Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les DX-modules cohérents
Travaux en Cours **35**. Hermann, Paris, 1989. 251--257.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE CONSTRUCTIBILITÉ

Z. Mebkhout[1] et L. Narváez-Macarro[2]

Introduction.- Dans cet article nous démontrons le théorème de constructibilité de Kashiwara [KAS] à partir du théorème de finitude de Grauert-Remmert [GRA-REM] sur les images directes des faisceaux analytiques cohérents pour un morphisme projectif.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété analytique ou algébrique complexe non singulière on note $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires d'ordre fini à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. Pour un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ on note $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ son complexe de de Rham transcendant et $\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ son complexe de de Rham relatif pour un morphisme lisse $p : X \to X'$ entre variétés lisses.

Théorème 1.- Soit X une variété analytique complexe et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Alors le complexe de de Rham de $\mathcal{M}$, $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$, est analytiquement constructible.

Preuve.- La question est de nature locale sur X. On procède par récurrence sur la dimension de X. Si $\dim(X) = 0$ on peut supposer que X est un point, $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et donc son complexe de de Rham est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $\dim(X) > 0$ et que le théorème est vrai pour toute variété de dimension strictement plus petite à $\dim(X)$. Notons Y le support de $\mathcal{M}$.

Cas a): si $\dim(Y) < \dim(X)$ il existe localement sur X une projection $p : X \to X'$ dont la restriction à Y est finie et surjective.

Lemme 1.- Soit $q : Z \to Z'$ un morphisme fini d'espaces analytiques complexes et $\mathcal{F}$ un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur Z. Alors $\mathcal{F}$ est analytiquement constructible sur Z si (et seulement si) $\mathbf{R}\, q_* \mathcal{F}$ est analytiquement constructible sur Z'.

Preuve du lemme 1.- Vu l'exactitude de q_* nous pouvons supposer que $\mathcal{F}$ est concentré en degré zéro. Prenons une stratification Σ de Z' telle que q et $q_*\mathcal{F}$ sont lisses au-dessus de toute strate S de Σ. D'après la formule de changement de base le problème est réduit à démontrer le lemme dans le cas où Z, Z', q et $q_*\mathcal{F}$ sont lisses. Dans ce cas on voit facilement que $\mathcal{F}$ est aussi lisse.

Appliquons le lemme 1: on est réduit à voir que $p_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est constructible. Mais $\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(M)$ est un $\mathcal{D}_{X'}$-module holonome sur X' et $\mathbf{DR}(\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(M))$

[1]Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques. 2, place Jussieu, 75005 PARIS (France).
[2]Université de Séville, Departamento de Algebra. C/ Tarfia s/n 41012 SEVILLA (Espagne).

$\simeq \mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ [MEB, I §5]. L'hypothèse de récurrence permet de conclure dans ce cas là.

Cas b): si $Y = X$ il existe localement sur X un diviseur Z en dehors duquel $\mathcal{M}$ est lisse et une projection $p : X \to X'$ dont la restriction à Z est finie et surjective. Nous pouvons donc supposer que $X' = D^{n-1}$, $X = X' \times D$ et $p : X \to X'$ est la première projection, D étant un disque ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 2.- Dans la situation précédente $\mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ est un complexe de $\mathrm{D}^b_h(\mathcal{D}_{X'})$.

Terminons la démonstration du théorème de constructibilité à partir du théorème 2. On note $U := X \setminus Z$ et $j : U \to X$ l'inclusion naturelle. On a la suite exacte:

$$0 \to j_! j^{-1} \,\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z \to 0.$$

$j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est un système local de vectoriels complexes puisque $\mathcal{M}$ est lisse au dessus de U, donc $j_! j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est constructible. Comme la catégorie des complexes constructibles est triangulée le complexe $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est constructible si et seulement si sa restriction à Z, $\mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z$, est constructible.

Lemme 2.- Dans la situation précédente $\mathbf{R}\, p_* j_! j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est un complexe constructible sur X' concentré en degrés 0, 1 et 2.

Preuve du lemme 2.- Notons $\mathcal{L}$ le faisceau constructible $j_! j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{F}$ le complexe $\mathbf{R}\, p_* \mathcal{L}$. Comme les couples $(X = X' \times D, Z)$ et $(X' \times \mathbb{C}, Z)$ sont homéomorphes de façon compatible aux projections sur X', nous pouvons supposer que $X = X' \times \mathbb{C}$. Soit $\overline{X} := X' \times \mathbb{P}^1, \overline{j} : X \to \overline{X}$ l'inclusion et $\overline{p} : \overline{X} \to X'$ la première projection. On a $\mathcal{F} \simeq \mathbf{R}\, \overline{p}_* \,\mathbf{R}\, \overline{j}_* \mathcal{L}$ et donc $\mathcal{F}$ est constructible car le morphisme $\overline{p}$ est propre et le complexe $\mathbf{R}\, \overline{j}_* \mathcal{L}$ est constructible [VER] . De plus, en vertu de la formule de changement de base, la fibre de $\mathcal{F}$ en tout point de X' coïncide avec l'hypercohomologie sur $\mathbb{P}^1$ d'un complexe concentré en degrés 0 et 1, et dont le faisceau de cohomologie de degré 1 et supporté par le point de l'infini. Par conséquent $\mathcal{F}$ est concentré en degrés 0, 1 et 2.

En vertu du théorème 2, $\mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ est un complexe à cohomologie holonome et d'après l'hypothèse de récurrence $\mathbf{DR}(\mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}_p(\mathcal{M}))$ est un complexe à cohomologie constructible. Mais $\mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathbf{DR}(\mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}_p(\mathcal{M}))$, d'où en considérant le triangle

$$\mathbf{R}\, p_* j_! j^{-1} \,\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\, p_* \,\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\, p_* (\mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z)$$

on en déduit la constructibilité du troisième terme. En vertu du lemme 1 $\mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z$ est constructible et donc $\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ est constructible, d'où le théorème.

Preuve du théorème 2.- Quitte à rétrécir D, $\mathcal{M}$ est muni d'une bonne filtration $(\mathcal{M}_k)$ qui est stationnaire en dehors de Z et donc on peut supposer qu'elle est constante. Le $\mathcal{D}_X$-module holonome filtré $(\mathcal{M}, (\mathcal{M}_k))$ se prolonge en un $\mathcal{D}$-module holonome filtré $(\tilde{\mathcal{M}}, (\tilde{\mathcal{M}}_k))$ sur $\tilde{X} := X' \times \mathbb{C}$ lisse en dehors de Z, la filtration $(\tilde{\mathcal{M}}_k)$ étant constante en dehors de Z. Notons $\overline{\mathcal{M}}$ l'extension canonique de $\tilde{\mathcal{M}}$ à $\overline{X} := X' \times \mathbb{P}^1$ [cf. MEB, II §3]. C'est un $\mathcal{D}_{\overline{X}}$-module holonome muni d'une bonne filtration $(\overline{\mathcal{M}}_k)$ qui prolonge $(\tilde{\mathcal{M}}_k)$. En vertu du théorème de Grauert-Remmert [GRA-REM] sur les images directes des faisceaux analytiques cohérents par un morphisme projectif, le complexe $\mathbf{R}\,\overline{p}_*\,\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}})$ est à cohomologie $\mathcal{D}_{X'}$-cohérente, où $\overline{p} : \overline{X} \to X'$ est la première projection. En vertu du théorème de dualité relative [MEB, I §5] ce complexe est à cohomologie holonome. Notons $\overline{j} : \tilde{X} \to \overline{X}$ l'inclusion. Le morphisme canonique

$$\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow \overline{j}_*\overline{j}^{-1}\,\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}})$$

est un isomorphisme. En effet, la question est locale sur le diviseur à l'infini. Par dévissage, on peut supposer que $\overline{\mathcal{M}}$ est le faisceau des fonctions méromorphes avec des poles sur le diviseur à l'infini, muni d'une connexion à pôles simples, et dans ce cas un calcul facile permet de conclure. Donc

$$\mathbf{R}\,\tilde{p}_*\,\mathbf{DR}_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}\,\overline{p}_*\overline{j}_*\,\mathbf{DR}_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}\,\overline{p}_*\overline{j}_*\overline{j}^{-1}\,\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathbf{R}\,\overline{p}_*\,\mathbf{DR}_{\overline{p}}(\overline{\mathcal{M}})$$

où $\tilde{p} : \tilde{X} \to X'$ est la première projection.

D'autre part on a un morphisme canonique

$$\mathbf{R}\,\tilde{p}_*\,\mathbf{DR}_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathbf{R}\,p_*\,\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$$

qui est un isomorphisme. En effet en dehors de Z $\mathbf{DR}_{\tilde{p}}(\tilde{\mathcal{M}})$ est un système local de $\tilde{p}^{-1}\mathcal{O}_{X'}$-modules en vertu du lemme de Poincaré relatif.

Proposition 3.- Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome sur une variété analytique complexe. Alors la dimension du support du faisceau $\mathbf{DR}^i(\mathcal{M}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$ est inférieure ou égale à $\dim(X) - i$ pour tout $i \geq 0$.

Preuve.- La question est locale sur X. On raisonne par récurrence sur $\dim(X)$. Si $\dim(X) = 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = 0$ pour $i > 0$ et la proposition est vraie. On suppose que l'assertion est vraie pour toutes les variétés de dimension $< \dim(X)$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et Y son support. Si $\dim(Y) < \dim(X)$ il existe localement sur X une projection $p : X \to X'$ dont la restriction à Y est finie et surjective. L'hypothèse de récurrence et l'isomorphisme $\mathbf{DR}(\mathbf{R}\,p_*\,\mathbf{DR}_p(M)) \simeq p_*\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$ permettent de conclure.

Si $Y = X$ il existe localement sur X un diviseur Z de X et une projection $p : X \to X'$ tels que $\mathcal{M}$ est lisse en dehors de Z et la restriction de de p à Z est finie et surjective. Notons $j : U = X \setminus Z \to X$ l'inclusion naturelle. On a la suite exacte

$$0 \to j_!j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z \to 0.$$

Il suffit de montrer que la dimension du support des faisceaux de cohomologie de $\mathbf{R}\,p_*(\mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z)$ a la propriété requise. D'après le lemme 2, $\mathbf{R}^i\,p_*j_!j^{-1}\,\mathbf{DR}(\mathcal{M})$

$= 0$ pour $i \geq 3$. Le complexe $\mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ se représente par $0 \to \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M} \to 0$ où ∇ est l'action de la dérivée par rapport aux fibres de p. En raisonant comme dans la preuve du théorème 2 nous pouvons supposer qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{M}^0$ de $\mathcal{M}$ tel que le support de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^0$ est contenu dans Z. La suite exacte $0 \to \mathcal{M}^0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{M}^0 \to 0$ montre que $\mathbf{R}^i\, p_*\mathcal{M} = 0$ si $i \geq 1$ puisque p est de Stein. Donc le complexe $\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(\mathcal{M})$ est concentré en degrés 0 et 1 et d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\dim \operatorname{supp}(\mathbf{DR}^i(\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(\mathcal{M}))) \leq \dim(X') - i + 1 = \dim(X) - i, \quad i \geq 0.$$

Pour conclure il suffit de remarquer l'existence d'une surjection

$$\mathbf{DR}^2(\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{R}^2\, p_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \longrightarrow p_*(\mathbf{DR}^2(\mathcal{M})|_Z) \longrightarrow 0$$

et des isomorphismes

$$\mathbf{DR}^i(\mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}_p(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{R}^i\, p_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \simeq p_*(\mathbf{DR}^i(\mathcal{M})|_Z), \quad i \geq 3$$

provenant du triangle

$$\mathbf{R}\, p_* j_! j^{-1}\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\, p_*\, \mathbf{DR}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\, p_*(\mathbf{DR}(\mathcal{M})|_Z).$$

Proposition 4.- Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome sur une variété algébrique complexe non singulière X, son complexe de de Rham transcendant est algébriquement constructible.

Preuve.- La question est locale pour la topologie de Zariski. On peut supposer que X est affine. Soit $i : X \to \mathbb{C}^n$ une immersion fermée dans un espace affine. En considérant l'image directe de $\mathcal{M}$ par i on est réduit au cas où $X = \mathbb{C}^n$. $\mathcal{M}$ admet un prolongement holonome $\overline{\mathcal{M}}$ à $\mathbb{P}^n$ (cf. [MEB, I §4]). Le complexe de de Rham transcendant de $\overline{\mathcal{M}}$ est algébriquement constructible en vertu du théorème 1 et de G.A.G.A.. Sa restriction à $\mathbb{C}^n$ est le complexe de de Rham transcendant de $\mathcal{M}$.

References

[GRA-REM] Grauert, H et Remmert, R.: "Faisceaux analytiques cohérents sur le produit d'un espace analytique et d'un espace projectif", C.R.A.S. Paris, t. 245, (1957) 819-822.

[KAS] Kashiwara, M.: "On the maximally overdetermined systems of differential equations. I", Publ. R.I.M.S. 10 (1975) 563-579.

[MEB] Mebkhout, Z.: "Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents", Séminaire de Plans-sur-Bex (Mars 1984), à paraître dans "Travaux en cours", ed. Hermann (Paris).

[VER] Verdier, J.L.: "Classe d'homologie associée à un cycle", Astérisque 36-37 (1976) 101-151.