DISCURSO DE CONTESTACIÓN

por el

Ilmo. Sr. D. José Luis Viviente Mateu

al

DISCURSO DE INGRESO LEIDO POR LA ACADEMICA ELECTA

Ilma. Sra. Dª. María Teresa Lozano Imízcoz

ZARAGOZA

1998

Excmo. Sr. Presidente.
Excmos. e Ilmos. Srs. Académicos.
Señoras y Señores.

Ante todo permítanme que agradezca a nuestra Academia de Ciencias la inmensa distinción que supone el haber sido designado para efectuar en su nombre la presentación, recepción y bienvenida de la Prof[a]. Dr[a]. D[a]. María Teresa Lozano Imízcoz, con la lectura del discurso de contestación. Distinción que nos resulta además entrañable, pues la recipiendaria pasa a poseer la medalla académica que últimamente llevó el querido amigo y profesor, académico ya difunto, Dr. D. Rafael Rodríguez Vidal que, además, fue quien nos inició en la Geometría Diferencial en el año 1952 en nuestro último curso de licenciatura.

Ello me supone una doble satisfacción y un gran honor. Doble satisfacción pues, además de considerarle uno de mis colegas más apreciados, imagen y fruto de mi concepto de educación y formación del estudioso, me permite revivir con emoción mis diez o doce primeros años como catedrático en la Universidad de Zaragoza y rememorar mi primer curso en el Seminario de H. Cartan en la Ecole Normale Superieure(1 de la rue d'Ulm en Paris e incluso mi traslado(2 a esta capital con mi familia. Su intuición espacial e inteligente capacidad de trabajo atrajo ya nuestra atención cuando era alumna de quinto curso de licenciatura.

Honor, dadas su natural humanidad, responsabilidad profesional y talla investigadora, que acertada y felizmente fue prevista al serle concedida una de las primeras becas de F.P.I. de esta Universidad. Aptitudes que corroboró con su actividad colaboradora en nuestro seminario de Geometría Diferencial y la realización de su tesis doctoral más unas diez publicaciones, haciéndole acreedora a una beca post-doctoral de estudios en la Universidad de Wisconsin de gran utilidad para centrar y orientar su trabajo de investigación desde entonces a esta fecha.

---

1 Fue precisamente en el Seminario de H. Cartan en la Ecole Normale Superieure, y en el curso 1958/59 cuando, bajo la dirección del Prof. H. Cartan, adquirimos nuestros iniciales conocimientos sobre la sucesión espectral. Ello debo de agradecerlo no sólo a que fuera el propio Prof. Cartan quien dirigiera mis estudios en aquellas fechas sino, también, a la madurez algebraico-geométrica que nos proporcionó el Prof. Dr. D. Pedro Abellanas con su ejemplar, responsable y pionera actividad en álgebra moderna en España.

2 Nos hace recordar nuestra propia experiencia en 1959 en que, con mi familia (mujer y tres hijas, la menor de 11 meses), al nombrarme Profesor Adjunto de la Universidad de Paris, marché a vivir allí para continuar trabajando bajo la dirección del Prof. Cartan en Topología algebraica y diferencial y participar en el Seminario de Geometria Diferencial del Prof. Ehresmann sobre foliaciones, hasta que en octubre de 1965, ganada la correspondiente oposición, nos incorporamos a la Cátedra de Geometría 5° (Diferencial) de la Universidad de Zaragoza.

Gracias María Teresa por vuestra clara presentación de la problemática de la "Teoría de Nudos y variedades tridimensionales" y cita de algunas de las distintas ramas de la Ciencia en las que sus aplicaciones son de interés. Es una breve, pero completa, y nada fácil síntesis que no sólo sitúa al lector en el corazón del extraordinario trabajo matemático efectuado en el estudio de tales conceptos y de las aportaciones de la nueva académica, sino que le da una buena visión de su futuro, así como del interés de sus naturales, aunque algunas inesperadas, aplicaciones.

Como es norma, pasamos primero a justificar los valores y méritos por los que ha sido designada Académica Electa la Prof^{a}. Dr^{a}. D^{a}. María Teresa Lozano Imízcoz -¡la primera mujer en la historia de esta Academia!- y hoy recibida como Académica numeraria.

La Dra. Lozano Imízcoz nació en Pamplona, tercera hija de una familia con un intuitivo y ejercitado conocimiento del espacio: varias generaciones diseñando trajes, dibujando sus patrones y realizando el corte y confección de los mismos. De él surgió también una rama de pintores: el matrimonio Lozano-Bartolozzi y su hijo, tíos y primo por parte paterna de nuestra recipiendaria. En este ambiente creció, y es fácil imaginarla de niña, subyugada siguiendo el movimiento de la mano tanto con la aguja al arrastrar los hilos en el espacio (haciendo nudos), como con el pincel en el cuadro (perspectividad versus geometría proyectiva).

¿Qué sucedía, dónde se movía y conducía aquel hilo, cómo y qué describía aquel pincel moviéndose sobre el cuadro? En ambas imágenes espaciales no había métrica, sólo topología y a lo sumo proyectividad. Su visión e intuición espacial pudo ejercitarse y desarrollarse ampliamente mucho antes de saber leer y contar, lo que podría explicar en parte sus posteriores sobresalientes en las asignaturas de Dibujo del bachillerato y su destacada intuición espacial en los estudios universitarios. En 1964 inicia los estudios de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza finalizando la Licenciatura en 1969 con Premio Extraordinario.

A partir de ese momento y como becaria de F.P.I. inicia su formación de doctorado en topología algebraica bajo nuestra dirección, con una activa y eficaz colaboración en nuestro Seminario de Geometría Diferencial, en el que aparecen sus primeras publicaciones, fruto de una formalización de sus ideas, y que prueban, su vocación, su capacidad lógico-deductiva y método de estudio. No fue camino trillado. Junto a la adecuada formación en topología algebraica hubo de familiarizarse con el álgebra homológica precisa y un buen conocimiento de la teoría de espacios fibrados, pero su interés y esfuerzo se vieron compensados con una respetable formación llena de futuro y una brillante tesis doctoral, defendida en 1974 y calificada con sobresaliente cum laude. En ella analiza y construye una <u>sucesión espectral en teoría K</u> (una teoría de cohomología genealizada de extraordinario interés y fertilidad en geometría) asociada a una aplicación, entre dos espacios, que admite valores críticos.

Fue de los colaboradores que supieron aprovechar los medios que el seminario disponía. No sólo en cuanto a la actualizada y completa bibliografía que procurábamos dispusieran todos nuestros colaboradores, sino particularmente, con los intercambios de ideas con profesores extranjeros que nos visitaban, invitados o en intercambio, como Crumeyrolle, Eilenberg, Karoubi, Kumpera, Lehmann, Pradines, Shih Weishu, etc. Ello, pese a su juventud, le permitió conseguir una formación e infraestructura mental tal que, más allá de su tesis doctoral, le llevó a realizar una inteligente posterior orientación de sus investigaciones de cuyo acierto son prueba los resultados que en ellos está obteniendo aprovechando su inicial formación en topología algebraica y geometría diferencial.

Pero este "tour de force" intelectual, supo hacerlo compatible con la creación de una familia, casándose con el hoy Profesor de Física Teórica Dr. D. Julio Abad Antoñanzas y tener sus dos primeros hijos. Su actividad, a partir de 1974, debió distribuirse entre la familia, la docencia universitaria y la investigación con la consiguiente reflexión. A su esposo se le concedía una beca Full-Bright para realizar estudios durante los cursos 1976/77 y 1977/78 en la Universidad de Wisconsin (Madison, U.S.A.) , y como en tal universidad se hallaba el Prof. Fadell, topólogo algebrista especializado en sucesiones espectrales, apoyamos a la Prof. Lozano en la gestión de una beca postdoctoral del M.E.C., para profundizar conocimientos sobre el cálculo de las sucesiones espectrales y sus diferenciales. Se suele decir que "detrás de todo hombre existe una mujer", creo que en este caso es válida también la afirmación de que "detrás de toda mujer existe un hombre". El matrimonio Abad-Lozano con sus tres hijos (el menor de dos meses) comienza su odisea en septiembre de 1976 en un viaje en avión: Zaragoza - Madrid, Madrid - Nueva York, cambio de aeropuerto en helicóptero, de Nueva York a Chicago y de Chicago a Madison.

El viaje a Wisconsin fue un buen acierto. El Profesor Fadell no sólo le informó sobre su actividad matemática de aquel momento sino que le orientó en la vida académica de aquella universidad, y le facilitó la asistencia a los cursos que sobre la Teoría del índice de Atiyah-Singer desarrolló el Prof. Huseini, otro sobre 3-variedades que expuso el Prof. Peter Scott y un tercero sobre 4-variedades dado por el Prof. Paul Melvin. Estos tres últimos cursos fueron determinantes para su futuro profesional e investigador. A la vez, y en noviembre de 1977 en una escapada a Madrid, con alguna que otra anécdota bien resuelta, en oposición con tres candidatos más, obtuvo la plaza de Profesor Adjunto de Geometría de nuestra Universidad, y regresó a Madison. Es así que en octubre de 1978 inició su labor docente en Matemáticas en la Universidad de Zaragoza como Profesor Adjunto Numerario.

Tuvo la suerte de que en 1980 se incorporara a la Universidad de Zaragoza el profesor Dr. D. José Mª. Montesinos Amilibia como Profesor Agregado Numerario. Lo que dio lugar a que conocieran mutuamente la formación de cada uno y se originase una eficaz y fructífera colaboración investigadora. Prueba de ello es la actividad desarrollada desde 1982: con más de treinta y seis publicaciones conjuntas y/o con el profesor Hilden o individuales, la mayoría de interés internacionalmente reconocido; los cursos de doctorado y de tercer ciclo impartidos; conferencias, participación en congresos, workshops, etc. para cuyo conocimiento remitimos a su Curricum Vitae. En 1990 por oposición fue nombrada Catedrática del Area de Geometría y Topología de nuestra Universidad.

La familiaridad de la Prof^a^. Dr^a^. Lozano Imízcoz con las técnicas de la Topología Algebraica y Geometría Diferencial, si bien durante un periodo dominan las propias a la topología algebraica o las de las variedades PL, se puede considerar una constante en su obra, bien de modo subyacente, bien de modo central como en las publicaciones de la recipiendaria a partir de 1995, dedicadas a la búsqueda de la solución del problema de la clasificación de las 3-variedades hiperbólicas. Es decir, buscando describir el conjunto de las clases de difeomorfismos de tales variedades, habida cuenta de los resultados ya obtenidos por Thurston.

Ahora bien, si en los temas abordados por Thurston según el mismo afirmaba hacia 1980, "inciden varias teorías matemáticas: topología de 3-variedades, grupos de Klein, sistemas dinámicos, topología geométrica, subgrupos discretos de grupos de Lie, foliaciones, espacios de Teichmüller , difeomorfismos pseudo-Anosov, teoría de grupos geométricos, además de geometría hiperbólica", al hacerse esenciales los métodos geométrico diferenciales, y sobre todo últimamente ante la intervención de los de la Mecánica Estadística ¿se puede concluir afirmando que el buen conocimiento de los métodos topológico geométricos junto a una buena formación básica en Geometría Hiperbólica, es insuficiente para obtener resultados de interés en este campo de la matemática?

Aunque no creemos sea así, al menos por ahora, lo que parece conveniente es o trabajar en equipo o que se posea un buen conocimiento de las ideas y métodos de: Topología (de 3-variedades, geométrica, algebraica y diferencial -con especial énfasis en la teoría de foliaciones y clases características-), Geometría (rígida, diferencial, real y compleja, algebraica e hiperbólica), Teoría de Grupos (combinatorios, geométricos, de Lie y su representación, subgrupos discretos de grupos de Lie, topológicos) y eventualmente, de modo colateral, un cierto conocimiento de la Teoría de Grafos y la de Lenguajes Formales [estos dos últimos principalmente ante la continua búsqueda de formulación de la teoría sobre un retículo de modo que los conceptos funcionales (transformadas de Backlund, difeomorfismos de Anosov, ...) puedan ser reemplazados por un algoritmo computable].

Parece claro que todo investigador en estos temas, además de poseer una inequívoca vocación matemática, debe hallarse dotado de una profunda visión e intuición espacial, junto a una buena y amplia formación en al menos tres de los anteriores campos, y estar dispuesto a dedicar muchas horas a las puestas a punto y a la reflexión. Después de la exposición que nos ha hecho y el conocimiento que tenemos de su formación, modo de trabajar y responsabilidad, creo que nuestra nueva académica responde muy satisfactoriamente a estas condiciones.

Nuestra contestación al discurso , después de una breve referencia a alguno de los trabajos de nuestra recipiendaria que más nos ha llamado la atención en topología geométrica y aquellos en que intervienen las clases características con su interpretación desde la Geometría Diferencial, subraya la definición topológico-algebraica de las clases características en relación con la noción de espacio fibrado, y presenta alguno de los más importantes resultados en teoría de foliaciones y teoría de nudos desde la irrupción de Thurston en estos campos.

Se trata de, apoyándose en el conocimiento de invariantes topológico-algebraicos (homotópicos, cohomológicos, etc.) y los de otra superestructura (orientabilidad, foliada, quasi-compleja, geométrica, etc.), obtener información esencial sobre la topología de estas 3-variedades y nudos que permita distinguirlos topológicamente de modo biunívoco salvo difeomorfismo. Así, el conocimiento del grupo fundamental ha permitido determinar la relación entre la topología de las 3-variedades y las foliaciones que admiten éstas, junto a esenciales propiedades de los nudos. De esta índole es el problema abordado por la conjetura de Poincaré[3], si fuese cierta, ello nos permitiría, por ejemplo, afirmar que toda 3-esfera homológica simplemente conexa es una 3-esfera. Por el contrario el que la característica de Euler Poincaré de una 3-variedad sea siempre cero, no nos aporta ayuda alguna.

Finalizamos nuestra exposición con la cita de una serie de resultados y problemas que, surgidos por la interpretación desde la Física teórica de ciertos aspectos de la teoría de nudos, también están exigiendo, además de la consideración de las clases características, la de otras potentes técnicas de la topología algebraica -como la de la sucesión espectral- y de la geometría diferencial con las que la Profª. Drª. Lozano Imízcoz se familiarizó bajo nuestra dirección y orientación investigadora.

Sobre la obra de la Prof. Lozano.

La topología geométrica es el dominio matemático más natural para el estudio de la Teoría de Nudos, teoría que trata del estudio de las propiedades del modelo matemático correspondiente al -casi análogo- concepto de nudo físico que, como es bien conocido, es uno de los útiles de los que el hombre se ha servido desde los tiempos más remotos. Como dicen en su libro Burde y Zieschang "El fenómeno de un nudo es una experiencia fundamental en nuestra percepción del espacio tridimensional". Así mismo Montesinos, en su discurso de ingreso en la R. A. C. E. F. Q. y N. de Madrid, señalaba que "este fenómeno es paralelo, y probablemente anterior, al concepto de número. ... Pero ambos conceptos difieren profundamente. Uno es cualitativo, el otro es

---

[3] Es posible que en el momento actual esto sea ya cierto. La Profesora Lozano, ha recibido una prepublicación de M. T. Anderson del mes de mayo próximo pasado: Comparison Geometry M.S.R.I. Publications Vol. 30, 1997, titulada "Scalar Curvature and Geometrizatión Conjectures for 3-manifold", en la que parece se establecen tres conjeturas más fuertes que, conjuntamente, implican la de geometrización de Thurston. Si aquellas fuesen ciertas tambien lo sería la de geometrización, y como ésta trivialmente implica la de Poincaré, habría quedado demostrada la famosa conjetura de Poincaré.

cuantitativo". Como también señala, "ello justificaría el retraso de su estudio matemático".

Su naturaleza y propiedades nos proporcionan aspectos del espacio independientes de la limitación que nos impuso el carácter euclídeo de la visión geométrica local primitiva. Es así, como también precisa Montesinos, que "el nombre se da al nudo independientemente del tamaño, tensión u otras propiedades de la cuerda: sólo depende del anudamiento, que es un concepto topológico". Ahora bien, del hecho de que "dos nudos con complementos homeomorfos en S^3 sean equivalentes" y de que, por otra parte, se satisfaga el teorema de rigidez de Mostow, se sigue que los invariantes geométricos de sus variedades complemento en S^3 son los invariantes topológicos de las clases de nudos equivalentes que las originan, y de ello la importancia que adquirió el estudio geométrico de las 3-variedades en el orden de ideas de Klein.

La Conjetura de Geometrización de Thurston, en virtud de los trabajos de Kneser en 1929 sobre la "descomponibilidad esférica" y de Milnor en 1962 estableciendo la unicidad, se enuncia diciendo que "El interior de cada componente prima (o las piezas en que éstas son descompuestas por la familia de toros encajados incompresibles) de la descomposición de una 3-variedad compacta puede ser modelada sobre una de las ocho geometrías 3-dimensionales" o geometrías rígidas determinadas por Thurston (precisamente E^3, S^3, H^3, $S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, $\widetilde{SL(2,R)}$ o cubierta universal del grupo de Lie 3-dimensional de todas las 2x2 matrices reales con determinante igual a uno (que no es isométrico a $H^2 \times E^1$ aunque topológicamente coincida con él), Nil o del grupo de Heisenberg, y la Sol o la de la extensión descomponible de R^2 por R, es decir, el producto semi-directo $R^2 \ltimes R$]. Abreviadamente, supone afirmar que: *"Para una 3-variedad, indescomponible implica geométrico"*. Es de destacar que la Conjetura de Geometrización de Thurston implica la Conjetura de Poincaré: *Toda 3-variedad cerrada y localmente simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera* , pues fácilmente se ve que el único espacio 3-dimensional, localmente homogéneo y simplemente conexo es la 3-esfera.

A principios de la década de los 80, aparece la actividad de la Drª. Lozano en Teoría de Nudos y sobre 3-variedades, operando en la categoría de las PL variedades y esencialmente con técnicas propias a la cirugía de variedades hasta considerar hoy espacios fibrados en la categoría Diff, provistos de una superestructura como la que posee el fibrado de las referencias ortonormales. Es en este contexto donde debemos situar la hoy importante actividad investigadora de la nueva académica. Ni disponemos de tiempo, ni creo es el momento de dar una idea -aunque fuese breve- de todos y cada uno de sus trabajos citados en su curriculum vitae.

Sin embargo permítanme que al menos les hable, aunque sea sucintamente, de uno de los resultados que más llamó nuestra atención: La demostración por el Prof. Montesinos de que *"toda 3-variedad M se obtiene como una cubierta ramificada de S^3"*. Este hecho junto a la observación por

Thurston de que *"existe un enlace* L *en* S^3 *tal que toda 3-variedad* M *se obtiene como una cubierta ramificada sobre* S^3 *cuyo lugar de ramificación en* S^3 *es* L" -que por ello se designó *"enlace universal "*- originó una búsqueda y construcción de nudos universales.

Es aquí donde destaca la visión geométrica espacial de la Dr^a^. Lozano y publica, en colaboración con los Profs. Montesinos y Hilden, el trabajo en que se demuestra el carácter universal del nudo 8 (o nudo de Saboya), resultado que los mismos autores consiguen refinar con una nueva publicación en la que prueban que *"Toda 3-variedad se obtiene como cubierta ramificada de* S^3 *cuyo lugar de ramificación son los anillos de* **Borromeo**[4] *, con orden de ramificación* 1, 2 ó 4 *sobre cada componente de* f^{-1}*(anillos de* Borromeo)". Ahora bien, a su vez Riley, Jorgensen y otros demostraban que *"el complemento del nudo de Saboya tiene una bien conocida estructura hiperbólica"* , así como que *"existe una estructura hiperbólica sobre* S^3 *que es ramificada de orden* k (k>3) *sobre el nudo de Saboya* ", el camino quedaba abierto para la determinación de los adecuados invariantes de la superestructura geométrica.

Como precisa la Dr^a^. Lozano, la clasificación de las variedades modeladas sobre 7 de las 8 (X, Isom(X))-geometrías en el orden de Klein antes citadas es bien conocida, subsistiendo sólo la problemática para las variedades modeladas sobre $[H^3, \mathrm{Isom}(H^3)]$[5] . Por otra parte la obra de Thurston nos dice que todas éstas son de la forma H^3/G , donde G es un subgrupo discreto de $\mathrm{Isom}(H^3)$, -incluidas las orbipliegues hiperbólicas- lo que junto al teorema de rigidez de Mostow antes aludido, justifica la atención que se está dedicando a la determinación de invariantes geométricos de las variedades modeladas sobre $[H^3, \mathrm{Isom}(H^3)]$. Entre ellos destacan los proporcionados por las <u>clases características secundarias</u> y, en particular la clase (y el carácter) de "Chern-Simons".

El cálculo del valor del invariante de Chern-Simons en cada caso, viene condicionada por la <u>dificultad de encontrar una sección global</u> para el fibrado principal O(M). Desde 1995 son varios los trabajos de la recipiendaria con esta técnica, y en colaboración con Hilden y Montesinos, últimamente superan esta dificultad al conseguir determinar una sección para el fibrado O(M) mediante la

---

4 Me permito recordar a las autoridades académicas que desde julio de 1991, el escultor John Robinson donó a nuestra Facultad de Ciencias una escultura de los anillos de Borromeo, que se halla almacenada en el edificio Paraninfo, ¿no sería más adecuado que fuese expuesta instalándola en el Hall del edificio de Matemáticas, por ejemplo?

5) Sea $(x_1, x_2, x_3) \hookrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ el encaje canónico de R^3 en R^4 que nos identifica R^3 con el espacio ortogonal a la cuarta dirección, y sea G_4 el grupo de transformaciones de Möbius de la bola $B^4 = R^4 \cup (\infty)$ generado por las traslaciones en R^4 y la inversión sobre la esfera unidad. Si operamos con la representación de Poincaré de H^3, respecto a una referencia (e_1, e_2, e_3, e_4) de R^4 sería $H^3 = \{x \in R^4 \ / \ x.e_4 > 0\}$ con métrica $ds = |dx| \ /(x.e_4)$. Dado que mediante el encaje canónico considerado, identificamos R^3 con el espacio ortogonal al vector e_4, disponemos de una acción de G_3 sobre B^4 que identifica G_3 con el subgrupo de G_4 de las isometrias de H^3, es decir $\mathrm{Isom}(H^3) = G_3$.

construcción de una componente sobre el exterior de un enlace L, y sumarle la contribución sobre el enlace o un entorno del mismo.

El interés por las clases características en diversos campos de la matemática, topología algebraica y diferencial, teoría de foliaciones, geometría diferencial y algebraica, particularmente las secundarias desde 1973, experimentó un notorio incrementó hacia 1988 ante los trabajos de Witten sobre teorías de campos gauge topológicos, al ofrecer simultáneamente una nueva posibilidad para calcular invariantes de enlaces y 3-variedades. Aunque sea brevemente acerquémonos a su significado e interés.

Como consecuencia de la noción de espacio fibrado y de la correspondiente noción de conexión introducidos por E. Cartan (generalizando el método de la referencia móvil y la noción del paralelismo de Levi-Civita) , se pudo extender a la geometría Riemanniana el programa de Erlangen. Su desarrollo estructurado, no obstante, hubo de esperar a la más precisa definición de variedad diferenciable por Whitney y a la formalización del concepto de espacio fibrado hacia 1936. El concepto de cohomología, introducido por Alexander y Kolmogorov en 1935 se precisa para variedades diferenciables por el mismo Whitney hacia 1937. También se debe a E. Cartan, hacia 1924, un enunciado del teorema de de Rham lo que establece la primera relación entre topología algebraica y geometría diferencial. Relación que es ampliamente desarrollada con los trabajos de la década de los 50 por H. Cartan, S.S. Chern, A. Weil y A. Borel.

Las clases características aparecen en topología algebraica hacia 1953 al querer conocer la estructura multiplicativa de la cohomología: Dados dos espacios topológicos B y F, ¿qué relación existe entre $H^*(B)$, $H^*(F)$ y $H^*(B\otimes F)$?[6]. De hecho, las clases características son invariantes globales topológicos que, por ejemplo, expresan la obstrucción a que un espacio fibrado sea un fibrado trivial, es decir, globalmente un producto. En 1950 Leray ["L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue", J. Math. Pures Appl. 29, (1950), pp. 1-139] introdujo la noción de sucesión espectral[7] proporcionando el algoritmo que permite conocer la homología (cohomología) del espacio total de un espacio fibrado en función de la homología (cohomología) de los espacios base y fibra.

Así para una variedad real M, en topología algebraica se definen: la clase u de Thom-Gysin de TM [para el fibrado en esferas $\pi : TM\text{-}M \dashrightarrow M$, donde $u \in H^n(TM, TM\text{-}M; Z)$ es tal que su restricción a cada $H^n(\pi^{-1}(x), Z)$, $x \in M$, corresponde a la orientación de $\pi^{-1}(x)$ dada por la de M].

---

6) Fueron Eilenberg-Zilber en 1953 quienes demostraron que los complejos singulares $S(B\times F)$ y $S(B)\otimes S(F)$ son functorialmente equivalentes, mientras que fué Künnet quien estableció la fórmula que lleva su nombre utilizando la noción de cup-producto de cociclos (ya introducido por Alexander sobre símplices singulares)

7) Que, en cierta ocasión definió J. F. Adams como *"aquel objeto algebraico, semejante a una sucesión exacta, pero más complicado".*

La clase fundamental para un fibrado vectorial de rango r orientado E sobre M, o clase de Euler de E, es $e(E) \in H^r(M, Z)$ imagen de $u \in H^r(E, E\text{-}M; Z)$ en $H^r(M; Z)$ [que sigue de la clase definida para poliedros por Euler hace unos 200 años, pues si $E = T(M)$, rango $r = n$, es $e(E) = e(M)$ la llamada clase característica de Euler de M y si [M] es la clase de homología fundamental de M se demuestra que $\langle e(M), [M]\rangle = \chi(M)$ es el llamado número de Euler (definido inicialmente por Euler para poliedros P mediante $\chi(M) = \Sigma(-1)^k c_k$ con c_k el número de caras k-dimensionales del poliedro P, expresión que generalizó Poincaré para variedades compactas M mediante $\chi(M) = \Sigma(-1)^k \dim H^k(M)$ -con $\dim H^k(M) = b_k$ el k-ésimo número de Beti- que se denomina característica de Euler-Poincaré, pero cuya más geométrica interpretación se obtiene en topología diferencial al venir dada para una variedad diferenciable compacta orientada M por $\chi(M)$ = *autointersecciones de* $\Delta(M)$ en $M\times M$ donde $\Delta : M \dashrightarrow M\times M$ es la aplicación diagonal. En Geometría Diferencial, gracias al teorema de Gaus-Bonet se tiene que $\chi(M) = \int_M (1/2p)\Omega$ donde Ω es la curvatura de la conexión de Levi-Civita sobre TM y, puesto que $d[(1/2p)\Omega] = 0$, $(1/2p)\Omega$ define una clase de cohomología sobre M que es la clase de Euler de M, vemos que "el número de Euler de M (*un invariante analítico*) viene dado por la integral sobre M de una cierta clase de cohomología característica (*un invariante topológico*)" , clase característica que, como es bien sabido, se halla a la base de la teoría del índice de Atiyah-Singer].

Las clases de Stiefel-Whitney (definidas ya en 1936 por el primero para el fibrado tangente a una variedad diferenciable) para un espacio E fibrado vectorial real de rango i, $w_i(E)$, es un elemento de $H^i(M, Z_2)$, que cuando E es orientable es la rectricción módulo 2 de la clase de Euler de E. Por un proceso recurrente se define la i-1 clase de Stiefel-Whitney $w_{i-1}(E)$, y recibe el nombre de clase total de Stiefel-Whitney de E de rango r a la suma $w(E) = 1 + w_1(E) + \ldots\ldots + w_r(E)$.

Para los fibrados vectoriales complejos de rango i, se dispone de las denominadas clases de Chern, siendo la i-ésima, $c_i(E)$, el elemento de la cohomología $H^{2i}(M, Z)$ que se identifica a la clase de Euler del fibrado real subyacente $E_R \longrightarrow M$, de modo análogo la clase total de Chern de E viene dada por la suma $c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots\ldots + c_r(E)$.

Finalmente, las clases de Pontrjaguin de un fibrado vectorial real E vienen definidas por las clases de Chern pares del fibrado complexificado, $E_C = E\otimes_R C$, es decir la i-ésima viene dada por $p_i = (-1)^i c_{2i}(E_C) \in H^{4i}(M, Z)$, mientras la clase total de Pontrjaguin de E es $p(E) = 1 + p_1(E) + \ldots\ldots + p_r(E)$.

Obsérvese que el dar una clase característica u, con coeficientes en un anillo unitario Λ -en general $\Lambda = Z_2$, **Z**, **Q** o **R**- equivale a dar para todo **K** (= **R** o C) fibrado vectorial $\pi : E \dashrightarrow M$ una clase de cohomología $u(E) \in H^*(M, \Lambda)$, y en tanto que aplicaciones de la clase de K-fibrados vectoriales en la cohomología de sus espacios base, forman una Λ-álgebra para las operaciones de adición, producto copa (la intersección geométrica) y de multiplicación por un escalar. Dos K-fibrados vectoriales isomorfos sobre una misma variedad M poseen las misma clase característica que proporciona información del máximo interés sobre su clase de isomorfismos. La recíproca no es cierta.

Cuando se consideran espacios fibrados sobre variedades diferenciables, eventualmente provistas de una G-estructura o estructura adicional de forma: foliada, riemanniana, kähleriana (en este último caso la primera clase de Chern viene dada por la forma de Ricci determinda por el tensor de Ricci), o, en general una adecuada reducción del grupo estructural del fibrado tangente, al considerar la cohomología de De Rham se obtienen relaciones entre ciertas formas diferenciales y determinadas clases características mediante el llamado homomorfismo de Chern-Weil. Por su importancia recordaremos su enunciado: "*Sea* $\xi(E, p, M, G)$ *un espacio fibrado principal,* g *el álgebra de Lie de* G, g^* *el dual de* g *como* G-*módulo bajo la acción adjunta,* $Sg^* = V(g^*)$ *el álgebra simétrica sobre* g^*, *e* $I_G(Sg^*) = \oplus\, I_G{}^k(Sg^*)$ *la subálgebra de los elementos de* Sg^* *invariantes por la acción de* G (con cada sumando isomorfo al de los polinómios homogéneos de grado k en tantas indeterminadas como la dimensión de g). *Se verifica que: Si* $\xi(E, p, M, G)$ *es un espacio fibrado principal y* θ *es una conexión sobre* x *con forma de curvatura* Ω, *para todo* $f \in I_G{}^k(Sg^*)$, $f(\Omega) \in G(\Lambda^{2k}T^*(E))$ *es una* 2k-*forma exterior sobre* E *imagen recíproca por* p, $f(\Omega) = p^*[\underline{f(\Omega)}]$, *de una única* 2k-*forma cerrada de la cohomología de* de Rham, $\underline{f(\Omega)} \in H^{2k}(M, R)$ *independiente de la conexión* θ *elegida para definirla. Tenemos así una aplicación* $j : I_G(Sg^*) \dashrightarrow H^*(M, R)$ *que es un homomorfismo de álgebras conocido como el homomorfismo de Chern-Weil*".

De hecho el homomorfismo de Chern-Weil determinado por esta construcción proporciona un homomorfismo del álgebra $I_G(Sg^*)$ en $H^*(BG, R)$, álgebra de cohomología del espacio clasificante para G, que cuando G es compacto resulta un isomorfismo. Análogamente se dispone de un "homomorfismo de Chern-Weil transverso para foliaciones" que permite relacionar la curvatura de una conexión proyectable con la cohomología de la variedad, de las hojas y determinados invariantes de la foliación.

El homomorfismo de Chern-Weil permite representar las clases características con coeficientes reales en función de la forma de curvatura de una conexión en un fibrado principal real o complejo (o en un subfibrado vectorial del tangente, como los teoremas de obstrucción de Bott, Pasternack, Atiyah -éste con la clase de su nombre para el fibrado de las referencias transversales a una foliación $\mathfrak{F}$ sobre una variedad M y que nos da la obstrucción a la existencia de una conexión transversal proyectable sobre $Q = TM/\mathfrak{F}$-), sobre una variedad diferenciable real determinando una relación entre propiedades locales y globales propia de la topología diferencial. En un reciente trabajo A. Kock desarrolla en geometría diferencial sintética la construcción de Chern-Weil de las clases características con 2-formas a valores en el fibrado del grupo gauge de un grupoide.

Puesto que "las clases de Chern engendran las clases de cohomología definidas por el homomorfismo de Weil, para el fibrado principal asociado al vectorial dado" cuando las formas diferenciales asociadas a las clases características primarias se anulan, la forma asociada a éstas mediante el operador transgresión (forma de transgresión TP(ω) del polinomio P invariante relativa a la conexión ω) es cerrada y define una clase de cohomología que, en general, depende de la conexión dada sobre el fibrado principal que nos ha permitido definir la clase característica primaria, pero cuando es independiente de la conexión nos determina la existencia de unos nuevos invariantes de la estructura en estudio, los llamados invariantes secundarios como el de Chern-Simons que depende solamente de la estructura conforme subyacente de la variedad riemanniana considerada.

El estudio diferencial de estos invariantes es para el que De Rham desarrolló su teoría de corrientes. Si bien, alternativamente, este problema se puede resolver apoyándose en la naturalidad de la clase de Euler y de la clase fundamental (luego del volumen).

A propósito de foliaciones y nudos.

El 12 de abril de 1984, concluíamos nuestro dicurso de ingreso en esta Ilustre Academia, con la siguiente frase pronunciada por el Prof. Poenaru sobre la obra del profesor Thurston con motivo de la concesión a éste último de una de las medallas Fields de 1982: "Pendant une période d'environ cinq années, entre 1970 et 1975, W. Thurston apparait sur la scène, et avec des méthodes complètement nouvelles, une très grand partie de ces problèmes, que personne ne savait comment attaquer, se trouvent résolus, comme sur la baguette d'un magicien".

Ahora bien, si esto era así en la década de los 70, hoy debemos añadir que en 1982 Thurston era ya conocido no sólo por su trabajo en foliaciones iniciado con su tesis doctoral (*Foliations and manifolds which are circle bunddles* -y téngase presente que "un espacio fibrado de Seifert compacto es una 3-variedad que puede ser foliada por cincunferencias-) en cuyo contexto, el propio Thurston introdujo la denominación de orbifold (antes V-variedad y hoy también llamada kaleidoscopio, orbiforma u orbipliegue) sino también por sus conjeturas y resultados sorprendentes que, aproximadamente desde 1973, venía efectuando en Topología de baja dimensión, como los considerados en sus cursos en la Universidad de Princeton de 1976/77 y 1977/78, publicados con el título "La Geometría y Topología de 3-variedades", y aquellos de la serie de publicaciones iniciadas en 1986 en el vol 124 del Ann. of. Math. dedicadas al estudio de la estructura hiperbólica sobre 3-variedades.

Ya en nuestra memoria hacíamos alusión a alguno de sus más notables resultados. Entre ellos cabe destacar su generalización del teorema de estabilidad de Reeb para una foliación $\mathcal{F}$ sobre una variedad diferenciable M, demostrando que si la foliación es de clase C^1 y L una de sus hojas, se puede reemplazar la hipótesis "$\pi_1(L)$ es finito" por la hipótesis más débil "$H^1(L, \mathbf{R}) = 0$" resultado que, en realidad es una consecuencia de un teorema local, demostrado para foliaciones de codimension k, y del que el autor establece igualmente una variante válida para los grupos de transformaciones de variedades; o aquel en el que para toda variedad cerrada n-dimensional M, determina completamente todas las estructuras topológicas de Haefliger salvo homotopía con ayuda de sus microfibrados normales. Recientemente Janez Mrcun [Proc. A.M.S. 125, 1997, pp. 1561-70], ha probado una versión equivariante de ambos teoremas de estabilidad, mientras que M. T. Benameur [Pacific J. M. 179, 1997, pp. 221-239] ha establecido una demostración geométrica apoyándose en la existencia de una triangulación de M tal que cada símplice es una carta distinguida para la foliación.

Si la intervención de la teoría de foliaciones en el estudio de las 3-variedades se puede afirmar fue iniciada con la tesis de Reeb en los 40 y fue hacia 1963 que Novikov establece el hecho de que toda 3-variedad posee una foliación diferenciable de codimensión uno y demuestra el teorema que afirma que "*Si M es una 3-variedad orientable, cerrada que posee una foliación diferenciable orientable de codimensión 1 sin componente de Reeb, entonces es* $\pi_2(M) = 0$", su aplicación al estudio de la teoría de nudos, con un mayor análisis de la estructura de sus hojas, la adquiere en los citados cursos de Thurston en Princeton, y en aquellas de Hirsch y Thurston hacia 1975 (ver vol. 101 del Ann. of Math.) relativas a las foliaciones de codimensión mayor que uno; o el curso de Fathi, Laudenbach, Poenaru y otros de 1979 en Orsay sobre la obra de Thurston; el teorema de Sullivan (Comment. Math. Helv. 54, 1979, 218-223) relacionando los conceptos de superficie minimal y foliación minimal de 3-variedades sin componente de Reeb; en la obra de P. Scott sobre las ocho geometrías de las variedades tridimensionales; en la serie de publicaciones sobre degeneración de estructuras hiperbólicas por Morgan y Shalen de 1984 y 1988 en las que se hace amplio uso de la noción de "laminación mesurable" como generalización de la noción de foliación irreducible.

Y más precisamente en la obra de D. Hardhorp, ya citada en mi memoria de ingreso en esta Academia, que aunque bastante completa, es perfeccionada y ampliada por la obra de D. Gabai [J. Diff. Geometry 18 (1983), 23 (1987)] en la que se analiza con un mayor detalle la íntima relación entre la topología de las 3-variedades, o más precisamente variedades de Haken (aquellas 3-variedades irreducibles M que contienen "encajada" una 2-variedad L incompresible, o sea para la que la inclusión $i : \pi_1(L) \dashrightarrow \pi_1(M)$ es un monomorfismo), y las foliaciones sin componente de Reeb que admiten éstas, así como el de las 3-variedades que admiten foliaciones tensas y las que las relaciona con la cirugía de variedades o, más particularmente, con la cirugía de Dehn sobre nudos, haciendo amplio uso de la 3-variedad de Haken, de la noción de variedad saturada, de la profundidad de una foliación y de un teorema de Sergeraert que establece una relación entre foliaciones y difeomorfismos infinitamente tangentes a la identidad.

Mucho se ha glosado y admirado, con razón, el modo de hacer de Thurston, pero como él mismo afirmaba en un artículo publicado en 1994 a propósito del Summer Workshop de la A.MS. en Bowdoin (1990): "Lo que la mayoría de los matemáticos querían y necesitaban de mí era *conocer mi modo de pensar* y no aprender mi demostración de la conjetura de geometrización para las variedades de Haken". Ese *su modo de pensar y abordar los problemas de la Geometría Hiperbólica* , como precisa la Profª. Lozano, creo encontró el campo adecuado para su práctica y desarrollo en la Teoría de Nudos hacia 1972. Pero, entendemos que, esta actividad no sólo se solapó, sino que supuso una madurez mental subyacente desde sus primeros trabajos, con su sorprendente y fructífera producción: primero en teoría de foliaciones y a continuación en teoría de nudos y 3-variedades hiperbólicas.

Una digresión: Física teórica y teoría de nudos (8.

La necesidad actual de las técnicas propias a la topología algebraica y geometría diferencial no sólo se debe a la geometrización del estudio de la teoría de nudos y 3-variedades por Thurston, sino así mismo a la incidencia que en el estudio de la teoría de nudos han originado los métodos de la Física teórica. Aunque el cruce de ideas y aplicaciones sea enriquecedor, como lo prueban los resultados alcanzados en teoría de nudos y sorprendentes aplicaciones a otros campos particularmente en Mecánica estadística, biología etc., entendemos que la situación hoy al recargarse con la utilización más de un doble lenguaje y múltiples interpretaciones puede originar dispersión de ideas. Sería muy conveniente realizar un serio trabajo de coordinación y síntesis dejando bien precisadas todas las relaciones o equivalencias.

Las técnicas propias a la topología y la topología geométrica (grupos topológicos incluidos) junto a los métodos algebraicos y diferenciales propios de la Topología y la Geometría algebraicas y diferenciales, aparecen sofisticadas con la intervención de los métodos de la Mecánica Estadística, y ello pese a que hasta hoy, como ya hemos indicado, tales métodos no sólo están proporcionando notables resultados sobre 3-variedades, nudos y enlaces, sino que, así mismo al introducir a través de ellos las ideas de la Topología en baja dimensión en la Física teórica, estén permitiendo obtener interesantes resultados para la propia Física teórica como los alcanzados por Jehle [Phys.Rev. **D6** (1992) 441] o por Faddeev & Niemi [Nature **387** (1997) 58] como nos comunicó el Profesor Abad-Antoñanzas el pasado mes de julio, que confirman de este modo las ideas de Lord Kelvin en 1869, parcialmente verificadas por P.G. Tait en 1898,

8) Una buena introducción al tema es la obra de M. Atiyah: The geometry and physics of Knots, Cambrigdge University Press 1990, ISBN 0-521-39521-6.

Concretemos hechos:

La serie de invariantes descubiertos por Witten ["Quantum field theory and the Jones polynomial" 1988] utilizando técnicas de la Mecánica Estadística propias de la teoría cuántica de campos (contexto en el que se unen los principios de la mecánica cuántica con la relatividad especial -la covariancia de Lorentz-), y que a principios de los 90 fueron caracterizados matemáticamente por Reshetikhin-Turaev [para G = SU(2) mediante representaciones del grupo cuántico $U_q(sl(2,C))$], asignan a una 3-variedad una serie de invariantes asociados con un grupo de Lie simple y compacto, dando lugar a las denominadas *teorías topológicas de campos gauge* , en las que, el carácter de Chern-Simons juega un papel central. Por ejemplo Phillips & Stone [Quantum Topology, Ser. Knots. Everything, 3, World Sci. Publications, 1993, River Edge, N.J.] establecen una relación entre un SU(2) campo gauge **u** definido sobre una triangulación de una variedad M y un SU(2) fibrado principal ξ con una conexión ω diferenciable por trozos. El carácter de Chern-Simons (esto es, la acción exponencial de Chern-Simons) del campo gauge (ξ, ω) puede ser calculado a partir de **u** como una suma de contribuciones locales, una para cada 3-simplice. Es de señalar que para la construcción del fibrado de la red dada se utilizan métodos clásicos de topología algebraica, tales como el fibrado universal de Milnor o la construcción bar de Eilenberg-MacLane.

El planteamiento del polinomio de Jones $V_k(t)$ de un nudo k, parece hallarse en la mecánica estadística aunque su origen se encuentra en la teoría de braids y las álgebras de Von Neuman. También Kaufmann construyó un modelo de estado físico para el polinomio de Alexander. Los invariantes polinomiales generalizados de Jones para nudos y enlaces se obtienen de una función traza sobre una "representacion R-matricial" de los grupos de trenzas (B_n; n = 1, 2, 3, ...) inicialmente estudiados por Artin. Pero precisamente la técnica para determinar representaciones R-matriciales de B_n es la teoría de los grupos cuánticos, por esta razón a los invariantes de Jones generalizados se les denomina *invariantes de grupos cuánticos* . Recientemente M. Lackenby ha demostrado que "el polinomio de Jones contiene información sobre el no anudamiento de enlaces y nudos", apoyándose en su relación con los SU(2)-invariantes cuánticos de enlaces en 3-variedades que fueron posteriormente descubiertos por Witten (y adecuada aplicación del correspondiente cálculo de clases características).

Desgraciadamente, en muchas ocasiones, el físico teórico utiliza conceptos matemáticos asignándoles una denominacion distinta. Quizás para precisar un determinado aspecto del concepto, pero que por otra parte desorienta y provoca infructuosas dispersiones y pérdidas de tiempo. Esto ha sido casi una constante en la Historia de la Ciencia y creo que se debería evitar. Por ejemplo en la denominada "teoría de colores" en teoría de campos, con frecuencia los físicos por intuición, suelen asignar una "medida" sobre el espacio de dimensión infinita que obtienen. Así en esta teoría el modelo estadístico que juega un papel central para la función volumen correspondiente es el modelo de Witten-Wes-Zumino cuya función de partición tiene la siguiente forma:

con

$$Z_k^G(M) = \int_{\mathcal{C}} e^{2pikL(\theta)}$$

$$L(\theta) = \frac{1}{8p^2} \int_M tr(\theta \wedge d\theta + \frac{2}{3} \theta \wedge \theta \wedge \theta)$$

Donde M es una 3-variedad compacta que juega el papel de espacio de configuración. Pues bien, una "coloración" de M, para $P = M \times G$ es una elección de una determinada "conexión" θ sobre el fibrado principal P sobre M con grupo estructural G. θ es por tanto una 1-forma con valores en el álgebra de Lie de G. Donde con $\mathcal{C}$ se designa el conjunto de todas las conexiones sobre P. En estas condiciones en lenguaje de los físicos, la acción de la coloración θ viene medida por la Lagrangiana $L(\theta)$ [es decir, el invariante de "Chern-Simons" generalizado] de la teoría y con la correspondiente integral Z(M):

$$Z(M) = \int_{\mathcal{C}} e^{2pikL(\theta)}d(\theta)$$

que se interpreta como una versión moderna (..?..) de la integral de Feymann "sobre todos los caminos" (sobre todas las coloraciones). Es claro que cada una de estas expresiones, para un matemático, expresan el carácter o integral y la clase característica secundaria o el invariante de Chern-Simons.

Otro polinomio de tipo análogo es el denominado HOMFLY polinomio de dos variables, que puede considerarse como una generalización de los polinomios de Alexander y de Jones. Su nombre se formó tomando las iniciales de los nombres de los cinco investigadores que de modo independiente pero simultáneo lo descubrieron, a saber: J. Hoste, A. Ocneanu, K.C. Millet, P.J. Freyd, W.B.R. Lickorish y D.N. Yeter. Así dado un nudo k (p, s)-lenticular mediante el correspondiente polinomio Homfly, N. Chbili ha encontrado recientemente una condición necesaria para que k sea periódico libre así como un criterio práctico sencillo que permite verificar que algunos nudos no tienen un cierto periodo libre.

Un invariante que ha despertado gran interés últimamente es el de Casson para 3-esferas homológicas orientadas, deducido apoyándose en la representación de su grupo fundamental en SU(2), y su relación con la estructura de ciertos subgrupos del grupo de clases de aplicaciones de superficies orientables. Sin precisión, se puede afirmar que el invariante de Casson *cuenta algebraicamente* los puntos en que el espacio de moduli $Hom(\pi_1(\Sigma^3), SU(2)) / SU(2)$ de las clases de equivalencia de representaciones del grupo fundamental $\pi_1(\Sigma^3)$ en SU(2), y en donde Σ^3 es una 3-esfera homológica entera orientada. Clases que se relacionan con ciertas clases de equivalencia-gauge de conexiones planas y a través de ellas con la posibilidad de caracterizarlas con un determinado invariante secundario asociado con las clases características de ciertos fibrados de superficies.

En 1989 los invariantes de Vassiliev, aunque buscan dar una clasificación de los nudos y enlaces , en este caso, proporcionan información cohomológica sobre el espacio $\mathfrak{M}$-S de todos los nudos. Donde $\mathfrak{M}$ es el espacio de todas las aplicaciones diferenciables de S^1 en S^3 que pasan por un punto fijo y son tangentes a una dirección determinada que pasa por dicho punto fijo. Entre otras propiedades, $\mathfrak{M}$ goza del hecho de poder ser aproximado por ciertos espacios afines, y estos espacios afines contienen representantes de todos los nudos. el discriminante S está constituido de todas las paredes entre las distintas cámaras de $\mathfrak{M}$. Vassiliev, siguiendo ideas de Arnold, estudia los invariantes cohomológicos de este espacio , con ayuda de las técnicas de la sucesión espectral.

Pero además, a todo lo anterior, hay que añadir otro dominio al que hoy se acude, el de la determinación de algoritmos de cálculo: que ello pueda alcanzarse se debe a que, gracias a los trabajos de Thurston, la clasificación de las variedades 3-dimensionales está íntimamente ligada con el estudio de las geometrías rígidas y a que Gromow introdujo potentes técnicas geométricas en teoría de grupos combinatorios, mientras Epstein y otros probaban que la geometría del grafo de Cayley de un grupo está íntimamente relacionado con las propiedades de los lenguajes formales asociados. Es en este contexto que se sitúa el caso del trabajo de Phillips & Stone citado a propósito de los invariantes de Witten.

Para los que nos correspondió vivir el final del proceso de determinación y el desarrollo de la mayoría de las técnicas de la topología algebraica así como el nacimiento y estructuración de toda la topología diferencial, con un extraordinario esfuerzo creativo y de sintesis, no nos es muy comprensible el que en su aplicación se esté produciendo esta dispersión en la utilización de conceptos que tanto esfuerzo de análisis e imaginación exigieron. No obstante, quizás convenga subrayar que, "la mayoría de los problemas pendientes, con uno u otro proceso y una u otra motivación, parecen más accesibles si se opera en la categoría diferenciable y se analiza en ella las consecuencias que origina la existencia de una o más superestructuras que proporcionen al problema un carácter cualitativo más definido". Es esta superestructura la que exige, por ejemplo, la consideración y estudio de las clases características de adecuados espacios fibrados.

Finalizaremos, felicitando una vez más a la recipiendaria por el discurso, labor intelectual y trayectoria humana demostradas, manifestándole la más cordial bienvenida a esta Academia, desde hoy su casa, seguros de que sabrá contribuir con su quehacer y excelentes dotes personales al buen nombre de esta Corporación y al bien cultural y científico de nuestra Comunidad.

Gracias.