Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona
1ª edició: març de 2002
Tiraje: 650 exemplars
D.L.: B -2020- 59
ISBN: 0368-8283
Producció: 9. disseny s.l.

ÒRBITES PERIÒDIQUES DELS SISTEMES HAMILTONIANS AMB DOS GRAUS DE LLIBERTAT VIA HOMEOMORFISMES DE SUPERFÍCIE

MEMÒRIA LLEGIDA PER L'ACADÈMIC ELECTE

Dr. JAUME LLIBRE I SALÓ

en l'acte de la seva recepció el dia 7 de març de 2002

DISCURS DE CONTESTACIÓ PER L'ACADÈMIC NUMERARI

Excm. Sr. Dr. JOAQUIM AGULLÓ I BATLLE

Resum. L'objectiu principal d'aquest article és contribuir a l'estudi del conjunt de les òrbites periòdiques dels sistemes Hamiltonians amb 2 graus de llibertat no integrables utilitzant l'estructura dels homeomorfismes de superfície. Sota unes condicions força generals provem que una aplicació de Poincaré convenient té tots els períodes excepte (potser) un nombre finit.

Resumen. El objetivo principal de este artículo es contribuir al estudio del conjunto de las órbitas periódicas de los sistemas Hamiltonianos con 2 grados de libertad no integrables utilizando la estructura de los homeomorfismos de superficie. Bajo unas condiciones muy generales probamos que una aplicación de Poincaré conveniente tiene todos los períodos excepto (quizás) un número finito.

Abstract. The main goal of this paper is to contribute to the study of the set of periodic orbits of the non–integrable Hamiltonian systems with 2 degrees of freedom by using the structure of surface homeomorphisms. Under very general conditions we prove that a convenient Poincaré map has all the periods (perhaps) with the exception of a finite number.

1 Introducció

La major part dels problemes de la mecànica clàssica [3,1], de la mecànica celeste [4] i molts altres com poden ser el confinament de partícules carregades en camps electromagnètics [42], l'escalfament de plasmes mitjançant ones [33], barreges de fluids [2] . . . , poden ser moldejats pels *sistemes Hamiltonians* o sistemes d'equacions diferencials de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(\vec{q},\vec{p})}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(\vec{q},\vec{p})}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

on $i = 1,\dots,n$, $\vec{q} = (q_1,\dots,q_n)$, $\vec{p} = (p_1,\dots,p_n)$ i H és una funció de classe C^2 en les seves variables. La funció H s'anomena el *Hamiltonià*, l'enter n és el *nombre de graus de llibertat*, i el conjunt de punts $(\vec{q},\vec{p})$ on el sistema diferencial (1) està definit és *l'espai de fases* **E**.

Les òrbites d'un sistema d'equacions diferencials ordinàries pensades com a subconjunts de l'espai de fases **E** són homeomorfes a punts, rectes o cercles [48]. En el primer cas l'òrbita és un *punt d'equilibri* i en el darrer una *òrbita periòdica.* Podríem dir que l'objetiu principal de la teoria qualitativa de les equacions diferencials ordinàries seria la descripció completa de l'espai de fases com la unió de totes les seves òrbites. En general aquest és un problema molt difícil i ara per ara s'està molt lluny de poder donar–li una resposta satisfactòria fins i tot en el cas particular dels sistemes Hamiltonians.

Fins a mitjan aquest segle l'estudi dels sistemes Hamiltonians ha estat dominat pels *integrables*, aquells pels quals les coordenades $\vec{q}$ i $\vec{p}$ poden escollir–se preservant la forma del sistema (1) i de manera que el Hamiltonià només depèn de les coordenades $\vec{p}$. Llavors les hipersuperfícies amb $\vec{p}$ igual a constant són invariants pel flux associat al sistema (1), i són genèricament difeomorfes a $\mathbb{R}^k \times (\mathbb{S}^1)^{n-k}$ amb $0 \le k \le n$ (vegeu exemples a [37]). Com és usual $\mathbb{R}$ denota el conjunt dels números reals i $\mathbb{S}^1$ denota el cercle. El moviment sobre aquestes hipersuperfícies és lineial en les coordenades $\vec{q}$ perquè

$$\frac{dq_i}{dt} = \omega_i(\vec{p}) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Per $k = 0$ aquestes hipersuperfícies són tors n–dimensionals, i si les freqüències $\vec{\omega} = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ són commensurables, és a dir tals que $\vec{m}\cdot\vec{\omega} = 0$ per algun vector $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, llavors el flux lineial sobre aquests tors és *periòdic*; en cas contrari el flux és *quasiperiòdic* i qualsevol òrbita sobre el tor és densa. És clar, com és usual $\mathbb{Z}$ denota el conjunt dels números enters.

La gran majoria de sistemes Hamiltonians amb $n \ge 2$ no són integrables, i en general no tenen tors invariants amb freqüències $\vec{\omega}$ commensurables. Per a freqüències $\vec{\omega}$ *suficientment incommensurables* tots els sistemes Hamiltonians prou a prop d'un integrable no degenerat encara presenten tors invariants n–dimensionals que són deformacions contínues dels tors $\vec{p}$ igual a constant del sistema integrable. Aquest resultat s'anomena el *teorema KAM*. De

fet hi ha l'evidència numèrica que, en general, els tors invariants també poden aparèixer en sistemes Hamiltonians lluny dels integrables, encara que la seva quantitat va disminuint a mesura que augmenta la seva distància als integrables (vegeu per exemple [39,44]).

Moltes de les òrbites d'un sistema Hamiltonià no integrable que no viuen sobre un tor invariant presenten un moviment erràtic sense gaire ordre, que s'anomena *caòtic*. Però en aquestes regions de l'espai de fases on aparentment domina el moviment caòtic habitualment es poden detectar (numèricament i a vegades analíticament) moltes òrbites periòdiques (vegeu per exemple [39] i [12] respectivament).

L'objectiu d'aquest treball és contribuir a l'estudi del conjunt de les òrbites periòdiques dels sistemes Hamiltonians amb 2 graus de llibertat no integrables utilitzant l'estructura dels homeomorfismes de superfície. Per tant, d'ara en endavant prendrem $n = 2$.

Com que el Hamiltonià $H = H(\vec{q},\vec{p})$ és una integral primera del sistema Hamiltonià (1), els conjunts

$$I_h = \{(\vec{q},\vec{p}) \in \mathbf{E} : H(\vec{q},\vec{p}) = h\} \ne \emptyset$$

amb $h \in \mathbb{R}$ són invariants pel flux associat al sistema Hamiltonià, s'anomenen *nivells d'energia*, i genèricament són varietats diferencials de dimensió 3.

Suposem que tenim un tor invariant $\mathbb{T}^2$ en un cert nivell d'energia I_h del sistema Hamiltonià (1), i que podem escollir una secció transversal Σ al flux que talli el tor $\mathbb{T}^2$ en una corba homeomorfa a un cercle $\mathbb{S}^1$. Sigui $\mathbb{D}$ el disc de Σ que té per frontera el cercle $\mathbb{S}^1$. Suposem que *l'aplicació de Poincaré* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ (on $f(z)$ és el primer punt de tall amb $\mathbb{D}$ en temps positiu de l'òrbita que passa pel punt $z \in \mathbb{D}$) estigui ben definida. Sota aquestes hipòtesis l'aplicació de Poincaré conté tota la dinàmica del flux Hamiltonià dintre del tor $\mathbb{T}^2$ en el nivell d'energia I_h. En particular les òrbites periòdiques de f es corresponen amb les òrbites periòdiques del sistema Hamiltonià contingudes a l'interior de $\mathbb{T}^2$ en el nivell d'energia I_h. Com que hem suposat que H és C^2 se sap que f és un difeomorfisme C^1 [48].

A vegades interessa restringir l'estudi de l'aplicació de Poincaré f a un subconjunt del disc $\mathbb{D}$. Així molt sovint es veu que dintre de $\mathbb{T}^2$ hi ha un altre tor invariant $\mathbb{T}^2_*$ que talla $\mathbb{D}$ exactament en m components connexes, essent cada component homeomorfa a un cercle. Per tant si volem estudiar les òrbites periòdiques del sistema Hamiltonià en el nivell d'energia I_h que està a l'interior del tor $\mathbb{T}^2$ i a l'exterior del tor $\mathbb{T}^2_*$, n'hi haurà prou a estudiar l'aplicació de Poincaré f restringida a $\mathbb{D}_m$, on $\mathbb{D}_m$ està format pels punts de $\mathbb{D}$ que no estan a l'interior de $\mathbb{T}^2_*$. Noteu que $\mathbb{D}_m$ és homeomorfe al disc $\mathbb{D}$ amb m forats. A partir d'ara denotarem per $\mathbb{D}_0$ el disc $\mathbb{D}$.

Sigui $f : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ l'aplicació de Poincaré amb m un enter no negatiu. Denoten per Per(f) el conjunt dels períodes de totes les òrbites periòdiques de f, és clar que Per$(\,) \subset \mathbb{N}$, on $\mathbb{N}$ denota el conjunt dels números naturals. Diversos autors han fet bones contribucions a l'estudi del conjunt de períodes $\mathrm{Per}(f)$: Poincaré [46], Birkhoff [6,7], Boyland [10], Franks [18–20], Guaschi [22], Hall [25], Handel [28] ... Però aquests treballs es basen principalment en un dels següents tres fets: (1) que l'aplicació de Poincaré f es pot escollir de manera que preservi l'àrea, o (2) que si el sistema Hamiltonià està a prop d'un sistema integrable no degenerat llavors f es pot considerar genèricament una perturbació d'un tipus concret d'aplicacions anomenades *twist*, o (3) que si l'aplicació de Poincaré està definida sobre un anell $\mathbf{D}_1$ llavors es poden considerar números de rotació per estudiar les òrbites periòdiques.

En aquest treball estudiem el conjunt $\mathrm{Per}(f)$ de l'aplicació $f : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ utilitzant essencialment el fet que f és un homeomorfisme de la superfície $\mathbb{D}_m$ i per tant podem aplicar la classificació de Nielsen–Thurston dels homeomorfismes de superfícies. Com veurem a la Secció 2, l'homeomorfisme f serà isotòpic a un dels següents quatre tipus d'homeomorfisme: periòdic, pseudo–Anosov, reductible periòdic o reductible pseudo–Anosov. Els homeomorfismes periòdics i reductibles periòdics tenen entropia topològica zero, els altres dos la tenen positiva. L'entropia topològica $h(f)$ és un número real no negatiu que s'associa a f de manera que si $h(f) > 0$ llavors la dinàmica de f és força complexa (vegeu per exemple [14]). Per tant, parlant amb poca precisió perquè f sigui caòtica caldrà que f sigui isotòpica a un homeomorfisme pseudo–Anosov o reduible pseudo–Anosov.

Dos homeomorfismes $f, g : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ són *isotòpics* si existeix una família d'homeomorfismes $h_t : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ amb $t \in [0,1]$ tal que $h_0 = f$ i $h_1 = g$. Si $\mathbb{S}$ és una superfície llavors la noció d'isotopia és equivalent a la d'homotopia [16].

Hi ha tècniques homològiques per calcular cotes inferiors de l'entropia topològica d'un homeomorfisme $f : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ donat (vegeu per exemple [11]). Si la cota inferior calculada d'aquesta manera és positiva, com aquesta és invariant per homotopia (perquè només depèn de l'homologia), també ho serà per a qualsevol altre homeomorfisme isotòpic a f. Per tant aquest homeomorfisme f només pot ser isotòpic a un pseudo–Anosov o a un reductible pseudo–Anosov. Amb altres paraules, aquestes tècniques homològiques permeten detectar quan un homeomorfisme és isotòpic a un homeomorfisme pseudo–Anosov o a un reductible pseudo–Anosov.

Siguin $f, g : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ dos homeomorfismes i sigui X un subconjunt finit de $\mathbb{S}$ invariant per f i g, és a dir $f(X) = g(X) = X$. Diem que f i g són *isotòpics relatius a* X si existeix una família d'homeomorfismes $h_t : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ amb $t \in [0,1]$ tal que $h_0 = f$, $h_1 = g$ i $h_t(X) = X$ per a tot $t \in [0,1]$.

Els nostres resultats principals sobre el conjunt $\mathrm{Per}(f)$ es resumeixen en el següent teorema. Com és usual $\mathrm{Int}(\mathbb{D}_m)$ denota l'interior de $\mathbb{D}_m$.

Teorema 1. *Sigui $f : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ un homeomorfisme.*

(a) Si f és isotòpic a un homeomorfisme pseudo–Anosov, llavors $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Per}(f)$ és finit.

(b) Si f és isotòpic a un homeomorfisme reductible pseudo–Anosov, llavors $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Per}(f^r)$ és finit per algun $1 \le r \le m-1$.

(c) Si $m \in \{0,1,2,3,4\}$ i existeix un conjunt invariant finit $X \subset \mathrm{Int}(\mathbb{D}_m)$ amb cardinal $3-m$ o $4-m$ tal que f és isotòpic a un homeomorfisme pseudo–Anosov relatiu a X, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

En les hipòtesis de la conclusió (a) del Teorema 1 era conegut que $\mathrm{Per}(f)$ és un conjunt infinit (vegeu [27] i [30]) pel cas dels difeomorfismes $C^{1+\varepsilon}$), però aquí ho millorem provant que $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Per}(f)$ és finit. De fet aquest resultat no només és cert per a les superfícies $\mathbb{D}_m$, sinó que es pot estendre a qualsevol superfície connexa, compacta, orientable o no i amb o sense frontera (vegeu Gambaudo i Llibre [21]). Que $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Per}(f)$ és finit equival a dir que $\mathrm{Per}(f)$ conté tots els naturals a partir d'un cert $k \in \mathbb{N}$. En la prova de (a) donarem una estimació d'aquest k.

Com veurem la conclusió (b) es reduirà a la (a) per un cert iterat f^r de f.

Finalment la conclusió (c) s'obtindrà a partir d'una col·lecció de resultats de Kolev [32], Llibre i MacKay [36] i Guaschi [23]. Una descripció més detallada de la conclusió (c) la donem en el següent corol·lari, on per una òrbita k–periòdica entendrem una òrbita periòdica de període k.

Corol·lari 1. *Sigui $f : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ un homeomorfisme isotòpic a un homeomorfisme pseudo–Anosov relatiu a X.*

(a) Si $\mathbb{D}_m$ és el disc i X està format per una òrbita 3–periòdica, o per la unió d'una òrbita 2–periòdica amb un punt fix, o per tres punts fixos, o per una òrbita 4–periòdica, o per dues òrbites 2–periòdiques, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

(b) Si $\mathbb{D}_m$ és l'anell i X està format per una òrbita 2–periòdica, o per dos punts fixos, o per una òrbita 3–periòdica, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

(c) Si $m = 2$ i X està format per un punt fix o per una òrbita 2–periòdica, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

(d) Si $m = 3$ i X està format per un punt fix o bé $X = \emptyset$, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

(e) Si $m = 4$ i $X = \emptyset$, llavors $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$.

Els resultats d'aquest corol·lari es poden veure com una extensió als homeomorfismes de $\mathbb{D}_m$ del resultat de Sharkovskii [47] i de Li i Yorke [34], que l'existència d'una òrbita 3–periòdica implica l'existència d'òrbites periòdiques de tots els períodes per a les aplicacions contínues de l'interval tancat en ell mateix.

Cal mencionar que la conclusió (c) del Teorema 1 no es pot millorar. Així a [36] donem un exemple d'un homeomorfisme pseudo–Anosov sobre $\mathbb{S}^2_m$ tal que $\mathrm{Per}(f) \neq \mathbb{N}$ per a qualsevol $m > 5$. Un exemple similar amb $m = 5$ ha estat trobat recentment per en Guaschi.

La resta del treball està estructurada de la següent manera: a la Secció 2 es descriu breument la classificació de Nielsen–Thurston pels homeomorfismes de superfície mòdul isotopia, perquè aquests resultats són essencials en les nostres proves. En la Secció 3 es resumeixen les propietats bàsiques que necessitem dels homeomorfismes pseudo–Anosov. A la Secció 4 es proven les dues primeres conclusions del Teorema 1, i finalment a la Secció 5 es prova la conclusió (c) del Teorema 1.

2 La classificació de Nielsen–Thurston pels homeomorfismes de superfície

En aquesta secció descriurem breument el treball de Thurston sobre la classificació dels homeomorfismes de superfície mòdul isotopia, vegeu [49,13,17,29,22]. Encara que la classificació és independent de si l'homeomorfisme preserva o no l'orientació, per a les aplicacions que farem als sistemes Hamiltonians n'hi haurà prou a considerar els homeomorfismes que preserven l'orientació.

Sigui $\mathbb{S}$ una superfície connexa, compacta i orientable amb o sense frontera, i sigui $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S})$ l'espai dels homeomorfismes de $\mathbb{S}$ que preserven l'orientació dotat de la topologia de la convergència uniforme. Les classes d'equivalència de l'espai $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S})$ mòdul isotopia són els *automorfismes* de $\mathbb{S}$. Denotem per $\mathrm{Aut}(\mathbb{S})$ el conjunt de tots els automorfismes de $\mathbb{S}$.

Per motivar la classificació de Thurston recordem la classificació dels automorfismes del tor $\mathbb{T}^2$. Considerem el tor $\mathbb{T}^2$ com a quocient de $\mathbb{R}^2$ pel reticle $\mathbb{Z}^2$ amb una orientació fixada. Llavors el primer grup d'homologia de $\mathbb{T}^2$ a coeficients en $\mathbb{Z}$ és $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Donada una matriu A del grup lineial especial $SL(2, \mathbb{Z})$, aquesta preserva el reticle $\mathbb{Z}^2$ i per tant indueix un homeomorfisme $h_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. A més, l'isomorfisme induït per h_A sobre el primer grup d'homologia $(h_A)_* : H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ té matriu A. D'altre banda dos homeomorfismes de $\mathbb{T}^2$ són isotòpics si i només si indueixen el mateix isomorfisme sobre

$H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$. Per tant $\mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Els valors propis de A són :

(1) Complexos, és a dir traça$(A) \in \{-1, 0, 1\}$. Del teorema de Cayley–Hamilton s'obté que $h_A^n =$ identitat per n igual a 3, 4 i 6 respectivament. Per tant h_A s'anomena *periòdic.*

(2) Els dos iguals a 1 ó -1. Llavors A té un vector propi de components enteres que dóna lloc a una corba tancada i simple C sobre $\mathbb{T}^2$ que no és homotòpica a un punt. Fent un canvi de coordenades podem suposar que

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

és un *twist* de Dehn. Això vol dir que C té un entorn *anular* U que parametritzem de la manera següent $\{(r, \theta) : 0 \le r \le 1\}$. El *twist de Dehn* sobre C és l'homeomorfisme $(r, \theta) \longmapsto (r, \theta + 2\pi r)$. En aquest cas diem que h_A és *reductible.*

(3) Reals i diferents λ i λ^{-1} verificant $|\lambda| > 1 > |\lambda^{-1}|$. Llavors h_A no és periòdic ni té corbes tancades, simples i invariants. Els dos valors propis donen lloc a dos foliacions invariants transversals sobre $\mathbb{T}^2$, una estable $\mathcal{F}^s$ i l'altra inestable $\mathcal{F}^u$, cada una paral·lela al corresponent valor propi; a més existeixen mesures transversals invariants μ^s i μ^u sobre $\mathcal{F}^s$ i $\mathcal{F}^u$ respectivament tals que

$$h_A(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s),$$

$$h_A(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u),$$

on $h_A(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ denota la foliació imatge $h_A(\mathcal{F}^s)$ (igual a $\mathcal{F}^s$) dotada amb la mesura imatge: la mesura d'un arc α transversal a la imatge de la foliació és la μ^s–mesura de $h_A^{-1}(\alpha)$. Per tant h_A es contrau lineialment en una direcció i s'expandeix lineialment en l'altra direcció. Diem que h_A és *Anosov.*

La classificació dels automorfismes del tor ha estat generalitzada per Thurston [49] a qualsevol superfície hiperbòlica o amb característica d'Euler negativa. La classificació per les superfícies no hiperbòliques és coneguda i molt més fàcil. Cal fer notar que gran part del treball d'en Thurston ja va ser obtingut per en Nielsen [43] fa uns seixanta anys.

Sigui $\mathbb{S}$ la superfície definida al principi d'aquesta secció, suposem que la seva característica d'Euler $\chi(\mathbb{S})$ és negativa, i sigui $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ un homeomorfisme.

Direm que f és *periòdic* si existeix un número natural n tal que $f^n =$ identitat.

Direm que f és *pseudo–Anosov* si:

(1) Existeixen dues foliacions $\mathcal{F}^s$ i $\mathcal{F}^u$ invariants per f que tenen el mateix conjunt de singularitats finites a l'interior de $\mathbb{S}$.

(2) Cada singularitat de $\mathcal{F}^s$ i $\mathcal{F}^u$ a l'interior de $\mathbb{S}$ té almenys tres separatrius, vegeu la Figura 1.

(3) Si $\mathbb{S}$ té frontera, cada component de la frontera és unió finita de fulles i singularitats de $\mathcal{F}^s$ i de $\mathcal{F}^u$, i conté almenys una singularitat de cada foliació, vegeu la Figura 2. Les singularitats de les dues foliacions alternen sobre les components de la frontera.

(4) $\mathcal{F}^s$ i $\mathcal{F}^u$ són transversals a l'interior de $\mathbb{S}$.

(5) $\mathcal{F}^s$ i $\mathcal{F}^u$ admeten mesures transversals μ^s i μ^u respectivament, i existeix un número real $\lambda > 1$ tal que

$$f(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s),$$

$$f(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u),$$

on $f(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ denota la foliació imatge $f(\mathcal{F}^s)$ (igual a $\mathcal{F}^s$) dotada amb la mesura imatge. Així f es contrau sobre les fulles de $\mathcal{F}^s$ on la distància es mesura amb μ^u, i s'expandeix sobre les fulles de $\mathcal{F}^s$ on la distància es mesura amb μ^u, i s'expandeix sobre les fulles de $\mathcal{F}^u$ on la distància es mesura amb μ^s. Diem que λ és el *factor de dilatació* de f.

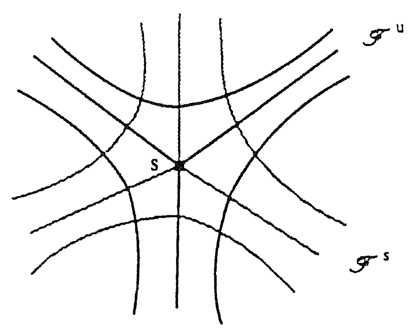

Figura 1. Una singularitat amb 3 separatrius.

Sigui $\mathcal{F}$ una d'aquestes dues foliacions invariants, denotem per p_s el nombre de separatrius que té la singularitat s de $\mathcal{F}$. Si s està a la frontera de $\mathbb{S}$, llavors els dos arcs de la frontera de $\mathbb{S}$ que neixen a s es compten com a separatrius. Així les dues singularitats s de les Figures 1 i 2 tenen $p_s = 3$ per $\mathcal{F}^u$. Llavors tenim que es satisfà la relació

$$2\chi(\mathbb{S}) = \sum_s (2 - p_s),$$

on la suma s'estén a totes les singularitats s de la foliació $\mathcal{F}$. Aquesta fórmula és una conseqüència del Teorema de Poincaré–Hopf ([15,13]) per a camps de línies. Recordem que un camp de línies sobre $\mathbb{S}$ localment és una versió no orientada d'un camp de vectors sobre $\mathbb{S}$.

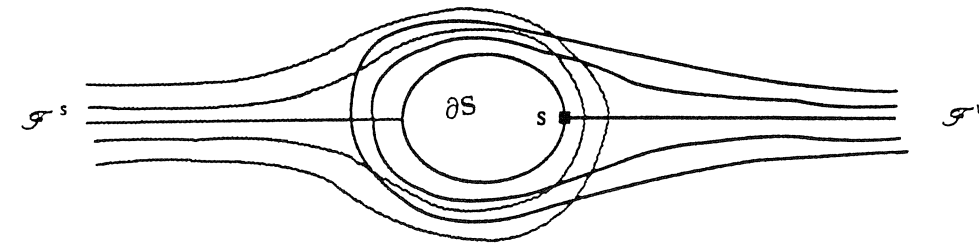

Figura 2. Un exemple de les foliacions a la frontera de $\mathbb{S}$.

Si a la superfície $\mathbb{S}$ li traiem un nombre finit de punts obtenim una superfície amb *pinçaments*, un pinçament per a cada punt que hem tret. Suposem que $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ és un homeomorfisme i $X \subset \mathrm{Int}(\mathbb{S})$ un subconjunt finit invariant per f. Llavors si X no conté cap singularitat de $\mathcal{F}^s$ (o $\mathcal{F}^u$) a vegades anirà bé pensar l'homeomorfisme f restringit a la superfície amb pinçaments $\mathbb{S} \setminus X$. Més concretament si f és un homeomorfisme pseudo–Anosov relatiu a X, llavors pensarem que les foliacions de $f|_{\mathbb{S}\setminus X} : \mathbb{S} \setminus X \to \mathbb{S} \setminus X$ presenten una singularitat en cada pinçament i cada una d'aquestes singularitats té una única separatriu. Aquesta interpretació és correcta perquè cada pinçament es pot recompactificar afegint–hi un cercle frontera, i l'homeomorfisme pseudo–Anosov es pot estendre a aquest cercle presentant cada foliació una única singularitat sobre aquest cercle. Aquesta idea és essencialment deguda a Bowen [9], i ha estat utilitzada per diversos autors (per exemple [10,27,35,24]). Així si tenim un homeomorfisme pseudo–Anosov relatiu a X i X té cardinal n, la fórmula anterior es pot escriure com

$$2\chi(\mathbb{S} \setminus X) = 2[\chi(\mathbb{S}) - n] = \sum_s (2 - p_s),$$

on ara la suma s'estén a totes les singularitats s de la foliació $\mathcal{F}$ incloent–hi els pinçaments. Noteu que per a les singularitats s degudes a un pinçament hem de prendre $p_s = 3$.

Direm que f és un homeomorfisme *reductible* si existeix una família $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ de corbes tancades, simples i disjuntes de $\mathbb{S}$ tals que

(1) Cada C_i és *essencial*, és a dir, no és homotòpica a un punt ni a una component de la frontera de $\mathbb{S}$;

(2) C_i no és homotòpica a C_j si $i \neq j$;

(3) C és invariant per f, és a dir $f(C) = C$.

Definim un *twist generalitzat* com un difeomorfisme de l'anell obert $\mathbb{S}^1 \times (-1,1)$ de la forma

$$\theta' = \pm\theta + \omega(r), \qquad r' = \pm r,$$

on $(\theta, r) \in \mathbb{S}^1 \times (-1,1)$, $\omega : [-1,1] \to \mathbb{S}^1$ és C^1, i $d\omega/dr(\pm 1) = 0$.

Teorema 2 (Teorema de classificació de Nielsen–Thurston). *Tot homeomorfisme $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ és isotòpic a un homeomorfisme $F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ que verifica una i només una de les següents condicions:*

(a) F és periòdic.

(b) F és pseudo–Anosov.

(c) F és reductible per un sistema de corbes C de manera que existeixen entorns anulars oberts disjunts U_i de C_i tals que $U = \cup_i U_i$ és invariant per F. Cada component S_j de $\mathbb{S} \setminus U$ (anomenada component de la descomposició *de F) s'aplica sobre si mateixa per un primer iterat F^{n_j} (on n_j s'anomena* el període *de S_j), cada $F^{n_j}|_{S_j}$ satisfà (a) o (b). Cada U_i s'aplica sobre si mateix per un primer iterat F^{m_i}, i cada $F^{m_i}|_{U_i}$ és un twist generalitzat (no necessàriament un twist de Dehn).*

Si l'homeomorfisme F és reductible, utilitzant la notació introduïda al Teorema 2, tenim que si $F^{n_j}|_{S_j}$ és periòdic per a tota component S_j de la descomposició de F, direm que F és *reductible periòdic*. En qualsevol altre cas direm que F és *reductible pseudo–Anosov*.

3 Propietats dels homeomorfismes pseudo–Anosov

Sigui $F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ un homeomorfisme pseudo–Anosov d'una superfície $\mathbb{S}$ connexa, compacta, orientable amb o sense frontera.

(1) Totes les òrbites periòdiques de F que no estan sobre la frontera de $\mathbb{S}$ són *persistents*. És a dir, si $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ és un homeomorfisme isotòpic a F i x és un punt n–periòdic de F, llavors existeix una família d'homeomorfismes $h_t : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ i un arc $\gamma(t)$ en $\mathbb{S}$ amb $t \in [0,1]$ tals que $h_0 = F$, $h_1 = f$, $\gamma(t)$ és un punt n–periòdic per h_t i $\gamma(0) = x$. Per a més detalls vegeu [5,8,26].

(2) F té una *partició de Markov* formada per rectangles topològics, és a dir, existeix una col·lecció finita de subconjunts $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ de $\mathbb{S}$ tals que:

(2.a) Per a cada R_i, $1 \leq i \leq k$, existeix una immersió $\phi_i : I \times I \to \mathbb{S}$ tal que $\phi_i(I \times I) = R_i$, per a tot $t \in I$ tenim que $\cup_{s \in I} \phi_i(t,s)$ està continguda en una unió finita de fulles d'una singularitat de la foliació $\mathcal{F}^s$ i de fet en una fulla si $t \in (0,1)$, i per a tot $s \in I$ tenim que $\cup_{t \in I} \phi_i(t,s)$ està continguda en una unió finita de fulles de la singularitat $\mathcal{F}^u$ i de fet en una fulla si $s \in (0,1)$.

(2.b) $M = \cup_{i=1}^{k} R_i$.

(2.c) $\mathrm{IntR_i} \cap \mathrm{IntR_j} = \emptyset$ si $i \neq j$.

(2.d) $F(R_i) \cap R_j$ té com a molt una component per a tot $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Donat $\mathcal{R}$ construïm un *subshift de tipus finit* $(\sum_A, A, \sigma_A)$ com se segueix. Sigui $A = (a_{ij})$ la matriu $k \times k$ definida per

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } F(\mathrm{IntR_i}) \cap \mathrm{IntR_j} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

Sigui $\sum_A$ l'espai de les successions $c \in \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{Z}}$ tals que $a_{c_i c_{i+1}} = 1$ per a tot $i \in \mathbb{Z}$, i sigui $\sigma_A : \sum_A \to \sum_A$ l'aplicació *shift*, definida com $\sigma_A(c)_i = c_{i+1}$ per a tot $i \in \mathbb{Z}$ on $c = (c_i) \in \sum_A$. Si $c = (c_i) \in \sum_A$ podem provar que $\cap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-1}(R_{c_i})$ és un únic punt. Per tant definim $h : \sum_A \to \mathbb{S}$ mitjançant $h(c) = \cap_{i \in \mathbb{Z}} F^{-1}(R_{c_i})$. L'aplicació $\sigma_A : \sum_A \to \sum_A$ defineix un *subshift* de tipus finit que és semiconjugat per h a F, és a dir $h \circ \sigma_A = F \circ h$. De fet h només pot deixar d'ésser una conjugació en les successions que s'apliquen sobre punts de la frontera dels rectangles R_i.

Un altre fet que ens interessa remarcar és que el radi espectral de A, $\rho(A)$, és igual a λ el factor de dilatació de F, i que λ és l'únic valor propi de A amb mòdul $\rho(A)$. Per a més detalls sobre les particions de Markov d'un homeomorfisme pseudo–Anosov vegeu [17].

(3) F és topològicament transitiu, és a dir F té una òrbita periòdica densa a $\mathbb{S}$ (vegeu [17]).

(4) El conjunt de punts periòdics de F és dens a $\mathbb{S}$, i existeixen un nombre finit de punts periòdics de cada període (vegeu [17]).

(5) L'entropia topològica de F és positiva (vegeu [17]).

4 Prova de les conclusions (a) i (b) del Teorema 1

Sigui $(\sum_A, A, \sigma_A)$ un *subshift* de tipus finit associat a un homeomorfisme pseudo–Anosov, vegeu la Secció 3. La següent proposició és bàsica per a la prova del Teorema 1(a).

Proposició 1. *Sigui* $(\sum_A, A, \sigma_A)$ *un subshift de tipus finit associat a un homeomorfisme pseudo–Anosov, i sigui* μ *un número real tal que* $2 < \mu < \lambda$ *si* $\lambda > 2$, *i* $1 < \mu < \lambda$ *si* $\lambda \leq 2$.

(a) *Existeix* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{\text{traça}(A^{n+1})}{\text{traça}(A^n)} > \mu,$$

i

$$\text{traça}(A^n) > 0,$$

per a tot $n \geq n_0$.

(b) *Si* $\mu > 2$ *llavors* $m \in \text{Per}(\sigma_A)$ *per a tot* $m \geq 2n_0$.

(c) *Si* $\mu < 2$ *llavors* $m \in \text{Per}(\sigma_A)$ *per a tot*

$$m \geq \max\left\{2n_0, 6\left(1 + \left|\frac{\log(\mu-1)}{\log\mu}\right|\right)\right\}.$$

Prova. Per ser A la matriu de transició associada a una partició de Markov d'un homeomorfisme pseudo–Anosov amb factor de dilatació λ, resulta que el radi espectral de A, $\rho(A)$ és igual a λ, i λ és l'únic valor propi de A amb mòdul $\rho(A)$, vegeu la Secció 3. Per tant

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{traça}(A^{n+1})}{\text{traça}(A^n)} = \lambda > \mu,$$

i (a) s'esguiex.

Com que $(A^m)_{jj}$ (el terme j de la diagonal principal de A^m) és exactament el número de successions finites admissibles de llargada m començant i acabant amb el símbol j, el nombre de punts fixos de σ_A^m és igual a la traça(A^m).

Suposem $\mu > 2$ i $m \geq 2n_0$. Sigui $j = [(5m)/6]$, aquí $[x]$ denota la funció part entera de $x \in \mathbb{R}$. Llavors afirmen que cada divisor propi de m és també un divisor d'algun dels números $n_0, n_0+1, \ldots, j$. En efecte, qualsevol divisor propi de m és més petit o igual que $m/3$ excepte potser $m/2$ (si és que $m/2$ és enter). Com que

$$j - n_0 + 1 \geq \left[\frac{5m}{6}\right] - \frac{m}{2} + 1 > \frac{5m}{6} - \frac{m}{2} = \frac{m}{3},$$

i $m/2 \geq n_0$ l'afirmació està provada.

Tenint en compte que $\mu > 2$ resulta que

$$\mu^m \geq \mu^{j+1} > \sum_{i=0}^{j} \mu^i = \frac{\mu^{j+1}-1}{\mu-1},$$

i per tant

$$\frac{1}{\mu^m}\sum_{i=0}^{j}\mu^i < 1.$$

Llavors de (a) tenim

$$\begin{aligned}
\text{traça}(A^m) &> \left(\frac{1}{\mu^m}\sum_{i=0}^{j}\mu^i\right)\text{traça}(A^m)\\
&> \frac{1}{\mu^m}\sum_{i=n_0}^{j}\mu^i\text{traça}(A^m)\\
&> \frac{1}{\mu^m}\sum_{i=n_0}^{j}\mu^i\left(\mu^{m-i}\text{traça}(A^i)\right)\\
&= \sum_{i=n_0}^{j}\text{traça}(A^i).
\end{aligned}$$

El nombre de punts periòdics de període m de σ_A és més gran o igual que

$$\text{traça}(A^m) - \sum_{i=1}^{s}\text{traça}(A^{\frac{m}{p_i}}),$$

si la descomposició en factors primers de m és $p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$. Per tant de l'anterior desigualtat obtenim que

$$\text{traça}(A^m) - \sum_{i=1}^{s}\text{traça}(A^{\frac{m}{p_i}}) > 0,$$

d'on resulta que $m \in \text{Per}(\sigma_A)$, i la conclusió (b) està provada.

Per a cada μ amb $1 < \mu < 2$ i cada enter $j \geq 1$ definim $l(\mu, j)$ com l'enter $l \geq 1$ més petit tal que $\mu^l \geq \sum_{i+0}^{j}\mu^i$. El resultat de resoldre l'equació $\mu^l = (\mu^{j+1}-1)/(\mu-1)$ respecte de l és

$$L(\mu, j) = \frac{\log(\mu^{j+1}-1) - \log(\mu-1)}{\log\mu}.$$

Llavors $l(\mu, j)$ és el mínim enter positiu més gran o igual que $L(\mu, j)$. A més $L(\mu, j) - (j+1)$ és una funció creixent en j, i

$$\lim_{j\to\infty}(L(\mu, j) - (j+1)) = -\frac{\log(\mu-1)}{\log\mu}.$$

Així pel μ donat existeix un enter $k(\mu)$ tal que $l(\mu, j) \leq j + 1 + k(\mu)$ per a tot j.

Finalment com que $1 < \mu < 2$ considerem els enters

$$m \geq \max\left\{2n_0, 6\left(1 + \left|\frac{\log(\mu-1)}{\log \mu}\right|\right)\right\}.$$

De nou si $j = [(5m)/6]$ llavors cada divisor propi de m també és un divisor d'algun dels números $n_0, n_0+1, \dots, j$. Com que $m-(j+1) > |\log(\mu-1)/\log \mu|$, tenim que $l(\mu, j) \leq m$, i per tant $\mu^m \geq \sum_{i=0}^{j} \mu^i$. Llavors, repetint els arguments que hem fet per provar la conclusió (a) obtenim com abans que traça$(A^m) > \sum_{i=n_0}^{j}$ traça(A^i), i conseqüentment $m \in \mathrm{Per}(\sigma_A)$, i la conclusió (c) està provada. ∎

El Teorema 1(a) és una conseqüència immediata del següent resultat:

Teorema 3. *Sigui $\mathbb{S}$ una superfície connexa, compacta, orientable amb o sense frontera, i sigui $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ un homeomorfisme isotòpic a un homeomorfisme pseudo-Anosov $F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ amb factor de dilatació λ que té associat una partició de Markov amb matriu de transició A. Sigui μ un número real definit com a la Proposició 1.*

(a) Si $\mu > 2$ llavors $m \in \mathrm{Per}(f)$ per a tot $m \geq 2n_0$, excepte potser per a un nombre finit de m's.

(b) Si $\mu < 2$ llavors $m \in \mathrm{Per}(f)$ per a tot

$$m \geq \max\left\{2n_0, 6\left(1 + \left|\frac{\log(\mu-1)}{\log \mu}\right|\right)\right\}.$$

excepte potser per a un nombre finit de m's.

Prova. Fixem-nos que per (1) de la Secció 3 només cal provar el teorema per F en lloc de f, perquè com veurem tots els punts periòdics que trobarem per F estaran a l'interior de $\mathbb{S}$.

L'única dificultat per provar (a) i (b) a partir de (b) i (c) de la Proposició 1 és que l'aplicació $h : \sum_A \to \mathbb{S}$ definida a la Secció 3 és una semiconjugació entre el *subshift* tipus finit $\sigma_A : \sum_A \to \sum_A$ i l'homeomorfisme pseudo-Anosov $F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ en lloc d'una conjugació. Si més no h només pot deixar d'ésser una conjugació sobre el conjunt de totes les preimatges de les fronteres dels rectangles R_i de la partició de Markov. Com que aquestes fronteres són una unió finita de trossos de les fulles que formen les varietats estables i inestables de les singularitats de F, se segueix que només podem perdre un nombre finit de punts periòdics, els corresponents a les singularitats de F. Per tant el teorema se segueix de la Proposició 1. ∎

Proposició 2. *Sigui $F : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ un homeomorfisme reductible. Llavors el nombre màxim de corbes essencials en la descomposició de F és $m-2$.*

Prova. Ho provarem fent inducció sobre m. Per $m = 0, 1, 2$ (el disc, l'anell i el disc amb dos forats) és clar que $\mathbb{D}_m$ no té corbes essencials. Suposem que és cert per $m \geq 2$ i veiem-ho per $m + 1$.

Notem que les dues corbes essencials C dels dibuixos (1) i (2) de la Figura 3 són homotòpiques sempre que la component frontera B dels dos dibuixos sigui la mateixa.

És clar que qualsevol família de corbes essencials sobre $\mathbf{D}_{m+1}$ que tingui el nombre màxim de corbes essencials sobre $\mathbf{D}_{m+1}$ ha de tenir una corba essencial homotòpica a la corba C d'un dels dibuixos de la Figura 3. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que és la corba C del dibuix (1) de la Figura 3.

Podem pensar $\mathbf{D}_{m+1}$ com la unió de $\mathbb{D}_m$ amb $\mathbf{D}_2$ identificant la component frontera exterior C de $\mathbb{D}_m$ amb la component frontera interior C de $\mathbf{D}_2$ tal com s'indica al dibuix (1) de la Figura 3. Llavors clarament $\mathbf{D}_{m+1}$ té exactament una corba essencial més que $\mathbb{D}_m$, i aquesta corba essencial és homotòpica a C. Per hipòtesi d'inducció, $\mathbb{D}_m$ tenia com a màxim $m-2$ corbes essencials, per tant $\mathbf{D}_{m+1}$ té com a màxim $m-1$ corbes essencials, com volíem provar. ∎

Notem que és fàcil donar exemples d'homeomorfismes reductibles $F : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ tals que el nombre de les seves corbes essencials sigui exactament el màxim possible $m-2$.

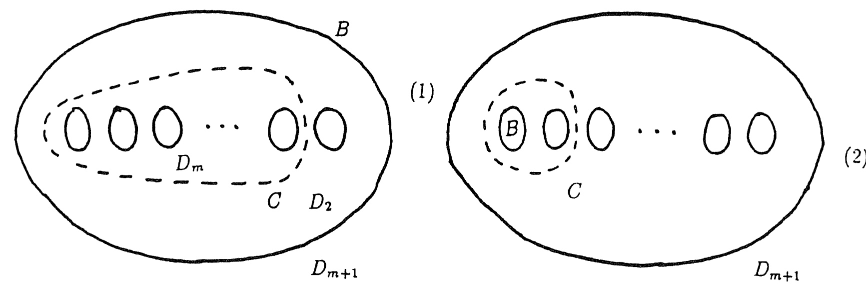

Figura 3. Les dues corbes essencials C dibuixades són homotòpiques.

Corol·lari 2. *Sigui $F : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ un homeomorfisme reductible. Llavors el nombre màxim de components de la descomposició de F és $m-1$.*

Prova. Se segueix fàcilment de la Proposició 2. ∎

La Proposició 2 i el Corol·lari 2 es poden estendre a qualsevol superfície connexa, compacta, orientable o no, amb o sense frontera; per a més detalls vegeu [38].

Prova del Teorema 1(b). Sigui $F : \mathbb{D}_m \to \mathbb{D}_m$ l'homeomorfisme reductible pseudo–Anosov isotòpic a f. Pel Corol·lari 2 tenim que $m-1$ és el nombre màxim de components de la descomposició de F pel teorema de classificació dels homeomorfismes de Nielsen–Thruston (vegeu el Teorema 2): resulta que qualsevol d'aquestes components S_j ha de tenir període $n_j \leq m-1$. Per tant aplicant el Teorema 1(a) a la component S_j de la descomposició de F tal que $F^{n_j}|_{S_j}$ és pseudo–Anosov obtenim la conclusió (b) del Teorema 1. De nou hem utilitzat la propietat (1) de la Secció 3. ∎

5 Homeomorfismes pseudo–Anosov de l'esfera amb pinçaments

En aquesta secció provarem la conclusió (c) del Teorema 1.

Encara que el resultat principal provat en aquesta secció (Teorema 4) també és veritat per a homeomorfismes que canvien l'orientació (vegeu Llibre i MacKay [36]), aquí només ho provarem pels homeomorfismes que preserven l'orientació, perquè nosaltres aquí estem pensant en les aplicacions d'aquests resultats a l'estudi de les òrbites periòdiques dels sistemes Hamiltonians amb 2 graus de llibertat.

Recordem que el quocient del tor $\mathbb{T}^2$ per la reflexió R respecte d'un punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ és homeomorfe a $\mathbb{S}^2$, però que l'estructura diferenciable que així obtenim sobre $\mathbb{S}^2$ presenta quatre singularitats sobre les quals l'aplicació recobriment és 1–1 en lloc d'ésser 2–1. Més concretament, ens mirem el tor $\mathbb{T}^2$ com $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, i prenem $R(x,y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$ sobre $\mathbb{R}^2$. Llavors les singularitats del quocient són (x_0, y_0), $(x_0 + 1/2, y_0)$, $(x_0, y_0 + 1/2)$ i $(x_0 + 1/2, y_0 + 1/2)$. Denotem per V el conjunt d'aquestes quatre singularitats. Si excloem V de $\mathbb{S}^2$ obtenim $\mathbb{S}^2_4$ l'esfera amb quatre pinçaments. Aquesta idea té una llarga història amb diversos noms, com l'aplicació de Weierstrass i la involució hiperel·líptica.

Diem que una aplicació $f : M \to M$ commuta amb un grup G d'aplicacions de M en M si per a tot $g \in G$ existeix $g' \in G$ tal que $g \circ f = f \circ g'$. Llavors l'aplicació f indueix una aplicació que denotem per $f|G$ sobre l'espai quocient M/G.

Si l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ commuta amb el grup G generat per les trasl·lacions $T_m(x) = x+m$ mitjançant vectors enters $m \in \mathbb{Z}^2$ i la reflexió R respecte del punt z_0, llavors f indueix una aplicació sobre $\mathbb{S}^2_4$. A més si f és Anosov, llavors $f|G$ és pseudo–Anosov, perquè les foliacions i l'acció sobre elles baixa al quocient, i les quatre singularitats introduïdes

presenten una única separatriu. Aquesta idea d'obtenir un pseudo–Anosov com a quocient d'un Anosov ja ha estat utilitzada per diversos autors i notablement per en Katok [31].

Donat un automorfisme hiperbòlic A sobre el tor $\mathbb{T}^2$ existeix un nombre finit de possibles reflexions R que commuten amb l'aplicació lineial induïda per la matriu A sobre $\mathbb{R}^2$, però sempre podem escollir $z_0 = (0,0)$. Notem que els possibles punts de reflexió z_0 vénen determinats per l'equació $(I - A)z_0 \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^2$, i per tant el nombre de possibles tries per a R és $|\det(I - A)|$. Aquí és clar $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^2 = \{z \in \mathbb{Q} : 2z \in \mathbb{Z}\}$, i $\mathbb{Q}$ denota el conjunt de números racionals. De fet com es veu a la següent proposició qualsevol homeomorfisme pseudo–Anosov de $\mathbb{S}^2_4$ pot ser obtingut d'aquesta manera.

Proposició 3. *Cada classe d'isotopia d'homeomorfismes pseudo–Anosov sobre $\mathbb{S}^2_4$ conté un representant que és el quocient d'un automorfisme hiperbòlic del tor $\mathbb{T}^2$ per la reflexió respecte d'algun punt, on els pinçaments són les quatre singularitats quocient.*

Prova. De la fórmula
$$-4 = 2\chi(\mathbb{S}^2_4) = \sum_s (2 - p_s),$$
i com que $p_s \geq 3$ per a tota singularitat s (vegeu per a més detalls la Secció 2), resulta que les úniques singularitats de les foliacions associades a un homeomorfisme pseudo–Anosov sobre $\mathbb{S}^2_4$ són les quatre singularitats dels pinçaments. Com s'indica a [17] podem prendre un recobriment ramificat de la superfície on tenim definit l'homeomorfisme pseudo–Anosov per treure–li totes les singularitats de les foliacions. En el nostre cas això significa que tenim un recobriment ramificat de $\mathbb{S}^2$ amb quatre punts de ramificació de tipus arrel quadrada. És a dir que obtenim un homeomorfisme Anosov sobre $\mathbb{T}^2$. Com que cada homeomorfisme Anosov de $\mathbb{T}^2$ és isotòpic a un lineial (vegeu [40]), la proposició se segueix. ∎

El problema de descriure les classes de conjugació dels homeomorfismes pseudo–Anosov sobre una superfície donada és molt difícil, fins i tot pels automorfismes hiperbòlics del tor $\mathbb{T}^2$. Aquest darrer cas es pot reduir a un problema de teoria algebraica de números, que es pot resoldre utilitzant números de Dirichlet, vegeu per a més detalls [45]. Aquí no necessitem la classificació completa, però sí que anirà bé utilitzar la conjugació per reduir el nombre de casos a estudiar.

Notem que podem reemplaçar la matriu A associada a l'automorfisme hiperbòlic del tor per $-A$ quan convingui, és clar que haurem de considerar el corresponent canvi en la reflexió R.

Lema 1. *Sigui A una matriu hiperbòlica de $SL(2,\mathbb{Z})$. Suposem que A commuta amb el grup G generat per les translacions T_m i la reflexió R respecte del punt z_0, tots ells actuant* *sobre $\mathbb{R}^2$. Llavors A/G és diferenciablement equivalent a $(-A)/G'$, on G' és el grup de les translacions T_m i la reflexió R' respecte del punt $(A-I)(A+I)^{-1}z_0$.*

Prova. L'aplicació $(RA)/G$ és la mateixa que A/G. Sigui $H(z)=z+\alpha$, $z\in\mathbb{R}^2$, per algun $\alpha\in\mathbb{R}^2$. Llavors

$$HSAH^{-1}(z)=2z_0+(I+A)\alpha-Az.$$

Escollint $\alpha=-2(I+A)^{-1}z_0$ obtenim $HSAH^{-1}=-A$. De la igualtat

$$HSH^{-1}(z)=(I-A)\alpha-z=2(A-I)(A+I)^{-1}z_0-z=S'(z),$$

el resultat se segueix. ∎

Ara seguirem la idea de Manning [41] per provar que podem reduir-nos a considerar que totes les components de la matriu A són positives. Més exactament tenim el següent resultat:

Proposició 4. *Tot homeomorfisme pseudo-Anosov sobre $\mathbb{S}^2_4$ que preserva l'orientació pot reduir-se per conjugació a l'associat a una matriu A amb totes les entrades positives.*

Prova. Sense perdre generalitat podem suposar que tots els valors propis de A són positius, perquè en cas contrari considerem $-A$ en lloc de A utilitzant el Lema 1.

Siguin λ^s i λ^u els valors propis de A satisfent $0<\lambda^s<1<\lambda^u$, i sigui E^s i E^u les rectes invariants per A definides pels vectors propis associats a λ^s i λ^u respectivament. Llavors $\mathbb{R}^2\setminus(E^s\cup E^u)$ té quatre sectors que denotem per C_1, C_2, $-C_1$ i $-C_2$ on el sector C_1 no és més ample que el sector C_2, i $\mathrm{Cl}(\mathrm{C_1})\cap\mathrm{Cl}(\mathrm{C_2})\subset\mathrm{E^u}$. On Cl(C) denota la clausura del conjunt C com a subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

Volem escollir dos generadors (m_1,n_1) i (m_2,n_2) de $\mathbb{Z}^2$, el primer a C_1 i el segon a C_2. Com l'automorfisme els anirà aplicant cada vegada més a prop de E^u, voldrem que el quadrant positiu que defineixen s'apliqui dintre seu i així la matriu que representa l'automorfisme en aquesta base tindrà totes les seves entrades positives.

Escollim (m_1,n_1) com el punt de $C_1\cap\mathbb{Z}^2$ més a prop de l'origen, i escollim $(m',n')\in\mathbb{Z}^2$ tal que $m_1n'-n_1m'=1$; això és possible perquè m_1 i n_1 són primers entre si. Sigui $T=\{\pm(km_1+m',kn_1+n'):k\in\mathbb{Z}\}$. És un càlcul fàcil provar que $T\cap C_2\neq\emptyset$. Llavors triant $(m_2,n_2)\in T\cap C_2$, es pot comprovar que A respecte de la base (m_1,n_1), (m_2,n_2) té totes les entrades positives. ∎

Notem que en la Proposició 4 permutant els eixos si cal, podem considerar que la direcció inestable té pendent a l'interval $(0,1)$.

Veiem ara com comptar el nombre de punts periòdics d'un homeomorfisme pseudo-Anosov sobre $\mathbb{S}^2_4$ associat a una matriu A en les hipòtesis de la Proposició 4.

Proposicioó 5. *Pel quocient f d'un automorfisme hiperbòlic del tor en la forma normal de la Proposició 4, per l'acció $\mathbb{Z}_2$ generada per la reflexió respecte d'un punt, el nombre F_n de punts fixos de f^n és $F_n=$ traça(A^n).*

Prova. Un punt $z\in\mathbb{R}^2$ és un punt fix per f^n si i només si existeix $m\in\mathbb{Z}^2$ tal que (a) $A^nz=z+m$ o (b) $A^nz=2z_0-z+m$. Es fàcil de veure que el nombre d'aquests punts z projectats sobre el tor $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ és $|\det(I-A^n)|$ o $|\det(I+A^n)|$ en els casos (a) i (b) respectivament. Es veu fàcilment que un punt z pertany a les dues classes si i només si és un del quatre pinçaments. En passar de $\mathbb{T}^2$ a $\mathbb{S}^2_4$ el nombre de punts fixos ha de dividir-se per dos, excepte els punts de pinçament. Per tant

$$F_n=\frac{1}{2}\left(|\det(I-A^n)|+|\det(I+A^n)|\right).$$

I si A està en la forma normal de la Proposició 4, tenim que $F_n=$ traça(A^n). ∎

La Proposició 5 també es podria haver provat utilitzant els números de Lefschetz de f^n, però aquí hem preferit donar una demostració independent de la teoria del punt fix.

Teorema 4. *Si f és un homeomorfisme pseudo-Anosov de $\mathbb{S}^2_4$, llavors* $\mathrm{Per}(f)=\mathbb{N}$.

Prova. El resultat obtingut en la Proposició 5 dóna exactament el mateix nombre de punts fixos per f^n que pel *subshift* de tipus finit amb matriu de transició $A=(a_{ij})$. Aquest *subshift* ve donat per l'aplicació σ definida sobre l'espai de successions doblement infinites $e=\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre el gràfic orientat amb vèrtexs 0 i 1, i a_{ij} fletxes del vèrtex i al vèrtex j, per $(\sigma(e))_n=e_{n+1}$. Per a més detalls sobre els *subshifts* vegeu per exemple [14].

Ara bé, els *subshifts* amb matriu de transició A com en la Proposició 4 tenen llaços de tots els períodes. Una manera de veure això és observar que el nostre gràfic conté com a subgràfic al que té per matriu de transició

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

I aquest subgràfic conté llaços tancats repetint cada un dels segments minimals 0, 01, 010, 0100, 01000, ... Per tant f té òrbites periòdiques de tots els períodes. ∎

Després que es provés el Teorema 4 a [36] en Guaschi [23] va provar el següent resultat:

Teorema 5. *Si f és un homeomorfisme pseudo-Anosov de $\mathbb{S}^2_5$ (l'esfera amb 5 pinçaments), llavors* $\mathrm{Per}(f)=\mathbb{N}$.

Noteu que els Teoremes 4 i 5 són independents, és a dir, coneixent–ne un no podem deduir–ne l'altre.

Prova del Teorema 1(c). En les hipòtesis del Teorema 1(c) si col·lapsem cada component de la frontera $\mathbb{D}_m$ a un punt i suprimim aquests punts, llavors, tenint en compte que ja faltaven els punts de X, obtenim $\mathbb{S}^2_4$ o $\mathbb{S}^2_5$. I provar la conclusió (c) equival a demostrar els Teoremes 4 i 5. Per tant la conclusió (c) del Teorema 1 està provada. ∎

Referencies

[1] R. Abraham i J. Marsden, *Foundation of Mechanics* 2nd Edition, Benjamin–Cummings Publ. Co., 1978.

[2] H. Aref, "Stirring by chaotic advection", J. Fluid Mech. **143** (1984), 1–21.

[3] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer–Verlag, 1978.

[4] V. I. Arnol'd, *Dynamical systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. **III**, 1988.

[5] D. Asimov i J. Franks, "Unremovable closed orbits", a J. Palis (ed.), "Geometric dynamics", Springer Lecture Notes in Math. **1007** (1983), 22–29.

[6] G. D. Birkhoff, "Proof of Poincaré's geometric theorem", Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913), 14–22.

[7] G. D. Birkhoff, "An extension of Poincaré's last geometric theorem", Acta Math. **47** (1925), 297–311.

[8] J. S. Birman i M.E. Kidwell, "Fixed points of pseudo–Anosov diffeomorphisms of surfaces", Adv. in Math. **46** (1982), 217–220.

[9] R. Bowen, "Entropy and the fundamental group", Springer Lecture Notes in Math. **668** (1978), 21–29.

[10] P. L. Boyland, "Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms", Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 203–213.

[11] P. L. Boyland i J. Franks, "Notes on dynamics of surface homeomorphims", University of Warwick, Preprint, 1989.

[12] J. Casasayas i J. Llibre, *Qualitative analysis of the Anisotropic Kepler problem*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **312**, 1984.

[13] A. J. Casson i S. A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Math. Soc. Student Texts, vol. **9**, 1988.

[14] M. Denker, C. Grillenberg i K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Springer Lecture Notes in Math., Vol. **527**, 1976.

[15] M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice–Hall, 1976.

[16] D. B. A. Epstein, "Pointwise periodic homeomorphisms", Proc. London Math. Soc. **42** (1981), 415–460.

[17] A. Fathi, F. Laudenbach i V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66–67**, 1979.

[18] J. Franks, "A variation on the Poincaré–Birkhoff theorem", Contemporary Math. **81** (1988), 111–116.

[19] J. Franks, "Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem", Annals of Math. **128** (1988), 139–151.

[20] J. Franks, "Periodic points and rotation number for area preserving diffeomorphims of the plane", Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Mat. **71** (1990), 105–120.

[21] J. M. Gambaudo i J. Llibre, "A note on the periods of surface homeomorphisms", J. Math. Anal. Appl. **177** (1993), 627–632.

[22] J. Guaschi, *Dynamics of surface homeomorphisms: braid types and coexistence of periodic orbits*, Ph. D. thesis, University of Warwick, 1991.

[23] J. Guaschi, "Pseudo–Anosov braid types of the disc or sphere of low cardinality imply all periods", J. London Math. Soc. **50** (1994), 594–608.

[24] J. Guaschi, J. Llibre i R. S. MacKay, "A classification of braid types for periodic orbits of diffeomorphisms of surfaces of genus one with topological entropy zero", Universitat Autònoma de Barcelona, Publicacions Matemàtiques **35** (1991), 543–558.

[25] G. R. Hall, "Some problems on dynamics of annulus maps", Contemporary Math. **81** (1988), 135–152.

[26] T. Hall, "Unremovable periodic orbits of homeomorphisms", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **110** (1991), 523–531.

[27] M. Handel, "The entropy of orientation–reversing homeomorphisms of surfaces", Topology **21** (1982), 291–296.

[28] M. Handel, "The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed", Comm. Math. Phys. **127** (1990), 339–349.

[29] M. Handel i W. Thurston, "New proofs of some results of Nielsen", Avd. in Math. **56** (1985), 173–191.

[30] A. Katok, "Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorfisms", Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Mat. **51** (1980), 137–174.

[31] A. Katok, "Bernoulli diffeomorphisms on the disk", Annals of Math. **110** (1979), 529–547.

[32] B. Kolev, "Periodic orbits of period 3 in the disk", Nonlinearity **7** (1994), 1067–1071.

[33] G. Laval i D. Gresillon, *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, Editions de Physique Publ., Orsay, 1980.

[34] T. Y. Li i J. A. Yorke, "Period three implies chaos", Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.

[35] J. Llibre i R. S. MacKay, "A classification of braid types for diffeomorphisms of genus zero with topological entropy zero", J. London Math. Soc. **42** (1990), 562–576.

[36] J. Llibre i R. S. MacKay, "Pseudo–Anosov homeomorphisms on a sphere with four punctures have all periods", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 539–549.

[37] J. Llibre i A. Nunes, *Separatrix surfaces and invariant manifolds of a class of integrable Hamiltonian systems and their perturbations*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **513**, 1994.

[38] J. Llibre i Ye Yanqian, "On the dynamics of surface vector fields and homeomorphisms", Per apareixer als Proc. of "Bifurcations in differentiable dynamics", Diepenberg, 1992.

[39] R. S. MacKay, "Introduction to the dynamics of area–preserving maps", Proc. of the US Particle Accelerator School, SLAC, Ed. M. Month, 1985.

[40] A. K. Manning, "There are no new Anosov diffeomorphisms of tori", Amer. J. Math. **96** (1974), 422–429.

[41] A. K. Manning, "A Markov partition which displays the homology of a toral automorphism", a "Papers presented to Christopher Zeeman", University of Warwick, 1988.

[42] M. Month i J. C. Herrera, "Nonlinear Dynamics and the Beam–beam interaction", Amer. Inst. Phys. Conf. Proc. **57**, 1979.

[43] J. Nielsen, *Collected mathematical papers*, Birkhäuser, 1986.

[44] A. Olvera i C. Simó, "An obstruction method for the destruction of invariant curves", Physica D **26** (1987), 181–192.

[45] I. C. Percival i F. Vivaldi, "Aritmetical properties of strongly chaotic motions", Physica D **25** (1987), 105–130.

[46] H. Poincaré, "Sur un théoreme de géometrie", Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **33** (1912), 375–407.

[47] A. N. Sharkovskii, "Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itsef", Ukr. Math. Z. **16** (1964), 61–71; Proceedings of the Conference "Thirty years afeter Sharkovskii Theorem: New perspectives", Series on Nonlinear Science, Series B, vol. **8** (1995), 1–11.

[48] J. Sotomayor, *Liçoes de equações diferenciais ordinárias*, Projecto Euclides **1**, IMPA, 1979.

[49] W. P. Thurston, "On the geometry and dynamics of surfaces" Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1990), 417–431.

DISCURS DE RESPOSTA

PER L'ACADÈMIC NUMERARI

Excm. Sr. Dr. JOAQUIM AGULLÓ I BATLLE

Excm. Sr. President de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, Excms. companyes i companys membres de l'Acadèmia, Excmes. Autoritats i representacions, senyores i senyors:

Agraeixo a l'Acadèmia l'honor que em fa a l'encarregar-me que respongui en nom de la corporació al discurs d'ingrés fet pel Dr. Jaume Llibre i Saló. Representar l'Acadèmia en la recepció del Professor Llibre com a membre numerari d'aquesta corporació em resulta especialment grat per l'indubtable enriquiment científic que representarà la seva presència en la nostra institució.

Abans de respondre al vostre discurs, Dr. Llibre, em plau donar-vos una cordial benvinguda a aquesta corporació i expressar-vos la seva satisfacció per poder comptar-vos entre els seus membres.

I com és costum, abans d'entrar en el comentari del discurs, faré una breu exposició del vostre curriculum vitae científic i acadèmic.

Llicenciat en Matemàtiques en la Universitat de Barcelona el 1975, obtingué el grau de Doctor en Matemàtiques el 1979 en la Universitat Autònoma de Barcelona, universitat on el 1986 aconseguí la plaça de Catedràtic Numerari.

Ja en el període de doctorat s'especialitzà en l'àrea temàtica que donaria lloc a les tres línies que han emmarcat des d'aleshores la seva recerca, i que són: *Els sistemes dinàmics discrets, la teoria qualitativa de les equacions diferencials, i els sistemes Hamiltonians i la mecànica celeste*. En totes elles ha fet contribucions remarcables, d'entre les quals destaquen les relatives a la dinàmica combinatòria i entropia en una dimensió, a l'estabilitat estructural dels sistemes polinomials, i a les superfícies separatrius i varietats invariants d'una classe de sistemes Hamiltonians integrables, així com les que ens ha presentat avui en la seva memòria d'ingrés.

La seva obra científica és remarcable tant per l'extensió com per la qualitat. Comprèn més de 200 articles, bon nombre dels quals han estat fets en col·laboració amb eminents investigadors de l'area pertanyents a diversos grups de recerca de reconegut prestigi internacional. Ha dirigit 22 tesis doctorals i ha estat el fundador del Grup d'Investigació en Sistemes Dinàmics de la Universitat Autònoma de Barcelona, que actualment dirigeix i que aplega uns 30 membres pertanyents a diverses universitats catalanes i a la Universitat de les Illes Balears.

Investigador conegut i prestigiat internacionalment, ha estat convidat a fer nombroses estades en centres nacionals i estrangers. Així mateix ha estat contractat com a professor visitant per la Northerwestern University, el Californian Institute of

Technology, la Université de Tours i la Université d'Orleans. D'entre els seus nombrosos projectes de recerca, dos d'importants han estat contractats per l' ESA (European Space Agency) i un per la NASA.

És membre de l'Institut d'Estudis Catalans.

Passo ara a referir-me a la magnífica memòria d'ingrés presentada pel Dr. Llibre. En ella fa una aportació important en l'àmbit de l'estudi del conjunt d'òrbites periòdiques dels sistemes Hamiltonians amb 2 graus de llibertat no integrables, utilizant l'estructura dels homeomorfismes de superfície.

És paradigma d'aquests sistemes el moviment d'una nau espacial o d'un asteroide en el pla del moviment de Júpiter al voltant del Sol, sota l'acció del camp gravitatori creat per aquests dos cossos celestes. En el ben entès que la massa de la nau o del asteroide és negligible comparada amb la dels dos cossos.

Si la massa d'un dels cossos és molt inferior a la de l'altre, el problema, encara que no integrable, és prou prop d'un problema integrable no degenerat com per presentar, d'acord amb el teorema de KAM, tors invariants que són deformacions contínues dels tors invariants del sistema integrable corresponent al valor nul de la massa d'un dels dos cossos.

El Dr. Llibre ha centrat el seu estudi -fet per mitjà de l'homeomorfisme establert per una secció de Poincaré- en les trajectòries contingudes dins d'un tor invariant corresponent a un cert nivell d'energia del sistema Hamiltonià. Moltes d'aquestes trajectòries presenten el moviment erràtic sense gaire ordre aparent anomenat caòtic. Però en aquestes regions de l'espai de fases on aparentment domina el moviment caòtic, habitualment es poden trobar moltes òrbites periòdiques, d'indubtable interès teòric i pràctic, que tanquen després d'1, 2, 3, ... interseccions amb la secció de Poincaré, i que per aquest motiu se les anomena de període 1, 2, 3, ...L'objectiu perseguit en el treball presentat és el de trobar el conjunt de períodes d'aquestes òrbites.

Per tal de donar més amplitud a la recerca, i com és usual en aquests estudis, s'ha previst que es puguin excloure les trajectòries contingudes dins un altre tor, contingut dins del tor considerat, i que talla la secció de Poincaré exactament en un nombre finit de components connexes.

La contribució més destacable en la memòria presentada pel Dr. Llibre, és que si l'homeomorfisme establert per la secció de Poincaré d'un tor invariant corresponent a un cert nivell d'energia (amb l'exclusió, si s'escau, dels forats creats per un altre tor que li és interior) és isotòpic a un homeomorfisme pseudo-Anosov, llavors el conjunt de períodes de les òrbites periòdiques conté tots els naturals a partir d'un natural k. Sobre aquest mateix cas només se sabia que aquest conjunt de períodes era infinit, però se'n desconeixia que a partir d'un cert valor hi són tots els períodes.

He de confessar que com a professor i investigador en l'àmbit de l'Enginyeria Mecànica, sempre m'ha produït una certa enveja tothom qui, des de departaments de Física i Matemàtiques, practiquen la docència i la recerca en l'àmbit de la mecà-

nica Hamiltoniana. Els seus sistemes es regeixen per un dels entremats de lleis més ben estructurat i elegant de la Física, i presenten tota mena de propietats d'una extrema bellesa formal. Són els sistemes per excel·lència dels principis extremals, les invariàncies, les simetries i les antisimetries, i altres propietats tan sorprenents com les que han centrat el discurs del Dr. Llibre.

En canvi, en l'àmbit de l'enginyeria els sistemes Hamiltonians són un referent llunyà al qual els seus sistemes dinàmics no poden accedir sense perdre bona part del seu realisme. Els nostres sistemes són més gasius en propietats senzilles, són d'estudi més ingrat, són refractaris a les metodologies analítiques més potents i d'elegància formal més gran. En pensar-hi, no puc evitar d'evocar els versos de l'Assaig de càntic al Temple de Salvador Espriu que diuen:

Oh, que cansat estic de la meva
covarda, vella, tan salvatge terra,
i com m'agradaria allunyar-me'n
nord enllà,
on diuen que la gent és neta
i noble, culta i rica, lliure,
desvetllada i feliç!

Sovint envejo el territori amable, culte i ric dels sistemes Hamiltonians, però, com també passa en el poema d'Espriu, al capdavall segueixo quedant-me en la terra més salvatge i poc agraïda que, en aquest cas, és la dels sistemes dinàmics propis de l'enginyeria.

Feta aquesta petita disgressió, només em cal dir que l'Acadèmia rep avui, doncs, amb el Dr. Jaume Llibre i Saló , un eminent matemàtic i prestigiós expert en mecànica Hamiltoniana, de qui espera una molt fructífera col·laboració.

Professor Llibre, sigueu benvingut a la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona.