UNA NOTA A UN TEOREMA DE ALEXANDER

por

JOSE M.ª MONTESINOS AMILIBIA

(Publicado en la «Revista Matemática Hispano - Americana»
4.ª Serie - Tomo XXXII - Núm. 4-5)

MADRID
Talleres Gráficos Vda. de C. Bermejo
J. García Morato, 122.—Teléf. 233 06 19
1972

UNA NOTA A UN TEOREMA DE ALEXANDER

por

JOSE M.ª MONTESINOS AMILIBIA

I. Introducción

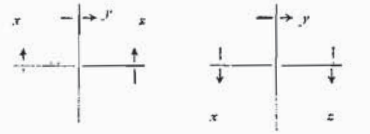
Una variedad orientable será en este trabajo una 3-variedad compacta, conexa, sin borde y orientable. En 1920 Alexander demostró en [1] que toda variedad orientable es un recubridor ramificado sobre un nudo de S^3. En el mismo trabajo Alexander afirma sin demostración que además es cierto el siguiente teorema:

I.1. Teorema.—*Toda variedad orientable es un recubridor ramificado sobre un nudo de S^3 de tal modo que los puntos de la preimagen de un punto singular tienen índice de ramificación $\leqslant 2$.*

En [5] Fox asegura (*) que el Teorema I.1 puede obtenerse haciendo uso de las ideas de Clifford sobre superficies de Riemann [2].

En esta nota demostraremos I.1 utilizando los métodos de [7] y [8]; también demostraremos el Teorema V.3.1 de [7] de otra manera.

Sea N un nudo en S^3 que consta de las componentes $N_1, \ldots, N_r$ y orientemos de un modo determinado cada una de estas componentes. Supongamos que hemos asignado a cada paso orientado x de N una permutación (que llamaremos también x) de los índices $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ pero de tal manera que en los puntos dobles de la forma



se tenga la relación $x\,y = y\,z$.

(*) Al tiempo de publicar este trabajo, el Profesor R. H. Fox me ha comunicado que él ha demostrado el Teorema I.1, pero que no lo ha publicado (cfr. [6]).

Esta asignación define una representación de π_1 (S^3 — N) en el grupo de permutaciones de los n índices $\{0, 1, ..., n-1\}$. Si esta representación es transitiva diremos que la asignación de permutaciones a los pasos de N es una *n-coloración* de N [3, pág. 92].

A cada nudo N n-coloreado le corresponde un recubridor de n hojas ramificado sobre N y construido mediante un corte de S^3 relativo a N. Además todo recubridor ramificado sobre un nudo se obtiene de esta manera [7].

Escribiremos, como es usual, la permutación x asignada al paso orientado x como un producto de ciclos disjuntos de longitud superior a uno (y si un índice determinado no pertenece a ninguno de los ciclos que componen x, significa que x no altera tal índice).

Si la permutación x consta de los ciclos $c_1, ..., c_s$ de longitud $k_1, ..., k_s$ respectivamente, en donde $k_i > 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ y $k_1 + ... + k_s = t \leqslant n$, entonces la preimagen de un punto perteneciente al paso x consta de los puntos $p_1, ..., p_s, p_{s+1}, ..., p_{s+n-t}$, en donde p_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ tiene índice de ramificación k_i y p_j $(s + 1 \leqslant j \leqslant s + n - t)$ tiene índice de ramificación uno [7].

Esto significa que una demostración del Teorema I.1 se obtiene al probar que toda variedad orientable corresponde a un nudo n-coloreado asignando a cada paso orientado x una permutación que se escribe como un producto de ciclos de longitud dos. Esto es lo que demostraremos en la sección III.

II. Resultados conocidos

Adoptaremos el punto de vista semisimplicial como se enuncia en [7].

II.1. *Corte de una 3-variedad.*

Sea L^1 un poliedro de una 3-variedad conexa M^3, contenido en un poliedro C^2 de M^3. Siguiendo a Neuwirth [9] llamaremos a C^2 un *corte de M^3 relativo a L^1* («splitting complex») cuando $M^3 - C^2$ sea conexo y simplemente conexo.

Tomemos ahora una unión disjunta de tetraedros cerrados en correspondencia biunívoca con los tetraedros de M^3 e identifiquemos estos tetraedros a lo largo de caras cerradas que no estén en C^2. Obtenemos así un poliedro H^3 y una aplicación natural Φ: $H^3 \longrightarrow M^3$, la cual

identifica un par de caras cerradas de H^3 en una sola cara de C^2. Diremos que H^3 es *M^3 cortado a lo largo de C^2.*

II.2. *Nudos.*

Un *nudo* en M^3 es un poliedro que es imagen topológica de n copias disjuntas de la 1-esfera (diremos que tiene *multiplicidad* n).

Sea N un nudo en la 3-esfera S^3 representada como $R^3 + \infty$, es decir, como el espacio euclídeo tridimensional compactado con un punto. Supondremos que N está en posición regular [3] respecto a la superficie esférica $S^2 = R^2 + \infty$, en donde $R^2 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$. S^2 divide a S^3 en dos componentes. La adherencia de aquella componente formada de puntos de coordenada $z \geqslant 0$ se llamará H^- y llamaremos H^+ a la adherencia de la otra componente.

Los puntos $D_1, ..., D_m$ de la proyección de N sobre S^2 que tienen exactamente dos puntos en su fibra, se llamarán puntos dobles de la proyección. La fibra de D_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ consta de dos puntos P_i y Q_i tales que $P_i \in {}^0H^-$ y $Q_i \in {}^0H^+$. Uniremos P_i con Q_i mediante un arco D_i^1 que se proyecta sobre D_i.

A las componentes de N — $(Q_1 + ... + Q_m)$ las llamaremos *pasos*.

Supondremos que todos los puntos de N están en S^2 salvo los que se proyectan en un entorno V_i de D_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Sea D^2 un disco contenido en S^2 y que contiene en su interior a la proyección de N, y sea R T un arco tal que ^{0}R T $\subset {}^0D^2$ — (proyección de N) y $\dot{}$R T = R + T, en donde R es un punto de $\dot{D}^2$ y T es un punto de N $\cap$ S^2.

Vamos a definir un corte C^2 de S^3 relativo a N, como hace Neuwirth en [9]. C^2 está compuesto de D^2 sustituyendo el entorno V_i por las dos bandas de fig. II.2.1, que se cortan en D_i^1.

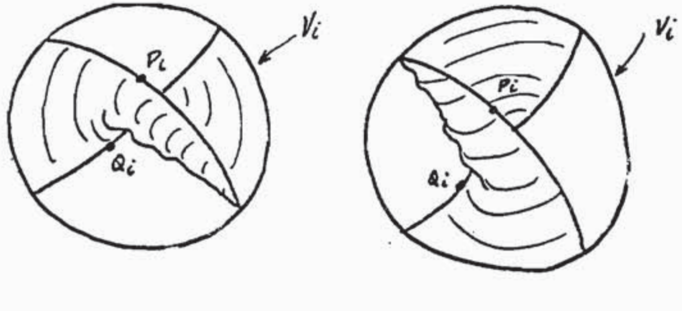


Fig. II.2 1.

Una descomposición celular de C^2 está compuesta por las 0-celdas R, T, P_i, Q_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$; las 1-celdas $\dot{}D^2 - R$, ${}^0R\,T$, ${}^0D_i^1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ y las componentes de $N - (P_1 + Q_1 + \ldots + P_m + Q_m + T)$; las 2-celdas son las componentes de $D^2 -$ (suma de las 1-celdas cerradas). Llamaremos a estas 2-celdas $Z_0, \ldots, Z_s$, en donde Z_0 es la 2-celda tal que $\dot{}D^2 \cap {}^-Z_0 \neq \varnothing$.

Cortando ahora S^3 a lo largo de C^2 obtenemos lo que llamamos la *hoja canónica* H^3 y la aplicación natural $\Phi: H^3 \longrightarrow S^3$ (cfr. [7] para las construcciones que siguen). $\dot{}H^3 = \Phi^{-1}(C^2)$ y H^3 tiene una descomposición celular cuyas celdas son ${}^0H^3$ y las imágenes inversas de las celdas de C^2. $\Phi^{-1}(Z_i)$ está compuesto de dos 2-celdas Z_i^+ y Z_i^- tales que $Z_i^+ \subset \Phi^{-1}(H^+)$ y $Z_i^- \subset \Phi^{-1}(H^-)$ para $0 \leqslant i \leqslant s$.

II.3. *Construcción del recubridor ramificado correspondiente a un nudo n-coloreado.*

Sea N un nudo n-coloreado. Vamos a construir, como hacemos en [7], el recubridor ramificado correspondiente.

Sea Z_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ una 2-celda de C^2. Unimos $\dot{}D^2$ con ${}^0Z_i$ mediante un arco contenido en ${}^0D^2 - (V_1 + \ldots + V_m)$. Este arco corta sucesivamente los pasos $x_a, x_b, \ldots, x_t$ hasta llegar a ${}^0Z_i$. Asignaremos a Z_i la permutación $x_a\, x_b \ldots x_t = R(Z_i)$, y a Z_0 la permutación identidad.

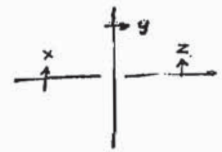
Sean ahora $H_0^3, \ldots, H^3_{n-1}$ n copias de la hoja canónica H^3. Para construir el espacio recubridor ramificado correspondiente al nudo coloreado hay que identificar entre sí estas hojas del modo siguiente: Sea $(Z_i^+)_a$ la 2-celda Z_i^+ en la hoja H^3_a: asignaremos a $(Z^+)_a$ el índice $R(Z_i)(a)$ e identificaremos del modo natural el cierre de $(Z^+)_a$ con el cierre de la 2-celda $(Z_i^-)_{R(Z_i)(a)}$.

III. Demostración del teorema I.1

Sea N un nudo n-coloreado. El argumento usado para probar el Teorema I.1 de [8] puede utilizarse sin dificultad para demostrar que existe un nudo N′ n-coloreado, asignando a cada paso orientado x de N′ una permutación x formada de un solo ciclo, tal que los recubridores ramificados correspondientes a N y N′ son homeomorfos.

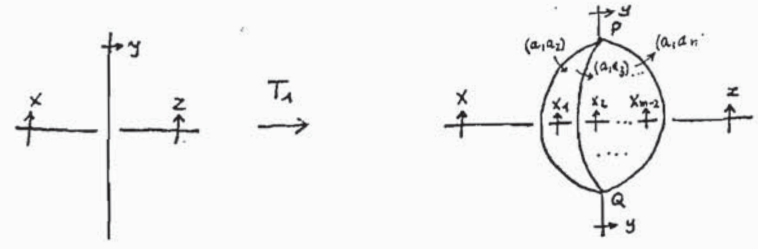
Supongamos pues que el nudo N está n-coloreado asignando a cada paso orientado x de N′ un ciclo x entre los índices $\{0, \ldots, n-1\}$ y demostraremos el Teorema I.1 en varios pasos.

Paso 1.—Supongamos en N la siguiente situación:



en donde y es un ciclo $(a_1 \ldots a_m)$ de longitud $m > 2$.

Aplicamos a N la siguiente deformación:



asignando a los nuevos pasos las permutaciones indicadas en la figura, en donde x_i es el ciclo $(a_1\, a_{i+1})\, x_{i-1}\, (a_1\, a_{i+1})$ para $1 \leqslant i \leqslant m-2$. Obtenemos de este modo un grafo N′ n-coloreado (*) ya que la asignación de permutaciones es compatible con las relaciones; en efecto:

$$x_{m-2} = (a_1\, a_{m-1})\,(a_1\, a_{m-2}) \ldots (a_1\, a_2)\, x\, (a_1\, a_2) \ldots (a_1\, a_{m-1})$$

y por tanto:

$$(a_1\, a_m)\, x_{m-2}\, (a_1\, a_m) = (a_1\, a_m) \ldots (a_1\, a_2)\, x\, (a_1\, a_2) \ldots (a_1\, a_m) =$$
$$= (a_1 \ldots a_m)^{-1}\, x\, (a_1 \ldots a_m) = y^{-1}\, x\, y = z$$

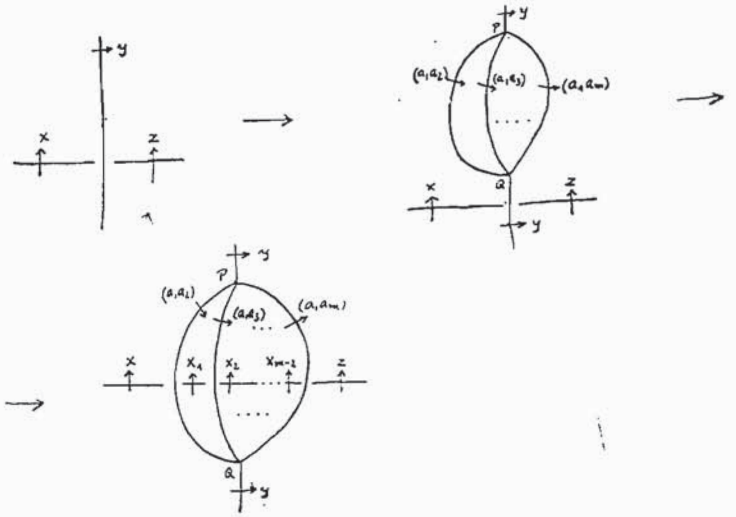
y además se cumple en P y Q que

$$y = (a_1\, a_2) \ldots (a_1\, a_m) = (a_1 \ldots a_m).$$

(*) Las definiciones y construcciones de I y II se aplican sin dificultad a los grafos coloreados que aparecen en este trabajo, [7].

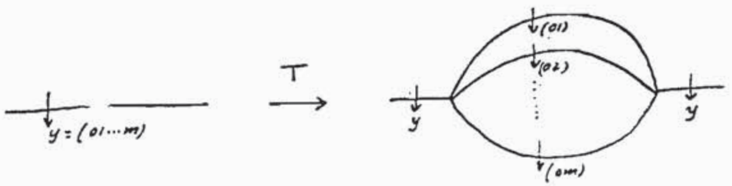
III.1. *Los recubridores ramificados correspondientes a N y N' son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.—La deformación T_1 puede llevarse a cabo en dos pasos:



Es pues obvio que III.1 se deduce del siguiente lema:

III.2. LEMA.—*Si obtenemos el grafo coloreado N' aplicando la deformación*

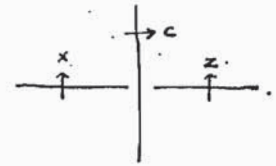


al grafo coloreado N, los recubridores ramificados correspondientes a N y N' son homeomorfos.

La demostración se verá en la sección IV.

Paso 2.—Aplicando la deformación T_1 las veces que ello sea posible, obtenemos un grafo n-coloreado N_1, tal que los recubridores correspondientes a N y a N_1 son homeomorfos.

Paso 3.—Supongamos en N_1 la siguiente situación:



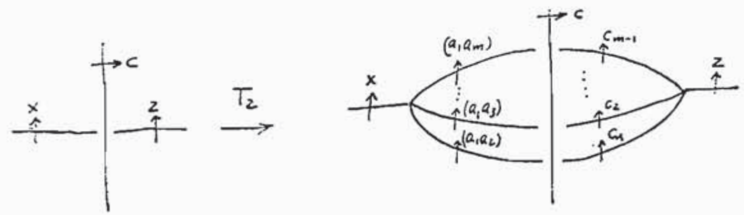
en donde c es un ciclo de longitud dos y x es el ciclo $(a_1 \ldots a_m)$ de longitud $m > 2$.

III.3. *Como* $z = c\,x\,c$ *si escribimos* $x = (a_1\, a_2) \ldots (a_1\, a_m)$ *se tiene*

$$z = (c\,(a_1\, a_2)\, c) \ldots (c\,(a_1\, a_m)\, c)$$

y haciendo $c_i = c\,(a_1\, a_{i+1})\, c$ *para* $1 \leqslant i \leqslant m - 1$ *tenemos que* z *es el producto de* $m - 1$ *ciclos distintos:* $z = c_1 \ldots c_{m-1}$.

Apliquemos a N_1 la siguiente deformación:



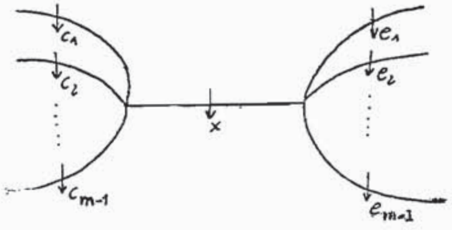
Obtenemos así un grafo n-coloreado N'_1. Las ecuaciones III.3 muestran que la asignación es compatible con las relaciones.

III.4. *Los recubridores ramificados correspondientes a N_1 y a N'_1 son homeomorfos.*

La demostración es análoga a la de III.1.

Paso 4.—Aplicando la deformación T_2 las veces que ello sea posible, obtenemos un grafo N_2 n-coloreado tal que los recubridores ramificados correspondientes a N_1 y N_2 son homeomorfos.

Paso 5.—Supongamos en N_2 la siguiente situación:



en donde x es un ciclo $(a_1 \dots a_m)$; $c_1, \dots, c_{m-1}$ son ciclos de longitud dos tales que $c_1 \dots c_{m-1} = (a_1 \dots a_m)$ y $e_1, \dots, e_{m-1}$ son ciclos de longitud dos tales que $e_1 \dots e_{m-1} = (a_1 \dots a_m)$ (*).

Sea $s = m - 1$ y supongamos que $c_i = (a\ b)$ y $c_{i+1} = (b\ c)$ entonces los ciclos de la s-pla

$$\{\bar{c}_1 = c_1, \dots, \bar{c}_i = c_{i+1}, \bar{c}_{i+1} = (a\ c), \dots, \bar{c}_s = c_s\}$$

son tales que:

$$\bar{c}_1 \dots \bar{c}_s = c_1 \dots (b\ c)(a\ c) \dots c_s = c_1 \dots (b\ c)(a\ c)(b\ c)(b\ c) \dots c_s =$$
$$= c_1 \dots c_i\, c_{i+1} \dots c_s.$$

Llamaremos O_1 a la transformación $\{c_1, \dots, c_s\} \longrightarrow \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_s\}$.
De igual modo definimos O_2 así:

$$\{c_1, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_s\} \longrightarrow \{c_1{}^* = c_1, \dots, c_i{}^* = (a\ c),$$
$$c^*_{i+1} = (a\ b), \dots, c_s{}^* = c_s\}.$$

(*) $c_1 \dots c_{m-1} = (a_1 \dots a_m)$ implica que los ciclos $c_1, \dots, c_{m-1}$ son distintos, como se deduce de la demostración del lema III.5.

Definimos O_3 como una trasposición de dos ciclos adyacentes disjuntos.

III.5. Lema —$\{c_1, \dots, c_s\}$ *puede ser transformada en* $\{e_1, \dots, e_s\}$ *mediante aplicación sucesiva de un número finito de operaciones* O_1, O_2 *y* O_3.

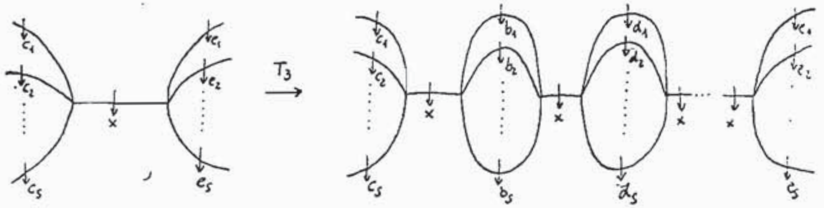
La demostración se verá en la sección IV.

Sean pues

$$\{c_1, \dots, c_s\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_s\} \longrightarrow \{d_1, \dots, d_s\} \longrightarrow \dots \longrightarrow \{e_1, \dots, e_s\},$$

s-plas de ciclos de longitud dos, de modo que cada s-pla se obtiene de la anterior mediante aplicación de una de las operaciones O_1, O_2, O_3.

Aplicamos a N_2 la siguiente deformación:



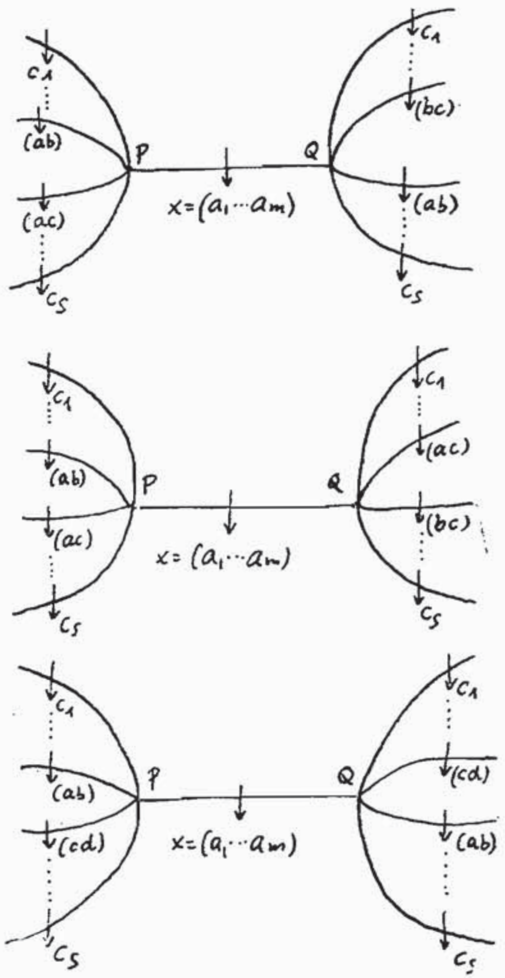
Obtenemos así un grafo N'_2 n-coloreado como se deduce de la definición de O_1, O_2, O_3.

III.6. *Los recubridores ramificados correspondientes a* N_2 *y* N'_2 *son homeomorfos.*

Para la demostración basta aplicar el lema III.2.

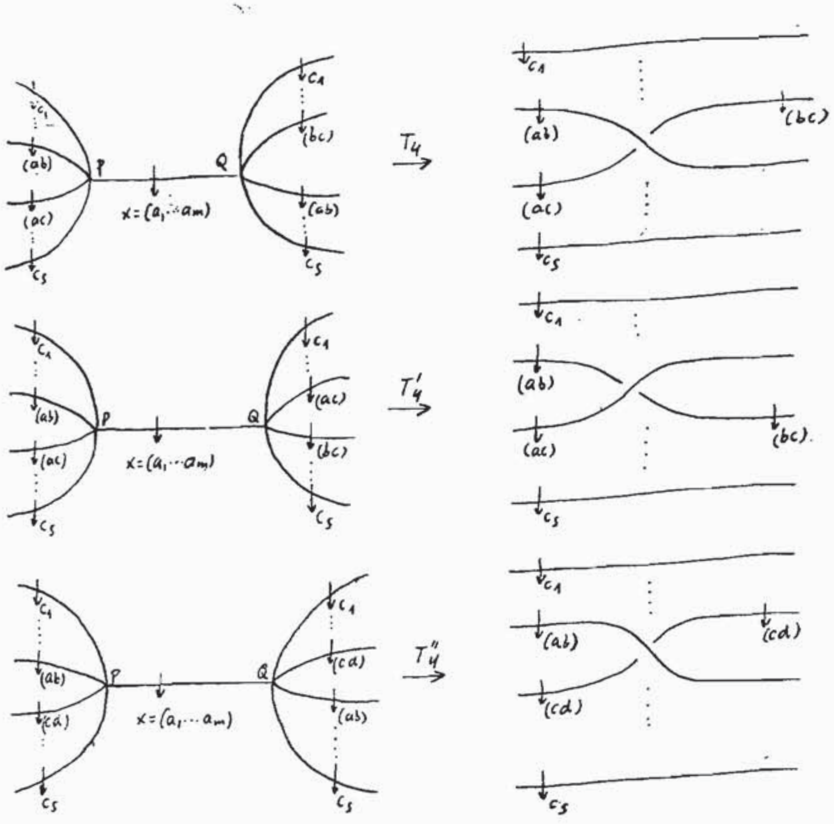
Paso 6.—Aplicando la deformación T_3 las veces que ello sea posible obtenemos un grafo n-coloreado N_3 tal que los recubridores ramificados correspondientes a N_2 y a N_3 son homeomorfos.

Paso 7.—Supongamos que en N_3 aparece una de las tres situaciones, en donde $s = m - 1$:



en donde la asignación de permutaciones es compatible con las relaciones que proceden de los puntos P y Q.

Aplicamos a N_3 las deformaciones siguientes en cada caso:

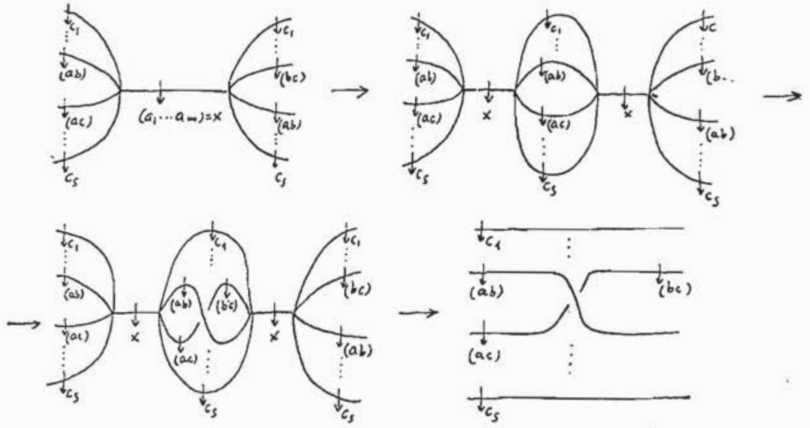


En cada caso obtenemos un grafo n-coloreado N'_3.

III.7. *Los recubridores ramificados correspondientes a N_3 y a N'_3 son homeomorfos.*

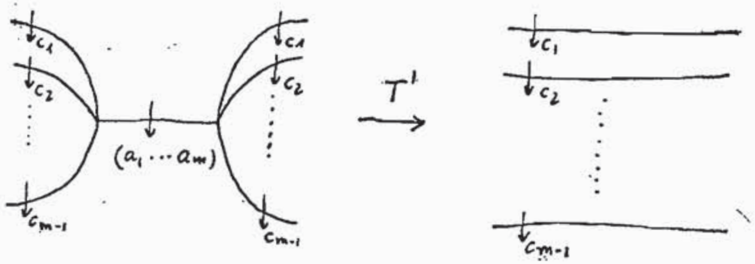
DEMOSTRACIÓN.—Haremos la demostración para T_4 siendo, por lo demás, análoga para T'_4 y T''_4.

La deformación T_4 puede llevarse a cabo en varios pasos:



Todo se reduce a probar el siguiente lema:

III.8. LEMA.—*Si N es un grafo* n-*coloreado y obtenemos N' aplicando una deformación*



en donde $c_1, \dots, c_{m-1}$ *son ciclos de longitud dos tales que* $c_1 \dots c_{m-1} = (a_1 \dots a_m)$, *los recubridores ramificados correspondientes a N y N' son homeomorfos.*

La demostración se verá en la sección IV.

Paso 8.—Aplicando a N_3 las deformaciones T_3, T'_3, T''_3 las veces que ello sea posible, obtenemos un *nudo* n-coloreado N_4 tal que los recubridores ramificados correspondientes a N_3 y N_4 son homeomorfos.

Teniendo en cuenta los pasos 2, 4, 6, 8, y el hecho de que N_4 está n-coloreado asignando a cada paso un ciclo de longitud dos, se obtiene el Teorema I.1. En realidad se ha probado más:

III.9. TEOREMA.—*Toda variedad orientable es un recubridor ramificado sobre un nudo de S^3 de tal modo que, si* n *es el número de hojas, en la preimagen de un punto singular hay un punto de índice de ramificación dos y* n — 2 *puntos de índice de ramificación uno* (*).

IV. DEMOSTRACIÓN DE LOS LEMAS III.5, III.2 Y III.8

IV.1. *Demostración del lema III.5.*

Sean $\{c_1, \dots, c_m\}$ m ciclos de longitud dos entre los índices $\{0, \dots, m\}$ y tales que $c_1 \dots c_m = (01 \dots m)$. Bastará probar que puede pasarse de la m-pla $\{c_1, \dots, c_m\}$ a la $\{(01), (02), \dots, (0\,m)\}$ mediante aplicación de un número finito de operaciones O_1, O_2 y O_3.

Haremos la demostración por inducción en m menos el número de veces que aparece el índice 0 entre los ciclos $c_1, \dots, c_m$. Es claro que el índice 0 aparece al menos una vez.

Supongamos que entre los ciclos $c_1, \dots, c_m$ hay exactamente s ciclos de la forma $(0\,a_1), \dots, (0\,a_s)$. Si a la derecha (o izquierda) del ciclo $(0\,a_i)$ hay un ciclo de la forma $(a_i\,b)$ con $b \neq 0$ puede aplicarse la operación O_2 (o O_1) así:

$$\{\dots (0\,a_i)\,(a_i\,b) \dots\} \xrightarrow{O_2} \{\dots (0\,b)\,(0\,a_i) \dots\}$$
$$\{\dots (a_i\,b)\,(0\,a_i) \dots\} \xrightarrow{O_1} \{\dots (0\,a_i)\,(0\,b) \dots\}$$

aumentando en uno el número de ciclos que tienen el índice 0.

Si no ocurre esto, siempre puede conseguirse mediante aplicación de la operació O_3, o bien situarnos en el caso anterior, o bien llegar a una situación como la siguiente:

$$\{(0\,a_1), (0\,a_2), \dots, (0\,a_s), c'_{s+1}, \dots, c'_m\}$$

en donde $c'_{s+1}, \dots, c'_m$ no contienen al índice 0 y c'_{s+1} es disjunto con $(0\,a_s)$.

(*) Este es el Teorema I.1 de [8].

Como $(01 \ldots m) = (0\, a_1) \ldots (0\, a_s)\, c'_{s+1} \ldots c'_m$ es seguro que algún ciclo de los $c'_{s+1}, \ldots, c'_m$ contiene uno de los índices $a_1, \ldots, a_s$.

Puede suponerse que es $c'_{s+1} = (a_t\, b)$ con $b \neq 0$, pues se llega a esta situación aplicando operaciones. Aplicando ahora operaciones O_3 llegamos a la situación:

$$\{(0\, a_1), \ldots, (0\, a_t), (a_t\, b), \ldots, (0\, a_s), c'_{s+2}, \ldots, c'_m\}.$$

Aplicando ahora una operación O_2 tenemos:

$$\{(0\, a_1), \ldots, (0\, b), (0\, a_t), \ldots, (0\, a_s), c'_{s+2}, \ldots, c'_m\}.$$

Por tanto, repitiendo este proceso llegaremos a la situación:

$$\{(0, a_1), \ldots, (0\, a_m)\}.$$

Pero se tiene que:

$$(0\, a_1 \ldots a_m) = (0\, a_1) \ldots (0\, a_m) = c_1 \ldots c_m = (01 \ldots m)$$

y por tanto $a_i = i$ para $1 \leqslant i \leqslant m$. Queda pues probado el lema III.5.

IV.2. *Demostración de los lemas III.2 y III.8.*

La idea de la demostración de ambos lemas es la misma. Las deformaciones tendrán lugar en el interior de un entorno U: fuera de ese entorno los grafos N y N′ permanecen inalterados. Después mediante cortes C^2 y C'^2 de S^3 relativos a N y N′ respectivamente, que coinciden fuera de U, se construyen los correspondientes recubridores ramificados $\Phi: M^3 \longrightarrow S^3$ y $\Phi': M'^3 \longrightarrow S^3$ sobre N y N′ respectivamente. Es evidente entonces que $M^3 - \Phi^{-1}(U)$ y $M'^3 - \Phi'^{-1}(U)$ son homeomorfos. Después se probará que $\Phi^{-1}(U)$ y $\Phi'^{-1}(U)$ están compuestos del mismo número de bolas disjuntas; esto implica que M^3 y M'^3 son homeomorfos.

Todo queda pues reducido a construir $\Phi^{-1}(U)$ y $\Phi'^{-1}(U)$. Si H_i^3 y $\Phi_i: H_i^3 \longrightarrow S^3$ son la hoja i-ésima y la proyección sobre S^3 correspondiente al corte C^2, entonces $\Phi^{-1}(U)$ se obtiene identificando entre sí los miembros de la familia $\{\Phi_i^{-1}(U)\}_{i \in \{0, \ldots, n-1\}}$, de acuerdo con la ley de identificación determinada por los índices asignados a las 2-celdas de $\Phi_i^{-1}(U) \cap {}^{\cdot}H_i^3$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$ (II.3).

Sólo demostraremos el lema III.2, siendo la demostración del III.8 completamente análoga.

En figura IV.2.1 aparece el entorno U que contiene al arco P Q. La situación podemos suponerla sin merma de generalidad como sigue: al construir el corte C^2 de S^3 relativo a N, $Z_0 \cap U = R$ y por tanto R va dotado con la permutación identidad.

Apliquemos la deformación T a N, pero de tal modo que después de la deformación $(S^3 - U) \cap N$ permanece inalterado. Obtenemos así N′. En figuras IV.2.1 y IV.2.2 aparecen respectivamente $U \cap N$ y $U \cap N'$.

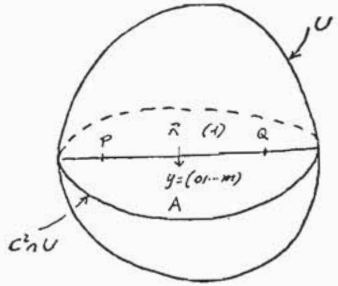


Fig. IV.2.1.

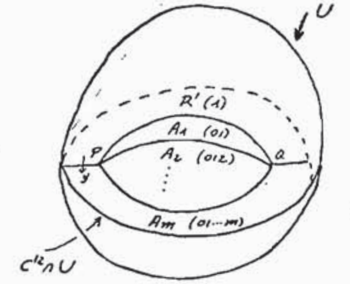


Fig. IV.2.2.

Sea C'^2 el corte de S^3 relativo a N′ tal que

$$C'^2 \cap (S^3 - U) = C^2 \cap (S^3 - U).$$

En figura IV.2.1 aparece $C^2 \cap U$ con la asignación (definida en II.3) de permutaciones a las 2-celdas R y A de $C^2 \cap U$. En figura IV.2.2 aparece $C'^2 \cap U$ con la asignación de permutaciones a las 2-celdas R′, $A_1, \ldots, A_m$. Fuera de U coinciden las permutaciones asignadas a las 2-celdas de C^2 y C'^2.

Sean H_i^3, $\Phi_i: H_i^3 \longrightarrow S^3$ la hoja i-ésima y la proyección de tal hoja sobre S^3, obtenidas cortando S^3 a lo largo de C^2. Análogamente sean $H_i'^3$, $\Phi'_i: H_i'^3 \longrightarrow S^3$ para C'^2.

Vamos a construir $\Phi^{-1}(U)$ mediante identificación de los miembros de la familia $\{\Phi_i^{-1}(U)\}_{i \in \{0, \ldots, n-1\}}$. Análogamente construiremos $\Phi'^{-1}(U)$.

Si $i \notin \{0, 1, \ldots, m\}$ deben identificarse $\Phi_i^{-1}(U)$ y $\Phi_i'^{-1}(U)$ cada uno consigo mismo dando una bola.

Que $\Phi_0^{-1}(U), \ldots, \Phi_m^{-1}(U)$ identificados dan una bola, es inmediato de la observación de figura IV.2.3, en donde aparece $\Phi_i^{-1}(U)$ para $0 \leqslant i \leqslant m$.

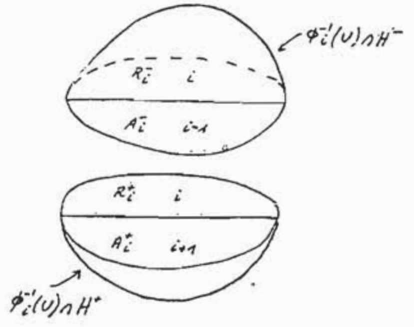


Fig. IV.2.3.

Que Φ'^{-1}_0 (U), ..., Φ'^{-1}_m (U) identificados dan una bola es un poco más difícil de ver. En figura IV.2.4 aparecen Φ'^{-1}_0 (U), ..., Φ'^{-1}_m (U) después de haber sido cada uno de ellos identificado consigo mismo. Esquemáticamente aparece en figura IV.2.5 cómo, efectivamente, la identificación de las bolas de figura IV.2.4 produce una bola (*).

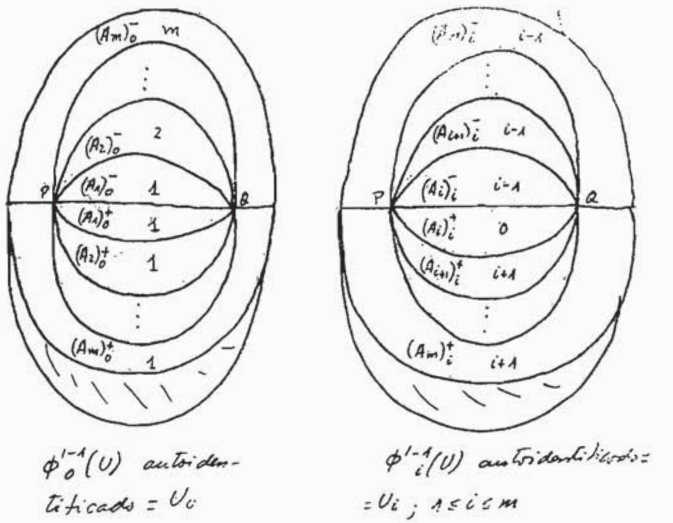


Fig. IV.2 4

(*) Como resultado de la deformación local en el interior de U, se obtiene una deformación local en Φ^{-1} (U) que consiste en un *cierto desplazamiento* de las hojas. Compárese esto con las ideas de Clifford [2] sobre superficies de Riemann.

V. Deformaciones en nudos n-coloreados con ciclos de longitud 2

Utilizando los resultados de este trabajo vamos a demostrar de un modo más sencillo el siguiente resultado obtenido en [7, teorema V.3.1].

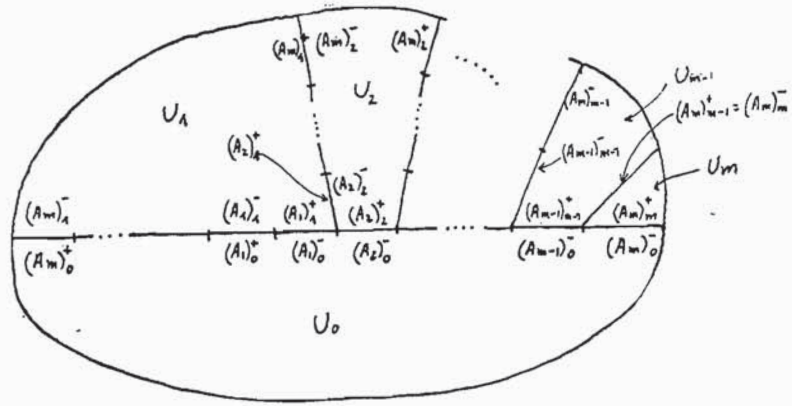
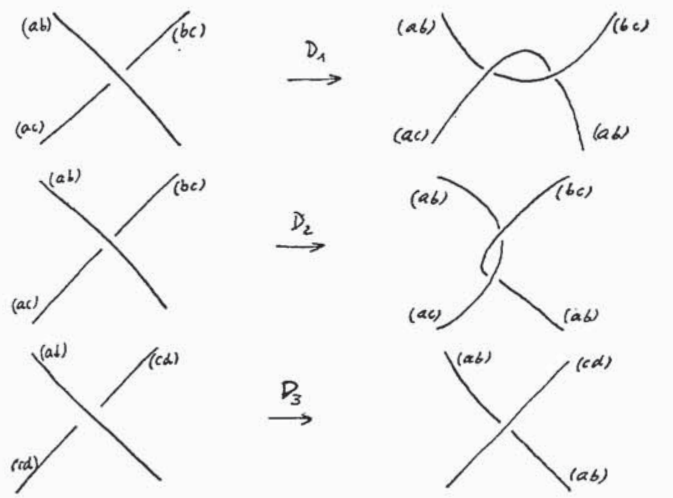


Fig. IV.2.5.

V.1. Teorema.—*Sea N un nudo* n-*coloreado asignando a cada paso un ciclo de longitud dos. Si aplicamos a N un número finito de las deformaciones* D_1, D_2, D_3 *siguientes:*

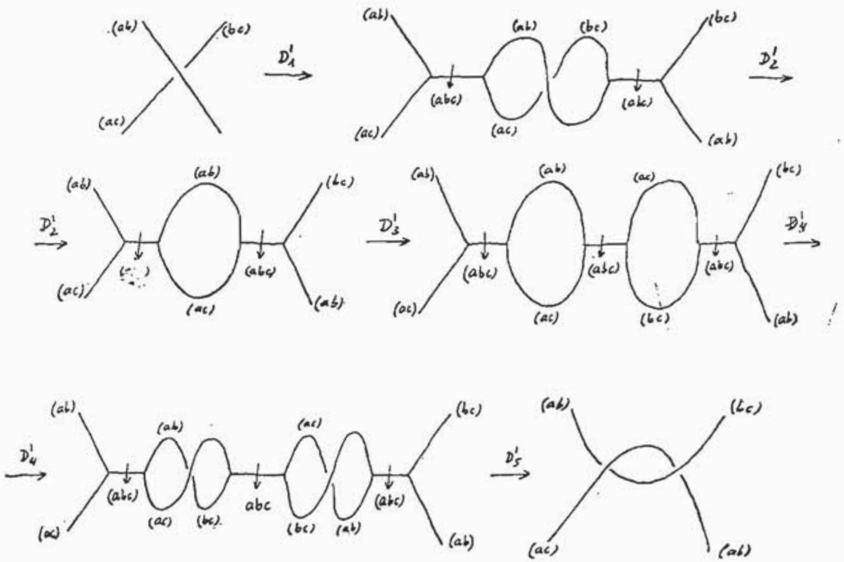


obtenemos un nudo n-*coloreado* N' *tal que los recubridores ramificados correspondientes a* N *y* N' *son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que al aplicar D_1, D_2 o D_3 se obtiene de nuevo un nudo *n*-coloreado.

Demostraremos primero que la deformación D_1 conserva topológicamente invariante a la variedad recubridora.

La deformación D_1 puede llevarse a cabo en los siguientes pasos:



En cada uno de estos pasos la variedad recubridora permanece topológicamente invariante, como se deduce de los lemas III.2 y III.8.

La demostración para D_2 y D_3 es análoga (*).

(*) Cfr. [7] para algunos resultados relacionados con estas deformaciones.

VI. EJEMPLOS

1. Sea el ovillo anular (5,2) 3-coloreado como en figura VI.1. Aplicando las deformaciones $T_1, \ldots, T_4$ obtenemos el nudo de figura VI.2 3-coloreado con ciclos de longitud dos:

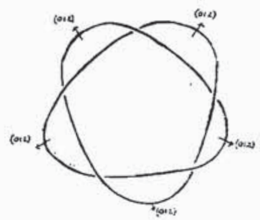


Fig. VI.1.

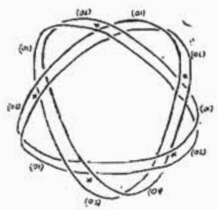
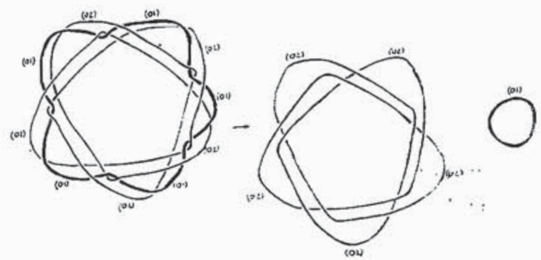
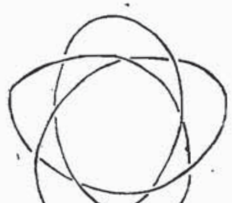


Fig. VI.2.

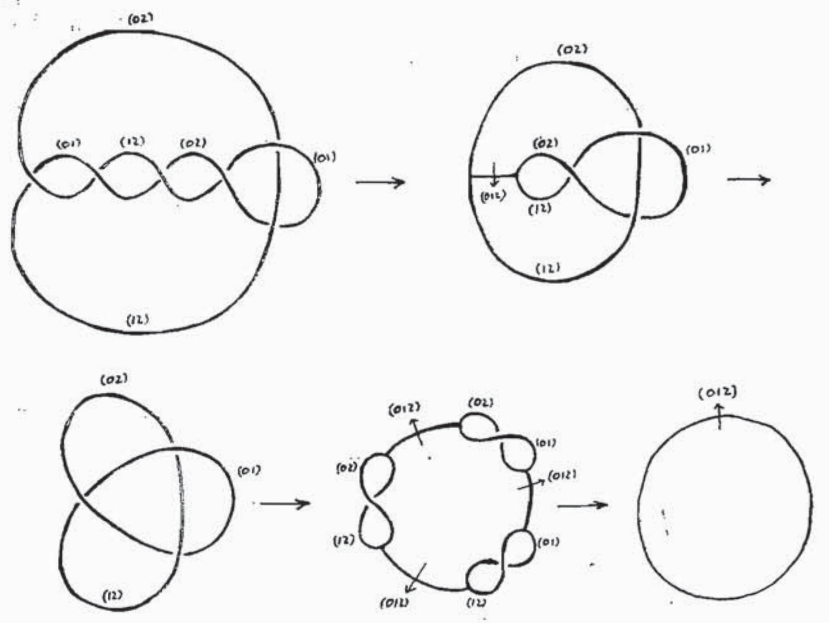
Aplicando deformaciones D_1, D_2, D_3 a este último nudo, obtenemos el nudo siguiente:



Por tanto, [7] el recubridor cíclico de tres hojas ramificado sobre el ovillo anular (5,2) es homeomorfo al recubridor cíclico de dos hojas ramificado sobre el ovillo anular (3,5); ver [10, nota 33]:



2. En [7] utilizábamos D_1, D_2 y D_3 para probar que los ejemplos propuestos por Fox en [5] no eran contraejemplos a la Conjetura de Poincaré. Obsérvese ahora:



Por tanto el recubridor ramificado correspondiente a estos nudos y grafos 3-coloreados es S^3.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. W. ALEXANDER: *Note on Riemann spaces.* «Bull. Amer. Math. Soc.», 26 (1920), 370-372.

[2] W. CLIFFORD: *On the canonical form and dissection of a Riemann's surface.* «Proc. London Math. Soc.», 8 (1877), 292-304.

[3] R. H. CROWELL & R. H. FOX: *An introduction to knot theory.* Ginn & Company, 1963.

[4] R. H. FOX: *Covering spaces with singularities.* Algebraic Geometry and Topology, A symposium in honour of S. Lefschetz, Princeton, 1957.

[5] R. H. FOX: *Construction of simply connected 3-manifolds.* Topology of 3-manifolds and related topics, Englewood Cliffs N. J. (1962), Prentice Hall, 213-216.

[6] R. H. FOX: *A note on branched cyclic coverings of spheres.* «Revista Matemática Hispano-Americana»,

[7] J. M. MONTESINOS: *Sobre la Conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo.* Tesis doctoral. (Publicada en Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Univ. de Madrid.) 1971.

[8] J. M. MONTESINOS: *Reducción de la Conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 32 (1972), 33-51.

[9] L. P. NEUWIRTH: *Knots Groups.* «Annals of Math. Studies», número 56.

[10] H. SEIFERT und W. THRELFALL: *Lehrbuch der Topology.* Leipzig und Berlin (1934).

Universidad de Madrid
Facultad de Ciencias
Sección de Matemáticas