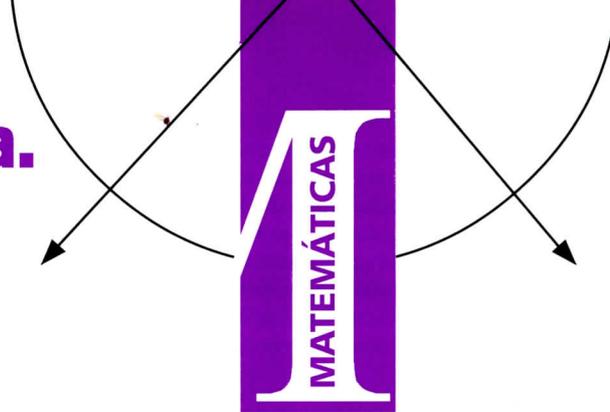


Topología y Geometría. Las Matemáticas de Santiago López de Medrano



E. Javier Elizondo¹
Instituto de Matemáticas UNAM
javier@math.unam.mx

Introducción

Transcurría el año de 1975, acababa de ingresar a la carrera de matemáticas, recuerdo que me encontraba en el auditorio de la vieja Facultad de Ciencias cuando una persona a mi lado señaló a un profesor que se encontraba a unos cuantos metros de mí, estaba sentado en las escaleras y usaba un saco poco formal, con la mano izquierda tomaba discretamente de la bolsa del saco un poco de pan que comía como refrigerio en las largas discusiones que se llevaban a cabo. Un poco después, encendía un cigarro que había sacado de un paquete de su bolsa. Me quedé sorprendido cuando la persona que lo había señalado me comentó que su nombre era Santiago y que era premio de la Academia de Ciencias. Tardé varios semestres más en conocerlo personalmente.

Santiago es uno de los matemáticos de mayor influencia que México ha tenido. Todos aquéllos que hemos tenido la oportunidad de haber tomado un curso, o haber conversado un poco de matemáticas con él, nos damos cuenta de la profundidad de su pensamiento matemático.

Como podrá comprender el lector, la tarea de explicar el trabajo de Santiago en unas pocas líneas es imposible sin cometer imprecisiones. Espero que el lector pueda perdonarlas.

Primeros años

Santiago López de Medrano Sánchez nació en la ciudad de México el 15 de Octubre de 1942. En la secundaria empieza su atracción por las matemáticas. Fue en este periodo cuando él mostró algunas aptitudes para esta ciencia. En una ocasión uno de sus maestros de matemáticas planteó una afirmación en clase, fue Santiago el único en darse cuenta que ésta era falsa. Por supuesto que el maestro se resistió a reconocer que el alumno tenía razón, hasta que después de un tiempo tratando de probar en el pizarrón su afirmación, tuvo que aceptar que su alumno estaba en lo correcto.

Los años de la preparatoria

Es en la preparatoria donde recibe en forma definitiva las influencias que lo llevarían a estudiar matemáticas. Por un lado, las con-

¹ Agradezco a los editores de la carta informativa por la invitación a escribir esta breve reseña, y a Santiago por el tiempo dedicado a explicarme algunos de sus teoremas.

versaciones con el orientador vocacional (de los pocos buenos que puede haber, ya que casi todos desorientan), y de un compañero brillante que charlaba de matemáticas con él. Este compañero preparatorio, Peter Solt Salgo, le recomendó leer el libro de Birkhoff-MacLane. Fueron estas conversaciones una de las causas que consolidaron la idea de estudiar matemáticas. Sin embargo había una pequeña dificultad, sus padres. Como sucede con muchos de nosotros que decidimos estudiar matemáticas, la objeción que surge de parte de los familiares es el cuestionamiento de si las matemáticas nos permitirán ganar suficiente dinero como para garantizarnos tener una vida cómoda. La misma pregunta surge de parte de nuestros padres cuando uno quiere estudiar música, filosofía o cualquier carrera que se considere “sin futuro”. Así que Santiago, con la ayuda de su madre en la negociación familiar, ingresa en 1960 a la Facultad de Ciencias a estudiar dos carreras simultáneas, matemáticas y física experimental, ésta última tenía la virtud “de que aprendería electrónica, misma que le daría conocimientos prácticos” que le permitirían obtener un “buen trabajo”.

Los años de la licenciatura

Durante el primer año de la licenciatura en matemáticas, tomó cursos con maestros que han dejado historia y una tradición ejemplar en la Facultad de Ciencias y en las matemáticas de México. Los maestros de mayor influencia durante este primer año fueron Emilio Lluís Riera y Guillermo Torres Díaz. Santiago llevó a buen término su primer año en ambas carreras.

En el segundo año, además de los cursos formales, tomó el curso Historia de las Matemáticas con Dirk J. Struick, y participó en el seminario de álgebra lineal con Emilio Lluís, basado en el libro de Gelfand.

El tercer año de la carrera es determinante en el futuro de Santiago. Cursa Variable Compleja con Guillermo Torres y Análisis con Humberto Cárdenas, este último curso basado en el libro de Dieudonné. Durante el verano, Norman Steenrod ofrece en el Instituto de Matemáticas un curso introductorio sobre homología de complejos CW. Santiago y sus compañeros más cercanos, Francisco González Acuña (Fico) y Elmar Winkelkemper deciden tomar este curso. Santiago toma la tarea de escribir las notas del curso. Al terminar asiste a un curso de Topología Algebraica dictado por Roberto Vázquez. Fue en este momento que Santiago decide abandonar la carrera de física y se dedica exclusivamente a las matemáticas.

En el último año de la carrera se consolida su formación a nivel licenciatura. Lleva dos seminarios: uno de Topología Diferencial, basado en las notas de Milnor; otro de Haces Fibrados, basado en el libro de Steenrod. Además de las materias requeridas: Historia de

las Matemáticas con Alberto Barajas, Lógica con Gonzalo Zubieta y Ecuaciones Diferenciales con Juan Morcos. Empieza a escribir su tesis bajo la dirección del doctor Vázquez sobre los teoremas de Hurewicz y de Whitehead. Dedicar un tiempo para aprender fibraciones de Serre y sucesiones espectrales, herramienta indispensable para los cálculos que aparecen en Topología Algebraica, material nada elemental para un estudiante de licenciatura.

Finalmente se recibe en el año de 1964, año en que parte al extranjero a realizar sus estudios de posgrado.

El doctorado en Princeton

Santiago llega a Princeton en 1964. Durante los dos primeros años asiste a diversos cursos. Algunos de sus profesores en esa época fueron W. Browder, N. Steenrod, R. Abraham, J. Stallings, J. Milnor, J. Moore y A. Haefliger.

Con Bill Browder estudia Teoría de Cirugía de Browder y Livesay. Él, junto con sus compañeros Ralph Reid, David Stone y Dennis Sullivan se proponen escribir unas notas del curso, proyecto que nunca llegó a realizarse. Fue el propio Browder quien, años después, escribió un libro sobre el tema.

En 1966 presenta los exámenes orales que le permiten obtener la maestría. Después de esto es el momento de buscar un tema y un asesor de doctorado. En 1967 conversa con Bill Browder, quien le propone como proyecto de tesis realizar el invariante de Browder-Livesay.

Este invariante está asociado al estudio de estructuras exóticas en ciertas variedades. Hasta el momento no se conocía ningún ejemplo en el cual este invariante no fuera trivial. Santiago decide tomar el proyecto en sus manos.

Los antecedentes al problema empiezan con el trabajo de John Milnor en un artículo publicado en la revista *Annals of Mathematics* (ver [6]), este trabajo revolucionó la topología diferencial de ese entonces. Milnor demostró que la esfera de dimensión siete admite diferentes estructuras diferenciales. En otras palabras, hay variedades que son topológicamente equivalentes a la esfera de dimensión siete, pero no son difeomorfas. A estas variedades se les llaman esferas exóticas. Posteriormente, en 1963, Milnor generalizó el resultado para todas las esferas de dimensión $4k + 3$. En 1963 Stephen Smale demuestra la conjetura de Poincaré para dimensiones mayores que cuatro, y nuevamente Milnor, junto con Kervaire, nos regalan un artículo de importancia sobre el estudio del grupo de las clases de difeomorfismo de estructuras diferenciables en las esferas S^n , debiera mencionar que en este artículo se utiliza el método de cirugía sugerido por René Thom. Por último, debemos mencionar el trabajo hecho por Novikov y Browder, quienes generalizan el trabajo de Milnor y Kervaire a variedades simplemente conexas.

El índice de Browder-Livesay nos permitía pasar a estudiar ejemplos de variedades que no fueran simplemente conexas. En ese momento sólo se conocían casos triviales, es decir cuando este índice es cero. El trabajo de tesis de Santiago consistió en dar toda una familia de casos donde este índice era distinto de cero y que además admitían estructuras exóticas. Más precisamente, demostró que había una infinidad de involuciones diferentes en la esfera de dimensión $4n + 3$, con la propiedad de que no había puntos fijos. Las involuciones dadas no eran diferenciablemente equivalentes a la antípoda. Esto implica que hay una infinidad de variedades homotópicas al espacio proyectivo real de dimensión n , que no son difeomorfas entre sí. Informalmente, podríamos decir que en el espacio proyectivo real hay una infinidad de estructuras diferenciables, mientras que en las esferas hay un número finito. Esto apareció publicado en el Boletín de la Sociedad Matemática Americana, véase [1].

Éste junto con otros resultados posteriores sobre el tema, fueron publicados en un libro de la prestigiada editorial Springer-Verlag, véase [2].

El regreso a México

Santiago regresa a México en el año de 1968, justamente después de la masacre del 2 de Octubre. Inmediatamente se incorpora al Instituto de Matemáticas y a su trabajo como investigador y profesor en la Facultad de Ciencias. Desde ese entonces ha impartido cursos en forma continua, y muy pocas veces ha suspendido su labor docente. No creo exagerar al afirmar que una gran mayoría de los matemáticos activos en el presente han cursado alguna materia con Santiago. Indudablemente él ha sido un factor importante en la formación de muchos matemáticos del presente y lo es de muchos futuros matemáticos. Cabe mencionar que en 1969 fue electo presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, cargo que desempeñó hasta el año 1973.

Desde el punto de vista de la investigación, Santiago empieza en México a trabajar sobre el problema de encontrar nudos invariantes para involuciones, sin puntos fijos, de esferas de dimensión $4k$, con k mayor que uno. La situación en el resto de los casos es clara ya que el invariante de Browder-Livesay nos da la respuesta al problema. Uno de los resultados principales que obtiene, consiste en probar que para una involución dada en una esfera de dimensión $4k$, ésta admite un nudo invariante simple. Santiago presentó este trabajo en el congreso internacional de matemáticas, que se realizó en la ciudad de Niza, Francia en 1970.

Debo mencionar que uno puede presentar un trabajo en el congreso sólo por invitación, esto nos da una indicación del reconocimiento que tuvo a nivel internacional el trabajo de Santiago, y él es el único matemático mexicano que ha tenido este privilegio.

Es el momento de comentarles una anécdota que escuché de su propia voz. Al final de la conferencia en el congreso de Niza, cuando todavía se encontraba conversando con algunos de los asistentes a su charla, Bill Browder, su asesor de doctorado, empezó a bajar las escaleras del auditorio con pasos grandes y ruidosos, al tiempo que decía: "That's bullshit, that's bullshit!". Santiago empezó a explicarle con calma lo que había expuesto en su conferencia. Bill Browder lo escuchó con atención, y al darse cuenta de la certeza de los argumentos, empezó a decir mientras se retiraba: "you son of a bitch, you son of a bitch". Conclusión, con el "padre" uno nunca puede estar tranquilo.

En la segunda conferencia sobre grupos de transformaciones, realizada en 1971 en la ciudad de Amherst, Massachusetts, Estados Unidos, Santiago discute el problema de clasificar automorfismos de variedades cerradas por cobordismo. Recordemos que dos variedades son cobordantes si hay una variedad compacta cuya frontera consista de las dos variedades dadas. Bill Browder sugirió extender esta definición al caso de variedades con automorfismos. En su artículo, Santiago define un invariante, la estructura isométrica, y conjetura que éste determina la clase de cobordismo para automorfismos de ciertas variedades. Ahí mismo, prueba que la conjetura es cierta para algunos casos. M. Kreck probó posteriormente que el invariante de Santiago, junto con los invariantes clásicos de cobordismo, dan la respuesta definitiva.

Teoría de catástrofes

A principios de los setentas, René Thom propuso una teoría de catástrofes que atrajo la atención de muchos matemáticos, y también de muchos que no eran matemáticos. Esta teoría, se pensaba, podría

ser utilizada para modelar diversos fenómenos, entre ellos los sociales y estaba muy relacionada con la teoría de singularidades y sistemas dinámicos. Santiago es uno de los matemáticos que se ve envuelto en esta propuesta. Así, empieza a estudiar esta teoría y se involucra con la Teoría de Singularidades y Sistemas Dinámicos. Varios estudiantes de aquella época escribieron sus tesis sobre este tema. Algunos de ellos, así como otros de generaciones posteriores, realizaron sus tesis doctorales en el extranjero con algunos de los expertos en el área.

Santiago impartió por primera vez el curso de Teoría de Singularidades en la Facultad, y dio origen a unas excelentes notas escritas en colaboración con Radmila Bulajich que fueron publicadas por el departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y por Aportaciones Matemáticas.

Como consecuencia de todo este trabajo, surge el grupo de singularidades que ha producido diversos artículos durante su trayecto.

Además, estos años de estudio tuvieron diferentes frutos en años posteriores: trabajos de Biomatemáticas, la solución de un problema de E.C. Zeeman y toda una línea de trabajo en torno al Lema de Morse, de lo cual hablaremos más tarde.

La enseñanza

Durante estos años, Santiago se involucra con el problema de la enseñanza en matemáticas. El surgimiento de los Colegios de Ciencias y Humanidades de la UNAM, los CCH's, abre la esperanza de una enseñanza nueva, la idea era convertir al estudiante en un sujeto activo en el aprendizaje del conocimiento. Santiago es invitado a participar y acepta el compromiso de asesorar a profesores de matemáticas. Es él quien desarrolla los programas de matemáticas y escribe diversos folletos que son distribuidos entre los profesores y estudiantes. La utilidad de esos folletos ha sido de tal importancia que en la actualidad son utilizados por los nuevos profesores de las preparatorias del DF. En la Facultad, Santiago impartió seminarios de enseñanza de las matemáticas, y los profesores de los CCH's asistían a estos seminarios que formaban parte del programa de la carrera de matemáticas. Es una pena que la universidad, por diversos intereses políticos, no haya sostenido esta dinámica de participación de los profesores y estudiantes en los planteles de los CCH's.

Cuádricas y el regreso a la topología diferencial

A partir del año de 1983 se organizó en el Instituto de Matemáticas un seminario de sistemas dinámicos, en ese entonces habían regresado varios estudiantes de su doctorado, y varios de ellos trabajan en este área. Algunos problemas de investigación surgieron de aquel seminario.

En ese entonces yo era estudiante y becario del Instituto de Matemáticas. En una tarde soleada, me encontraba en la sala de profesores del Instituto tomando un rico café. Como era usual, llegaron los participantes del seminario y empezaron a conversar sobre algunos de las preguntas que surgieron en la sesión del día. De repente, Santiago se paró de su asiento y sin mediar palabra escribió una ecuación en el pizarrón. Todos nos quedamos en silencio, no sabíamos que estaba pasando y fue Alberto Verjovsky quien observó que la ecuación en el pizarrón daba respuesta a una de las preguntas que estaban a discusión. Después aprendí que Santiago era así con algunos compañeros, conmigo lo había sido, y con Alberto continúa haciendo lo mismo.

A partir de aquellas preguntas, Santiago trabajó en la caracterización diferenciable de las variedades que se obtienen como intersección de dos cuádricas homogéneas, simultáneamente diagonalizables, en posición general en R^n , ver [4]. Este problema aparece en la teoría de sistemas dinámicos holomorfos y su solución se aplica al análisis de los posibles sistemas en el dominio de Siegel, véase [3]. De esta problemática surgió también una construcción de variedades compactas complejas no simplécticas, en colaboración con Alberto Verjovsky.

Variaciones sobre el Lema de Morse

A partir de un problema inverso de la ecuación del calor, planteado por Salvador Pérez Esteve, investigador del Instituto, surgieron una serie de problemas que en realidad se han convertido en un proyecto de trabajo que Santiago, junto con otros colaboradores, están desarrollando. Por nombrarlo de alguna forma, llamaremos a este proyecto variaciones sobre el Lema de Morse, el nombre lo tomo de la plática que Santiago dictó dentro del festejo de los sesenta años del Instituto de Matemáticas.

Podríamos decir que este proyecto engloba muchos temas que son aparentemente distintos. Sólo mencionaré algunos de estos temas ya que próximamente aparecerá un artículo panorámico de Santiago, explicando en forma más general este proyecto, en las memorias del sesenta aniversario del Instituto de Matemáticas. El lector impaciente puede ver el artículo de Santiago y Marc Chaperon [5], en donde se explican algunos aspectos de esta problemática.

Además, este artículo contiene varias de las referencias que son frutos de este proyecto.

1. El primer tema es el comportamiento asintótico de las áreas y volúmenes encerrados por las superficies de nivel de una función cerca de un mínimo. Algunos artículos en colaboración con Salvador Pérez han sido publicados.
2. Después tenemos los períodos de órbitas de Sistemas Hamiltonianos cerca de un punto de equilibrio. Este es un tema que ha permitido desarrollar varios artículos de investigación. Santiago ha tenido dos colaboradores en este punto, Marc Chaperon y Salvador Pérez.
3. Por último, las condiciones mínimas de diferenciabilidad en el Lema de Morse y sus generalizaciones. Aquí ha colaborado con Shirley Brombey, de la UAM Iztapalapa.

El tiempo se viene encima, nos vemos obligados a terminar en este punto. Nos faltó mucho por decir en esta última parte, mi única disculpa es la próxima aparición del artículo expositivo de Santiago que mencioné al principio de esta sección.

Una última sugerencia: busca a Santiago con cualquier pretexto y disfruta de la sencillez de uno de los personajes de la matemática mexicana que ha dejado sin duda alguna una profunda huella en ella.

Referencias

- [1] Santiago López de Medrano. Involutions of homotopy spheres and homology 3-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 73:727–731, 1967.
- [2] Santiago López de Medrano. *Involutions on manifolds*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [3] Santiago López de Medrano. The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field. In *Holomorphic Dynamics*, México, 1986, volume 1345 of Lectures notes in mathematics, pages 233–245. Springer Verlag, 1988.

- [4] Santiago López de Medrano. Topology of the intersections of quadrics. In *Algebraic Topology*, Arcata, CA, 1986, volume 1370 of Lectures notes in mathematics, pages 280–292. Springer Verlag, 1989.
- [5] Santiago López de Medrano y Marc Chaperon. Áreas, volúmenes y periodos de órbitas. In XXVII Congreso Nacional de la Sociedad

Matemática Mexicana, volume 16 of Serie comunicaciones, pages 79–95, 1995.

- [6] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)*, 64:399–405, 1956.



Durante el XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

a celebrarse del 6 al 11 de octubre del presente, en la ciudad de Durango, se llevarán a cabo 5 Sesiones Especiales de Reciprocidad con la SMM. Los invitados para dictar pláticas de investigación e interés general son:

Sesión Especial SMM - American Mathematical Society (AMS):

Carlos Kenig, University of Chicago
 Thomas Farrell, University of Binghamton
 Luis Verde Star, UAM-Iztapalapa
 Meral Tosun, IMUNAM-Cuernavaca

Sesión Especial SMM - Real Sociedad Matemática Española (RSME):

Carlos Andradas, Universidad Complutense de Madrid
 Blas Torrecillas, Universidad de Almería
 Francisco Raggi, IMUNAM

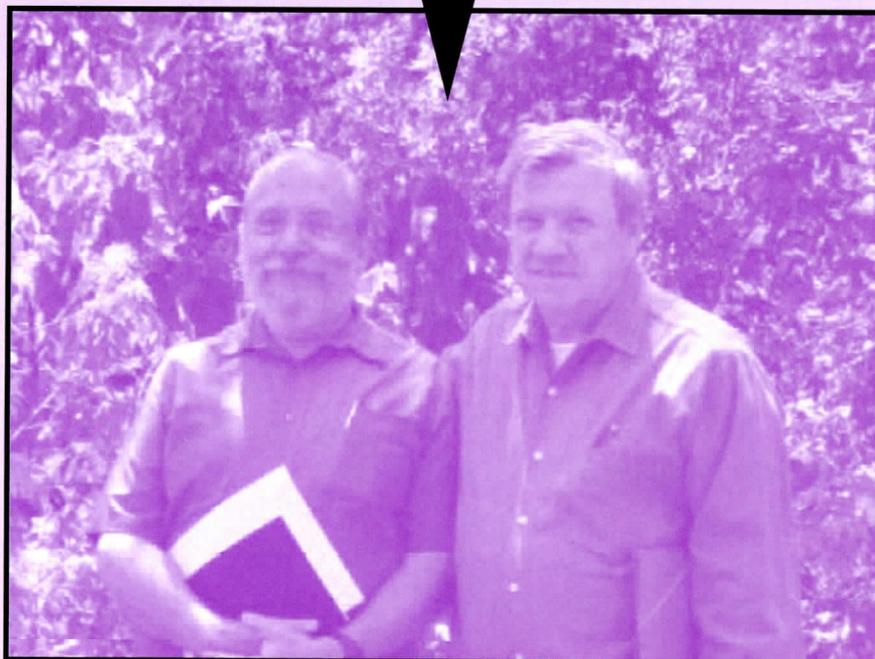
Sesión Especial SMM - Sociedad Portuguesa de Matemáticas (SPM):

José Francisco Rodrigues, Universidad de Lisboa (No Confirmado)
 Adelia Sequeira, Instituto Superior Técnico, Lisboa
 Jorge Nuno Silva, Universidad de Lisboa
 Alejandro Díaz Barriga, IMUNAM
 Juan José Rivaud, CINVESTAV-IPN y UAM-I

Sesión Especial SMM - Sociedad Boliviana de Matemática (SoBolMat):

Santiago Sologuren, Universidad Católica Boliviana y Universidad Privada Boliviana
 Jimmy Santamaría Torrez, Instituto Normal Superior Simón Bolívar
 Efraín Cruz, Universidad Mayor de San Andrés
 Eugenio Garnica Vigil, Facultad de Ciencias-UNAM
 Ricardo Berlanga, IIMAS
 Enrique Farías, Universidad de Colima

Aquí tenemos a dos de los mejores matemáticos mexicanos



**Santiago López de Medrano
y Francisco González Acuña.**

**“El Comité Editorial de la Carta Informativa
agradece la colaboración para la realización
de este número de:**

**Imelda Paredes, Gabriela Artígas
(del Depto. de Difusión del IMUNAM, C.U.)
Adriana Briseño, Miguel Ángel Magaña
(IMUNAM, Morelia)**