Nudos invariantes y cirugía homológica.

SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO.

Instituto de Matemáticas y Facultad de Ciencias, UNAM.

Introducción.

Voy a presentar en esta ocasión un resultado topológico que obtuve allá por el año 1970 y que me es especialmente grato de recordar[1]. Voy a intentar hacerlo de modo que el mayor número de lectores pueda seguir el hilo de esta historia, para lo cual buscaré minimizar el número de términos técnicos y explicar aquellos que me son imprescindibles. Pido a los lectores expertos en el tema perdonen algunas imprecisiones inevitables así como una cierta terminología poco usual en el oficio. Sé que apreciarán el intento de no caer en un tecnicismo incomprensible ni en una vaguedad amorfa insultante para la inteligencia de los lectores.

El problema es complejo, como puede verse desde el título. Si bien todas las palabras que ahí aparecen son del lenguaje común (como es frecuente en la terminología matemática), su significado preciso requiere una larga explicación. Los *nudos invariantes* consisten de una esfera homotópica de cualquier dimensión provista de una involución suave sin puntos fijos y, adicionalmente, de una esfera de dimensión dos unidades menor que vive dentro de la primera, que está además anudada y es invariante bajo la involución. ¿Qué es todo esto?, preguntará el lector. Veremos si al final de este escrito tiene al menos una cierta imagen de lo que todo esto significa. Las palabras *cirugía homológica* pueden también sonar muy familiares (y quizá hasta sugerir a algunos un significado posible), pero es la parte más técnica de este asunto: la *cirugía* es una técnica especial desarrollada a mitades del siglo pasado para simplificar ciertos objetos geométricos y la *cirugía homológica* es una variante particular de ella que surgió al calor de la resolución del problema que aquí se va a describir. Esto sí que es imposible explicar en unas líneas, y sólo puedo intentar que al finalizar este escrito el lector sienta la necesidad e intención de introducir estas técnicas.

Espero que con todo esto logre transmitir un poco la sensación de la aventura que ese episodio representó en mi trabajo matemático.

¿Involuciones sin puntos fijos en esferas homotópicas?

Hay un ejemplo de esto que todos conocemos: la correspondencia *antípoda*:

En efecto, salvo los que aún consideren que la tierra es plana, todos sabemos que cualquier punto P sobre su superficie esférica tiene su punto antípoda P', que no es otra cosa que el diametralmente opuesto: si se traza una línea recta que parta de P y pase por el centro de la tierra (O) y luego se sigue prolongando hasta salir nuevamente a la superficie de la tierra, se obtiene un nuevo punto P', el antípoda de P. Este punto se caracteriza también por que su latitud difiere de la de P únicamente en el signo y su longitud difiere de la de P exactamente en 180°.

---

[1] Para información sobre otro de mis temas favoritos ver *Variaciones sobre el Lema de Morse,* en *Matemáticas en la UNAM*, Memorias del 60 aniversario del Instituto de Matemáticas, pp. 55-70.

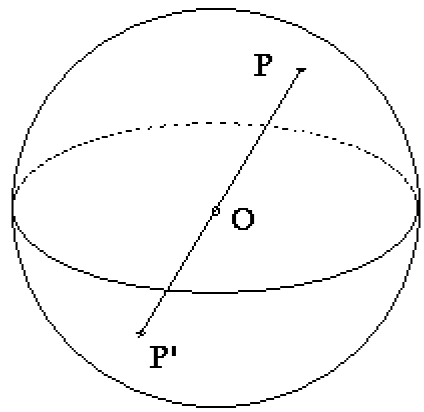

Figura 1.
La correspondencia antípoda.

Podemos cerrar los ojos e imaginarnos esta esfera y un punto que se mueve suavemente sobre ella al mismo tiempo que su antípoda.

Hay tres propiedades muy simples, pero muy importantes de esta correspondencia:

a) es *continua*: si movemos continuamente el punto P, el punto P' se mueve también continuamente. Es más, es *lisa*: si el punto P traza una curva lisa (es decir, sin picos) sobre la superficie de la tierra, el punto P' traza también una curva lisa.

b) El antípoda del antípoda es el punto inicial: si ahora buscamos el antípoda de P' llegamos necesariamente de vuelta al punto P. Esto se expresa diciendo que la correspondencia antípoda es una *involución*.

c) Ningún punto es antípoda de sí mismo (la correspondencia *no tiene puntos fijos*).

Esta última propiedad es posible (por un resultado topológico muy conocido de Solomon Lefschetz) por el hecho de que esta correspondencia invierte la orientación: ponga el lector su mano derecha sobre la superficie de una esfera real o imaginaria y verá como puede colocar también la mano izquierda de manera que su palma y cada uno de sus dedos queden en los antípodas de los elementos correspondientes de la derecha. (Para entender mejor estas propiedades de la involución antípoda compare el lector con lo que sucede con otras involuciones de la esfera, por ejemplo la reflexión en el plano ecuatorial o una rotación de 180° alrededor de su eje).

Pero, viendo esta armoniosa correspondencia entre los puntos de la esfera, enseguida nos preguntamos: ¿no habrá otras con las mismas propiedades a), b) y c)? ¿No habrá otras involuciones de la esfera que sean suaves y sin puntos fijos?

Es fácil ver que hay muchas: si en lugar de diámetros, se trazan rectas que pasen por otro punto Q interior a la esfera distinto del centro (como en la figura 2) obtenemos otra correspondencia entre puntos de la esfera que es también una involución sin puntos fijos.

(¿Qué pasaría si el punto Q estuviera *fuera* de la esfera?).

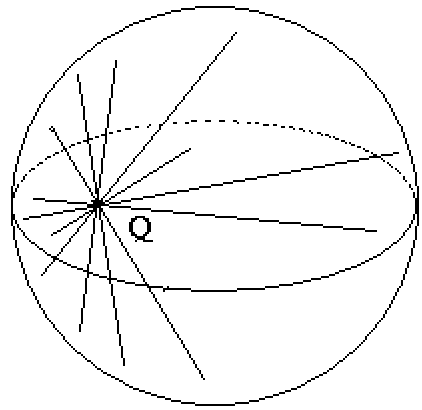

Figura 2.
Otra involución sin puntos fijos de la esfera.

El lector puede imaginar fácilmente muchas otras, por ejemplo, tomando, en lugar del manojo de diámetros o de rectas que pasan por Q, un manojo de curvas que pasen por Q y que tengan la misma propiedad de las rectas de establecer una correspondencia entre puntos de la esfera. Las nuevas involuciones tienen propiedades diferentes a la antípoda. Por ejemplo, en el caso de la antípoda la distancia entre dos puntos es la misma que la distancia entre sus correspondientes antípodas (suponiendo que la superficie de la tierra es una esfera perfecta) mientras que en la de la figura 2 la distancia entre dos puntos y la distancia entre los puntos correspondientes puede ser distinta. Ya será cuestión de gustos si preferimos la más simétrica o alguna otra que nos divierta más por la manera en que deforma las figuras, como nos puede gustar más (o ser más útil según nuestros propósitos en un momento dado) un espejo cóncavo que uno plano…

Desde el punto de vista de la *topología*, rama de la geometría que no se preocupa de las distancias entre los puntos, no hay mayor diferencia entre ellas. De hecho, un topólogo las consideraría como la misma en la medida en que podemos deformar continua y suavemente una en otra. Por ejemplo, se puede deformar suavemente la de la figura 2 en la de la figura 1 con sólo deslizar el punto Q hasta el centro O de la esfera.(cierre el lector los ojos e imagine este desplazamiento y como se va alterando la correspondencia).

El topólogo inmediatamente se preguntará: “¿habrá otras involuciones suaves sin puntos fijos de la esfera que sean *esencialmente* diferentes de la antípoda?” (es decir, que no se puedan deformar suavemente en ésta). La respuesta la dieron básicamente los topólogos del siglo XIX (empezando por Bernhard Riemann, quien estudió las que llevan su nombre) al clasificar las superficies. De esa clasificación se sigue que toda involución continua sin puntos fijos de la esfera se puede deformar continuamente en la involución antípoda

Para demostrar esto hay que considerar el espacio que se obtiene al pensar como un solo punto a cada pareja de puntos antípodas. Se puede pensar también como el espacio de todas las rectas que pasan por el punto O. Este espacio se llama el *plano proyectivo* por que es *el mismo* que el espacio que se obtiene agregando a un plano un punto *al infinito* en cada dirección, correspondiente a los puntos de fuga de un dibujo en perspectiva: observemos un plano horizontal desde un punto de vista situado por encima de él; dos paralelas sobre el plano *parecen* juntarse en un punto, dos paralelas que corten a las primeras parecen juntarse en un punto diferente. Cada línea visual desde mi ojo a un punto del plano, o a uno de los puntos de fuga de paralelas, corta a una esfera imaginaria con centro en mi ojo en dos puntos antípodas. Este espacio proyectivo es *no orientable* por que la correspondencia antípoda invierte la orientación.

Lo mismo podemos hacer con cualquier otra involución sin puntos fijos de la esfera: identificamos cada punto con el correspondiente y obtenemos algo parecido al plano proyectivo. ¿Qué tan parecido? Los topólogos del siglo XIX clasificaron todas las superficies cerradas por su orientabilidad y su código genético (bueno, en topología se le llama el *género*) y todo lo que hay que hacer es verificar que para cualquier involución continua sin puntos fijos de la esfera, el espacio de parejas en involución es una superficie no orientable que tiene el mismo género que el plano proyectivo. La conclusión inmediata de la clasificación es que todos esos espacios son topológicamente equivalentes al proyectivo y que por lo tanto todas las tales involuciones son, topológicamente, la misma.

El gran matemático Riemann no sólo inició ese estudio topológico de las superficies sino que abrió las puertas al estudio de espacios de dimensiones mayores. Ya para inicios del siglo XX, sobre todo a partir de los espacios de configuración de los sistemas mecánicos o geométricos formados por muchos elementos, las *variedades* de cualquier número de dimensiones eran objetos completamente naturales para los físicos y matemáticos. Una de estas variedades es la esfera de dimensión n que es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia fija de otro en el espacio coordenado de $n+1$ dimensiones. La forma de estas esferas se escapa a nuestra intuición, la cual debe apoyarse en las representaciones analíticas para no errar, pero la imagen de la esfera de dimensión 2 sentada, redondita, en el espacio físico de dimensión 3 puede ayudarnos mucho. La esfera de dimensión 3 puede también *sentirse* pensándola como el espacio de dimensión 3 al que se le agrega un punto al infinito (esta vez sólo uno en todas las direcciones; si agregamos un punto al infinito en cada dirección obtenemos el *espacio proyectivo* de dimensión 3 que es una variedad diferente).

Pero la clasificación de estas variedades, a partir de las de dimensión 3, resultó ser muchísimo más complicada que la de las superficies. Ya Poincaré hacia el año 1900 encontró que no bastaba el género para reconocer a la esfera de dimensión 3, al construir otra variedad con el mismo género que ella pero topológicamente diferente. Ambas son *homológicamente equivalentes* (tienen el mismo género) lo cual se expresa geométricamente en la propiedad que cualquiera de ellas tiene de que toda curva cerrada contenida en ella es el borde de una superficie compacta contenida en la misma. Pero no son *homotópicamente equivalentes*: la esfera es simplemente conexa (toda curva cerrada sobre ella se puede deformar continuamente a un punto), mientras que la variedad de Poincaré no lo es. El mismo Poincaré propuso cual debería ser el *genoma* completo para las variedades de dimensión 3: el *grupo fundamental* que encierra de manera no conmutativa toda la complicada información sobre las curvas cerradas en una variedad y sus deformaciones. Pero en todo el siglo XX no se logró demostrar que este *genoma* fuera suficiente para distinguir a la esfera de todas las demás variedades de dimensión 3. (En los albores del XXI se anunció la solución de este problema por el matemático ruso G. Perelman; algunos de los topólogos del siglo anterior están aún escépticos al respecto).

Las esferas de dimensión mayor también tienen sus involuciones antípodas, definidas de la misma manera y con las mismas propiedades, sólo que estas involuciones preservan la orientación cuando la dimensión es impar y la invierten cuando es par. Cada esfera contiene a todas las de dimensión menor (como la de dimensión 2 contiene al círculo ecuatorial) y la correspondencia antípoda de la de dimensión mayor no saca de su lugar a las otras, las deja *invariantes*: si un punto está en una esfera pequeña su antípoda también lo está. Por ejemplo, en la visualización de la esfera de dimensión 3 que sugerimos anteriormente, la involución antípoda se puede ver como sigue: en el espacio tenemos la esfera de dimensión 2 y su involución antípoda; pero ahora además el *antípoda* de un punto dentro de la esfera será un punto de su exterior (y viceversa) y el *antípoda* del centro de la esfera será ahora el punto al infinito. Más precisamente, el antípoda de un punto a distancia *r* del centro se obtendrá reflejando dos veces: una vez tomando el simétrico respecto al centro de la esfera y una segunda vez *invirtiéndolo* en la esfera para que quede a distancia *1/r*. Dentro de esta involución de la esfera de dimensión 3, la esfera de dimensión dos es *invariante*: los puntos de ella se siguen correspondiendo bajo la involución. En cambio el interior de la esfera no lo es: un punto del interior no se corresponde a otro punto del interior sino a uno del exterior, de la misma forma que en la esfera terrestre un punto del hemisferio norte tiene su antípoda en el hemisferio sur, mientras que el antípoda de un punto en el ecuador es otro punto en el ecuador.

Esto nuevamente es muy sencillo, pero el problema de decidir si cualquier otra involución sin puntos fijos de una esfera de dimensión superior es equivalente o no a la antípoda no estaba a la orden del día: si no se podía reconocer si tenemos o no una verdadera esfera, mucho menos vamos a poder reconocer una involución en esa esfera. Sólo hacia el año de 1960 el topólogo Roger Livesay de la Universidad de Cornell dio un paso importante en dimensión 3 al demostrar que se puede resolver el segundo problema por separado: si *suponemos* que nuestra variedad Σ es equivalente a la esfera de dimensión 3, entonces toda involución en ella es equivalente a la antípoda. Para esto Livesay probó primero que siempre existe en Σ una esfera invariante de dimensión 2. Como ya sabemos que la involución de ésta es equivalente a la antípoda de dimensión 2, es posible establecer una correspondencia entre ambas. Después se ve que es posible hacer corresponder el resto de Σ con el resto de esfera usual de dimensión 3 para que todos sus elementos coincidan con los de la involución antípoda.

Mientras tanto otros avances topológicos se desarrollaban vertiginosamente: John Milnor de la Universidad de Princeton, como consecuencia de los trabajos básicos de René Thom[2], sorprendió al mundo de los topólogos al mostrar que había variedades de dimensión 7 topológicamente equivalentes a la esfera de la misma dimensión, pero no de manera suave: las hoy llamadas esferas *exóticas*. Desde el punto de vista de la Topología *Diferencial* (o *sea,* suave) ya no había una sino varias esferas a considerar. En particular, pronto aparecieron involuciones sin puntos fijos en las nuevas esferas: el mismo John Milnor y Morris Hirsch de la Universidad de Berkeley encontraron conjuntamente que, efectivamente, las esferas *exóticas* de dimensión 7 y las normales de dimensión 6 y 5 tienen involuciones sin puntos fijos diferentes de la antípoda.

Otra contribución de John Milnor (sugerida también por René Thom) es la técnica de *cirugía de variedades*. Ésta consiste en hacer una serie de cortes en una variedad con el objeto de simplificarla hasta hacerla homotópicamente equivalente a alguna otra dada de antemano. Un ejemplo nos puede ilustrar:

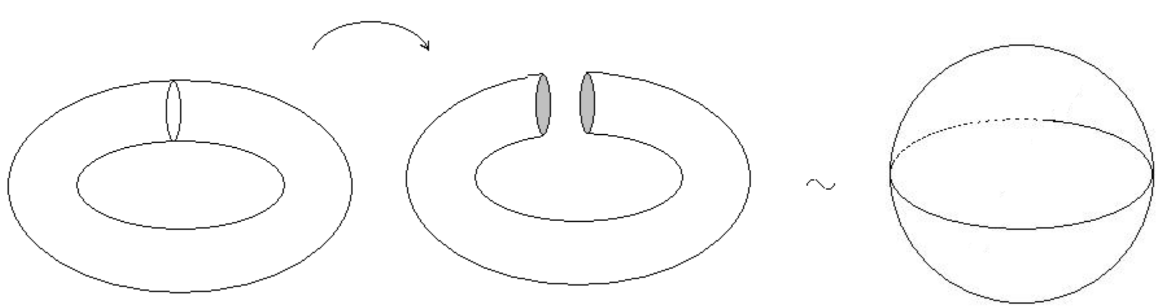

Figura 3.
Una *cirugía* hace que el toro se vuelva equivalente a la esfera.

[2] Una descripción más detallada de este desarrollo de la topología diferencial y del papel de René Thom en ella aparece en mi artículo *Catastrophes et prédictions,* Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France, enero del 2005.

Esto es muy simple: se hace un corte en el *toro* (o superficie de la dona) y luego se pegan dos tapas para cerrar los hoyos. (Aunque hay que decir que esta técnica de cortar y pegar resulta ser mucho más complicada en dimensiones superiores y requiere de delicados análisis topológicos y algebraicos que no podrían ser resumidos en este breve espacio.).

A esto hay que agregar la contribución de Stephen Smale de la Universidad de Berkeley, quien demostró que para las variedades de dimensión cinco o más es posible reconocer *topológicamente* a la esfera mediante lo que aquí hemos llamado, de manera muy poco ortodoxa, el genoma de Poincaré (el grupo fundamental más aproximadamente *n/2* géneros para las variedades de dimensión *n*).

Todo esto permitió entender mucho más el conjunto de *esferas homotópicas*; en particular, probar que hay un solo número finito de esferas homotópicas diferentes en cada dimensión desde el punto de vista suave. Con el desarrollo posterior de la cirugía por los topólogos William Browder de la Universidad de Princeton y Sergei Novikov de la de Moscú se pudo aplicar esta técnica a la clasificación de todas las variedades (no sólo de las esferas) y a la resolución de muchos problemas sobre ellas. En particular, Browder y Livesay unieron fuerzas para abordar el problema general de las involuciones sin puntos fijos en esferas homotópicas de dimensión 5 o más (la técnica de cirugía no funciona en las dimensiones 3 y 4). Su idea consistió en tratar de encontrar siempre una esfera invariante de una dimensión menor para ir así reduciendo el problema. Si esto siempre fuera cierto, todas las involuciones podrían reconstruirse a partir de la de dimensión dos, como en el Teorema de Livesay, y serían topológicamente equivalentes. El problema se reduciría esencialmente al de la clasificación suave de las esferas; en particular, habría sólo un número finito de involuciones sin puntos fijos diferentes en cada dimensión.

Para atacar este problema utilizaron la técnica de cirugía para simplificar una variedad invariante (que siempre existe) hasta lograr que fuera homotópicamente equivalente a una esfera. Sólo que ahora la cirugía debería ser *equivariante*: cada vez que se modificara una parte de la variedad por la vía de cortar y pegar se debería hacer lo mismo con la parte correspondiente bajo la involución. Pudieron demostrar que esto siempre es posible cuando la dimensión de la esfera es par, pero que al tratar de hacerlo en dimensión impar se necesitaba que un cierto número fuera igual a cero para que la última simplificación de la variedad invariante fuera posible y se obtuviera la esfera. Para completar su análisis les faltaba ver si había ejemplos donde este número (un nuevo género, hoy llamado *invariante de Browder-Livesay)* fuera efectivamente distinto de cero, o si en todos los casos el tal numerito era cero y el proceso se podía llevar hasta el final…

Este fue el problema que me planteó Browder en el año 1967. De entrada intenté construir ejemplos por la vía de considerar variedades no esféricas que fueran candidatos a ser variedades invariantes y fabricar involuciones en ellas diferentes de las que aparecen en las variedades invariantes de la involución antípoda. Después de varios intentos frustrados, un compañero de estudios me hizo ver que este camino no me llevaba a ningún lado en el caso de que la variedad fuera una superficie. La demostración de este hecho es la misma que la que mencionamos antes para el caso de la esfera: las superficies de género mayor tampoco tienen involuciones sin puntos fijos que inviertan la orientación y que sean distintas de la obvia (es decir, la que se obtiene al ponerlas de manera simétrica en el espacio y tomar puntos diametralmente opuestos); ¡basta considerar la superficie de identificación de esa involución, como en el caso de la esfera de dimensión 2, y aplicar el teorema de clasificación de superficies del siglo XIX! Y era claro que si el método propuesto no daba nada nuevo en la dimensión 2, mucho menos funcionaría en dimensiones superiores…

La observación de este amigo (de nombre Francisco González Acuña, mejor conocido como *Fico*) me sacó del camino erróneo y no me fue difícil encontrar otro: en lugar de construir artificialmente una variedad invariante, se podría tomar una variedad invariante natural, no esférica, de las que aparecen en la involución antípoda, y después *vaciar el resto de la esfera y volverlo a llenar de otra manera*. Las técnicas de cirugía y un tanto de álgebra bilineal me permitieron llevar a su fin esta construcción de *vaciar y volver a llenar*.

El resultado fue que el *invariante de Browder-Livesay* puede tomar una infinidad de valores diferentes. (Después, usando otras herramientas algebraicas algo más sofisticadas, pude demostrar que podía tomar todos los valores posibles a priori). Es decir, en cada dimensión de la forma *4k+3*, a partir de *7*, existe una *infinidad* de ejemplos diferentes de involuciones sin puntos fijos en esferas homotópicas (los ejemplos de Hirsch y Milnor sólo eran en número finito). Dicho de otro modo, existe una infinidad de espacios proyectivos homotópicos diferentes en cada dimensión *4k+3*. De esa infinidad de involuciones diferentes la mayoría no tiene esferas invariantes de una dimensión menor, además de tener otra serie de propiedades extrañas. Sin embargo, como un resultado colateral del método de *vaciar y volver a llenar*, resultó que todas tienen un *nudo invariante*, es decir, una esfera invariante de dimensión *4k+1*, dos dimensiones menos que la esfera grande, pero que necesariamente está anudada. Sobre esto hablaremos más en la sección siguiente.

(Otro subproducto fue la construcción de involuciones sin puntos fijos ni esferas invariantes en esferas homológicas de dimensión 3. Aquí se abrió una posibilidad demasiado interesante: si alguna de éstas resultaba homotópicamente equivalente a la esfera de dimensión 3 quedaría demostrado, por el Teorema de Livesay, que era diferente de la esfera normal y, en consecuencia, que el genoma de Poincaré era insuficiente para reconocer a la esfera de dimensión 3. ¡Esto habría resuelto, en negativo, el mayor enigma topológico de todo el siglo XX! Sólo que el número de posibilidades de esta construcción se vuelve infinito en dimensión 3 y los cálculos necesarios resultan abrumadores, lo que hace prácticamente imposible seguir esta línea de investigación).

Después de haber obtenido esos y algunos otros ejemplos, el siguiente paso natural era el de clasificar las involuciones de esferas de dimensión 5 o más, lo cual logré al poco tiempo usando las nuevas técnicas de la teoría de cirugía de variedades que estaban siendo desarrollados en ese momento por Dennis Sullivan (quien era también estudiante de William Browder en Princeton) y por C.T.C. Wall de la Universidad de Liverpool. La clasificación que era posible con las técnicas de esa época era la clasificación *combinatoria*, intermedia entre la clasificación topológica y la suave. La clasificación suave completa resulta inabordable aún hoy, inclusive para las esferas solas, sin involución; las técnicas necesarias para la clasificación topológica aparecieron poco después como mencionaré en la siguiente sección. (Por un momento surgió la posibilidad de que los ejemplos de dimensión *4k+3* mostraran una discrepancia entre la clasificación combinatoria y la topológica de las variedades, otro de los grandes problemas abiertos del siglo XX conocido como el *Hauptvermutung*, y hasta pensé en una construcción al respecto, que no funcionó). Prácticamente al mismo tiempo Wall llegó a una clasificación equivalente, como una aplicación de la gran maquinaria de grupos de obstrucción a la cirugía que estaba construyendo y que aplicaron tanto él como otros topólogos con mucho éxito a muchos otros problemas topológicos. Para esas fechas se dio también el hecho de que muchos otros matemáticos, tanto principiantes, como intermedios y expertos, se pusieron a estudiar las involuciones y a obtener diversos resultados sobre ellas, usando cada uno sus particulares métodos y herramientas.

Con todos los resultados que yo había obtenido presenté mi tesis en octubre de 1968.

Los nudos invariantes.

Un punto permaneció sin resolver a pesar de todo: si ya sabíamos que hay involuciones de esferas homotópicas que no tienen esferas invariantes de una dimensión menos (y se contaba con un criterio para saber cuando la tienen y cuando no) faltaba por ver en *un* caso cuando existían o no esferas invariantes de *dos* dimensiones menos. Contestar esta pregunta era importante para completar el estudio, ya que la existencia de esferas invariantes de dimensiones aún menores se puede resolver con algunas técnicas clásicas de la topología combinatoria. Esta pregunta permaneció abierta en mi tesis y si bien recibí noticia de que algún topólogo había anunciado una presunta respuesta (que resultó a fin de cuantas ser la incorrecta), nunca tuve confirmación verbal o por escrito de este hecho.

El caso faltante era el de una involución de la esfera de dimensión *n* que no tuviera una esfera invariante de dimensión *n-1* .¿Podría haber en tal caso una de dimensión *n-2* cuando la dimensión *n* es de la forma *4k+1*? (Cuando *n* es de la forma *4k+3* esto siempre sucede por la construcción de *vaciar y volver a llenar*, como mencionamos en la sección anterior, y los casos en que *n* es par se resuelven fácilmente con el invariante de Browder-Livesay). La esfera invariante de dimensión *n-2* tendría que estar necesariamente *anudada* en la de dimensión *n*. O sea, no podría tenerse la imagen ingenua de una esfera de dimensión *n-2* metida en una de dimensión *n-1* dentro de la de dimensión *n*, porque en ese caso se podría cambiar fácilmente la de dimensión *n-1* por una invariante. La imagen tendría que ser la de un *nudo* como los que conocemos en dimensión *3*: una curva cerrada (esfera de dimensión 1) anudada dentro del espacio y que por lo mismo no puede ser parte de ninguna superficie esférica (ver figura 4). Se trataba entonces de encontrar un *nudo invariante*.

El problema no se resolvía con las técnicas usuales de cirugía de variedades y me llevó mucho tiempo llegar a su solución (mucho más que para cualquier otro resultado de mi tesis). Además, estando de regreso en México no contaba con las valiosas observaciones de *Fico* que seguía en Princeton. Finalmente en el año de 1970 pude concluir que siempre existen nudos invariantes en las condiciones señaladas. Con eso quedó completado el cuadro y con ese agregado (y la mención de algunos otros resultados que aparecieron en ese lapso, entre ellos la clasificación topológica de las involuciones como resultado del trabajo de Robion Kirby de la Universidad de Berkeley y Lawrence Siebenmann de la de París) mi tesis fue publicada en forma de libro en el año 1971[3].

Con este resultado se cerraba un capítulo, pero las *técnicas* que tuve que desarrollar para obtenerlo contribuyeron a abrir el camino a muchas otros resultados topológicos.

La cirugía homológica.

La idea básica de la demostración se puede resumir en lo siguiente: partir de una involución en una esfera de dimensión *n-2* que sea el candidato natural a ser el nudo invariante que buscamos, completarla adecuadamente a una variedad de dimensión *n-1* y después a una de dimensión *n* y, finalmente, hacer cirugía en ésta última, *fuera del nudo*, hasta lograr una esfera. Donde se atasca el procedimiento es en la imposibilidad de hacer cirugía en el exterior del nudo para que sea homotópicamente equivalente al exterior de una esfera no anudada de la misma dimensión.

---

[3] *Involutions on manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und Ihre Grenzgebiete 59, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, New York, 1971.

En efecto, lo que distingue una esfera anudada de una que no lo está es *precisamente* que sus exteriores tienen diferente *homotopía*, a pesar de que tienen la misma *homología*: En la figura 4 el círculo marcado en el exterior del nudo (llamado su *meridiano*) lo rodea una vez y tiene la siguiente propiedad: toda otra curva cerrada en el exterior del nudo y que lo rodee una vez (además de desplazarse arbitrariamente por todo el exterior) es homóloga, pero no siempre es homotópica al meridiano. Esto es análogo a lo que dijimos sobre la variedad de Poincaré: en este caso tenemos dos curvas que pueden unirse mediante una superficie compacta que no toque al nudo, pero no deformarse una en la otra en su exterior. Si la esfera no está anudada esta deformación siempre es posible.

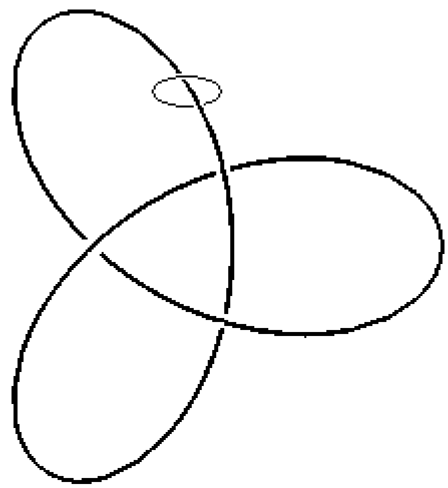

Figura 4.
Un nudo en la esfera de dimensión 3 y su círculo meridiano.

Esto plantea naturalmente el siguiente problema general: determinar bajo qué condiciones es posible hacer cirugía en una variedad para lograr una *equivalencia homológica* con otra, especialmente en una situación en la cual es imposible conseguir una equivalencia homotópica. Si bien era un paso adelante plantearse el problema en abstracto de esta manera, se requería sin embargo poder resolverlo en concreto en la situación especial que teníamos en la mesa de operaciones.

***Cracking*.**

La dificultad principal consiste en que ese exterior tiene un núcleo muy sólido, organizado según un esquema ligeramente asimétrico llamado E_8:

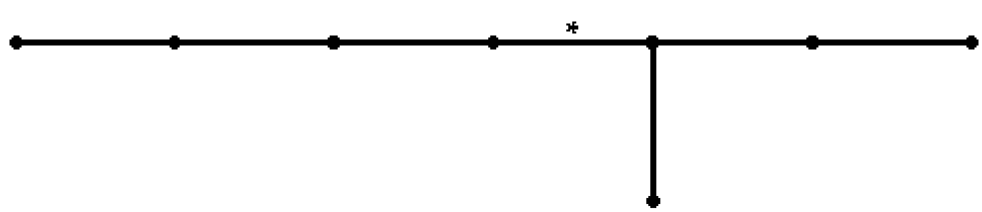

Figura 5.
La gráfica E_8

Esta gráfica juega un papel muy importante en toda la historia que hemos narrado: forma el esqueleto de una variedad de dimensión *4k* (que también se conoce como E_8) cuya frontera es sumamente interesante: para k=1 esta frontera no es otra cosa que la esfera homológica de Poincaré mencionada en la primera sección, para k=2 es la primera esfera exótica de Milnor de dimensión 7 y para valores de k superiores es la generalización de ésta a todas las dimensiones $4k-1$; representa la obstrucción fundamental para concluir la cirugía de Milnor en dimensión $4k$ y la de Browder-Livesay en dimensión $4k$+3, es la base de mi método de *vaciar y volver a llenar* para realizar el invariante de Browder-Livesay, aparece también en los nudos y en los nudos invariantes, en el problema de clasificación topológica de variedades y en el estudio de las de dimensión 4, etc., etc.

La presencia de este objeto en nuestro problema parecía un obstáculo formidable, inquebrantable…salvo por un hecho especial: por estar en una dimensión par la involución tiene que *invertir* la orientación. La variedad E_8 no puede partirse en dos pedazos iguales y con la misma orientación, pero ¿podría en algún sentido partirse en dos pedazos con *orientaciones opuestas*? ¿Podría ser E_8 algo así como una mano izquierda y una mano derecha entrelazadas formando un solo objeto? Después de un estudio minucioso de las condiciones precisas que se requerían y de las propiedades topológicas y algebraicas de la variedad E_8, conseguí dar una respuesta positiva a la pregunta anterior. Esquemáticamente, el procedimiento se puede representar como la ruptura del enlace marcado * en la figura anterior, la cual separa la gráfica E_8 en dos gráficas lineales de cuatro vértices (conocidas como A_4):

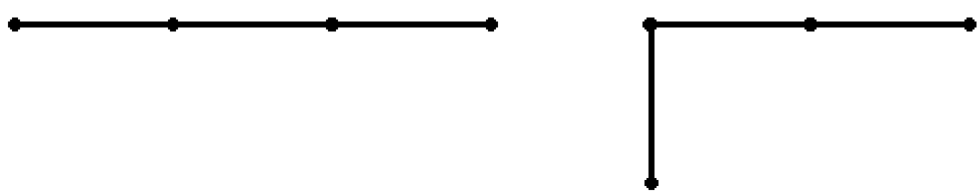

Figura 6.
Después del *cracking*.

Di a este proceso el nombre de *cracking* por que me recordó el proceso petroquímico que lleva ese nombre (¡también en español!) y que consiste en quebrar las moléculas grandes del petróleo pesado para obtener uno más ligero.

Con esto el resultado buscado estaba demostrado: toda involución sin puntos fijos en una esfera homotópica cuya dimensión es un múltiplo de cuatro admite un nudo invariante.

Conclusiones.

Presenté este resultado en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Niza el año 1970 y puedo decir que causó sorpresa y hasta cierta incredulidad respecto a la técnica utilizada. En el artículo para las memorias de ese congreso[4] planteé un programa general de cómo desarrollar la *cirugía homológica*, de la cual la construcción anterior sería sólo un caso particular.

[4] *Invariant knots and surgery in codimension 2*. Actas del Congreso Internacional de Matemáticas, 1970.Gauthier-Villars, París, 1971. Tomo 2, 99-112.

Este programa fue desarrollado por Sylvain Cappel (también discípulo de William Browder) del Instituto Courant y Julius Shaneson de la Universidad de Rutgers, quienes habían llegado a la misma problemática a través de otros casos particulares. El trabajo de ellos fue publicado en el año 1974[5] y contiene una construcción completa de los grupos de obstrucción para la cirugía homológica así como una gran cantidad de resultados topológicos que se derivan de ella (y un apéndice especial sobre una versión puramente algebraica del *cracking*). Este artículo tuvo una gran influencia en el trabajo de muchos otros topólogos y hasta la fecha aparecen muchas publicaciones en las que se aplica esta técnica a diferentes problemas topológicos, entre los cuales hay varios relacionados con la Física (ciencia en la cual los nudos, en particular, han adquirido una presencia muy importante). La evolución posterior de esta influencia puede observarse también en términos de las *citas*: si bien Cappell y Shaneson dan el justo crédito en varios de sus artículos a la contribución que yo hice al desarrollo de esta técnica, muchos de los artículos posteriores de otros autores citan sólo el trabajo de Cappell y Shaneson (lo cual es natural, dado que fueron ellos los que desarrollaron y perfeccionaron la técnica y obtuvieron los resultados más completos). Pues bien, ¡hoy aparecen artículos en los que se utiliza la cirugía homólogica sin ninguna referencia a mi trabajo ni al de Cappell y Shaneson! (Cabe aquí mencionar que este dúo ha obtenido también muchos otros resultados topológicos muy importantes que no tienen que ver con la cirugía homológica).

Desde un punto de vista personal, considero éste como uno de mis trabajos más satisfactorios, incluso más que el resto de los resultados de mi tesis, por varias razones: si bien en ésta resolví problemas interesantes, algunos de los resultados mismos estaban siendo obtenidos al mismo tiempo por otros investigadores con otros métodos; partí de un problema planteado por mi director de tesis como parte de uno de sus proyectos de investigación; y si bien las técnicas empleadas tenían cierta originalidad (algunas, como la de *vaciar y volver a llenar*, fueron generalizadas y aplicadas a otras situaciones), puede decirse que eran extensiones naturales de algunas técnicas conocidas.

En cambio, el resultado de los nudos invariantes surgió como una pregunta que fue producto de mi propia investigación y que resolví ya estando en México; que yo sepa, el resultado no ha sido demostrado por ningún otro método, aunque éste forme ya parte de una teoría más general; las preguntas sobre nudos invariantes dieron lugar a varios otros trabajos de investigación, como por ejemplo la tesis de Neil Stoltzfus (otro estudiante de William Browder); y para su solución fue necesario introducir ideas que no habían surgido anteriormente, que fueron sorprendentes en su momento y que probaron ser fructíferas.

Además, sigo pensando que el cracking de E_8 es un hecho básico que tiene muchas posibilidades de aplicarse y no sólo en topología. E_8 y sus parientes cercanos aparecen de manera intrínseca en las más diversas ramas de las matemáticas: aparecieron por primera vez en las álgebras de Lie, y después han aparecido en los grupos de Coxeter, en los grupos finitos de simetrías de la esfera (o sea, en los sólidos platónicos), en las representaciones de grupos y de álgebras, en las formas cuadráticas enteras, en la Geometría Algebraica, en la Teoría de singularidades, en las álgebras de von Neumann, etc., etc… Y, últimamente, también en los más variados modelos de la Física.

¿Será posible que esa propiedad básica de E_8, que puede expresarse de una manera puramente algebraica, no tenga implicaciones en ninguna de estas teorías?

Espero tener tiempo un año de estos para volver sobre este asunto pendiente.

---

[5] *The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds*, Ann. Math. 99 (1974), 277-348.