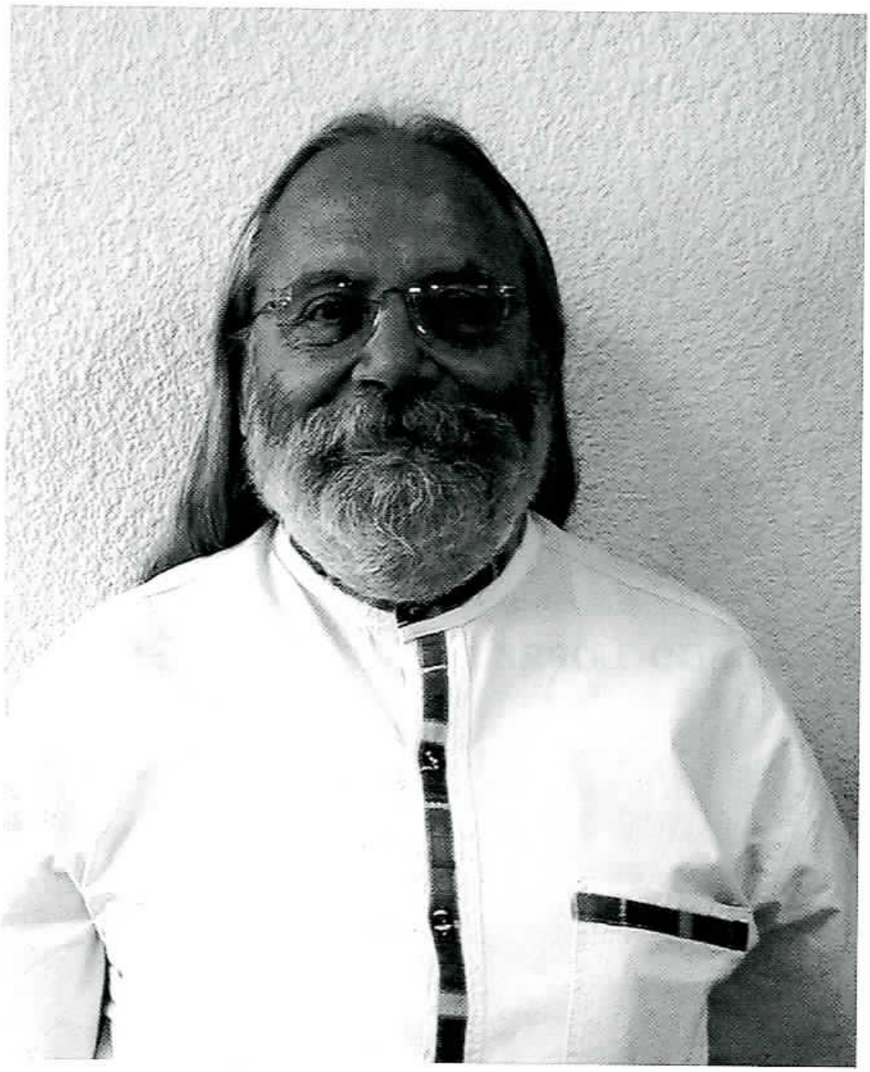
MATEMÁTICAS EN LA UNAM

MEMORIAS DEL 60 ANIVERSARIO DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Santiago López de Medrano Sánchez

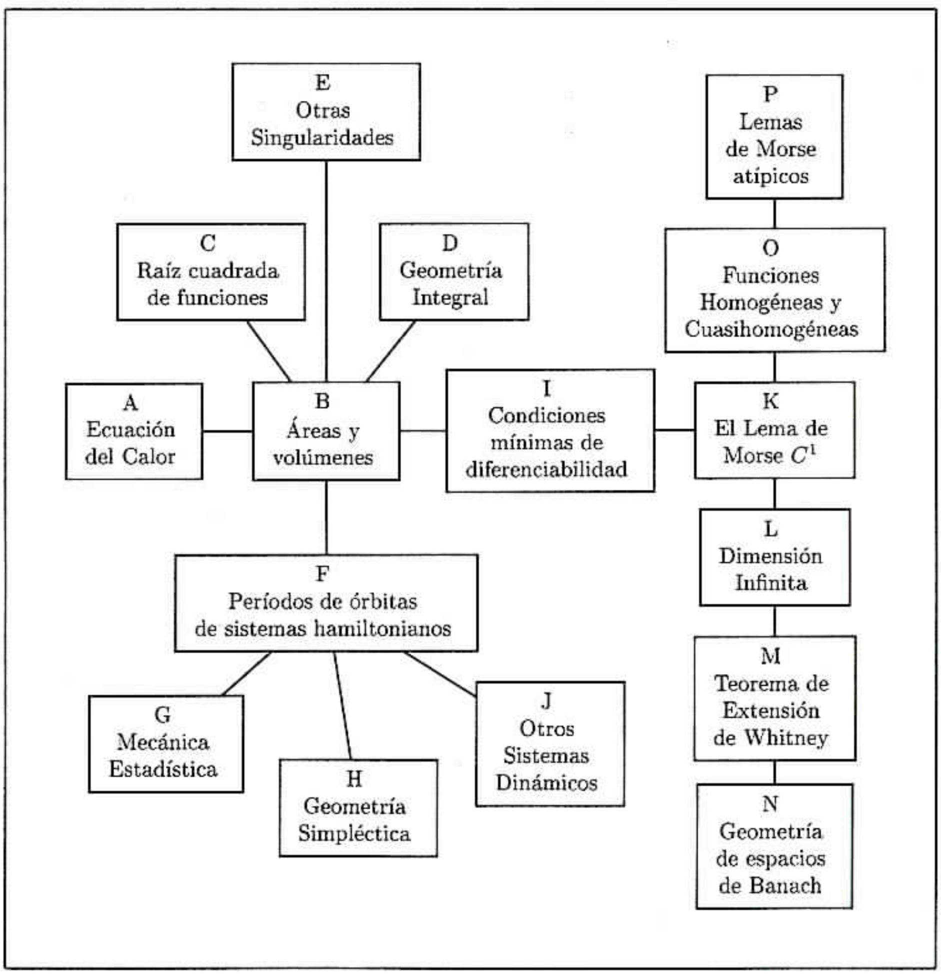


VARIACIONES SOBRE EL LEMA DE MORSE

SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO

Dada la importancia fundamental del jet cuadrático regular de orden 2, resulta de un gran interés toda nueva aportación a su conocimiento.

René Thom.



Variaciones sobre el Lema de Morse

Me da mucho gusto participar en esta celebración colectiva de los sesenta años del Instituto de Matemáticas, en especial, porque en este año también yo cumplo sesenta años, además de cumplir cuarenta de laborar en la UNAM y de estar vinculado al Instituto.

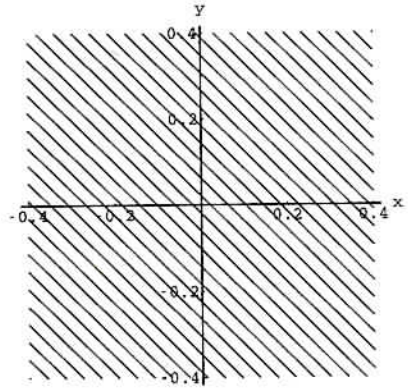
Un problema que se me presentó, sin embargo, fue el de decidir cuál tema abordar, dentro de los que he trabajado durante estos cuarenta años, no sabiendo si hablar de lo más reciente o de lo de hace 35 años, del que ha sido más citado o del más (injustamente) ignorado....[1] Finalmente me decidí por éste, porque es a través de él que he tenido mayor relación con muchas personas y con una gran variedad de temas diferentes de la Matemáticas.

Primero recordemos que dice el famoso Lema de Morse:

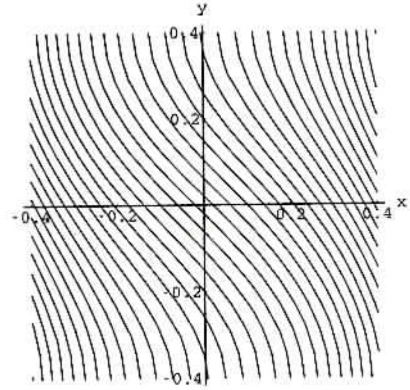
Si consideramos una función diferenciable de, digamos para empezar, dos variables, $f(x, y)$ y queremos conocer su comportamiento cerca del origen, conviene contemplar su desarrollo en serie:

$$f(x, y) = a_1x + b_1y + a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \cdots$$

(La parte constante a_0 no aporta mayor información y supondremos de una vez por todas que es cero). Lo primero que hay que considerar es la parte lineal $a_1x + b_1y$. Si esta parte no es nula (es decir, si alguno de sus coeficientes a_1, b_1 es distinto de cero), el Teorema de la Función Implícita nos asegura que el comportamiento de la función alrededor del origen es equivalente al de su parte lineal. Más precisamente, que existe un cambio de coordenadas diferenciable alrededor del origen tal que la función en términos de las nuevas coordenadas consiste únicamente de su parte lineal. Esto nos revela muchas características de la función cerca del origen. Por ejemplo: como para la parte lineal (que es no nula) las curvas de nivel son rectas paralelas, para la función completa las curvas de nivel serán curvas lisas que cerca del origen son casi paralelas; como la función lineal toma todos los valores cercanos a 0 en la vecindad del origen, la función completa hará lo mismo, y en particular, no puede tener un máximo o un mínimo relativo en el origen, etc. En las siguientes figuras vemos algunas las curvas de nivel de algunos ejemplos:



$x + y$



$x + y + 2x^3 - 2y^3$

[1] Para una descripción de los otros temas que consideré, ver el Apéndice I.

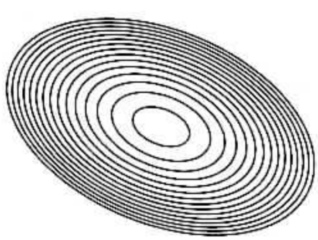
La situación se pone más interesante cuando la parte lineal se anula (es decir, cuando el origen es un punto crítico de la función) y la serie empieza con términos cuadráticos:

$$f(x,y) = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \cdots$$

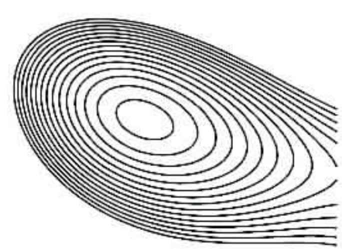
Aquí aumenta el número de posibilidades, ya que la parte cuadrática puede ser no sólo nula o no, sino también degenerada o no, definida o no, puede ser positiva, negativa o tomar todos los valores cercanos a 0, etc.

El lema de Morse nos dice que, cuando la forma cuadrática es no degenerada (o, equivalentemente, cuando su discriminante $b_2^2 - 4a_2c_2$ es distinto de 0), existe también un cambio de coordenadas diferenciable alrededor del origen tal que la función en términos de las nuevas coordenadas consiste únicamente de su parte cuadrática. Adicionalmente, la forma cuadrática se puede reducir mediante otro cambio de coordenadas (esta vez lineal) a alguna de tres formas simples: $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ o $-x^2 - y^2$ y es este resultado final el que se conoce como Lema de Morse.

Nuevamente ésto nos da una gran cantidad de información sobre el comportamiento de la función cerca del origen: si la forma es definida, las curvas de nivel consistirán del origen y de una familia de curvas cerradas que se parecen más y más a elipses cuanto más cerca estemos del origen (ya que para la parte cuadrática son exactamente elipses). El origen será un mínimo o un máximo relativo de la función dependiendo de si la forma cuadrática es positiva o negativa definida.

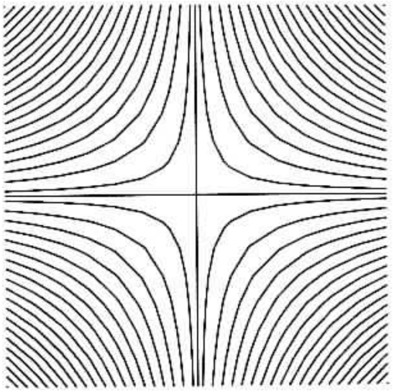


$x^2 + xy + 2y^2$

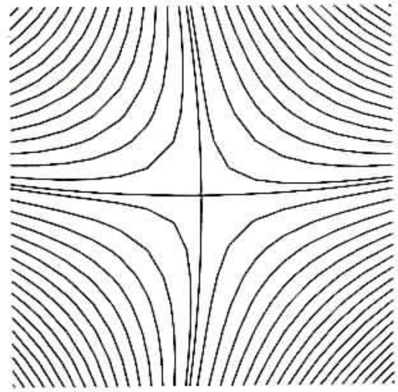


$x^2 + xy + 2y^2 - x^3 + y^3$

Por el contrario, si la forma cuadrática es indefinida, las curvas de nivel de la función consistirán de un par de curvas lisas que se cortan en el origen en un ángulo no nulo (nivel cero) y de parejas de curvas lisas que se parecen más y más a hipérbolas cuanto más cerca estemos del origen. En este caso el origen no es ni un máximo ni un mínimo relativos de la función, sino que ésta toma todos los valores cercanos a cero en la vecindad del origen, etc.



xy



$xy - x^3 + y^3$

El mismo resultado se tiene para funciones de más variables: si la parte lineal es nula entonces se considera la parte cuadrática de la serie y su discriminante (que es igual al determinante *hessiano* $\mathcal{H}f(x)$ de la función, a saber, el determinante de la matriz formada por las segundas derivadas parciales de la función en el punto). Si éste es no nulo (y en consecuencia la forma cuadrática es no degenerada) entonces el Lema de Morse nos asegura que la función es equivalente, bajo un cambio diferenciable de coordenadas, a su parte cuadrática (y adicionalmente, ésta se puede llevar a una forma diagonal, con sólo valores 1 y -1 en la diagonal).

De otro modo, para conocer las características cualitativas (y también para algunas cuantitativas, como veremos más adelante) de la función alrededor de un punto crítico, podemos ignorar todos los términos de orden superior al segundo (como lo haría un ingeniero que los tacha por ser "despreciables" con respecto a los de orden 2), *siempre y cuando los términos de orden 2 constituyan una forma cuadrática no degenerada.*

El Lema de Morse es entonces el enunciado riguroso y preciso que nos permite reducir una función en un punto crítico a su parte cuadrática cuando se cumplen ciertas condiciones. Aparece por primera vez en el Cálculo Global de Variaciones de Marston Morse, pero tiene consecuencias en muchas ramas del Análisis y la Geometría. De hecho, ha sido un compañero permanente en la mayor parte de mis trabajos matemáticos, pues juega un papel fundamental en la Topología Diferencial (Cobordismos y Cirugía), ha sido la inspiración de muchos otros resultados clasificatorios, es el primer paso de la Teoría de Singularidades y puede decirse que es el primer ejemplo del fenómeno de la *estabilidad estructural* que ha sido fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos.

Pero la historia sigue: cuando la parte cuadrática es degenerada ya no podemos asegurar que la parte cuadrática sea suficiente para conocer la función (simplemente, $x^2 + y^3$ y $x^2 + y^4$ son muy diferentes) y entonces es necesario tomar en cuenta los términos de tercer orden, y así sucesivamente. Sin embargo, este trabajo se puede simplificar a veces gracias a un resultado derivado del Lema de Morse que se conoce como *Lema de Separación.* En el caso que estamos viendo significa lo siguiente: si la parte cuadrática es degenerada, pero no completamente nula, entonces hay un cambio de variables diferenciable cerca del origen tal que la función en las nuevas coordenadas tiene la forma $\pm x^2 + \alpha(y)$, donde $\alpha(y)$ es una función únicamente de la variable y cuya serie de Taylor empieza con términos de orden 3 o más.

Para cualquier número de variables, este lema permite separar la función en una forma cuadrática no degenerada en una parte de las variables, y una parte que no involucra a ninguna de estas variables y cuya forma cuadrática es idénticamente nula. Este Lema se enunció por primera vez en un contexto de Geometría Diferencial y es un elemento fundamental de la Teoría de las Singularidades de funciones diferenciables, de la cual lo aquí descrito forma sólo los primeros balbuceos. El Lema de Separación también puede verse como un Lema de Morse para familias de funciones y como tal es fundamental en la Teoría de las Catástrofes Elementales de René Thom. Tanto el Lema de Morse como el de separación pueden deducirse de los teoremas de función inversa e implícita.

Con este antecedente, el lector podrá ya acompañarme en el recorrido esquematizado en el diagrama con el que se inicia este artículo.

A. Un problema sobre la ecuación del calor.

Todo empezó con una sencilla pregunta que me formuló Salvador Pérez Esteva y que se derivaba de un trabajo que venía realizando con J. R. Cannon ([C-PE]) sobre la situación siguiente: Tenemos una región acotada D con frontera suave en $\mathbb{R}^3$ a la que se aplica calor de manera homogénea en todo D, pero con una intensidad que varía con el tiempo dada por una función $f(t)$, definida para $t \geq 0$. Por la ecuación del calor, la temperatura en todo $\mathbb{R}^3$ y en todo tiempo $t > 0$ queda determinada por $f(t)$. Pero el problema se puede plantear al revés: si en un punto p exterior a D medimos la temperatura en todo tiempo $t \geq 0$, ¿podemos determinar la función $f(t)$ a partir de los resultados de esta medición? Trabajando en este problema, Cannon y Salvador descubrieron que era importante conocer el comportamiento de la función $a(r)$ definida como sigue: para cada $r > 0$, consideremos la intersección de D con la esfera de centro p y radio r. Entonces $a(r)$ se define como el área de esa intersección. Si llamamos $r_0 > 0$ a la distancia mínima de p a la cerradura de D, es claro que $a(r) = 0$ para $r < r_0$ y lo que se necesita es entender cómo empieza a crecer $a(r)$ en la vecindad de r_0.

B. Comportamiento asintótico de áreas y volúmenes.

Conviene simplificar la situación anterior suponiendo que cortamos la región D por secciones planas horizontales en lugar de esféricas y podemos pensar que la frontera de la región D está dada en la vecindad del punto inferior por una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces el área del corte de altura h coincide con el de la región plana $F(x, y) \leq h$. Podemos plantear el mismo problema en dimensión n:

Dada una función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ y $f(0) = 0$ y la función asociada $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$v(h) = \mu(f^{-1}[0, h])$$

(donde μ denota el volúmen en $\mathbb{R}^n$), estudiar las propiedades de la función $v(h)$ cerca de $h = 0$. Por ejemplo, si $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, entonces el conjunto $f \leq h$ es la bola de radio $\sqrt{h}$ y su volumen es $v(h) = \omega_n h^{n/2}$, donde ω_n denota el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. La derivada viene dada por $v'(h) = \frac{n}{2}\omega_n h^{\frac{n}{2}-1}$ que coincide con $\frac{1}{2}s_{n-1}h^{\frac{n}{2}-1}$, donde $s_{n-1} = n\omega_n$ denota la superficie de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, en este caso se tiene que $v(h)$ tiende a cero como la potencia $\frac{n}{2}$ de h y $v'(h)$ tiende a cero como la potencia $\frac{n}{2} - 1$ de h (multiplicadas por ciertas constantes).

Analizando este problema en general se llegó al siguiente resultado:

Teorema 1. (López-Pérez). *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave, propia, tal que $f \geq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces*

i) *$v(h)$ es de clase C^1 en el conjunto de valores regulares f, y allí su derivada viene dada por la fórmula*

$$v'(h) = \int_{f^{-1}(h)} \frac{1}{|\nabla f|}\, dS$$

ii) *Si $f^{-1}(0) = 0$, entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(h)}{h^{n/2}} = \frac{2^{n/2}\ \omega_n}{\sqrt{\mathcal{H}f(0)}}$$

iii) *Si $f^{-1}(0) = 0$ y 0 es una singularidad aislada de f, entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{v'(h)}{h^{(n/2)-1}} = \frac{2^{(n/2)-1}\ s_{n-1}}{\sqrt{\mathcal{H}f(0)}}.$$

La parte (i) puede demostrarse fácilmente utilizando resultados elementales de cálculo diferencial de varias variables (y resultó ser la muy conocida *fórmula de co-área*). En el caso no degenerado, las partes (ii) y (iii) se pueden demostrar utilizando el Lema de Morse, aunque la (ii) también puede demostrarse encerrando el conjunto $f \leq h$ entre elipsoides, con la ventaja de que este argumento sirve también en el caso degenerado $\mathcal{H}f(0) = 0$, donde el límite es $+\infty$.

Con estos resultados se pudo resolver el problema original: salvo en situaciones muy especiales (que no se presentan si, por ejemplo, el conjunto $\mathcal{D}$ es convexo), la función $a(r)$ es suave y creciente, con derivada positiva, en un intervalo $[r_0, r_0 + \delta)$. Esta información fue suficiente para resolver el problema original de la ecuación del calor. (Para más detalles sobre esta parte, ver el artículo [Ch-LdM] así como las referencias que ahí aparecen).

A pesar de que la motivación original estaba resuelta, nos parecía que el resultado era incompleto sin la prueba de la afirmación (iii) en el caso degenerado, aún cuando no se le viera aplicación posible. Esto resultó mucho más difícil y retrasó mucho la publicación del artículo. Había tres partes que resolver:

a) reducirlo al caso en que la parte cuadrática fuera 0.

b) el problema de entender el límite en la fórmula (1) ya que la comparación entre el límite del gradiente $|\nabla f|$ y el área de $f^{-1}(h)$ resulta bastante sutil.

c) comparar el área de la superficie $f^{-1}(h)$ con el área de un elipsoide encerrado por ella.

La parte a) salió aplicando el Lema de Separación. La parte b) se redujo al problema similar de decidir si la raíz cuadrada de $f(x)$ es de clase C^1, donde hay que entender el límite de $\nabla f/\ f^{1/2}$ cuando x tiende al origen. En el problema c) la desigualdad esperada no es tan inmediata como cuando se comparan los volúmenes encerrados por esas superficies. La solución (incisos C y D) nos la dieron algunos amigos y pudimos finalmente completar nuestro resultado.

C. Diferenciabilidad de la raíz cuadrada de una función no negativa.

Si $f(x)$ es una función diferenciable, $f(x) \geq 0$, ¿cuándo es diferenciable su raíz cuadrada? En los puntos donde f es positiva no hay ningún problema, pero donde es cero la respuesta no es clara. En una variable, si $f(x) = x^2$, su raíz cuadrada es $|x|$, que *no es diferenciable en* $x = 0$. En cambio, si $f(x) = x^4$, su raíz cuadrada es x^2 que es diferenciable en todas partes. Es fácil ver que para una función de orden n (necesariamente par) con $2 < n < \infty$, la raíz cuadrada es diferenciable, pero no es nada trivial demostrarlo para una función de orden ∞ en sus ceros (como las funciones "chipote" que se usan en análisis y geometría para, entre otras cosas, construir particiones de la unidad). A partir de estas consideraciones conjeturamos que la raíz cuadrada de f debería ser diferenciable en un punto donde se anula si, y sólo si, su segunda derivada se anula ahí (es decir, si su parte cuadrática es idénticamente nula). El amigo Jean Martinet nos indicó el camino para llegar a un teorema de G. Glaeser que dice exactamente eso:

Teorema 2. (Glaeser). *Si f es no-negativa, de clase C^2, $f^{1/2}$ es de clase C^1 si, y sólo si, su segunda derivada se anula en los ceros de f.*

La demostración se basa en resultados profundos de la teoría de funciones diferenciables ([G]) pero J. Dieudonné dió otra muy ingeniosa que sólo utiliza resultados básicos de Cálculo Diferencial ([D]). Por cierto que entre ambos demuestran que este resultado es el último de su especie, pues no se puede asegurar que la raíz cuadrada sea de clase C^2 ni aún suponiendo que f es C^∞ y que todas sus derivadas se anulan en sus ceros ([G]) y tampoco hay un resultado como el de Glaeser para raíces cúbicas, cuartas, etc. ([D]).

En la Universidad de Estrasburgo, Glaeser me contó la historia del resultado. Una vez que le estaba exponiendo, René Thom aseguró que la raíz cuadrada de una función C^∞ plana en sus ceros era C^∞. Cuando Glaeser le preguntó por qué eso era cierto, Thom le contestó que era obvio y continuó su exposición sin inmutarse. Esto es falso, como dijimos antes y a los pocos días Glaeser había encontrado el contraejemplo. En otra ocasión revisando un trabajo de Laurent Schwarz, encontró que éste había abordado el mismo problema: En una demostración necesitaba sacarle raíz cuadrada a unas particiones de la unidad y no podía asegurar que se obtuvieran funciones C^∞. ¿Cómo resolver esto? Muy fácil: volviendo al punto en que introdujo las particiones de la unidad, las elevó al cuadrado, y así ya estaban listas para que tuvieran raíz cuadrada cuando se ofreciera. "Dos genios, dos maneras diferentes de abordar el problema" concluyó Glaeser de su historia.

D. Geometría Integral.

Es claro que si tengo una hipersuperficie S cerrada convexa en $\mathbb{R}^n$ y otra S', también cerrada que la rodea, el área de S' es mayor que la de S. Pero, ¿cómo demostrarlo? Si S es una esfera, podemos pensar en proyectar radialmente S' sobre S y comparar las dos integrales que nos dan el área. Si S es un elipsoide (el caso que nos interesa en el inciso B) puede uno pensar en otro tipo de proyección más complicada, que quizá se pueda generalizar para cualquier superficie convexa... Sin embargo, Remy Langevin nos mostró una prueba muy elegante basada en un teorema de Geometría Integral:

Tomemos el caso $n = 3$. Consideremos el espacio de todas las rectas l en $\mathbb{R}^3$. Hay una forma natural de definir una medida dl en este espacio de tal manera que se cumpla lo siguiente:

i) Si A es una región de $\mathbb{R}^3$, consideremos para cada recta l la longitud $\operatorname{long}(l \cap A)$ de su intersección con A e integremos esta función sobre el espacio de todas las rectas l. El resultado nos da el valor del volumen de A multiplicado por 2π:

$$\int \operatorname{long}(l \cap A) dl = 2\pi \operatorname{vol}(A).$$

ii) Si S es una superficie en $\mathbb{R}^3$, consideremos para cada recta l la cardinalidad $\#(l \cap S)$ de su intersección con S e integremos esta función sobre el espacio de todas las rectas l. El resultado nos da el área de S multiplicada por π:

$$\int \#(l \cap S) dl = \pi \operatorname{área}(S).$$

Para la situación que estamos considerando el resultado (ii) nos resuelve clarísimamente el problema: para toda recta l de que intersecte a S' se tiene que $\#(l \cap S) \leq \#(l \cap S')$ por ser S convexa.

Estos resultados se generalizan para $\mathbb{R}^n$: se puede tomar en lugar de A o S una subvariedad de cualquier dimensión, en lugar de rectas, subespacios afines de una dimensión fija cualquiera, en lugar de los integrandos las medidas naturales correspondientes y en lugar de 2π y π constantes adecuadas. Todo esto está relacionado con problemas de Probabilidad Geométrica cuyos antecedentes se remontan al problema de la aguja de Buffon. Ver el libro [S] de Luis Santaló.

E. Otras singularidades.

El resultado (i) nos da una interpretación geométrica del hessiano de una función en un mínimo: es una medida de la rapidez con que empieza a crecer el volumen de la imagen inversa y puede entonces generalizarse para mínimos degenerados. Está relacionado con el determinante jacobiano del cambio de coordenadas que lleva la función a su forma normal.

El exponente de h resulta ser un invariante de la singularidad que también se puede generalizar para otros mínimos y nos proporciona un rasgo *cuantitativo* que permanece ante todo cambio de coordenadas diferenciable. Está relacionado con el que aparece en el Método de Fase Estacionaria y ha sido calculado para muchos tipos de mínimos degenerados por V. Vassiliev ([V]). En [LdM-PE] sugerimos una forma de extender este invariante para singularidades que no sean mínimos, pero esta idea todavía no ha sido desarrollada.

F. Períodos de órbitas de sistemas hamiltonianos con un grado de libertad.

Después del tiempo que nos llevó demostrar la parte (iii) del teorema, Salvador y yo decidimos descansar estudiando un tema totalmente diferente: Sistemas Hamiltonianos. Hasta que un día repentinamente me dí cuenta que seguíamos en lo mismo: Para una función de dos variables $H(q,p)$, el sistema hamiltoniano correspondiente

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

tiene como soluciones trayectorias que se mueven sobre las curvas de nivel de H (conservación de la energía). El campo vectorial hamiltoniano $X_H = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ es sólo el gradiente de H girado 90 grados, por lo que es de la misma magnitud. Por lo tanto, si H tiene un mínimo en el origen, en la integral que aparece en la parte (i) del Teorema podemos substituir $|\nabla f|$ por $|X_H|$. Pero como esta magnitud es la velocidad sistema, $1/|X_H|$ es su *lentitud* y se sigue que la integral representa el tiempo que tarda el sistema en recorrer la trayectoria cerrada de nivel h, o sea, el periodo de dicha trayectoria. Luego entonces se puede reformular la parte (iii) del teorema como:

Teorema 1(τ). *Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que $H \geq 0$, $H(0) = 0$ y 0 es una singularidad aislada de H. Sea $\tau(h)$ el período de la trayectoria cerrada de nivel h. Entonces*

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{H}H(0)}}$$

En particular, si 0 es un mínimo degenerado de H, entonces

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \infty.$$

Cabe decir que es fácil ver, a partir de estimaciones clásicas, que $\tau(h)$ toma valores arbitrariamente grandes en la vecindad de $h = 0$ por lo que este teorema sólo agrega la precisión de que efectivamente tiende a infinito. De todos modos, es un resultado nuevo sobre los sistemas hamiltonianos de un grado de libertad, los cuales han sido estudiados durante más de dos siglos.

Para sistemas hamiltonianos de más grados de libertad, la integral del Teorema 1 sólo representa una especie de *período promedio* de las trayectorias sobre la superficie de nivel h del hamiltoniano, por lo cual el Teorema 1 no nos dice nada sobre los posibles períodos de trayectorias particulares (veremos en el inciso H algo sobre estos). No obstante, E. Ghys nos ha sugerido explorar más el significado de este período promedio.

G. Mecánica Estadística.

Pero la integral del Teorema 1 tiene otra interpretación: Tomada sobre un subconjunto de la superficie de nivel nos representa su medida de Liouville, la cual es muy importante porque es una medida invariante. (De hecho, Diego Bricio Hernández nos había señalado mucho antes esto, pero aún así no nos hicimos conscientes de la relación entre nuestro trabajo y los sistemas hamiltonianos). La parte (iii) nos da un resultado sobre la medida de Liouville total de la superficie de nivel en la vecindad de un mínimo.

Pero la medida de Liouville $\Lambda(h)$ de la superficie de nivel completa de nivel h no pareciera tener mucho interés: este conjunto es invariante así que es obvio que su medida de Liouville (o cualquier otra) es invariante. Nueva sorpresa: Eduardo Piña nos refirió al libro de Khinchin sobre Mecánica Estadística ([Kh]). En este libro la función $\Lambda(h)$ (denotada ahí por Ω) es considerada la *función más importante asociada a un sistema mecánico* y llamada la *función de estructura* del sistema. Por cierto que Khinchin afirma que esta función crece con h desde cero hasta infinito, lo cual no es correcto. (Ya el traductor de [Kh], el famoso físico G. Gamow, lo sugiere en una nota). Hemos comentado con algunos físicos sobre todo esto, quienes lo consideran interesante, pero aún no sabemos si nuestro Teorema o nuestros contraejemplos a la afirmación de Khinchin pudieran ser relevantes en este contexto.

H. Geometría Simpléctica.

Marc Chaperon encontró otra demostración del Teorema 1τ bajo una hipótesis adicional. Después Marc y yo encontramos que esta demostración se podía utilizar para hacer cálculos sobre la *capacidad simpléctica* de las superficies de nivel del hamiltoniano con cualquier número de grados de libertad. (Esta capacidad es una especie de medida asociada a ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^{2n}$). Esto nos permitió demostrar (aunque sólo bajo condiciones adicionales restrictivas) que los períodos de todas las órbitas periódicas de nivel h tienden a infinito cuando h tiende a 0 ([Ch-LdM]). En el inciso J veremos cómo ha sido mejorado este resultado.

I. Condiciones mínimas de diferenciabilidad: El Lema de Separación C^2.

Una cuestión que se planteó a partir de una conversación con V. I. Arnold sobre el resultado (iii) fue la de las condiciones mínimas de diferenciabilidad de la función f para su validez. (Los demás incisos sólo requieren que la función sea de clase C^1 y que tenga segunda derivada en el origen). Ya que el Teorema de Glaeser sólo requería que la función fuera de clase C^2, se necesitaba analizar si el Lema de Separación era válido para funciones de esta clase, lo cual no era abordado en ninguna de las versiones publicadas. Con base en un artículo de

N. Kuiper sobre el Lema de Morse C^2 (que me proporcionó Carlos Ibarra cuando yo estaba de año sabático en la UAM Iztapalapa) pude finalmente encontrar una demostración más simple del resultado de Kuiper y la versión C^2 del Lema de Separación. Con esto quedó demostrado que los Teoremas 1 y 1τ son válidos para funciones de clase C^2. Ver [LdM] y [LdM-PE2]. También obtuve las versiones C^r, $r \geq 2$, del lema de Separación, las cuales resultaron ser las mejores posibles en cierto sentido; lo cual no resultó ser cierto para el Lema de Morse C^2 como veremos en el inciso K.

J. Otros Sistemas Dinámicos.

Cuando el entonces estudiante de licenciatura Rafael Herrera me exponía su tesis de licenciatura (dirigida por Miguel Lara) que incluía una sección sobre sistemas hamiltonianos, aproveché la ocasión para lanzarle el problema de demostrar el Teorema 1τ. ¡Cuál no sería mi sorpresa cuando, a la siguiente sesión, no sólo me traía una demostración original, sino que además su demostración era válida para sistemas más generales!

Teorema 3. (R. Herrera). *Sea X un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que X es continuo y que tiene derivada en el origen, la cual es singular. Si γ_i es una sucesión de órbitas periódicas de X (de período τ_i) que rodean al origen y que tienden a él, entonces*

$$\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty.$$

La demostración utilizaba sólo desigualdades bien conocidas de la teoría de ecuaciones diferenciales. En particular, Rafael dio no sólo una nueva demostración del Teorema 1τ, sino una versión mejor incluso que la del inciso I: *El Teorema 1τ es válido si H es de clase C^1 y tiene segunda derivada en el origen, que es singular.* Adicionalmente, por la equivalencia entre los dos problemas, quedó demostrado que el Teorema 1 es válido, cuando $n = 2$, si f es de clase C^1 y tiene segunda derivada en el origen. Falta ver si esto es también cierto para $n > 2$: El Teorema de Glaeser es probablemente cierto para funciones que cumplen estas hipótesis, pero el Lema de Separación definitivamente no.

Recientemente Edgar y Rafael Herrera mejoraron también los resultados en dimensión mayor que dos, que mencionamos en el inciso H (Ver [HH]).

K. El Lema de Morse C^1.

Para estar seguro de mi demostración del Lema de Separación C^2, la expuse en la UAM-I a varios expertos, los cuales me dieron su aprobación. Pero Shirley Bromberg me dio algo mucho mejor: el Lema de Morse C^1, el cual establece las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea equivalente a su parte cuadrática:

Lema 1. (de Morse C^1). *Si $f : R^n \to R$ es de clase C^1, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) *f es singular en el origen, y tiene ahí una segunda derivada que es no-degenerada.*
(ii) *f es equivalente a su parte cuadrática, bajo un cambio de variables de clase C^1.*

Este resultado es realmente asombroso: Las versiones usuales requieren que la función sea de clase C^3, para poder concluir la equivalencia C^1(ver, por ejemplo, el Lang de Análisis). La versión más refinada de Kuiper (también demostrada por Ostrowski) requiere que la función sea de clase C^2. En el Lema de Morse C^1 sólo se requiere que la función sea de clase C^1 y que su segunda derivada exista únicamente en el origen. Además se acaba con el problema al establecer que esta condición es necesaria. En otras palabras, establece que las condiciones necesarias para poder *enunciar* el Lema de Morse, son suficientes para su validez. Además, su demostración no puede ser más elemental (en esto también es superior a las versiones precedentes) ya que sólo utiliza el concepto de segunda derivada (que debe entenderse en el sentido fuerte: por la misma equivalencia el resultado no es cierto si sólo se supone la existencia de las segundas parciales) y algunas de sus propiedades elementales (aunque no todas bien conocidas, salvo para Shirley), además de algunos de mis argumentos para el Lema de Separación C^2. Realmente podría (¿debería?) verse en todo curso de Cálculo al momento de ver máximos y mínimos de funciones de varias variables.

Con esto se inició una productiva colaboración con Shirley que dura hasta la fecha. Para empezar, demostramos la forma definitiva del Lema de Morse C^r: las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia C^r son que la función sea de clase C^r, que la primera derivada se anule y la segunda sea no degenerada y que exista la derivada de orden $r+1$ únicamente en el origen. Además dimos ejemplos para demostrar que no puede existir una versión tan nítida del Lema de Separación C^r. Ver [B-LdM1].

L. El Lema de Morse C^r y el Lema de Separación C^1 en dimensión infinita.

Una desaveniencia con el *referee* nos forzó a *completar* nuestro artículo generalizándolo a funciones definidas en el espacio de Hilbert. No fue difícil extender la demostración a esta situación, pero el artículo perdió buena parte de su frescura y el Lema de Morse C^1 para $\mathbb{R}^n$ quedó injustamente opacado dentro de tal generalidad. A cambio de esto recibimos una carta de René Thom en la cual valora nuestros resultados y de la cual tomé la cita con la que empieza este artículo.

De todos modos obtuvimos un Lema de Morse en el espacio de Hilbert que mejora las versiones publicadas. Sólo una de éstas incluye un resultado equivalente, pero con una formulación muy confusa. Para el Lema de Separación pudimos obtener también una versión en dimensión infinita, pero sólo bajo la hipótesis de que al menos uno de los dos espacios de variables en que se descompone la función sea de dimensión finita y conjeturamos un teorema de extensión tipo Whitney que sólo mucho después demostramos y esto sólo para clase C^1(inciso M).

Con esto pudimos demostrar finalmente una versión del Lema de Separación donde se supone que la función es de clase C^2 y se concluye la existencia de un cambio de variable C^1 que realiza la separación de variables. Esta versión es más fuerte que cualquiera de las que han sido publicadas. Por ejemplo, en el libro de Chang sobre Teoría de Morse en dimensión infinita ([Ch]) aparece una versión del Lema de Separación con las mismas hipótesis que el nuestro, pero en el cual la conclusión es únicamente un cambio de variables C^0. Hasta el momento no conocemos ninguna aplicación de nuestros resultados en dimensión infinita a problemas de Análisis o Geometría que no pueda obtenerse con los resultados anteriores.

M. El Teorema de Extensión de Whitney.

Supongamos que nos dan una función continua definida en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ así como otras funciones definidas en K que son los candidatos a ser las derivadas de orden 1 a r de la función (un *jet* de orden r). El teorema de Whitney establece las condiciones para que se pueda extender la función a un conjunto abierto de modo tal que sea de clase C^r y sus derivadas hasta el orden r sean las otras funciones dadas. Estas condiciones consisten en que se cumplan en K las fórmulas de Taylor que uno esperaría. La demostración de este teorema es bastante larga y delicada.

Es bien sabido que el Teorema de Extensión de Whitney no es válido en general en espacios de dimensión infinita. No obstante, la versión que nos planteamos era muy particular: el conjunto K sería simplemente un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach, y en consecuencia sólo es necesario especificar las derivadas en la dirección complementaria. Por cierto, Marc Chaperon llegó independientemente a plantear el mismo problema a partir de sus trabajos sobre variedades estables.

Recientemente ([B-LdM3]) fue que pudimos demostrar la versión C^1 de este Teorema de Extensión, utilizando particiones de la unidad en el espacio complementario (que se supone de Hilbert) y ciertas hipótesis sobre el subespacio mismo, cuya mejor formulación nos llevó a estudiar un poco de geometría de espacios de Banach.

N. Geometría de los Espacios de Banach.

Los espacios de Banach en los que podemos realizar la demostración del teorema anterior deben cumplir una condición, que es ser en cierto sentido un límite de espacios de dimensión finita (Bertha Gamboa nos ayudó a encontrar información sobre ellos). Adicionalmente necesitábamos suponer la existencia de ciertas constantes engorrosas. Los intentos de aclarar ese aspecto nos fueron llevando a las siguientes consideraciones:

Dados dos espacios de Banach de dimensión finita n, podemos preguntarnos cuál es el isomorfismo lineal entre ellos más cercano a una isometría. Esto nos llevó a definir una distancia en el conjunto de tales espacios y algunas consideraciones geométricas elementales nos llevaron a una conjetura sobre el diámetro de este espacio. Estudiando la literatura encontramos que todo esto ya era conocido y portaba nombres muy pesados: nuestra distancia resultó ser la *métrica de Banach-Mazur* y nuestra conjetura resultó ser un teorema demostrado por Fritz John.

De todos modos aprendimos muchas cosas y el Teorema de John nos permitió una formulacion muy compacta de nuestro teorema de extensión.

O. Generalizaciones del Lema de Morse a funciones homogéneas y cuasi-homogéneas.

Otra dirección en la que trabajamos fue la de encontrar versiones C^r para otros tipos de teoremas sobre singularidades que generalizan el Lema de Morse. Por ejemplo, cuando la parte cuadrática de una función se anula en un punto crítico, se puede uno preguntar si la parte de grado 3, suponiendo que no sea degenerada, es *suficiente* para conocer el tipo de la función. La respuesta es positiva para funciones de dos variables, pero los teoremas de clasificación de Arnold nos muestran que no lo es para un mayor número de variables. Existen también teoremas de Kuiper sobre *suficiencia* C^r de formas homogéneas. En ([B-LdM2]) pudimos demostrar otro teorema de C^r suficiencia de formas homogéneas y cuasi-homogéneas. Esperamos que este tipo de resultados puedan llevarnos a teoremas de clasificación C^r de singularidades, análogos a los de Arnold pero menos complicados. El trabajo de tesis de Luis Hernández de la Cruz quizá nos permita aclara más esta situación.

P. Lemas de Morse atípicos.

Al revisar las demostraciones de nuestros teoremas de suficiencia C^r notamos que funcionan bajo hipótesis muy generales. En particular, para la suficiencia de las formas cuasihomogéneas no se requiere la hipótesis de que éstas sean polinomios, sino que pueden ser funciones cuasi-homogéneas arbitrarias.

Un caso particular resulta llamativo. Consideremos, por ejemplo la función

$$Q(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Es decir, el típico ejemplo de una función que es de clase C^1, tiene segundas derivadas direccionales en el origen, pero no tiene segunda derivada allí. (Pero este tipo de funciones no son sólo contraejemplos de los profesores y de las profesoras de Cálculo: han sido estudiadas por Bierstone y Kuo y aparecen naturalmente en algunos problemas de teoría de bifurcación que estoy estudiando junto con Marc Chaperon y Lino Samaniego).

A esta función no se le puede aplicar el Lema de Morse C^1 o, más bien dicho, se le puede aplicar sólo en sentido negativo: como no tiene segunda derivada en el origen no puede ser C^1 equivalente a x^2+y^2. Pero en cambio, esta función *tiene su propio Lema de Morse*: si consideramos una función de la forma $f(x,y) = Q(x,y) +$ términos de orden 3 o más, resulta que $f(x,y)$ es C^r equivalente a su parte de orden 2 que es $Q(x,y)$ (el valor de r dependerá del orden de los términos adicionales). Obtenemos así una infinidad de Lemas de Morse *atípicos*: uno para cada función homogénea de grado 2 no degenerada. (Al decir esto me doy cuenta de que también hay *Teoremas de la Función Implícita atípicos* en los cuales se puede concluir que una función es equivalente a su parte de orden 1, aunque ésta no sea lineal y por lo tanto no C^1, idea que valdría la pena explorar).

Con este desfile de infinidad de Lemas de Morse, uno para cada ocasión y gusto, concluyo esta plática, agradeciéndoles que me hayan acompañado en este largo paseo, el cual nos ha mostrado (si ustedes quieren en pequeña escala) una vez más la inquebrantable unidad de las Matemáticas.

Referencias

[B-LdM1] Bromberg, S. y López de Medrano, S., *Sur le Lemme de Morse et le Lemme de Séparation dans l'Espace de Hilbert,* C.R. Acad. Sci. Ser. I, Paris, **316** (1993), 909–912.

[B-LdM2] Bromberg, S. y López de Medrano, S., S. *C^r-Sufficiency of Quasihomogeneous Functions, Real and Complex Singularities*, W. Marar, ed. Pitman, 1995, 179–188.

[B-LdM3] Bromberg, S. y López de Medrano, S., *Un théorème de prolongement et le lemme de séparation de classe C^1 dans l'espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Ser. I, Paris, **332** (2000), 533–536.

[C-PE] Cannon, J.R. y Pérez Esteva, S., *Some stability estimates for a heat source in terms of overspecified data in the 3-D heat equation*, J. Math. Anal. Appl., **147** (1990), 495–505.

[Ch] Chang, K.C., *Infinite dimensional morse theory and multiple solution problems*, Birkhauser, Boston, 1993.

[Ch-LdM] Chaperon, M. y López de Medrano, S., *Áreas, volúmenes y períodos de órbitas*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 16, 1995, 79–95.

[D] Dieudonné, J., *Sur un théorème de Glaeser*, Journal d'Analyse Mathématique XXIII, 1970.

[G] Glaeser, G., *Racine carrée d'une fonction différentiable*, Ann. Inst. Fourier, **13,2** (1963), 203–210.

[H1] Herrera, R., *Teoría de los Osciladores y algunas de sus aplicaciones*, Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, X, **88** (1994).

[H2] Herrera, R., *Acerca de los períodos de las órbitas de un centro no lineal*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 16, 1995.

[HH] Herrera, E. y Herrera, R., *A note on the relation between period and energy of periodic orbits near equilibrium points*, Publicación preliminar, INRS-ETE Quebec y Universidad de Princeton, 2003.

[Kh] Khinchin, A.I., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Dover Publications, 1949.

[LdM] López de Medrano, S., *A splitting lemma for C^r functions*, $r \geq 2$, Singularity Theory, Proceeding of the College on Singularities, ICTP, Trieste, World Scientific, 1995, 444–450.

[LdM-PE1] López de Medrano, S. y Pérez Esteva, S., *An Inverse Problem, Area, and Morse Theory*, J. Math. Anal. Appl., **157** (1991), 444–450.

[LdM-PE2] López de Medrano, S. y Pérez Esteva, S., *Asymptotic Properties of C^2 Functions Near an Isolated Minimum and Applications to Hamiltonian Systems*, Singularity Theory, Proceeding of the College on Singularities, ICTP, Trieste, World Scientific, 1995, 451–457.

[S] Santaló, L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **1** (1976), ed. Addison-Wesley.

[V] Vasil'ev, V.A., *Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram and the classification of minimal points*, Functional Analysis and its Applications, **11** (1977),163–172.

Apéndice

En este apéndice quiero mencionar otros trabajos de investigación realizados en estos 40 años, sobre todo para incorporar en esta celebración a los colegas con los que he colaborado:

Trabajos de Topología Diferencial (1965-1972), en los que conté con el apoyo de William Browder, Francisco González Acuña y Elmar Winkelnkemper.

Trabajos sobre Teoría de Singularidades y Catástrofes (1974 a la fecha), junto con León Kushner, Radmila Bulajich, Guillermo Pulido, José Antonio Gómez, Francisco Struck y Ana Guzmán.

Trabajos sobre variedades reales y complejas que aparecen en ciertos sistemas dinámicos (1984 a la fecha), en colaboración con Alberto Verjovsky, los cuales han sido continuados en las tesis de nuestros alumnos Laurent Meersseman y Vinicio Gómez y en el trabajo de otros investigadores.

Trabajo sobre iteración de transformaciones cuadráticas del plano (1986 a 1987), junto con Guillermo Gómez, que ha sido continuado por Guillermo Sienra y Jefferson King.

Trabajos sobre la Teoría de Estabilidad de E.C. Zeeman (1987 a 1988) junto con Marc Chaperon, Charlotte Watts y el propio Zeeman, continuados en la tesis de Oscar Palmas.

Trabajos sobre modelos matemáticos en Biología (1988 a la fecha), junto con Beatriz Fuentes, Miguel Lara y otros colaboradores. Este trabajo ha cobrado nuevo impulso recientemente con la incorporación de Ana Guzmán.

Trabajos sobre variedades mínimas (1997 a la fecha) en colaboración con Hugo Jiménez y otros miembros del Laboratorio de Visualización Matemática de la Facultad de Ciencias.