}'|_{U''}$, i.e. pour tout $k \geq 0$, toute section locale s de $F^k\mathcal{N}''$ et tout $i = 1, \ldots, d$, on a que $f^n\partial_i^n s$ est une section locale de $F^{k+n-1}\mathcal{N}$. On procède comme dans la preuve du lemme III.1.1 pour conclure que $\mathcal{N}''$ est muni d'une bonne filtration constante en dehors de $Z'' = Z \cap U''$. Pour terminer il suffit d'appliquer le lemme de normalisation analytique: il existe un polycylindre ouvert $U = D_1^{d-1} \times D_2 \subset U''$ centré en x tel que la première projection $p\colon U \to D_1^{d-1}$ est finie sur $Z = Z'' \cap U$. $\square$

D'après le théorème I.4.21 et le lemme III.2.2, pour démontrer la constructibilité de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ il suffit de considérer le cas où X est un polycylindre $D_1^{d-1} \times D_2$ et $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome vérifiant les propriétés 1), 2), 3) précédentes. Or, dans ce cas l'inclusion $X = D_1^{d-1} \times D_2 \subset \widetilde{X} = D_1^{d-1} \times \mathbb{C}$ induit une équivalence d'homotopie entre les complémentaires de Z et donc $\mathcal{M}$ se prolonge en un $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$-module holonome $\widetilde{\mathcal{M}}$ vérifiant aussi les mêmes propriétés. La constructibilité de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est équivalente à celle de $\mathbf{DR}(\widetilde{\mathcal{M}})$ car le premier est la restriction du deuxième et tous les deux sont des systèmes locaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels en dehors de Z.

III.2.3. Dévissage géométrique.— Soit donc $X = D^{d-1} \times \mathbb{C}$, avec $D \subset \mathbb{C}$ disque ouvert, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et $Z \subset X$ une hypersurface vérifiant les propriétés 1), 2), 3) du lemme III.2.2. Nous pouvons aussi supposer que Z "est loin de l'infini". Notons $U = X - Z$ et $j : U \hookrightarrow X, i : Z \hookrightarrow X$ les inclusions. D'après la propriété 1) et le théorème de Cauchy (voir exemple I.1.15) le complexe $j^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{DR}(j^{-1}\mathcal{M})$ est un système local de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{L}$ concentré en degré 0. On a le triangle

$$j_!\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \longrightarrow i_*i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \xrightarrow{+1} . \tag{3.6}$$

La constructibilité de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est donc équivalente à celle du troisième terme. Appliquons le foncteur $\mathbf{R}p_*$ à (3.6) pour obtenir un autre triangle de complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $Y = D^{d-1}$:

$$\mathbf{R}p_*j_!\mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{R}p_*\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{R}p_*i_*i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \xrightarrow{+1} . \tag{3.7}$$

Comme p est fini sur le support de $i_*i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, on a

$$h^j(\mathbf{R}p_*i_*i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M})) \simeq p_*(h^j(i_*i^{-1}\mathbf{DR}(\mathcal{M}))),$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition I.4.22, la constructibilité du troisième terme de (3.6), et donc celle de $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, est impliquée par la constructibilité des deux premiers termes de (3.7). Or, le deuxième terme de (3.7) est isomorphe[3] à $\mathbf{DR}(\mathbf{R}p_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{M}))$, et d'après l'hypothèse de récurrence, la constructibilité de $\mathbf{R}p_*\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est une conséquence du fait que $\mathbf{R}p_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologie holonome. On est donc réduit aux deux résultats suivants:

LEMME III.2.4.— *Avec les notations précédentes, $\mathbf{R}p_*j_!\mathcal{L}$ est un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Y à cohomologie constructible.*

THÉORÈME III.2.5.— *Avec les notations précédentes, $\mathbf{R}p_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologie holonome.*

III.2.6. Réduction au cas projectif.— Nous allons donner les preuves du lemme III.2.4 et du théorème III.2.5 en étendant nos données convenablement au cas global projectif $\overline{p} : Y \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to Y$. On notéra un parallélisme remarquable entre les deux preuves, ce qui n'est qu'un aspect partiel de la comparaison générale entre les formalismes des coefficients discrets (p. ex. les faisceaux constructibles) et des coefficients continus (p. ex. les $\mathcal{D}$-modules cohérents) cf. [15]. Notons $\overline{X} = Y \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $\tau : X \hookrightarrow \overline{X}$ l'inclusion et $\overline{p} : \overline{X} \to Y$ la première projection. On a $\overline{p} \circ \tau = p$.

[3] Il s'agit de l'égalité entre le DR de l'image directe d'un $\mathcal{D}$-module et l'image directe du DR (cf. ex. II.5.5).

Preuve du lemme III.2.4.— On a $\mathbf{R}p_*j_!\mathcal{L} \simeq \mathbf{R}\overline{p}_*\mathbf{R}\tau_*j_!\mathcal{L}$, mais d'après le corollaire I.4.12 ou si l'on veut, une variante de l'exemple I.4.13, les $\mathbf{R}^i\tau_*j_!\mathcal{L}$ sont des faisceaux constructibles lisses en dehors de $Z \cup (Y \times \{\infty\})$. Le lemme est donc une conséquence de la proposition I.4.23 et de II.5.. $\square$

Preuve du théorème III.2.5.— Nous allons procéder comme dans la preuve du théorème III.1.4. Soit $z_1, \dots, z_{d-1}$ des coordonnées sur le polydisque Y et z_d la coordonnée sur $\mathbb{C}$. Soit $\Delta \subset \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ un disque ouvert centré à l'infini et prenons la coordonnée $\zeta = z_d^{-1}$ sur Δ s'annulant au point de l'infini. Considérons sur $Y \times \Delta^* = (Y \times \Delta) \cap (Y \times \mathbb{C})$ la restriction de $\mathcal{M}$, notée $\mathcal{E}$. Il s'agit d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sur $Y \times \Delta^*$. Son complexe de De Rham est un système local $\mathcal{S}$ et on a un isomorphisme de $\mathcal{D}_{Y\times\Delta^*}$-modules $\mathcal{E} \simeq \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y\times\Delta^*}$. Prenons un point de base $x_0 \in Y \times \Delta^*$ et une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{x_0}$. Soit A la matrice de l'action $M\colon \mathcal{S}_{x_0} \to \mathcal{S}_{x_0}$ du générateur positif du $\pi_1(Y \times \Delta^*, x_0)$ par rapport à cette base. Considérons le $\mathcal{D}_{Y\times\Delta^*}$-module dont le $\mathcal{O}_{Y\times\Delta^*}$-module sous-jacent est $\mathcal{O}^r_{Y\times\Delta^*}$ et l'action des dérivations est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta} \cdot (s_1, \dots, s_r) &= (\frac{\partial s_1}{\partial\zeta}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial\zeta}) + \frac{1}{\zeta}(s_1, \dots, s_r)B \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot (s_1, \dots, s_r) &= (\frac{\partial s_1}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial z_i}), \quad i = 1, \dots, d-1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

où B est l'unique matrice à coefficients complexes telle que $\exp(-2\pi i B) = A$ et dont les valeurs propres ont leur partie réelle dans l'intervalle $[-1, 0[$. Notons ce $\mathcal{D}_{Y\times\Delta^*}$-module par $\{\mathcal{O}^r_{Y\times\Delta^*}; B\}$. Les $\mathcal{D}_{Y\times\Delta^*}$-modules $\mathcal{E}$ et $\{\mathcal{O}^r_{Y\times\Delta^*}; B\}$ sont isomorphes car tous les deux sont des fibrés vectoriels à connexion intégrable et ses systèmes locaux de sections horizontales (= ses complexes de De Rham) sont isomorphes (voir exemple

Considérons l'extension $\overline{\mathcal{E}}$ de $\{\mathcal{O}^r_{Y\times\Delta^*}; B\}$ dont le $\mathcal{O}_{Y\times\Delta}$-module sous-jacent est le faisceau des fonctions méromorphes à poles à l'infini $\mathcal{O}_{Y\times\Delta}[\star(Y \times \{\infty\})]^r$ et l'action des dérivations est donnée par la même formule (3.8), qui sera noté aussi $\{\mathcal{O}_{Y\times\Delta}[\star(Y \times \{\infty\})]^r; B\}$. Le $\mathcal{D}_{Y\times\Delta}$-module $\overline{\mathcal{E}}$ s'appelle *l'extension de Deligne* de $\mathcal{E}$ [3]. Il ne dépend pas, à isomorphisme près, de la base de $\mathcal{S}_{x_0}$ choisie et il a les propriétés suivantes

1) $\overline{\mathcal{E}}|_{Y\times\Delta^*} \simeq \mathcal{E}$.

2) $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}_{Y\times\Delta}$-module holonome.

3) Notons $\sigma\colon Y \times \Delta^* \hookrightarrow Y \times \Delta$ l'inclusion. Le morphisme $\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{E}}) \to \mathbf{R}\sigma_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{E})$ déduit de 1) est un quasi-isomorphisme.

4) La filtration $\{F^k\overline{\mathcal{E}} = \zeta^{-k} \cdot \mathcal{O}^r_{Y\times\Delta}\}_{k\geq 0}$ est bonne et constante en dehors de l'infini. Plus précisément, $F^k\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{D}^{(k)}_{Y\times\Delta} \cdot F^0\overline{\mathcal{E}}$, pour tout $k \geq 0$.

La démonstration des ces propriétés se fait de façon tout-à-fait analogue au cas d'une variable (preuve du théorème III.1.4). Nous pouvons recoller $\mathcal{M}$ avec $\overline{\mathcal{M}|_{Y\times\Delta^*}}$ pour obtenir un $\mathcal{D}_{\overline{X}}$-module holonome $\overline{\mathcal{M}}$ tel que $\overline{\mathcal{M}}|_X = \mathcal{M}$, et d'après la propriété 3), $\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}\tau_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$, d'où $\mathbf{R}\overline{p}_*\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}p_*\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$. Or, $\overline{\mathcal{M}}$ peut être muni d'une bonne filtration globale $F^\bullet\overline{\mathcal{M}}$ en recollant celle de $\overline{\mathcal{M}|_{\Delta^*}}$ et $F^\bullet\mathcal{M}$. D'après le théorème des images directes des $\mathcal{D}$-modules holonomes admettant des bonnes filtrations globales par un morphisme propre cf. [14], le complexe $\mathbf{R}\overline{p}_*\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}})$ est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologie holonome, d'où le théorème. $\square$

III.2.7. Remarque.— Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, le complexe $\mathbf{Sol}(\mathcal{M})$ est aussi un complexe à cohomologie constructible, car on a un isomorphisme $\mathbf{Sol}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{DR}(\mathcal{M}^*)$. Par les méthodes précédentes, il est possible aussi de démontrer la "condition du support" [11], qui nous dit que la dimension du support du faisceau $\mathbf{DR}^i(\mathcal{M})$ est inférieure ou égale à $\dim(X) - i$ pour tout $i \geq 0$ (cf. [16]).

Bibliographie

[1] *Dualité de Poincaré.* Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, Publ. I.R.M.A. 3, Strasbourg, 1969.

[2] M. Artin, A. Grothendieck, et J.L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas (SGA IV).* Lect. Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1972-1973.

[3] P. Deligne. *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers.* Lect. Notes in Math. 163, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.

[4] R. Douady et A. Douady. *Algèbre et Théories Galoisiennes, 2/Théories Galoisiennes.* Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1977.

[5] R. Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des faisceaux.* Publ. de l'Inst. de Math. de l'Univ. de Strasbourg XIII, Hermann, Paris, 1958.

[6] J.M. Granger et Ph. Maisonobe. A basic course on differential modules. Dans Ph. Maisonobe et C. Sabbah, editeurs, *$\mathcal{D}$-Modules cohérents et holonomes (Éléments de la théorie des systèmes différentiels, vol. I)*, Travaux en cours 45, pages 103–168, Hermann, Paris, 1993.

[7] H. Grauert et R. Remmert. Faisceaux analytiques cohérents sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif. *C. R. Acad. Sci. Paris* 245 (1957) 819–822.

[8] P.P. Grivel. Catégories dérivées et foncteurs dérivés. Dans A. Borel, editor, *Algebraic D-Modules*, pages 1–108, Academic Press, New York, 1987.

[9] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohuku Math. J.* 9 (1957) 119–221.

[10] R. Hartshorne. *Residues and Duality.* Lect. Notes in Math. 20 , Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.

[11] M. Kashiwara. On the maximally overdetermined systems of differential equations. *Publ. R.I.M.S.* 10 (1975) 563–579.

[12] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.

[13] B. Malgrange. Sur les points singuliers des équations différentielles. *L'Enseig. Math.* XX (1974) 147–176.

[14] B. Malgrange. De Rham Complex and Direct Images of $\mathcal{D}$-modules. Dans Ph. Maisonobe et C. Sabbah, editeurs, *Images directes et constructibilité (Éléments de la théorie des systèmes différentiels, vol. II)*, Travaux en cours 46, pages 1–13, Hermann, Paris, 1993.

[15] Z. Mebkhout. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D_X-modules cohérents.* Travaux en cours 35, Hermann, Paris, 1989.

[16] Z. Mebkhout et L. Narváez-Macarro. Démonstration géométrique du théorème de constructibilité. Dans *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D_X-modules cohérents*, par Z. Mebkhout, pages 248–253, Hermann, Paris, 1989. (Travaux en cours, vol. 35).

[17] M. Merle. On some points of local analytic geometry. Dans Ph. Maisonobe et C. Sabbah, editeurs, *$\mathcal{D}$-Modules cohérents et holonomes (Éléments de la théorie des systèmes différentiels, vol. I)*, Travaux en cours 45, pages 81–101, Hermann, Paris, 1993.

[18] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Dans Ph. Maisonobe et C. Sabbah, editeurs, *$\mathcal{D}$-Modules cohérents et holonomes (Éléments de la théorie des systèmes différentiels, vol. I)*, Travaux en cours 45, pages 1–80, Hermann, Paris, 1993.

[19] J.P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. Math.* 61 (1955) 197–278.

[20] J.L. Verdier. Catégories dérivées, état 0. *Lect. Notes in Math.* 569 (1977) 262–311.

[21] J.L. Verdier. Classe d'homologie associée à un cycle. *Astérisque* 36–37 (1976) 101–151.

[22] B. Iversen. *Cohomology of sheaves.* Universitext, Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

Z. M.: U.F.R. de Mathématiques,
URA CNRS n^0 212
Université de Paris VII
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France

L. N-M.: Departamento de Algebra
Universidad de Sevilla
41012 Sevilla
España