INVARIANTES DETERMINANTALES DE MODULOS SOBRE CIERTOS ANILLOS NO CONMUTATIVOS.

Julián Susperregui Lesaca

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS

Secretaría

La presente Tesis Doctoral queda registrada en el folio nº del correspondiente libro de Registro, con el nº

VALLADOLID,

EL ENCARGADO DEL REGISTRO.

Memoria presentada para optar
al Grado de Doctor en Ciencias,
Sección Matemáticas por
Julián Susperregui Lesaca

ANTONIO CAMPILLO LOPEZ, CATEDRATICO DE ALGEBRA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

C E R T I F I C A : "Que la presente Memoria "Invariantes Determinantales de Módulos sobre ciertos Anillos no conmutativos" ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Algebra, Geometría y Topología de la Universidad de Valladolid por D. Julián Susperregui Lesaca, y para que conste en cumplimiento de la presente legislación, presenta y apadrina ante la Facultad de Ciencias de dicha Universidad la referida Tesis de Doctorado en Ciencias, Sección Matemáticas, en Valladolid a 29 de Abril de mil novecientos ochenta y siete.

Fdo. Antonio Campillo López

En estas breves líneas quiero manifestar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de una u otra manera, han hecho posible que esta etapa de formación haya llegado a buen fin. Especialmente al Profesor D. Antonio Campillo López sin cuya ayuda, científica y humana no hubiera sido posible realizar el presente trabajo.

A todos vosotros GRACIAS. EZKERIK AZKO.

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo de esta Memoria, es obtener invariantes de naturaleza determinantal para módulos de tipo finito sobre dos clases de anillos no conmutativos, que aparcen como objeto fundamental de estudio en varios contextos.

La primera clase de anillos son los anillos graduados anticonmutativos y más concretamente los anillos graduados del tipo $\mathcal{D} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{D}_n$ donde $a.b=(-1)^{p.q}.b.a$ siendo a, b respectivamente elementos homogéneos de grados p y q. El álgebra exterior de un módulo sobre un anillo conmutativo, las álgebras de formas diferenciales sobre una variedad, los anillos de Cohomología (Cohomología singular, Cohomología de De Rham, Cohomología de Grupos, etc.) son ejemplos de este tipo de anillos. Los módulos graduados (anticonmutativos) sobre estos anillos tienen una estructura a la derecha y otra a la izqierda, equivalentes. Como ejemplo significativo de módulos de este tipo que surgen en la prática, citaremos los siguientes:

1.- Si $f:\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$ es una aplicación A-lineal de módulos sobre el anillos A conmutativo, entonces el álgebra exterior $M=\wedge\mathfrak{M}$ es un módulo graduado sobre $\mathcal{D}= \wedge\mathfrak{N}$.

2.- El ideal diferencial asociado a una filtración (posiblemente singular) es un módulo sobre el álgebra de formas diferenciales sobre la variedad que se considera.

3.- si $f:Y \longrightarrow X$ es una aplicación continua sobre espacios topológicos, entonces $H^*(Y, \mathbb{Z})$ es un módulo graduado sobre $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Las siguientes clases de anillos son los anillos filtrados cuyo graduado asociado sea un anillo conmutativo, y más concretamente cuando éste sea un dominio noetheriano e incluso factorial. El ejemplo más significativo, y el que respalda nuestro estudio es el anillo de operadores diferenciales lineales sobre una variable compleja. Dicho anillo $\mathcal{D}$ tiene una filtración $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde F_n es el submódulo formado por los operadores P del tipo

$$P=\sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha \partial^\alpha \quad , \quad \alpha\in\mathbb{N}^n$$

α es un multiíndice y a_α una función. El graduado asociado a la filtración es un anillo conmutativo, $gr\mathcal{D}$, cuyo espectro analítico es el espacio cotangente a la variedad , y es, por tanto, localmente factorial. Los módulos a la izquierda sobre $\mathcal{D}$ corresponden, según la terminología moderna a los sistemas diferenciales (véase por ejemplo [45]).

Supongamos que $\mathcal{D}$ es o bien un anillo graduado anticonmutativo o bien un anillo filtrado con graduado conmutativo y las propiedades anteriormente citadas (se admite, en particular, que $\mathcal{D}$ sea un anillo conmutativo con la filtración trivial) y sea M un módulo (a la izquierda) sobre $\mathcal{D}$ que es de presentación finita. Fijemos una tal presentación para M

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{D}^q \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

y consideremos el módulo de syzygeas $syz(\underline{m}, M) = \ker\pi$ donde $\underline{m}=\{\pi(e_1), ..., \pi(e_q)\}$ y $\{e_1, ..., e_q\}$ la base estándar de $\mathcal{D}^q$. Entonces $\forall r$, $0\leq r\leq q$ sea $\mathfrak{F}_r(\pi)= \mathfrak{F}_r(\underline{m}, M)$ el ideal de $\mathcal{D}$ generado por los menores de orden q de todas las matrices posibles de syzygeas y pogamos $\mathfrak{F}_r(\pi)= \mathcal{D}$ si $r\geq q$. Entonces las propiedades habituales de los determinantes para el ccaso conmutativo permiten mostrar que $\mathfrak{F}_r(\pi)$ no depende de π, y por tanto son invariantes del módulo M, que se denotan habitualmente por $\mathfrak{F}_r(M)$. Más aún, $\mathfrak{F}_r(M)$ se puede calcular en términos de la matriz asociada a λ, siendo, entonces, el ideal generado por los menores de orden q-r de la matriz asociada a λ. Los invariantes $\mathfrak{F}_r(M)$ fueron introducidos por Fitting en [19], de ahí su nombre. Para un tratamiento moderno de la teoría de Ideales de Fitting y aplicaciones citaremos a Northcott[43] y sobre todo la Memoria de J.A. Hermida[27] la cual ha tenido una influencia notoria en nuestro trabajo.

En el caso no conmutativo la situación es muy diferente. En primer lugar no se tiene una buena teoría de determinantes en este caso, salvo la posibilidad obvia de conmutativizar el anillo (véase I §2 de esta Memoria) que asocia a cada $\mathcal{D}$-módulo ideales del anillo $\mathcal{D}/J_c$ (donde J_c es el ideal conmutador del anillo $\mathcal{D}$). Nosotros,inicialmente, hemos intentado dar una teoría basada en la definición de determinante por medio de la expresión habitual, como suma de productos elementales (noción estudiada por Puystjens [46]), pero los resultados eran tan insatisfactorios que no merecen mención alguna. Por esa razón, hemos optado por desarrollar detalladamente los dos casos particulares que más nos preocupaban y para los que se conoce una teoría de determinantes razonable. El tipo de dificultades que aparecen es característico en cada caso, lo cual refuerza nuestra observación que aconseja tratar por separado cada uno de ellos.

En el caso de anillos graduados anticonmutativos se tiene una teoría de determinantes para matrices de elementos de $\mathcal{D}$ que depende de la elección de unos pesos $d_1, \dots, d_q$ de $\mathbb{Z}$ para las columnas de dichas matrices (véase I §3). Por otro lado, a cada sistema de generadores homogéneo $\underline{m}$ de un módulo graduado de generación finita se tiene asociada la familia de grados $d_1, \dots, d_q$ de los elementos de $\underline{m}$, por tanto los determinantes de syzygeas relativas a $\underline{m}$ cobran sentido y así para cada natural p se tiene definido el ideal determinantal $\mathfrak{U}_p(\underline{m}, M)$ generado por los menores de orden p de todas las matrices de syzygeas. Los principales resultados son los siguientes:

1.- $\mathfrak{U}_p(\underline{m}, M)$ tiene sentido para cada natural p.

2.- $\mathfrak{U}_p(\underline{m}, M)$ es un dato trivial si el cardinal $t_1(\underline{m})$ de los elementos de grado impar en $\underline{m}$ no es mínimo entre el conjunto de cardinales de los elementos de grado impar de los sistemas de generadores homogéneos.

3.- Si $t_1(M)$ es mínimo y si $t_2(\underline{m})$ es el cardinal de los elementos de grado par de $\underline{m}$ entonces se tiene el invariante global

$$\mathcal{J}_p(M) = \mathcal{U}_{p+t_2(\underline{m})+t_2(M)}(\underline{m}, M)$$

donde $t_2(M)$ corresponde al cardinal mínimo de los elementos de grado par de un sistema generador homogéneo de M.

4.- Además de los invariantes globales $\mathcal{J}_p(M)$ (que llamaremos invariantes globales de Fitting), se obtienen invariantes de Fitting locales. En términos precisos si $\mathcal{D} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{D}_n$ y $p \in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_0)$, entonces se tiene los $\mathcal{D}_p$ ideales homogeneos $\mathcal{J}_p(M_p)$. Los invariantes locales dan una información adicional sobre M que es abundante, pues, de hecho, no existe un haz razonable de $\mathcal{D}_0^*$-módulos(donde $\mathcal{D}_0^*$ es el haz estructural de $\mathrm{Spec}\,\mathcal{D}_0$) cuyas fibras sean los invariantes globales. Esto solo resulta así en casos particulares, y aún en ese caso las secciones globales del haz son un invariante diferente de $\mathcal{J}_p(M)$.

En el caso de los anillos filtrados se tiene una noción de determinante basada en el determinante de Dieudonné[16] definido para matrices sobre cuerpos no conmutativos. En este caso el determinante está introducido con objeto de describir el Grupo Lineal General sobre dichos cuerpos y, por tanto, tiene un buen comportamiento respecto del producto de matrices, pero en absoluto tiene propiedades razonables de multilinealidad(véase I §4). Con las condiciones dadas al principio, el anillo filtrado $\mathcal{D}$ es un subanillo de su microlocalizado total(en el sentido algebraico introducido por Springer [55]) y dicho microlocalizado total es un cuerpo k. El determinante sobre k induce una función determinante valorada en gr k cuyo valor sobre las matrices de $\mathcal{D}$ está, de hecho, en gr $\mathcal{D}$ (véase I §4.2). Más aún, en el caso en que $\mathcal{D}$ sea un anillo de operadores diferenciales, $\mathcal{D}$ es también un dominio de Ore a la izquierda y se tiene también definido el determinante de Dieudonné sobre su cuerpo de cocientes (a la izquierda), que a su vez induce una función determinante valorada en un cierto semigrupo multiplicativo conteniendo a los elementos homogéneos de gr $\mathcal{D}$ y que para el caso de matrices con coeficientes en $\mathcal{D}$, el valor del determinante está, de hecho, en gr $\mathcal{D}$. En I §4.2 vemos que ambos conceptos de determinante para $\mathcal{D}$ son coincidentes, por tanto hay solo una posibilidad de estudiar los ideales de Fitting.

Introducimos los ideales $\mathfrak{F}_r(\pi)$, $\mathfrak{F}_r(\lambda)$, respectivamente, como los ideales de gr $\mathcal{D}$ generados por todos los menores de orden q-r de matrices de syzygeas , o bién de la matriz asociada al $\mathcal{D}$-homomorfismo λ. Asimismo se introducen unos ideales auxiliares $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi)$ y $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\lambda)$ que se describen en términos conmutativos (con más precisión en términos de ideales de Fitting de ciertos módulos sobre gr$\mathcal{D}$). Los principales resultados son los siguientes:

1.- Se tiene $\sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi)}$

es decir $\mathfrak{F}_r(\pi)$ se puede calcular en términos conmutativos.

2.- Para cada elemento homogéneo e irreducible $h \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$ se tiene

$$v_h(\mathfrak{F}_r(\pi)) = v_h(\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi))$$

donde v_h es la valoración discreta asociada al elemento h.

3.- $\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)}$ no depende de π y por tanto es un invariante de M

4.- Para cada elemento homogéneo e irreducible $h \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$ se tiene que $v_h(\mathfrak{F}_o(\pi))$ no depende de π y es un invariante de M.

5.- Si M tiene una buena filtración fijada, entonces se tienen invariantes locales y globales del módulo filtrado que son diferentes de los de $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\ M)$.

6.- Tomando morfismos λ , estrictos en cierto sentido, se pueden calcular

$\sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)}$ y $v_h(\mathfrak{F}_r(\pi))$ en términos de $\mathfrak{F}_r(\lambda)$.

En términos geométricos 1 y 2 dicen que para cada morfismo π se tiene un cerrado $Y_r(\pi)$ de Specgr$\mathcal{D}$ bien definido y un ciclo $C_r(\pi)$ de codimensión 1 que asocia multiplicidades a las compónentes de codimensión 1 de $Y_r(\pi)$. Los resultados 3 y 4 muestran que $Y_0 = Y_0(\pi)$ $C_0 = C_0(\pi)$ son invariantes de M (sin hacer referencia a filtración alguna). Más aún, Y_0 coincide con la llamada variedad característica que aparece en la teoría de $\mathcal{D}$-módulos [21]. El ciclo C_0 determina nuevos invariantes no conocidos en la literatura.

En el primer capítulo hemos hecho una exposición detallada de los distintos conceptos de determinante y las propíedades que usamos en el resto de la Memoria. El capítulo segundo está dedicado a los invariantes de Fitting para módulos sobre anillos graduados anticonmutativos , y el tercero corresponde a los ideales de Fitting para módulos sobre anillos filtrados.

Quiero agradecer las sugerencias y comentarios que he recibido en conversaciones con los profesores JoséManuel Aroca, Paco Castro, José Angel Hermida, Luis Narváez, Noui Mehidi, Claude Sabahh y Tomás Sanchez Giralda.

CAPITULO I

FUNCION DETERMINANTE.

En el presente capítulo de la Memoria nos proponemos dar las posibles construcciones de aplicaciones determinante definidas para anillos no conmutativos. Para ella, en primer lugar estudiaremos el caso particular de los cuerpos no conmutativos cuya introducción se debe a J. Dieudonné en 1943 [16]. Posteriormente intentaremos generalizar este concepto desde el punto de vista formal (§2), o bién como coeficientes del producto exterior, cuando se pueda construir (§3). Finalmente se construyen los determinantes en dos tipos de anillos particulares los dominios de Ore y los anillos filtrados. En ambos casos se utiliza la construcción de la aplicación determinante sobre cuerpos desarrollados en §1.

§1.- DETERMINANTE SOBRE CUERPOS

En el álgebra lineal sobre anillos conmutativos los determinantes son uno de los útiles en los que reposan una gran parte de sus conceptos y resultados.

Si k es un cuerpo conmutativo y $\mathfrak{M}_n(k)$ el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes en k, la aplicación determinante

$$\det : \mathfrak{M}_n(k) \longrightarrow k$$

puede caracterizarse por las 3 propiedades (o axiomas) siguientes.

A1.- Al sumar a una fila de una matriz otra de las filas el determinante no varía.

A2.- Al multiplicar una fila de la matriz por un elemento del cuerpo el determinante queda multiplicado por dicho escalar.

A3.- El determinante de la matriz identidad de orden n, I_n, vale 1.

Si A y B son dos matrices de $\mathfrak{M}_n(k)$ se sigue de los anteriores axiomas la propiedad fundamental $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ que permite el cálculo de los determinantes. El carácter conmutativo de k da la posibilidad de tener una fórmula explícita para la aplicación determinante

$$(*) \qquad \det(a_{i,j}) = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)}$$

donde $\$_n$ denota el grupo simétrico de n letras e $i(\eta)$ denota el índice de la permutación η.

Al estudiar el caso no conmutativo nos encontramos con la no adecuación de la fórmula (*) a este resultado, sin embargo en 1943 Jean Dieudonné [16] extendió la teoría de determinantes a los cuerpos no conmutativos usando los 3 axiomas anteriores y valorando la aplicación determinante no en k, sino en un semigrupo multiplicativo conmutativo $\bar{k}$ obtenido a partir de k. Nuevamente, se tiene la propiedad $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Describiremos a continuación, la construcción de Dieudonné.

Sea k un cuerpo arbitrario (conmutativo o no) y E un espacio vectorial a la izquierda sobre k de dimensión n, por tanto isomorfo al espacio vectorial obtenido dotando al grupo aditivo k^n de la ley externa

$$\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n)$$

Denotaremos por $GL_n(k)$ el grupo de autormorfismos de E (o de k^n). De esta forma dada una base $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ de E, todo endomorfismo μ de E queda unívocamente determinado por las imágenes de los elementos de la base $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$

$$\mu(\underline{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.\underline{e}_j \qquad i = 1, \ldots, n$$

y en consecuencia por la matriz cuadrada de elementos de k, $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. De esta forma el grupo $GL_n(k)$ se corresponde con el grupo de matrices cuadradas inversibles de orden n, que denotaremos por $\mathfrak{M}^*_n(k)$.

Un sistema de generadores del grupo multiplicativo $\mathfrak{M}^*_n(k)$ se puede determinar como sigue:

1º Dados dos números naturales i, j distintos con $1\leq i, j\leq n$ y λ un elemento del cuerpo k denotaremos por $B_{i,j}(\lambda)$ la matriz definida por $B_{i,j}(\lambda) = (b_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ con

$$b_{k,l} = \begin{cases} \delta_{k,l} & \forall\ (k, l) \neq (i, j) \\ \lambda & \text{si } (k, l) = (i, j) \end{cases}$$

es decir $B_{i,j}(\lambda)$ difiere de la matriz unidad en el elemento $b_{i,j}$.

2º Dado un elemento λ del cuerpo k, λ no nulo, denotaremos por $D(\lambda)$ la matriz definida

por $D(\lambda) = (d_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ con

$$d_{k,l} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \forall\ (k, l) \neq (n, n) \\ \lambda & \text{si } (k, l) = (n, n) \end{cases}$$

Multiplicar una matriz $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ por las matrices $B_{i,j}(\lambda)$ tiene un significado preciso:

- Multiplicar a la izquierda por $B_{i,j}(\lambda)$ la matriz A significa sumar a la i- ésima fila de A la j- ésima multiplicada a la izquierda por λ.

- Multiplicar a la derecha por $B_{i,j}(\lambda)$ la matriz A significa sumar a la j- ésima columna de A la i- ésima columna multiplicada a la derecha por λ.

En particular se tiene $B_{i,j}(\lambda) . B_{i,j}(\mu) = B_{i,j}(\lambda + \mu)$

$$(B_{i,j}(\lambda))^{-1} = B_{i,j}(-\lambda)$$

<u>Definición I.1.1</u>.- En las condiciones anteriores se llamarán matrices unimodulares de orden n a las matrices del subgrupo de $\mathfrak{M}^*_n(k)$ engendrado por las matrices $B_{i,j}(\lambda)$. A este subgrupo lo denotaremos por $SL_n(k)$.

Consideremos por tanto una matriz no singular $A \in \mathfrak{M}^*_n(k)$ definida por $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, denotaremos por $\underline{A}_1, ..., \underline{A}_n$ los vectores fila $A = (\underline{A}_1, ..., \underline{A}_n)^t$ con

$$\underline{A}_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,n}) \qquad 1\leq i, j\leq n$$

Por ser A no singular, A corresponde a un elemento de $GL_n(k)$ y por tanto los vectores fila $\underline{A}_1, ..., \underline{A}_n$ son linealmente independientes.

Por ser A no singular los elementos de su primera columna $\{a_{1,1}, ..., a_{n,1}\}$ no pueden ser todos nulos pudiendo suponer que $a_{2,1} \neq 0$ ya que si es nulo multiplicando A por $B_{2,j}(1)$ a la izquierda con j tal que $a_{j,1} \neq 0$ obtenemos una matriz con $a_{2,1} \neq 0$. El siguiente paso consiste en conseguir $a_{1,1}=1$ para lo cual multiplicamos la matriz anterior por $B_{1,2}((1 - a_{1,1}).a_{2,1}^{-1})$. De esta forma se obtiene una nueva matriz que seguiremos denotando como $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ con $a_{1,1}=1$. Multiplicando la matriz A por $B_{i,1} = (- a_{i,1})$ $i = 2, ..., n$ se obtiene una matriz $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ con $a_{1,1} = 1$ $a_{2,1} = ... = a_{n,1} = 0$ que es también no singular.

Las $n-1$ filas $A_2, ..., A_n$ de la matriz A son linealmente independientes y podemos repetir el razonamiento anterior hasta conseguir transformar la matriz A en una matriz $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ con

$$\bar{a}_{i,j} = 0 \quad 1 \leq i < j \leq n \qquad \bar{a}_{i,i} = 1 \quad i=1, ..., n-1 \quad y \qquad \bar{a}_{n,n} \neq 0.$$

Asímismo podemos conseguir que $\bar{a}_{i,j} = 0$ para $j > i$ sin más que sumar a la fila i múltiplos convenientes de la fila j, es decir multiplicando por una matriz del tipo $B_{i,j}(\lambda)$. Por tanto mediante productos por matrices del tipo $B_{i,j}(\lambda)$ se tiene que

$$\left(\prod_{i,j,\lambda} B_{i,j}(\lambda) \right).A = D(\mu) \qquad \text{con} \quad \mu \neq 0.$$

Los siguientes resultados resumen las primeras propiedades de $SL_n(k)$.

Proposición I.1.2.- Toda matriz no singular A se escribe en la forma $B.D(\mu)$ con $B \in SL_n(k)$ y $\mu \in k^*$

Proposición I.1.3.- El subgrupo $SL_n(k)$ es un subgrupo invariante del grupo lineal general $\mathfrak{M}^*_n(k) = GL_n(k)$ para todo número natural $n>1$.

La proposición I.1.2 está probada con lo anterior. Para I.1.3 tendremos que probar que si $A \in \mathfrak{M}^*_n(k)$ se tiene $A.B_{i,j}(\lambda).A^{-1} \in SL_n(k)$ cualquiera que sea $i, j \in \{1, ..., n\}$ $\lambda \in k$ verificando $i \neq j$. Por la forma de los elementos del grupo $\mathfrak{M}^*_n(k)$ (Proposición I.1.2) es suficiente probar que para cada $\mu \in k^*$, se tiene

$$D(\mu).B_{i,j}(\lambda).D^{-1}(\mu) \in SL_n(k).$$

Ahora bien, se verifica que

$$D(\mu).B_{i,j}(\lambda).D^{-1}(\mu) \quad \text{está dado por}$$

$$\begin{cases} B_{i,j}(\lambda) & \text{si } i \neq n \text{ y } j \neq n \\ B_{n,i}(\lambda.\mu^{-1}) & \text{si } i \neq n \text{ y } j = n \\ B_{j,n}(\mu.\lambda) & \text{si } j \neq n \text{ e } i = n \end{cases}$$

Por tanto, está probada la proposición.

Para construir la aplicación determinante definimos el conjunto de llegada de dicha aplicación que lógicamente estará determinado por el cuerpo k. Dado un cuerpo $(k, +, .)$ no necesariamente conmutativo, el conjunto de elementos inversibles de k, $k^* = k \setminus \{0\}$ forma un grupo multiplicativo que no es necesariamente abeliano. Podemos por tanto considerar su subgrupo de conmutadores $(k^*; k^*)$ que se define como el subgrupo engendrado por los conmutadores, es decir, los elementos de la forma $a^{-1}.b^{-1}.a.b$ cuando $a, b \in k^*$. Dicho subgrupo está formado por los productos finitos de conmutadores ya que el inverso de un conmutador es también un conmutador. Este subgrupo es un subgrupo invariante de k^* de forma que el grupo cociente $k^*/(k^*; k^*)$ es un grupo abeliano. Si k es conmutativo entonces $(k^*; k^*) = \{1\}$ y dicho cociente es k^*. A partir de este grupo abeliano se construye un semigrupo conmutativo que denotaremos por $\bar{k}$ y definiéndolo como $\bar{k} = k^*/(k^*; k^*) \cup \{\bar{0}\}$ donde el elemento $\bar{0}$ actúa como elemento absorbente, es decir, si $\bar{a}$ representa la clase en $k^*/(k^*; k^*)$ del elemento $a \in k^*$ $\bar{a}.\bar{0} = \bar{0} = \bar{0}.\bar{a}$ y la multiplicación de elementos no nulos de $\bar{k}$ es la multiplicación de $k^*/(k^*; k^*)$.

Al semigrupo $\bar{k}$ le llamaremos abelianizado del cuerpo k. Asímismo se puede considerar la aplicación canónica $\rho : k \longrightarrow \bar{k}$ que envía a cada elemento $a \in k^*$ en su clase $\bar{a}$ y al neutro para la suma 0 en el elemento absorbente $\bar{0} \in \bar{k}$.

Esta aplicación es un homomorfismo de semigrupos multiplicativos. La aplicación determinante es, por definición, una aplicación

$$\det : \mathfrak{M}_n(k) \longrightarrow \bar{k}$$

que verifique los siguientes axiomas.

A-1.- El determinante de una matriz no cambia al sumar la fila de orden i a la de orden j para $i \neq j$.

A-2.- Si multiplicamos una fila de la matriz por un elemento μ el determinante queda multiplicado por $\bar{\mu}$.

A-3.- Si I_n es la matriz unidad su determinante vale $\bar{1}$.

A partir de estos axiomas la aplicación determinante verifica las siguientes propiedades:

$\underline{\text{P-1.}}$- Sean $A= (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (\underline{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ $B= (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (\underline{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ tal que

$\underline{B}_l= \underline{A}_l + \lambda.A_r$ $B_i= A_i$ $i\neq l$ entonces $\det(B) = \det(A)$

En efecto si $\lambda=0$ la propiedad es evidente.

Si $\lambda\neq 0$ consideremos $A'= (\underline{A}_1,..., \lambda.\underline{A}_r, ..., \underline{A}_n)^t$ entonces se tiene

$\det(A')= \bar{\lambda}.\det(A)$ de donde

$\det(A)= \bar{\lambda}^{-1}.\det(A')$ y por A-2 $\det(A') = \det(B')$ siendo

$B'= (\underline{A}_1,..., \underline{A}_l+\lambda.\underline{A}_r, ..., \underline{A}_n)^t$ Como $\det(B') = \bar{\lambda}.\det(B)$ se obtiene

$$\det(B)= \bar{\lambda}^{-1}.\det(B')= \bar{\lambda}^{-1}.\det(A')= \det(A).$$

$\underline{\text{P-2.}}$- Si A es singular $\det(A)= \bar{0} \equiv 0$.

Por ser A singular uno de los vectores fila es combinación lineal de los otros. Restando dicha combinación lineal de la fila en cuestión se obtiene una matriz con una fila nula es decir A es una matriz que tiene una fila multiplicada por 0 luego

$\det(A) = \bar{0}.\det(A')= \bar{0} \equiv 0$.

$\underline{\text{P-3.}}$- Si permutamos $\underline{A}_i$ y $\underline{A}_j$ entonces el determinante queda multiplicado por $-\bar{1}$.

Supongamos $i<j$ y sean $A = (\underline{A}_1, ..., \underline{A}_i, ..., \underline{A}_j, ..., \underline{A}_n)^t$ y

$$A' = (\underline{A}_1,..., \underline{A}_j , ..., \underline{A}_i ,..., \underline{A}_n)^t$$

Entonces considerando las siguientes matrices

$B= (\underline{A}_1, ..., \underline{A}_i+ \underline{A}_j, ..., \underline{A}_j, ..., \underline{A}_n)^t$

$B_1= (\underline{A}_1, ..., \underline{A}_i+ \underline{A}_j, ..., \underline{A}_j-(\underline{A}_i+ \underline{A}_j), ..., \underline{A}_n)^t =$

$= (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_i + \underline{A}_j, \ldots, -\underline{A}_i, \ldots, \underline{A}_n)^t$

$B_2 = (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_i + \underline{A}_j - \underline{A}_i, \ldots, -\underline{A}_i, \ldots, \underline{A}_n)^t =$

$= (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_j, \ldots, -\underline{A}_i, \ldots, \underline{A}_n)^t$

se verifica que

$$\det(A') = -\bar{1}.\det(B_2) = -\bar{1}.\det(B_1) = -\bar{1}.\det(B) = -\bar{1}.\det(A).$$

<u>P-4.</u>- $\det(D(\mu)) = \bar{\mu}$.

Si $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ es la base estándar de k^n se tiene

$D(\mu) = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{n-1}, \mu.\underline{e}_n)^t$ luego $\det(D(\mu)) = \bar{\mu}.\det(I_n) = \bar{\mu}$.

<u>P-5.</u>- $\det(B_{i,j}(\lambda).A) = \det(A)$.

La matriz $B_{i,j}(\lambda)$ operando por multiplicación a la izquierda sobre A transforma $A = (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_i, \ldots, \underline{A}_j, \ldots, \underline{A}_n)^t$ en la matriz

$A' = (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_i + \lambda.\underline{A}_j, \ldots, \underline{A}_j, \ldots, \underline{A}_n)^t$ luego por la propiedad P-1 se tiene

$$\det(A') = \det(B_{i,j}(\lambda).A) = \det(A).$$

<u>P-6.</u>- Si A es no singular y $A = B.D(\mu)$ con $B \in SL_n(k)$ entoces $\det(A) = \bar{\mu}$.

Basta aplicar las propiedades P-4 y P-5.

Como consecuencia de I-1-2 y de P-2 y P-6 se obtiene

<u>P-7.</u>- Los axiomas definen unívocamente la aplicación det.

Más aún, se deduce la siguiente propiedad.

P-8.- $\det(A) = 0$ sí y sólo sí A es singular.

P-9.- $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$.

Si A es singular la matriz $A.B$ también lo es, ya que si existe C con $A.B.C= I_n$ se tiene $B.C= A^{-1}$ lo cual es absurdo, entonces $\det(A) = 0 = \det(A.B)$ luego $\det(A.B)= \det(A).\det(B)$.

Si A no es singular, se tiene $A = C.D(\mu)$ con $C \in SL_n(k)$ luego $\det(A)= \bar{\mu}$. Ahora bien $D(\mu).B = (\underline{B}'_1, ..., \underline{B}'_n)^t = B'$ con $\underline{B}_i = \underline{B}'_i$ $i=1, ..., n-1$ y $\underline{B}'_n= \mu.\underline{B}_n$ siendo $B = (\underline{B}_1, ..., \underline{B}_n)^t$. Por tanto

$$\det(D(\mu).B)= \det(B')= \bar{\mu}.\det(B) = \det(A).\det(B)$$

y como $\det(A.B) = \det(C.D(\mu).B) = \det(D(\mu).B)$ ya que $C\in SL_n(k)$ se tiene consecuentemente

$$\det(A.B)= \det(D(\mu).B)= \bar{\mu}.\det(B) = \det(A).\det(B).$$

P-10.- Si $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ o si $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$

siendo $B \in \mathcal{M}_p(k)$ y $D \in \mathcal{M}_q(k)$ se tiene $\det(A)= \det(B).\det(D)$.

Lo probaremos para el primer caso pues el segundo es análogo.

Si B es singular sus filas son linealmente independientes luego lo son las filas de A y por tanto $\det(A) = \bar{0} = \det(B) = \det(B).\det(D)$.

Si B no es singular $B=B^*.D(\mu)$ con $B^*\in SL_p(k)$ con lo cual $\det(B)= \bar{\mu}$.

De donde

$$A = \begin{bmatrix} B^* & 0 \\ 0 & Id_q \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D(\mu) & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

y mediante combinaciones adecuadas

$$\begin{bmatrix} D(\mu) & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} D(\mu) & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

de modo que si D es singular lo es A y se verifica el resultado si D es no singular, podemos suponer D de la forma $D(\rho)$ con $\det(D) = \bar{\rho}$.

Entonces $\det(A) = \bar{\mu} . \bar{\rho} . \det(I_{p+q}) = \det(B).\det(D)$.

Probaremos ahora la existencia de la aplicación determinante. La construcción será por inducción sobre el orden n de las matrices.

Para n=1 $\mathfrak{M}_1(k) \cong k$ con lo cual basta definir $\det : \mathfrak{M}_1(k) \longrightarrow \bar{k}$ como el homomorfismo $\rho : k \longrightarrow \bar{k}$ definido anteriormente $\det(a) = \bar{a} = \rho(a)$ que verifica claramente A-1, A-2, A-3.

Supongamos que tenemos definida la aplicación $\det : \mathfrak{M}_{n-1}(k) \longrightarrow \bar{k}$ verificando los axiomas y consideremos la matriz A de orden n sobre k.

Si A es singular definimos $\det(A) = \bar{0}$.

Supongamos por tanto que A es no singular $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n)^t$ con $\underline{A}_i = (a_{i,1} \ldots a_{i,n}) \in k^n$. Por ser A no singular $\{ \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n \}$ forman una base de k^n y existirán $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ elementos de k no todos nulos tales que

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.\underline{A}_r = (1, 0, ..., 0) \quad \text{es decir}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.a_{r,1} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^{n} \lambda_r.\underline{B}_r = (0, ..., 0) \in k^{n-1}$$

siendo $\underline{B}_r = (a_{r,2}, ..., a_{r,n}) \in k^{n-1}$ $r=1, ..., n$. Estos vectores $\underline{B}_1, ..., \underline{B}_r$ definen una matriz $F = (\underline{B}_r)_{1 \le r \le n} \in \mathcal{M}_{n \times (n-1)}(k)$ y denotaremos por C_i la matriz obtenida de F eliminando la fila de orden i, $C_i \in \mathcal{M}_{n-1}(k)$. Por otra parte como entre los elementos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, que son únicos, existe $\lambda_i \in k$ no nulo, podemos definir

$$\det(A) = (-\bar{1})^{i+1}.\bar{\lambda}_i^{-1}.\det(C_i).$$

Probemos primeramente que esta definición no depende del elemento λ_i elegido entre los no nulos. Sean $\lambda_i \neq 0$ y $\lambda_j \neq 0$ $i \neq j$ que definen respectivamente las matrices C_i y C_j. Consideremos además las matrices D obtenida de C_i reemplazando $\underline{B}_j$ por $\lambda_j.\underline{B}_j$ y E obtenida de C_i reemplazando $\underline{B}_j$ por $\underline{B}_i$. Tanto D como E son matrices de orden n-1 luego se verifica $\det(C_i) = \bar{\lambda}_j^{-1}.\det(D)$.

Sumando a la fila j-ésima de D que es $\lambda_j.\underline{B}_j$ el producto de λ_r por la fila $\underline{B}_r$ para $r=1, ..., n$ $r \neq i$ $r \neq j$ el determinante de D no varía en virtud de la propiedad P-1 y además la fila j-ésima se transforma en

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} \lambda_r.\underline{B}_r = -\lambda_i.\underline{B}_i \quad \text{es decir}$$

$$\det(D) = (-\bar{\lambda}_i).\det E.$$

Permutando en E $|i-j|-1$ veces las filas se obtiene la matriz C_j luego por la propiedad

P-3 se tiene que

$$\det(C_l) = \bar{\lambda}_j^{-1}.\det(D) = (-\bar{\lambda}_l.\bar{\lambda}_j^{-1}).\det(E) = (-\bar{1})^{|l-j|-1}.(-\bar{\lambda}_l^{-1}).(\bar{\lambda}_j).\det(C_j)$$

de donde

$$(-\bar{1})^{l+1}.(-\bar{\lambda}_l^{-1}).\det(C_l) = (-\bar{1})^{j+1}.(-\bar{\lambda}_j^{-1}).\det(C_j)$$

y la definición que hemos dado no depende de la elección del coeficiente λ_l no nulo elegido.

Veamos por tanto que la aplicación

$$\det: \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \bar{k}$$

verifica los tres axiomas.

A-1.- Sean A la matriz cuyas filas son $\underline{A}_1, ..., \underline{A}_n$ y B la matriz de filas $\underline{B}_1, ..., \underline{B}_n$ verificando $\underline{B}_l = \mu.\underline{A}_l$ $\underline{B}_i = \underline{A}_i$ $i \neq l$.

Si $\mu=0$ o si A es singular el axioma A-1 se cumple trivialmente.

Supongamos por tanto A no singular y $\mu \neq 0$ con lo cual B es también no singular. Entonces dada la relación única $\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.\underline{A}_r = (1, 0, ..., 0)$ se verifica

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r\neq l}}^{n} \lambda_r.\underline{A}_r + (\lambda_l.\mu^{-1}).\mu.\underline{A}_l = (1, 0, ..., 0) \quad \text{es decir}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_r.\underline{B}_r = (1, 0, ..., 0) \quad \text{con} \quad \mu_l = \lambda_l.\mu^{-1} \quad \mu_r = \lambda_r \quad r \neq l.$$

Denotando por C_i la matriz inducida por la fila i-ésima para la matriz A. (se corresponde con la matriz adjunta del elemento $a_{i,1}$) y D_i la inducida por la fila i-ésima para la matriz B. Supongamos $\lambda_i \neq 0$ $i=1, ..., n$ lo cual implica $\mu_i \neq 0$.

Entonces si $i=l$ se tiene $C_i = D_i$ con lo cual

$$\det(B) = (-\bar{1})^{l+1}.(\bar{\mu}_i)^{-1}.\det(D_i) = (-1)^{l+1}.(\bar{\lambda}_i.\bar{\mu}^{-1})^{-1}.\det(D_i) =$$

$$= \bar{\mu}.(-\bar{1})^{l+1}.\bar{\lambda}_i^{-1}.\det(C_i) = \bar{\mu}.\det(A)$$

Si $i \neq l$ la matriz D_i se obtiene a partir de C_i mediante el producto por μ a la izquierda de la fila de orden l (si $i>l$) ó $l-1$ (si ($i<l$) luego $\det(C_i) = \bar{\mu}.\det(D_i)$ al ser $D_i, C_i \in \mathcal{M}_{n-1}(k)$ con lo cual

$$\det(B) = (-1)^{i+1}.(\bar{\lambda}_i)^{-1}.\det(D_i) = (-1)^{i+1}.(\bar{\lambda}_i)^{-1}.\bar{\mu}.\det(C_i) =$$

$$= \bar{\mu}.(-\bar{1})^{i+1}.(\bar{\lambda}_i)^{-1}.\det(C_i) = \bar{\mu}.\det(A).$$

A-2.- Denotemos mediante A la matriz cuyas filas son $\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n$ y B la matriz obtenida sumando la fila de orden j a la fila de orden i con $i \neq j$

$B = (\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_n)^t$ con $\underline{B}_i = \underline{A}_i + \underline{A}_j$ y $\underline{B}_l = \underline{A}_l$ $l \neq i$.

Entonces A es singular sí y sólo sí B es singular con lo cual

$$\det(A) = \bar{0} \Rightarrow \det(B) = \bar{0} = \det(A) \quad \text{si } A \text{ es singular.}$$

Consideremos por tanto que A es no singular, entonces existe una única familia de elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no todos nulos tal que

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l.\underline{A}_l = (1, 0, \ldots, 0) \quad \text{luego}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^{n} \lambda_l.\underline{A}_l + \lambda_i.(\underline{A}_i + \underline{A}_j) + (\lambda_j - \lambda_i).\underline{A}_j = (1, 0, \ldots, 0)$$

es decir, se verifica

$$\sum_{l=1}^{n} \mu_l . \underline{B}_l = 0 \qquad \text{para } \mu_l = \lambda_l \quad l \neq j \quad y \quad \mu_j = \lambda_j - \lambda_i .$$

Entonces para la definición de det(A) y det(B) tenemos varias posibilidades.

a.- Existe $\mu_l = \lambda_l \neq 0$ $l \neq i$ $l \neq j$. Entonces denotando por C_l y D_l las matrices respectivas asociadas a A y a B, se verifica que D_l se obtiene de C_l mediante la adición de la fila de orden j (si $l>j$) ó j-1 (si $l<j$) a la fila i (si $l>i$) ó i-1 (si $l<i$) con lo cual al ser $C_l, D_l \in \mathcal{M}_{n-1}(k)$

$$\det(B) = (-\bar{1})^{l+1} . \bar{\mu}_l . \det(D_l) = (-\bar{1})^{l+1} . \bar{\lambda}_l . \det(C_l) = \det(A).$$

b.- $\lambda_i = \mu_i \neq 0$ entonces $C_i = D_i$ con lo cual

$$\det(B) = (-\bar{1})^{i+1} . \bar{\mu}_i . \det(D_i) = (-\bar{1})^{i+1} . \bar{\lambda}_i^{-1} . \det(C_i) = \det(A).$$

c.- $\lambda_j \neq 0$ y el resto $\lambda_l = 0$ entonces $\lambda_j = \mu_j$ y se tiene que la fila $\underline{A}_j$ verifica $\lambda_j . \underline{A}_j = (1, 0, ..., 0)$ es decir $\underline{A}_j = (\lambda_j^{-1}, 0, ..., 0)$ y por tanto D_j y C_j no varían; luego

$$\det(B) = (-\bar{1})^{j+1} . \bar{\mu}_j^{-1} . \det(D_j) = (-\bar{1})^{j+1} . \bar{\lambda}_j^{-1} . \det(C_j) = \det(A).$$

A-3.- Para la matriz unidad $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ se tiene $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ y C_1 es la matriz I_{n-1} con lo cual

$$\det(I_n) = (-\bar{1})^2 . \bar{1}^{-1} . \det(C_1) = \bar{1} .$$

En consecuencia la aplicación

$$\det : \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \bar{k}$$

verifica los axiomas o propiedades fundamentales A-1, A-2, A-3, y es única por la propiedad P-7.

Veamos entonces algunos resultados concernientes a esta aplicación.

<u>Proposición I.1.4.</u>- Dado $n \geq 2$ se verifica que una matriz A de orden n tiene determinante $\bar{1}$ sí y sólo sí es un elemento del subgrupo $SL_n(k)$.

En virtud de la propiedad P-5 está claro que dada una matriz A de $SL_n(k)$ $\det(A) = \bar{1}$.

Consideremos por tanto $A \in \mathcal{M}^*_n(k)$ con $\det(A) = \bar{1}$ entonces $A = B.D(\mu)$ con $B \in SL_n(k)$ y $\mu \in k$ con lo cual $\bar{\mu} = \bar{1}$ y por tanto es producto de conmutadores. Por tanto en virtud de la propiedad P-9 bastará probar que dado $\mu = a.b.a^{-1}.b^{-1} \in (k^*; k^*)$ $D(\mu)$ es un elemento de $SL_n(k)$. Considerando sólamente transformaciones elementales que afecten a las dos últimas filas o columnas, será suficiente probar que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \in SL_2(k).$$

Esto lo prueba la cadena de equivalencias siguiente, donde $\leftrightarrow$ denota equivalencia módulo $SL_2(k)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a.b.a^{-1}.b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a.b.a^{-1}.b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -a.b.a^{-1}.b^{-1} \\ 1 & a.b.a^{-1}.b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -a.b.a^{-1}.b^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -a.b.a^{-1}.b^{-1} \\ 1 & b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a.b.a^{-1} & 0 \\ 1 & b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -a.b.a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a.b.a^{-1} & 0 \\ a^{-1} & b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow I_2$$

Proposición I.1.5.- El grupo cociente $\mathfrak{M}^*_n(k)/SL_n(k)$ es isomorfo al grupo abeliano $k^*/(k^*; k^*)$ para $n>1$.

En efecto, considerando la restricción de la aplicación determinante a $\mathfrak{M}^*_n(k)$ se tiene un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$\det: \mathfrak{M}^*_n(k) \longrightarrow k^*/(k^*; k^*)$$

Este homomorfismo es suprayectivo, ya que dado $\bar{\mu} \in k^*/(k^*; k^*)$ se tiene $\det(D(\mu)) = \bar{\mu}$. El núcleo de la aplicación det es el conjunto de matrices unimodulares que en virtud del teorema I.1.4 es el subgrupo $SL_n(k)$. Por tanto se tiene inducido el isomorfismo de la proposición.

El segundo resultado, de utilidad en nuestra Memoria, nos caracteriza el determinante de Dieudonné mediante una propiedad universal.

Teorema I.1.6.- Sean k un cuerpo y S un semigrupo conmutativo con elemento unidad 1_S Dada la familia de aplicaciones

$$d_n: \mathfrak{M}_n(k) \longrightarrow S \qquad \text{verificando}$$

(A-1)*.- Si la matriz A' se obtiene a partir de la matriz A mediante el producto a la izquierda por $\mu \in k$ de una línea de A entonces

$$d_n(A') = d_1(\mu).d_n(A).$$

(A-2)*.- Si la matriz A' se obtiene a partir de la matriz A mediante la suma de una fila a otra entonces $d_n(A') = d_n(A)$.

(A-3)* La matriz unidad tiene por determinante 1_S $d_n(I_n) = 1_S = d_1(1_K)$.

Existe un único homomorfismo

$$\varphi: \quad \bar{k} \longrightarrow S \qquad \text{tal que el diagrama}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_n(k) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\det"'] & & S \\
& \bar{k} \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $n \geq 1$.

Sea $\bar{\mu}$ un elemento de $\bar{k}$. Para definir el homomorfismo φ basta tomar $\varphi(\bar{\mu}) = d_1(\mu)$ donde identificamos el conjunto $\mathfrak{M}_1(k)$ con el cuerpo k. En virtud de (A-1)* y (A-3)*, para $n=1$ se verifica

$$d_1(\mu.\upsilon) = d_1(\mu).d_1(\upsilon)$$

$$d_1(1) = 1_S.$$

Además el elemento $0_S = d_1(0)$ es absorbente para los elementos de la imagen de d_1, es decir, $d_1(\mu).0_S = 0_S$ para todo μ elemento de k. La aplicación d_1 es un homomorfismo de semigrupos (cuando tomamos sobre k la operación producto), y puesto que S es conmutativo la aplicación d_1 factoriza a través del abelianizado $\bar{k}$ de k, dando lugar a la aplicación $\varphi: \bar{k} \longrightarrow S$ que es también un homomorfismo de semigrupos.

Nótese que la imagen de d_1 (o de φ) es de hecho un semigrupo asociativo, conmutativo conteniendo a 1_S y al absorbente 0_S. Nótese también que dicho semigrupo imagen se reduce a $\{0_S\}$ sí y sólamente sí $1_S = 0_S$. Finalmente nótese que la imagen por d_1 de k^*, es decir, $d_1(k)\backslash\{0_S\}$, es un grupo abeliano.

Para $n>1$ a partir de los axiomas se prueban las siguientes propiedades

$(P\text{-}5)^*$.- $d_n(B_{i,j}(\lambda).A) = d_n(A)$

$(P\text{-}9)^*$.- $d_n(A.B) = d_n(A).d_n(B)$

con una demostración idéntica a la realizada para la aplicación det sustituyendo $\mu \in k^*$ por $d_1(\mu) \in S$.

Por lo tanto se tiene que el subgrupo $SL_n(k)$ de $\mathfrak{M}^*_n(k)$ está contenido en el núcleo de la restricción de la aplicación d_n al grupo $\mathfrak{M}^*_n(k)$. Por tanto dicha restricción factoriza a través de $\mathfrak{M}^*_n(k)/SL_n(k)$ obteniendo el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}^*_n(k) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "(\rho)"'] & & S \\
& \mathfrak{M}^*_n(k)/SL_n(k) \arrow[ur, "\bar{d}_n"'] &
\end{tikzcd}$$

donde (ρ) es la aplicación inducida por la aplicación canónica.

Como el grupo $\mathfrak{M}^*_n(k)/SL_n(k)$ es isomorfo al grupo $k^*/(k^*;k^*)$ por I.1.5 se obtiene un homomorfismo de semigrupos de $k^*/(k^*;k^*)$ en S que se extiende a un homomorfismo $\varphi_n : \bar{k} \longrightarrow S$ sin más que enviar el elemento $\bar{0}$ en 0_S. Las aplicaciones φ y φ_n coinciden; en efecto, dado $\mu \in k^*$ se tiene

$$\varphi_n(\bar{\mu}) = d_n(D(\mu)) = d_1(\mu).d_n(I_n) = d_1(\mu) = \varphi\ (\bar{\mu})$$

y por otro lado $\quad \varphi_n(\ \bar{0}\ ) = 0_S = \varphi(\ \bar{0}\ )$

Finalmente el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n^*(k) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[d] \arrow[drr, "det"] & & S \\
\mathcal{M}_n^*(k)/SL_n(k) \arrow[rr] & & \bar{k} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

muestra que $d_n(A) = \varphi(\det(A))$ si A es una matriz inversible. Si A es una matriz singular entonces razonando como en la propiedad P-2 se demuestra que $d_n(A) = 0_S$ por tanto también en este caso $d_n(A) = \varphi(\det(A))$.

<u>Nota I.1.7.</u>- Las propiedades P-1, P-2, P-3, P-4, P-5, P-6, P-9 y P-10 tienen sus análogas $(P\text{-}1)^*$, $(P\text{-}2)^*$, $(P\text{-}3)^*$, $(P\text{-}4)^*$, $(P\text{-}5)^*$, $(P\text{-}6)^*$, $(P\text{-}9)^*$ y $(P\text{-}10)^*$ para d_n en lugar de la aplicación det. El análogo de la propiedad P-7 es en cierto sentido el teorema anterior y el análogo $(P\text{-}8)^*$ de la propiedad P-8 es también cierto salvo en el caso $0_S = 1_S$, es decir, $d_1(k) = \{\ 0_S\ \}$. Las demostraciones de estas propiedades se pueden hacer repitiendo las del caso de la aplicación det o directamente usando el teorema I.1.6.

<u>Nota I.1.8.</u>-Un resultado interesante referente al estudio de la teoría de determinantes sobre cuerpos no conmutativos son la generalización de las fórmulas de Cramer [16].

Consideremos un sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} x_i.a_{i,j}=\beta_j$$

y supongamos que la matriz $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in \mathcal{M}_n(k)$ es inversible. Sustituyendo en dicha matriz A la fila i-ésima formada por $(a_{i,1},..., a_{i,n})$ por la fila $(\beta_1, ..., \beta_n)$ obtenemos una matriz cuadrada A_i; si $(x_1,..., x_n)$ es solución del sistema de ecuaciones se tiene que la matriz A_i se obtiene por el producto a la izquierda de la fila i-ésima por x_i y la suma de cada fila $j\neq i$ multiplicada a la izquierda por x_j. Entonces la matriz A_i es congruente respecto del subgrupo invariante $SL_n(k)$ de $\mathcal{M}^*_n(k)$ a la matriz obtenida a partir de A mediante el producto a la izquierda de la fila i-ésima.

Si $x_i\neq 0$ se tiene que A_i es inversible y $\det(A_i)=\bar{x}_i.\det(A)$. Por el contrario si $x_i=0$, la matriz A_i tiene determinante nulo. Con lo cual dado un sistema lineal de ecuaciones el cálculo de las matrices A_i nos da por una parte los índices i tales que $x_i=0$ ya que coinciden con aquellos en los cuales la matriz es singular. Para el resto de índices la igualdad anterior no permite calcular el valor de la solución $x_i\in k$ pero sí su clase de equivalencia en el abelianizado $\bar{k}$.

Este estudio, cuando k es conmutativo, coincide con el estudio de las fórmulas de Cramer, ya que dado $a\in k$ $\bar{a}=\{a\}$ y por tanto conociendo la clase de un elemento conocemos la solución del sistema.

§2.- DETERMINANTES SOBRE ANILLOS NO CONMUTATIVOS

Consideremos un anillo unitario $\mathcal{D}$ no necesariamante conmutativo y denotemos por $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$ el conjunto de matrices cuadradas de orden n. Dada una matriz A de orden n sobre $\mathcal{D}$, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ P. Puystjens [46] considera la expresión

$$\underline{d}_n(A) = \underline{d}_n(a_{i,j}) = \sum_{\eta\in \$_n} i(\eta).\, a_{1,\eta(1)}\cdot \,\cdots\, .a_{n,\eta(n)}$$

(fórmula que expresa usualmente el determinante por columnas de una matriz con coeficientes en un anillo conmutativo) que define una aplicación

$$\underline{d}_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

Denotando una matriz $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ por sus columnas $(\underline{a}_i)_{1\leq i\leq n}$ con $\underline{a}_i = (a_{1,i} \cdots a_{n,i})^t$ se verifican las siguientes propiedades

Propiedad I.2.1.- Sea $A = (\underline{a}_1,\ldots, \underline{b}, \ldots, \underline{b}, \ldots, \underline{a}_n)$. Entonces $\underline{d}_n(A) = 0$

Si $\underline{a}_p = \underline{a}_q = \underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)^t$ consideramos la permutación

$$\tau(i) = \begin{cases} p & \text{si } i = q \\ q & \text{si } i = p \\ i & \text{si } i \neq p \text{ e } i \neq q \end{cases}$$

Entonces denotando por

$$\$_{n,1} = \{\eta \in \$_n \;/\; i(\eta) = 1\}$$

$$\$_{n,2} = \{\eta \in \$_n \;/\; i(\eta) = -1\}$$

se verifica que $\tau.\$_{n,1} = \$_{n,2}$ con lo cual se tiene la cadena de igualdades

$$\underline{d}_n(A) = \sum_{\eta\in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta\in \$_{n,1}} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} + \sum_{\eta\in \$_{n,2}} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta\in \$_{n,1}} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} + \sum_{\eta\in \$_{n,1}} i(\tau.\eta).\ a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta\in \$_{n,1}} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} + i(\tau).\sum_{\eta\in \$_{n,1}} i(\eta).\ a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta\in \$_{n,1}} a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} - a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)}.$$

Consideremos entonces $\eta \in \$_{n,1}$; existen dos naturales r y s, únicos, tales que $\eta(r)= p$ y $\eta(s)= q$. Supongamos además que $r<s$ entonces

$$a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} = a_{1,\eta(1)} \cdots a_{r,\eta(r)} \cdots a_{s,\eta(s)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= a_{1,\eta(1)} \cdots a_{r,p} \cdots a_{s,q} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{r,q} \cdots a_{s,p} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{r,\tau(p)} \cdots a_{s,\tau(q)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{r,\tau(\eta(r))} \cdots a_{s,\tau(\eta(s))} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)}$$

de donde $\underline{d}_n(A)=0$.

Propiedad I.2.2.-Sea A la matriz definida por las columnas $\underline{a}_1, \ldots, \underline{b}_p + \underline{c}_p, \ldots, \underline{a}_n$ entonces

$$\underline{d}_n(A) = \underline{d}_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{b}_p+ \underline{c}_p, \ldots, \underline{a}_n)=$$

$$= \underline{d}_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{b}_p, \ldots, \underline{a}_n)+ \underline{d}_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{c}_p, \ldots, \underline{a}_n).$$

Denotemos por $A_1= (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ $A_2= (\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n)$ las matrices definidas por $\underline{b}_i = \underline{a}_i = \underline{c}_i \quad i = 1, ..., n \quad i \neq p$ entonces tendremos que probar que

$\underline{d}_n(A) = \underline{d}_n(A_1) + \underline{d}_n(A_2)$. Veamos que se verifica sumando a sumando. Dado $\eta \in \$_n$ se tiene

$$a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} = a_{1,\eta(1)} \cdots (b_{i,\eta(i)} + c_{i,\eta(i)}) \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= a_{1,\eta(1)} \cdots b_{i,\eta(i)} \cdots a_{n,\eta(n)} + a_{1,\eta(1)} \cdots c_{i,\eta(i)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= b_{1,\eta(1)} \cdots b_{n,\eta(n)} + c_{1,\eta(1)} \cdots c_{n,\eta(n)}$$

ya que dado $\eta \in \$_n$ y $p \in \{1, ..., n\}$ existe un único $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\eta(i) = p$ con lo cual

$$a_{i,\eta(i)} = a_{i,p} = b_{i,p} + c_{i,p} = b_{i,\eta(i)} + c_{i,\eta(i)}.$$

De esta forma se verifica la igualdad.

$$\underline{d}_n(A) = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, b_{1,\eta(1)} \cdots b_{n,\eta(n)} + \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, c_{1,\eta(1)} \cdots c_{n,\eta(n)} =$$

$$= \underline{d}_n(A_1) + \underline{d}_n(A_2).$$

<u>Propiedad I.2.3.</u>- Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ una matriz tal que $a_{p,j} = b_{p,j} + c_{p,j} \quad j=1, ..., n$. Entonces si $A_1 = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ y $A_2 = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ siendo

$b_{i,j} = c_{i,j} = a_{i,j} \quad \forall\ i \neq p \quad \forall\ j=1,...n$ se verifica

$$\underline{d}_n(A) = \underline{d}_n(A_1) + \underline{d}_n(A_2).$$

Mediante la definición de la aplicación $\underline{d}_n$ se tiene

$$\underline{d}_n(A) = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, a_{1,\eta(1)} \cdots a_{n,\eta(n)} = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\, a_{1,\eta(1)} \cdots a_{p,\eta(p)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots (b_{p,\eta(p)} + c_{p,\eta(p)}) \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots b_{p,\eta(p)} \cdots a_{n,\eta(n)} + \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \cdots c_{p,\eta(p)} \cdots a_{n,\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ b_{1,\eta(1)} \cdots b_{n,\eta(n)} + \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ c_{1,\eta(1)} \cdots c_{n,\eta(n)} =$$

$$= \underline{d}_n(A_1) + \underline{d}_n(A_2).$$

<u>Propiedad I.2.4.</u>- $\underline{d}_n(I_n)=1$

<u>Propiedad I.2.5.</u>- Sea A' la matriz obtenida de $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ permutando las columnas p y q entonces $\underline{d}_n(A') = -\underline{d}_n(A)$.

Si denotamos por $b_{i,j}$ los elementos de la matriz A' tendremos

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,p} & \text{si} \quad j=q \quad i=1,\dots n \\ a_{i,q} & \text{si} \quad j=p \quad i=1,\dots n \\ a_{i,j} & \text{si} \quad j\neq p \quad j\neq q \quad i=1,\dots,n \end{cases}$$

con lo cual denotando como τ la permutación definida por

$$\tau\ (i) = \begin{cases} p & \text{si } i=q \\ q & \text{si } i=p \\ i & \text{si } i\neq p \text{ e } i\neq q \end{cases}$$

entonces $b_{i,j} = a_{i,\tau^{-1}(j)} = a_{i,\tau(j)}$ ya que $\tau^{-1} = \tau$ con lo cual

$$\underline{d}_n(A') = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ b_{1,\eta(1)} \cdots b_{n,\eta(n)} = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= \sum_{\eta \in \$_n} i(\tau).i(\tau)\ .i(\eta).\ a_{1,\tau.\eta(1)} \cdots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= i(\tau). \sum_{\eta \in \$_n} i(\tau.\eta).\ a_{1,\tau.\eta(1)} \dots a_{n,\tau.\eta(n)} =$$

$$= i(\tau). \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).\ a_{1,\eta(1)} \dots a_{n,\eta(n)} = (-1).\ \underline{d}_n(A).$$

Propiedad I.2.6.- Dada una matriz $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ y una permutación $\tau \in \$_n$ si denotamos por A^{τ} la matriz obtenida a partir de A permutando las columnas mediante τ se verifica $\underline{d}_n(A^{\tau}) = i(\tau).\ \underline{d}_n(A)$.

Es consecuencia de la propiedad anterior.

Como podemos comprobar esta aplicación $\underline{d}_n$ verifica un buen número de propiedades semejantes a las verificadas por la aplicación determinante introducida por Dieudonné. De hecho de los tres axiomas A-1, A-2 y A-3 necesarios nos falta la condición A-1. Por ejemplo si consideramos como $\mathcal{D}$ el cuerpo de los cuaterniones (o el subanillo $\mathbb{Z}[i, j, k]$ de dicho cuerpo) se tiene

$$\underline{d}_2 \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} = i.j - j.i = 2.k$$

mientras que A' con $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

tiene por imagen mediante $\underline{d}_2$ el elemento cero, $\underline{d}_2(A') = 1\text{-}1 = 0$.

Con objeto de generalizar estas propiedades se consideran todas las matrices A_{σ}^{τ} obtenidas a partir de la matriz A mediante la permutación por σ de las filas y por τ de las columnas siendo σ y τ dos elementos del grupo de permutaciones cuyo orden sea el orden de la matriz A. De esta forma tenemos $(n!)^2$ elementos diferentes asociados a una matriz, que dan lugar a la aplicación

$$A \longrightarrow (i(\sigma).i(\tau).\underline{d}_n(A_\sigma^\tau))_{\sigma,\tau\in \$_n} \in \mathcal{D}^{(n!)^2}.$$

Utilizando la propiedad I.2.6 estos $(n!)^2$ elementos se reducen a $n!$ elementos en un principio diferentes, es decir se tiene

$$A \longrightarrow (i(\sigma).\,\underline{d}_n(A_\sigma))_{\sigma\in \$_n} \in \mathcal{D}^{(n!)}.$$

Estos $n!$ elementos tienen entre sí una cierta relación que se ve simplemente al considerar el ideal conmutador J_c del anillo, es decir, el ideal bilátero generado por los elementos

$$[\mathcal{D};\mathcal{D}] = \{\ a.b - b.a\ /\ a, b \in \mathcal{D}\ \}.$$

Se verifica el siguiente resultado.

Proposición I.2.7.- Dos elementos asociados $i(\sigma).\underline{d}_n(A_\sigma)$ e $i(\sigma').\underline{d}_n(A_{\sigma'})$ son congruentes módulo el ideal conmutador J_c.

En efecto el anillo $\mathcal{D}/J_c$ es un anillo conmutativo con elemento unidad y los elementos $i(\sigma).\underline{d}_n(A_\sigma) + J_c$ e $i(\sigma').\underline{d}_n(A_{\sigma'}) + J_c$ coinciden ambos, en virtud de la definición de la aplicación $\underline{d}_n$, con el determinante de la matriz sobre $\mathcal{D}/J_c$ cuyos coeficientes son las clases módulo J_c de los coeficientes de A, de donde se sigue el resultado.

Se tiene pues la aplicación

$$D_n: \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}/J_c$$

dada por $D_n(A) = \underline{d}_n(A) + J_c$ que verifica obviamente todas las propiedades usuales de los determinantes (en particular las tres de Dieudonné). De hecho la construcción que acabamos de hacer se corresponde con la composición de la aplicación $\underline{d}_n$ y el paso al cociente ρ del anillo $\mathcal{D}$ a su anillo cociente $\mathcal{D}/J_c$. Esta construcción debido a las buenas propiedades del producto y suma de clases es la misma que la obtenida considerando primeramente la aplicación inducida por ρ sobre $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$ y con llegada en $\mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_c)$ y sobre el anillo conmutativo $\mathcal{D}/J_c$ considerar la aplicación determinante usual $\det_n$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[r, "\underline{d}_n"] \arrow[d, "(\rho)"'] \arrow[dr, "D_n"] & \mathcal{D} \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_c) \arrow[r, "\det_n"'] & \mathcal{D}/J_c
\end{tikzcd}$$

Del mismo modo podemos hacer esta construcción considerando la función definida por la fórmula usual de los determinantes por filas, es decir

$$\eth^n : \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\eth^n(a_{i,j}) = \sum_{\eta \in \$_n} i(\eta).a_{\eta(1),1} \cdots a_{\eta(n),n}$$

que tiene un comportamiento simétrico de la función $\underline{d}_n$ ya que se verifica $\underline{d}_n(A) = \eth^n(A^t)$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A. Es obvio que la aplicación

$$D_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}/J_c$$

obtenida a partir de $\eth^n$ es idéntica a la obtenida a partir de $\underline{d}_n$.

Hemos construido de esta forma el conjunto de aplicaciones

$$D_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}/J_c$$

verificando los axiomas (A-1)*, (A-2)* y (A-3)* para la estructura de semigrupo multiplicativo conmutativo $\mathcal{D}/J_c$. De esta forma si suponemos que $\mathcal{D}$ es un cuerpo en virtud del teorema I.1.6 existirá un homomorfismo

$$\varphi:\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/J_c$$

de tal forma que $\varphi \circ \det = D_n$.

Ahora bien al ser $\mathcal{D}$ un cuerpo no conmutativo $J_c=\mathcal{D}$ luego $\mathcal{D}/J_c=\{0\}$ y en este caso la aplicación D_n es la trivial. Con este razonamiento se comprueba que si trabajamos sobre anillos generales la construcción anterior dista mucho de ser una buena generalización de los determinantes en el sentido de Dieudonné. En realidad las propiedades de Dieudonné están muy adaptadas para el caso de los cuerpos, ya que los razonamientos se apoyan en la descomposición de toda matriz no singular A en la forma

$$A = \prod_{i,j,\lambda} B_{i,j}(\lambda).D(\mu)$$

que no es cierta en general para anillos conmutativos.

Caractericemos a continuación las aplicaciones D_n (así como $\underline{d}_n$ y $\bar{d}^n$) mediante una propiedad universal similar a la de los determinantes de Dieudonné. En este caso será necesario considerar una estructura de anillo sobre el conjunto sobre el que se valoran los determinantes e imponer un axioma más (que tiene sentido respecto de dicha estructura de anillo).

Consideremos un anillo $\mathcal{D}'$ unitario para el cual están definidas las aplicaciones

$$d'_n: \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$$

verificando:

C-1.-Dada una matriz A con dos columnas iguales, se tiene $d'_n(A) = 0$.

C-2.- Dada la matriz A tal que $A = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$ con $\underline{a}_j = \underline{b}_j + \underline{c}_j$

Si $A_1 = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_{j-1}, \underline{b}_j, \underline{a}_{j+1}, ..., \underline{a}_n)$ y $A_2 = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_{j-1}, \underline{c}_j, \underline{a}_{j+1}, ..., \underline{a}_n)$ se verifica $d'_n(A) = d'_n(A_1) + d'_n(A_2)$.

C-3.- Dada una matriz $A = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)^t$

a) para cada $\mu \in \mathcal{D}$ si $A' = (\mu.\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)^t$ se tiene

$$d'_n(A') = d'_1(\mu).d'_n(A).$$

b) si los elementos de las filas 1, ..., i-1 conmutan con un elemento μ de $\mathcal{D}$

$A' = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_{i-1}, \mu.\underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, ..., \underline{a}_n)^t$ se verifica

$$d'_n(A') = d'_1(\mu).d'_n(A).$$

C-4.- $d'_n(I_n) = 1$.

Toda aplicación d'_n verificando estas 4 condiciones verifica las siguientes propiedades

Propiedad I.2.8..- Sea A' la matriz obtenida de la matriz A sumando la columna j a la columna i. Entonces $d'_n(A) = d'_n(A')$.

Denotando mediante $A = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$ y suponiendo $i<j$ se tendrá $A' = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_i + \underline{a}_j, ..., \underline{a}_j, ..., \underline{a}_n)$ con lo cual aplicando las condiciones A-1 y A-2 obtenemos

$$d'_n(A') = d'_n(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_i, ..., \underline{a}_j, ..., \underline{a}_n) + d'_n(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_j, ..., \underline{a}_j, ..., \underline{a}_n) = d'_n(A).$$

Nótese que las propiedades 1 junto con C-3 y C-4 son análogas a la de Dieudonné por tanto hemos introducido la propiedad extra C-2.

Propiedad I.2.9.- Si la matriz A' se obtiene de la matriz A permutando las columnas i, j se verifica

$$d'_n(A) = (-1).d'_n(A').$$

Denotando por $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ y suponiendo $i<j$ la matriz A' viene dada por $A' = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n)$ con lo cual utilizando la condición C-1 y C-2 se tiene

$$0 = d'_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i + \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_i + \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_n) =$$

$$= d'_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_n) + d'_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n)$$

con lo cual queda demostrado.

Evidentemente estas condiciones las verifican las aplicaciones $\underline{d}_n: \mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$ que cumplen además la siguiente propiedad universal.

Teorema I.2.10.- Dado un anillo $\mathcal{D}'$ con unidad, para el cual están definidas las aplicaciones $d'_n: \mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ verificando las condiciones C-1, C-2, C-3 y C-4 entonces existe un único homomorfismo de anillos

$$\varphi: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$$

tal que hace conmutativo el diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "d'_n"] \arrow[dr, "\underline{d}_n"'] & & \mathcal{D}' \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Para $n=1$ toda matriz $A \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{D})$ es de la forma $A = (a)$ con $a \in \mathcal{D}$ entonces basta definir $\varphi(a) = d'_1(A)$. De esta forma φ es un homomorfismo de anillos en virtud de las condiciones C-2 y C-3. Por otro lado $d'_1(A) = \varphi(a) = \varphi(\underline{d}_1(A)) = \varphi \circ \underline{d}_1(A)$ y se verifica la conmutatividad del diagrama para $n=1$.

Una vez definido el homomorfismo φ veamos que cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ $d'_n = \varphi \circ \underline{d}_n$.

Dada una matriz $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de orden n utilizando la propiedad C-2 podemos descomponer la matriz A en n^n matrices de las cuales $n!$ no tienen alguna columna o fila nula. Estas matrices $A(\tau)$ con $\tau \in \$_n$ vienen definidas por

$$
A(\tau) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad \text{con} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,\tau(i)} & j = \tau(i) \qquad i=1, \ldots, n \\ 0 & j \neq \tau(i) \qquad i=1, \ldots, n \end{cases}
$$

De esta forma

$$
(*) \quad d'_n(A) = \sum_{\tau \in \$_n} d'_n(A(\tau))
$$

si en la matriz $A(\tau)$ permutamos las columnas mediante τ^{-1} obtenemos la matriz A_τ definida por

$$\begin{bmatrix} a_{1,\tau(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,\tau(n)} \end{bmatrix}$$

con lo cual

$$d'_n(A) = \sum_{\tau\in \$_n} d'_n(A(\tau)) = \sum_{\tau\in \$_n} i(\tau).d'_n(A_\tau) =$$

$$= \sum_{\tau\in \$_n} i(\tau).d'_1(\, a_{1,\tau(1)}). \dots .\, d'_1(\, a_{n,\tau(n)}).d'_n(I_n) =$$

$$= d'_1(\sum_{\tau\in \$_n} i(\tau).\, a_{1,\tau(1)}. \dots .a_{n,\tau(n)}) = d'_1(\underline{d}'_n(A)) = (\varphi \circ \underline{d}'_n)(A)$$

y se verifica el resultado.

En la fórmula (*) aparecen, además de los $n!$ sumandos indicados también el resto de los $n^n-n!$ términos resultantes de la escritura de cada columna A como suma de n columnas cada una de ellas con n-1 ceros. Cada uno de estos sumandos es 0 y por eso se han omitido. En efecto, cada uno de ellos es el valor de d'_n en una matriz que tiene al menos una fila nula, y dicho valor es cero en virtud de la propiedad C-3.

Nota I.2.11.- Cambiando filas por columnas y recíprocamente en las propiedades anteriores se obtiene una caracterización similar para las aplicaciones $\overline{d}^n$. Análogamente si $\sigma\in \$_n$ las aplicaciones $A \longrightarrow \underline{d}_n(A_\sigma)$ se pueden caracterizar mediante las propiedades C-1, C-2, C-4 y la análoga a C-3 en la cual se sustituye el orden $1< 2< \dots < n$ entre los índices por el orden $\sigma(1)< \sigma(2)< \dots< \sigma(n)$.

Consideremos ahora el caso en que $\mathfrak{D}'$ varía en la clase de anillos conmutativos tenemos el homomorfismo $\varphi:\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "d'_n"] \arrow[dr, "\underline{d}_n"'] & & \mathcal{D}' \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Suponiendo que $\mathcal{D}'$ sea conmutativo se verifica, que dado un generador $a.b - b.a$ del ideal bilátero J_c su imagen por el homomorfismo φ es $\varphi(a.b\text{-}b.a) = 0$, luego φ se factoriza a través del abelianizado $\mathcal{D}/J_c$ dando lugar al homomorfismo

$$\bar{\varphi}: \mathcal{D}/J_c \longrightarrow \mathcal{D}'.$$

Este homomorfismo verifica claramente la condición

$$\bar{\varphi} \circ D_n = \bar{\varphi} \circ p \circ \underline{d}_n = \varphi \circ \underline{d}_n = d'_n.$$

Se tiene por tanto

<u>Corolario I.2.12.</u>- Sea $\mathcal{D}'$ un anillo conmutativo y unitario para el cual están definidas las aplicaciones $D'_n: \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ verificando las propiedades C-1, C-2, C-3 y C-4 entonces existe un único homomorfismo de anillos $\bar{\varphi}: \mathcal{D}/J_c \longrightarrow \mathcal{D}'$ que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "D'_n"] \arrow[dr, "d_n"] \arrow[dd, "D_n"'] & & \mathcal{D}' \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dl, "(p)"'] & \\
\mathcal{D}/J_c \arrow[uurr, "\overline{\varphi}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

De esta forma caracterizamos mediante una propiedad universal la familia de aplicaciones $\{D_n\}_{n\geq 1}$ definida sobre el conjunto de matrices de orden n y con elementos de $\mathcal{D}$. Esta caracterización impone las condiciones C-1, C-2, C-3 y C-4 o sus duales cambiando columnas por filas y recíprocamente. A partir de esta definición se verifica asímismo una nueva propiedad para D'_n que viene dado por

$(C\text{-}3)^*$.- Si A' es la matriz obtenida de la matriz A por el producto de la columna i por un escalar $\mu \in \mathcal{D}$ se verifica

$$d'_n(A') = d'_1(\mu).d'_n(A) = \varphi(\mu).d'_n(A)$$

$$D'_n(A') = D'_1(\mu).D'_n(A) = \varphi(\mu).D'_n(A).$$

Vamos a ver que las propiedades C-1, C-2, $(C\text{-}3)^*$ y C-4 también caracterizan $\{D_n\}_{n\geq 1}$.

Consideremos por tanto un anillo conmutativo y unitario $\mathcal{D}'$ y una familia de aplicaciones $D'_n: \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ verificando las propiedades C-1, C-2,

$(C\text{-}3)^*$ y C-4 .

Lema I.2.13.- En las condiciones anteriores dadas las matrices $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ tales que $a_{i,j} - b_{i,j} \in J_C$ para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$ se verifica $D'_n(A) = D'_n(B)$.

Bastará probar que D'_n es independiente de la elección del representante miembro a miembro. Sean $r, s \in \{1, ..., n\}$ y consideremos $b_{r,s} = a_{r,s} + c$ $a_{i,j} = b_{i,j}$ $i \neq r$ y $j \neq s$ siendo $c \in J_C$ entonces $D'_n(B) = D'_n(A) + D'_n(C)$ con $C = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ definido por

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \neq s \\ c & \text{si } j = s \quad i = r \\ 0 & \text{si } j = s \quad i \neq r \end{cases}$$

con lo cual usando $(C\text{-}3)^*$ se tiene $D'_n(C) = D'_1(c).D'_n(C')$ siendo C' la matriz obtenida a partir de C reemplazando el elemento $c \in J_C$ por 1.

Por otra parte $D'_1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ es un homomorfismo de anillos al verificar C-2 y $(C\text{-}3)^*$ luego como $\mathcal{D}'$ es conmutativo y $c \in J_C$ se tiene $D'_1(c) = 0$, por tanto $D'_n(c) = 0$ y el lema queda demostrado.

Como consecuencia, las aplicaciones $\{D'_n\}_{n\ge 1}$ inducen por paso al cociente la familia de aplicaciones $D'_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_C) \longrightarrow \mathcal{D}'$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "D'_n"] \arrow[dr, "(\rho)"'] & & \mathcal{D}' \\ & \mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_c) \arrow[ur, "\bar{D}'_n"'] & \end{tikzcd}$$

siendo (ρ) aplicación inducida por el homomorfismo de paso al cociente

$$\rho : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/J_C .$$

Considerando $\mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_C)$ como el $\mathcal{D}/J_C$-módulo de las columnas de las matrices $n \times n$ con coeficientes en el anillo conmutativo $\mathcal{D}/J_C$, las aplicaciones D'_n son aplicaciones multilineales (por C-2 y (C-3)*) alternadas (por C-1)

$$D'_n : (\mathcal{D}/J_C)^n \times \ldots \times (\mathcal{D}/J_C)^n \longrightarrow \mathcal{D}/J_C.$$

Por la propiedad universal del producto exterior de módulos sobre anillos conmutativos, existe un único homomorfismo de módulos

$$\varphi' : \overset{n}{\bigwedge}(\mathcal{D}/J_C)^n \longrightarrow \mathcal{D}'$$

haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{M}_n(\mathcal{D}/J_c) \arrow[rr, "\bar{D}'_n"] \arrow[dr, "\wedge"'] & & \mathcal{D}' \\ & \overset{n}{\bigwedge}(\mathcal{D}/J_c)^n \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Identificando $\overset{n}{\bigwedge}(\mathcal{D}/J_C)^n$ con $\mathcal{D}/J_C$ mediante la selección en $(\mathcal{D}/J_C)^n$ de la base estándar se tiene el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rrr, "D'_n"] \arrow[d, "(\rho)"'] & & & \mathcal{D}' \\
\mathfrak{M}_n(\mathcal{D}/J_c) \arrow[r, phantom, "\equiv"] \arrow[ddr, "\det_n"'] & (\mathcal{D}/J_c)^n \times \cdots \times (\mathcal{D}/J_c)^n \arrow[urr, "\bar{D}'_n"] \arrow[d, "\wedge"] & & \\
 & \overset{n}{\wedge}(\mathcal{D}/J_c)^n \arrow[uurr, "\varphi'"] & & \\
 & (\mathcal{D}/J_c) \arrow[u, "\psi", "\wr"'] \arrow[uuurr, "\varphi'\circ\psi=\varphi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

siendo $\det_n$ el determinante usual sobre $\mathcal{D}/J_c$. Nótese que el diagrama es conmutativo por la propiedad P-4. Puesto que $\det_n \circ \rho = D_n$ y se obtiene el diagrama conmutativo requerido

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "D'_n"] \arrow[dr, "D_n"'] & & \mathcal{D}' \\
 & \mathcal{D}/J_c \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

§3.1.- ANILLOS GRADUADOS ANTICONMUTATIVOS - PRODUCTO EXTERIOR

Denotaremos mediante $\mathcal{D}$ un anillo unitario tal que 2 sea inversible.

Definición I.3.1.1.- Dado un grupo conmutativo G llamaremos factor de conmutación sobre G a toda aplicación

$$\varepsilon: G \times G \longrightarrow \{\pm 1\}$$

verificando

$$\begin{cases} \varepsilon(i+j,\ k) = \varepsilon(i,\ k).\varepsilon(j,\ k) & \forall\ i, j, k \in G \\ \varepsilon(i,\ j) = \varepsilon\ (j,\ i) & \forall\ i, j \in G \end{cases}$$

En el caso particular que $G = \mathbb{Z}$ todo factor de conmutación está determinado por la imagen del par (1,1) consecuentemente existen dos únicos factores

$$\begin{cases} \varepsilon(1,1)=1 & \text{factor de conmutación trivial } \varepsilon \equiv 1 \\ \varepsilon(1,1)=-1 & \text{factor de anticonmutación } \varepsilon(p,\ q) = (-1)^{p.q} \end{cases}$$

Definición I.3.1.2.- Dado el anillo $\mathcal{D}$ y un grupo conmutativo G diremos que $\mathcal{D}$ es G-graduado si existen $(\mathcal{D}_r)_{r\in G}$ subgrupos de $\mathcal{D}$ tales que

1.- $\mathcal{D} = \bigoplus_{r\in G} \mathcal{D}_r$ como grupos abelianos

2.- $\mathcal{D}_r.\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_{r+s}$ $\forall$ r, s $\in$ G

- Los elementos $a_r \in \mathcal{D}_r$ no nulos los llamaremos elementos homogéneos de grado r y escribiremos $|a_r| = r$.

Definición I.3.1.3.- Sean $\mathcal{D}$ un anillo graduado de tipo G (es decir graduado con graduación $\mathcal{D} = \bigoplus_{r\in G} \mathcal{D}_r$) y ε un factor de conmutación definido sobre el grupo G. Diremos que $\mathcal{D}$ es ε-conmutativo sí y sólo sí para cada par de elementos homogéneos a y b de $\mathcal{D}$ se verifica

$$a.b= \varepsilon(|a|, |b|).b.a.$$

- Si el factor de conmutación ε es el trivial ($\varepsilon \equiv 1$), el anillo $\mathcal{D}$ es conmutativo.
- Si el grupo G es el grupo aditivo de los enteros y $\mathcal{D}$ es un anillo ε-conmutativo sobre $\mathbb{Z}$ con ε no trivial, se dice que el anillo $\mathcal{D}$ es anticonmutativo.

Construiremos con estas condiciones el producto tensorial y exterior de ciertos módulos sobre $\mathcal{D}$. Tengamos en cuenta que si $\mathcal{D}$ es conmutativo considerando sobre $\mathcal{D}$ la $\mathbb{Z}$-graduación trivial ($\mathcal{D}_0=\mathcal{D}$ $\mathcal{D}_n=\{0\}$ $\forall$ $n\neq0$) se verifica que $\mathcal{D}$ es ε-conmutativo para cualquier factor de conmutación ε con lo cual lo que vamos a hacer es extender las nociones de álgebra tensorial y exterior del álgebra conmutativa.

Definición I.3.1.4.- Sea $\mathcal{D}$ un anillo graduado de tipo G y sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda (resp. a la derecha). Diremos que M es G-graduado si existe una familia $(M_r)_{r\in G}$ de submódulos de M tales que

1.- $M = \bigoplus_{r\in G} M_r$ como grupos abelianos.

2.- $\mathcal{D}_r.M_s \subset M_{r+s}$ $\forall$ r, s $\in$ G ($M_s.\mathcal{D}_r \subset M_{r+s}$ si M es $\mathcal{D}$-módulo a la derecha)

-Igual que antes pondremos $|m_r| = r$ si $m_r \in M_r$ $m_r\neq 0$.

Consideremos por tanto un grupo conmutativo G, un anillo $\mathcal{D} = \bigoplus_{r\in G} \mathcal{D}_r$

graduado sobre G y un factor de conmutación $\varepsilon: G \times G \longrightarrow \{\pm 1\}$ de tal forma que $\mathcal{D}$ es un anillo ε-conmutativo. En estas condiciones dado un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ graduado ε-conmutativo podemos definir asociada a la ley externa a la izquierda una ley externa a la derecha mediante la extensión lineal de

$$m.a = \varepsilon(|m|, |a|).a.m \quad \text{siendo} \quad a \in \mathcal{D} \quad y \quad m \in M \text{ elementos homogéneos.}$$

Por lo tanto todo $\mathcal{D}$-módulo graduado a la izquierda lo será a la derecha y recíprocamente. Así en lo sucesivo diremos únicamente $\mathcal{D}$-módulo sin especificar si lo es a la izquierda o a la derecha.

Sean $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ y $N = \bigoplus_{r \in G} N_r$ dos $\mathcal{D}$-módulos graduados ε-conmutativos donde $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \in G} \mathcal{D}_r$ es un anillo graduado ε-conmutativo. Considerando sobre M su estructura a la derecha y sobre N su estructura a la izquierda, tenemos definido el $\mathbb{Z}$-módulo producto tensorial de M y N sobre $\mathcal{D}$, $(M \otimes_{\mathcal{D}} N)$, el cual viene dado por el cociente del $\mathbb{Z}$-módulo de las combinaciones lineales formales de $M \times N$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ sobre el submódulo engendrado por todos los elementos de uno de los tipos.

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2,\ n) - (m_1,\ n) - (m_2,\ n) \\ (m,\ n_1+n_2) - (m,\ n_1) - (m,\ n_2) \\ (m.a,\ n) - (m,\ a.n) \end{array} \right.$$

donde $m, m_1, m_2 \in M$ $n, n_1, n_2 \in N$ y $a \in \mathcal{D}$

Este $\mathbb{Z}$-módulo admite una graduación sobre el grupo G inducida por las G-graduaciones de M y N, de tal forma que el subgrupo de $M \otimes_{\mathcal{D}} N$ de los elementos de grado r está dado por

$$(M \otimes_{\mathcal{D}} N)_r = \bigoplus_{i+j=r} (M_i \otimes_{\mathcal{D}} N_j)$$

Esto permite definir las leyes externas sobre el producto tensorial mediante

$$\begin{cases} a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n \\ (m \otimes n).a = m \otimes (n.a) \end{cases}$$

siendo $a \in \mathcal{D}$ $m \in M$ y $n \in N$.

De esta forma si m, n y a son homogéneos, se tiene

$$a.(m \otimes n) = (a.m) \otimes n = \varepsilon(|a|, |m|).m.a \otimes n =$$

$$= \varepsilon(|a|, |m|)m \otimes (a.n) = \varepsilon(|a|, |m|) . \varepsilon(|a|, |n|)\, m \otimes (n.a) =$$

$$= \varepsilon(|a|, |m \otimes n|).(m \otimes n).a$$

luego la estructura de módulo a la izquierda y la estructura a la derecha coinciden según el convenio anterior.

Definición I.3.1.5.- Sean M y N dos $\mathcal{D}$-módulos G-graduados ε-conmutativos con $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ y $N = \bigoplus_{r \in G} N_r$. Dado un homomorfismo $u: M \longrightarrow N$ diremos que es homogéneo de grado $i \in \mathbb{Z}$ sí y sólo sí para cada subgrupo M_r $r \in G$ se verifica

$$u(M_r) \subset N_{r+i}.$$

Definición I.3.1.6.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \in G} \mathcal{D}_r$ un anillo G-graduado ε-conmutativo. Dados los $\mathcal{D}$-módulos graduados ε-conmutativos $M_1, \ldots, M_r$ y N diremos que una aplicación

$$v : M_1 \times \ldots \times M_r \longrightarrow N$$

es ε-multilineal si es $\mathbb{Z}$-multilineal y se verifica

$$v(m_1, \ldots, a.m_i, \ldots, m_r) = \varepsilon\left(|a| . \sum_{j=1}^{i-1} |m_j|\right).a.v(m_1,\ldots,m_r)$$

cualesquiera que sean $m_1 \in M_1, \ldots, m_r \in M_r$ y $a \in \mathcal{D}$ homogéneos.

Lema I.3.1.7.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \in G} \mathcal{D}_r$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo. Dados los $\mathcal{D}$-módulos graduados ε-conmutativos $M_1 = \bigoplus_{r \in G} M_{1,r}$, $M_2 = \bigoplus_{r \in G} M_{2,r}$ y $N = \bigoplus_{r \in G} N_r$ para toda aplicación ε-bilineal α definida sobre $M_1 \times M_2$ y con llegada en N

$$\alpha: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$$

existe un único $\mathcal{D}$-homomorfismo

$$\bar{\alpha}: M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2 \longrightarrow N$$

verificando la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\alpha: M_1 \times M_2 \arrow[rr] \arrow[dr, "\otimes"'] & & N \\
& M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2 \arrow[ur, "\bar{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente toda aplicación $\mathcal{D}$-lineal

$$\bar{\alpha}: M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2 \longrightarrow N$$

(lo cual supone equivalentemente que es lineal por uno de los dos lados o por ambos lados simultáneamente) da lugar componiendo con la aplicación tensorial a una aplicación ε-bilineal $\alpha: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$

Nota I.3.1.8.- Además $\bar{\alpha}$ es homogénea de grado i sí y sólo sí la aplicación ε-bilineal α es también homogénea de grado i, (en general α multilineal se dice homogénea de grado i si se verifica $\alpha(M_{1,r}, M_{2,s}) \subset N_{r+s+i}$).

Por ser α ε-bilineal es $\mathbb{Z}$-bilineal luego por la propiedad universal del $\mathbb{Z}$-módulo $M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2$ existe $\bar{\alpha}: M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2 \longrightarrow N$ $\mathbb{Z}$-bilineal haciendo conmutativo el diagrama. Además $\overline{\alpha}$ viene definida mediante la prolongación por linealización de $\overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2) = \alpha(m_1, m_2)$ con lo cual

$$\overline{\alpha}(\lambda.m_1 \otimes m_2) = \overline{\alpha}((\lambda.m_1) \otimes m_2) = \alpha((\lambda.m_1), m_2) = \lambda.\alpha(m_1, m_2) =$$

$$= \lambda.\,\overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2)$$

y es por tanto $\mathcal{D}$-lineal.

Recíprocamente dada $\overline{\alpha} : M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2 \longrightarrow N$ $\mathcal{D}$-lineal se tiene definida

$\alpha : M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ mediante

$\alpha(m_1, m_2) = \overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2)$ de donde

$$\alpha(\lambda.m_1, m_2) = \overline{\alpha}(\lambda.m_1 \otimes m_2) = \lambda.\,\overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2) = \lambda.\alpha(m_1, m_2)$$

$$\alpha(m_1+m'_1, m_2) = \overline{\alpha}((m_1+m'_1) \otimes m_2) = \overline{\alpha}((m_1 \otimes m_2) + (m'_1 \otimes m_2)) =$$

$$= \overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2) + \overline{\alpha}(m'_1 \otimes m_2) = \alpha(m_1, m_2) + \alpha(m'_1, m_2).$$

Análogamente respecto de la ley aditiva de M_2

$$\alpha(m_1, \lambda.m_2) = \overline{\alpha}(m_1 \otimes \lambda.m_2) = \overline{\alpha}(\varepsilon(|m_1|, |\lambda|)).(\lambda.m_1 \otimes m_2) =$$

$$= \varepsilon(|m_1|, |\lambda|).\ \lambda.\ \overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2) = \varepsilon(|m_1|,|\lambda|).\ \lambda.\ \alpha(m_1,m_2)$$

por tanto α es ε-bilineal.

<u>Nota I.3.1.9.</u>- En efecto si α es homogénea existe $i \in G$ tal que $\alpha((M_1)_r, (M_2)_s) \subset N_{r+s+i}$ con lo cual, dada una componente de grado $r+s$ en $M_1 \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M_2$ tiene la forma $(M_1)_r \underset{\mathcal{D}}{\otimes} (M_2)_s$ luego dado $m_1 \in (M_1)_r$ $m_2 \in (M_2)_s$ se tiene

$$\overline{\alpha}(m_1 \otimes m_2) = \alpha(m_1, m_2) \subset N_{r+s+i}$$

y por tanto

$$\bar{\alpha}((M_1)_r \underset{\mathcal{D}}{\otimes} (M_2)_s) \subset N_{r+s+i}$$

<u>Proposición I.3.1.10.</u>- Sean M, N y P tres $\mathcal{D}$-módulos graduados ε-conmutativos

a.- Existe un único $\mathcal{D}$-isomorfismo $\phi\colon \mathcal{D} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M \longrightarrow M$

tal que $\phi(a \otimes m) = a.m \quad \forall\ a \in \mathcal{D} \quad \forall\ m \in M$

que permite identificar dichos $\mathcal{D}$-módulos.

b.- Existe un único $\mathcal{D}$-isomorfismo

$$\alpha\colon M \underset{\mathcal{D}}{\otimes} (N \underset{\mathcal{D}}{\otimes} P) \longrightarrow (M \underset{\mathcal{D}}{\otimes} N) \underset{\mathcal{D}}{\otimes} P$$

tal que $\alpha(m \otimes (n \otimes x)) = (m \otimes n) \otimes x \quad \forall\ m \in M \quad n \in N \quad x \in P.$

De este forma podemos identificar dichos $\mathcal{D}$-módulos.

c.- Existe un único $\mathcal{D}$-isomorfismo

$\beta : M \underset{\mathcal{D}}{\otimes} N \longrightarrow N \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M$ tal que

$\beta(m \otimes n) = \varepsilon(|m|, |n|).n \otimes m$ para $m \in M \quad n \in N$ homogéneos

a.- Basta definir

$\phi'\colon \mathcal{D} \times M \longrightarrow M$ mediante $\phi'(a, m) = a.m$

que es $\mathbb{Z}$-bilineal, con lo cual por la propiedad universal del producto exterior de

$\mathbb{Z}$-módulos existe $\phi\colon \mathcal{D} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M \longrightarrow M$ verificando la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\phi'\colon \mathcal{D} \times M \arrow[rr] \arrow[d, "\otimes"'] & & M \\
\mathcal{D} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} M \arrow[urr, "\phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

es decir $\phi(a \otimes m) = \phi(\otimes(a, m)) = \phi'(a, m) = a.m$

ϕ es $\mathcal{D}$-lineal ya que dado $b \in \mathcal{D}$

$$\phi(b.(a \otimes m)) = \phi(b.a \otimes m) = (b.a).m = b.(a.m) = b.\ \phi(a \otimes m)$$

ϕ es sobre ya que dado $m \in M$ $\ 1 \otimes m \in \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{D}} M$ y se verifica $\phi(1 \otimes m) = m$

Si $\phi(\sum_i a_i \otimes m_i) = 0$ se tiene por linealidad de ϕ que $\sum_i a_i.m_i = 0$ de donde

$$\sum_i a_i \otimes m_i = \sum_i 1 \otimes a_i.m_i = 1 \otimes \sum_i a_i.m_i = 1 \otimes 0 = 0$$

luego ϕ es un $\mathcal{D}$-isomorfismo.

Los apartados b y c se hacen análogamente sin más que considerar las aplicaciones ε-bilineales

$\alpha_1 : M \times (N \otimes_{\mathcal{D}} P) \longrightarrow (M \otimes_{\mathcal{D}} N) \otimes_{\mathcal{D}} P$ por linealización de

$$\alpha_1(m, (n \otimes x)) = (m \otimes n) \otimes x$$

$\alpha_2 : (M \otimes_{\mathcal{D}} N) \times P \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{D}} (N \otimes_{\mathcal{D}} P)$ por linealización de

$\alpha_2((m \otimes n), x) = m \otimes (n \otimes x)$ para el apartado b.

y $\beta' : M \times N \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{D}} M$ definida por

$\beta'(m, n) = n \otimes m$ para el apartado c.

En virtud de esta proposición dado un $\mathcal{D}$-módulo M, G-graduado ε-conmutativo podemos definir por recurrencia sobre $p \geq 0$ el $\mathcal{D}$-módulo G-graduado $T^p(M)$ mediante

$T^o(M) = \mathcal{D}$

$T^{p+1}(M) = T^p(M) \otimes M$

Entonces designamos por $T(M)$ al $\mathcal{D}$-módulo $\mathbb{Z} \times G$ graduado definido por

$$T(M) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(M)$$

Asímismo podemos definir sobre este módulo una segunda ley interna ya que la prolongación lineal de $((m_1 \otimes ... \otimes m_p), (m_{p+1} \otimes ... \otimes m_{p+q})) = (m_1 \otimes ... \otimes m_{p+q})$ define una aplicación

$$T^p(M) \times T^q(M) \longrightarrow T^{p+q}(M)$$

ε-bilineal. Por lo tanto sobre el $\mathcal{D}$-módulo $T(M)$ podemos considerar una estructura de $\mathcal{D}$-álgebra, más precisamente, $T(M)$ será la $\mathcal{D}$-álgebra tensorial del $\mathcal{D}$-módulo M.

La construcción del producto exterior una vez construido el tensorial es bastante más sencilla. Consideremos por tanto el anillo G-graduado ε-conmutativo $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \in G} \mathcal{D}_r$ donde $\varepsilon: G \times G \longrightarrow \{\pm 1\}$ es el factor de conmutación.

Para un $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ tenemos definida la $\mathcal{D}$-álgebra tensorial $\mathbb{Z} \times G$ graduada

$$T(M) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(M) \qquad \text{con } T^p(M) = \overset{p}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} M$$

Consideremos en $T(M)$ el ideal bilátero J generado por la familia de elementos

$$m \otimes m' + \varepsilon(|m|, |m'|).m' \otimes m$$

donde m y m' son elementos homogéneos de M. Podemos construir la $\mathcal{D}$-álgebra cociente $T(M)/J$ cuyo producto podemos denotar por $\wedge$.

De esta forma identificando el $\mathcal{D}$-módulo graduado $T^p(M)/(T^p(M) \cap J)$ a un submódulo de $T(M)/J$ tendremos

$$T(M)/J = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(M)/(T^p(M) \cap J) = \mathcal{D} \oplus M \oplus T^2(M)/(T^2(M) \cap J) \oplus ......$$

entonces denotando $T(M)/J$ por $\wedge M$ y $T^p(M)/(T^p(M) \cap J) = \overset{p}{\wedge} M$ llamaremos exterior de orden p del $\mathcal{D}$-módulo M al $\mathcal{D}$-módulo $\overset{p}{\wedge} M$ y álgebra exterior del $\mathcal{D}$-módulo M a la $\mathcal{D}$-álgebra $\wedge M$ verificando $\wedge M = \bigoplus_{p \geq 0} \overset{p}{\wedge} M$.

Este anillo verifica también una condición de conmutación ya que al ser los elementos del ideal J generado por las expresiones del tipo

$m \otimes m' + \varepsilon(|m|, |m'|).m' \otimes m$ con $m, m' \in M$ y homogéneos se tiene la igualdad

$m \wedge m' = - \varepsilon(|m|, |m'|)\, m' \wedge m$ con lo cual se verifica la igualdad

$$m_1 \wedge ... \wedge m_{p+q} = (-1)^{p.q}.\, \varepsilon(\sum_{j=1}^{p} |m_j|, \sum_{j=p+1}^{p+q} |m_j|).m_{p+1} \wedge ... \wedge m_q \wedge m_1 \wedge ... \wedge m_p$$

para elementos homogéneos $m_1, ..., m_{p+q} \in M$. De esta forma definiendo

$$\varepsilon_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \times G) \times (\mathbb{Z} \times G) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

$$\varepsilon_{\mathbb{Z}}((p, r), (q, s)) = (-1)^{p.q}.\, \varepsilon(r, s)$$

para $\varepsilon: G \times G \longrightarrow \{\pm 1\}$ factor de conmutación, se tiene que $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ es también un factor de conmutación y en virtud de la igualdad anterior el anillo $T(M)$ es también $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-conmutativo.

Definición I.3.1.11.- En las condiciones anteriores dados dos $\mathcal{D}$-módulos G-graduados ε-conmutativos $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ $N = \bigoplus_{r \in G} N_r$ y una aplicación $u: M^p \longrightarrow N$ ε-multilineal diremos que es ε-alternada si se verifica

$$u(m_1, ..., m_p) = - \varepsilon(|m_i|, |m_{i+1}|).\ u(m_1, ..., m_{i+1}, m_i, ..., m_p)$$

cualesquiera que sean $m_1, ..., m_p$ homogéneos.

Proposición I.3.1.12.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \in G} \mathcal{D}_r$ un anillo G-graduado ε-conmutativo. Dados los $\mathcal{D}$-módulos G-graduados $M = \bigoplus_{r \in G} M_r$ y $N = \bigoplus_{r \in G} N_r$. Entonces para toda aplicación ε-multilineal ε-alternada

$$u : M^p \longrightarrow N$$

de grado cero tal que existe un único homomorfismo de $\mathcal{D}$-módulos

$$\bar{u} : \overset{p}{\wedge} M \longrightarrow N$$

prolongando la aplicación u.

La aplicación $u : M^p \longrightarrow N$ es ε-multilineal al serlo ε-alternada luego induce

$$u' : \overset{p}{\otimes} M \longrightarrow N \quad \text{única.}$$

Por ser u ε-alternada podemos pasar al módulo cociente sobre J es decir al $\mathcal{D}$- módulo

$$\overset{p}{\otimes} M / \overset{p}{\otimes} M \cap J = \overset{p}{\wedge} M \quad \text{se}$$

tiene definida $\bar{u} : \overset{p}{\wedge} M \longrightarrow N$ con lo cual está probada la proposición.

§3.2.- ANILLOS GRADUADOS ANTICONMUTATIVOS.- DETERMINANTE.

Una vez definido y caracterizado el producto exterior sobre módulos graduados ε-conmutativos, particularicemos este estudio al caso de anillos graduados anticonmutativos, es decir, el caso $G = \mathbb{Z}$ y ε no trivial y por tanto $\varepsilon(m, n) = m.n$. Consideremos, por tanto, $\mathcal{D}$ un anillo graduado $\mathcal{D} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_n$ tal que dados $a_n \in \mathcal{D}_n$ y $a_m \in \mathcal{D}_m$ se verifica

$$a_n.a_m = (-1)^{m.n}.a_m.a_n = \varepsilon(\,|a_n|,\, |a_m|\,).a_m.a_n$$

y sea $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo. Recordemos que M es un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda y a la derecha verificando

$$a.m = \varepsilon(\,|a|,\, |m|).m.a$$

para cualesquiera que sean $m \in M$ y $a \in \mathcal{D}$ homogéneos.

Supongamos además que el $\mathcal{D}$-módulo M es de tipo finito con lo cual existirán sistemas generadores $\underline{m} = \{m_1, \dots, m_q\}$ cuyos elementos $m_1, \dots, m_q$ sean homogéneos, con lo cual inducen una q-upla $\underline{d} = (d_1, \dots, d_q) \in \mathbb{Z}^q$ de grados $d_i = |m_i|$. A este tipo de sistemas generadores los llamaremos sistemas generadores homogéneos.

Lema I.3.2.1.- En las condiciones anteriores, el $\mathcal{D}$-módulo $\overset{p}{\wedge} M$ es un $\mathcal{D}$-módulo de tipo finito.

Sea $\underline{m} = \{m_1, \dots, m_q\}$ un sistema de generadores del $\mathcal{D}$-módulo M formado por elementos homogéneos. Dados p elementos $v_1, \dots, v_p$ del $\mathcal{D}$-módulo M se verifica $v_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}.m_j$ para $i = 1, \dots, p$ y siendo $a_{i,j}$ elementos de $\mathcal{D}$. En virtud de las propiedades de conmutación para elementos homogéneos desarrolladas en el parágrafo I §3.1, se tiene

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \sum_{(i_1,\ldots,i_p) \in CR_{q,p}} a_{i_1,\ldots,i_p} . m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_p}$$

siendo $CR_{q,p}$ el conjunto de las combinaciones con repetición de q elementos $\{1, \ldots, q\}$ tomados de p en p. De esta forma, el conjunto

$$S = \{m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_p} \ / \ (i_1, \ldots, i_p) \in CR_{q,p}\}$$

define un sistema de generadores de tipo finito y homogéneo sobre $\overset{p}{\wedge} M$ cuyo cardinal está acotado por el número combinatorio $\begin{bmatrix} q+p-1 \\ p-1 \end{bmatrix}$.

Nótese que para el caso conmutativo los coeficientes de las expresiones $m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_p}$ no nulas son los determinantes correspodientes a submatrices de orden $p \times p$ de la matriz $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

Evidentemente para el caso anticonmutativo el cálculo de dichos coeficientes varía sensiblemente con respecto al caso conmutativo. Consideremos por tanto $v_1, \ldots, v_p$ elementos de M y un sistema de generadores homogéneo $\underline{m} = \{m_1, \ldots, m_q\}$. En virtud de la multilinealidad con respecto a la ley aditiva del producto exterior, la discusión se reduce al caso en que los elementos $v_1, \ldots, v_p$ son homogéneos; caso en el cual si

$$v_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} . m_j \qquad \text{para } i = 1, \ldots, p$$

los coeficientes $a_{i,j} \in \mathcal{D}$ se pueden tomar también homogéneos y $|a_{i,j}| = |v_i| - |m_j|$. Consideramos por lo tanto un coeficiente $a_{i_1,\ldots,i_p}$ de $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ en el sistema de generadores definido por S. Calculemos entonces de cuántas formas posibles obtenemos el término $m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_p}$ al desarrollar el producto $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$.

Consideremos el conjunto $VR_{q,p}$ formado por las aplicaciones definidas del conjunto de elementos $\{1, \ldots, p\}$ en el conjunto de q elementos $\{1, \ldots, q\}$ es decir, las variaciones con repetición. Cada elemento de este conjunto lo denotaremos por las p imágenes ordenadas $i_1, ..., i_p$ de los elementos 1, 2,. .., p. Sobre $VR_{q,p}$ se tiene una acción de grupo *

$$H : \$_p \times VR_{q,p} \longrightarrow VR_{q,p} \quad \text{definida por}$$

$$\sigma \, *(i_1, ..., i_p) = H(\sigma,(i_1, ... , i_p)) = (i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(p)})$$

El conjunto de combinaciones con repetición de q elementos tomados en grupos de p-elementos es el conjunto cociente de $VR_{q,p}$ respecto de la relación de equivalencia $\approx$ dada por

$$(i_1, ..., i_p) \approx (j_1, ..., j_p) \Leftrightarrow \#_r (i_1, ..., i_p) = \#_r (j_1, ..., j_p) \quad \forall \ r = 1, ..., q$$

donde $\#_r (i_1, ..., i_p)$ representa el número de veces en las cuales se repite el elemento $r \in \{1, ..., q\}$ (o lo que es lo mismo el cardinal de la imagen inversa por $(i_1, ..., i_p)$ del elemento $r \in \{1, ..., q\}$). En estas condiciones dada la variación con repetición $\underline{c} = (i_1, ..., i_p)$ de $VR_{q,p}$ verifica que la clase de equivalencia respecto a la relación $\approx$ es la órbita del elemento $\underline{c}$ para la anterior acción de $\$_p$. De esta manera cada combinación con repetición se puede interpretar como una órbita por la acción * . Más aún si $H_{\underline{c}}$ es el estabilizador de $\underline{c}$ se tiene una biyección conjuntista canónica entre $\$_p/H_{\underline{c}}$ y la órbita de $\underline{c}$, y por tanto a cada combinación le corresponde una clase lateral en el cociente $\$_p/H_{\underline{c}}$ y recíprocamente.

De esta forma dada una combinación con repetición de índices $i_1, ..., i_p$, el elemento $m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}$ del desarrollo de $v_1 \wedge ... \wedge v_p$ aparece tantas veces como elementos hay en el conjunto cociente $\$_p/H_{\underline{c}}$ con $\underline{c} = (i_1, ..., i_p)$ para una ordenación arbitraria de los datos $i_1, ..., i_p$. Por tanto si denotamos mediante $\bar{\sigma}$ la clase de equivalencia en $\$_p/H_{\underline{c}}$, del elemento $\sigma \in \$_p$, y para cada combinación con repetición se elige una variación con repetición $\underline{c}$ en la órbita correspondiente, se tiene el desarrollo

$$v_1 \wedge ... \wedge v_p = \sum_{CR_{q,p}} \Big(\sum_{\bar{\sigma} \in \$_p/H_{\underline{c}}} (a_{1,i_{\sigma(1)}}.m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge a_{p,i_{\sigma(p)}}.m_{i_{\sigma(p)}}) \Big)$$

Ahora bien considerando las propiedades de anticonmutación del producto exterior y denotando provisionalemte por $f_1 = i_{\sigma(1)}$ ... $f_p = i_{\sigma(p)}$ se verifica

$$a_{1,i_{\sigma(1)}}.m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge a_{p,i_{\sigma(p)}}.m_{i_{\sigma(p)}} = a_{1,f_1}.m_{f_1} \wedge ... \wedge a_{p,f_p}.m_{f_p} =$$

$$= \Big(\prod_{k=2}^{p} (\varepsilon(\sum_{r=1}^{k-1} |m_{f_r}|, |a_{k,f_k}|)) \Big) . a_{1,f_1} . ... a_{p,f_p} . m_{f_1} \wedge ... \wedge m_{p,f_p} =$$

$$= \Big(\prod_{k=2}^{p} (\varepsilon (\sum_{r=1}^{k-1} |m_{f_r}|, |v_k| - |m_{f_k}|)) \Big) . a_{1,i_{\sigma(1)}} ... a_{p,i_{\sigma(p)}} m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge m_{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= \Big(\prod_{k=2}^{p} (\varepsilon (\sum_{r=1}^{k-1} |m_{i_{\sigma(r)}}|, |v_k| - |m_{i_{\sigma(k)}}|)) \Big) . a_{1,i_{\sigma(1)}} ... a_{p,i_{\sigma(p)}} m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge m_{i_{\sigma(p)}}$$

y al verificarse

$$m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge m_{i_{\sigma(p)}} = i(\sigma). \prod_{\substack{l>s \\ \sigma(l)<\sigma(s)}} \varepsilon(|m_{i_{\sigma(l)}}|, |m_{i_{\sigma(s)}}|)\, m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}$$

se tiene la igualdad

$$a_{1,i_{\sigma(1)}}.m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge a_{p,i_{\sigma(p)}}.m_{i_{\sigma(p)}} = I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, ..., v_p) \; a_{1,i_{\sigma(1)}} ... a_{p,i_{\sigma(p)}}$$

donde

$$I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, ..., v_p) = i(\sigma) \prod_{k=2}^{p} \Big(\varepsilon(\sum_{r=1}^{k-1} |m_{i_{\sigma(r)}}|, |v_k| - |m_{i_{\sigma(k)}}|) \Big) \cdot \prod_{\substack{l>s \\ \sigma(l)<\sigma(s)}} \Big(|m_{i_{\sigma(l)}}|, |m_{i_{\sigma(s)}}| \Big) .$$

Con ello el coeficiente $a_{i_1,...,i_p}$ que queríamos calcular se escribe en la siguiente forma

$$a_{i_1,...,i_p} = a_{\underline{c}} = \sum_{\bar{\sigma} \in \$_p/H_{\underline{c}}} I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, ..., v_p) . a_{1,i_{\sigma(1)}} ... a_{p,i_{\sigma(p)}} .$$

Tal como indicamos este índice $I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, ..., v_p)$ depende, además de la q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, ..., d_q)\in \mathbb{Z}^q$, de la elección del representante σ elegido en la clase de equivalencia $\bar{\sigma}$. Ahora bien, consideremos por tanto σ y τ elementos del grupo simétrico $\$_p$ y tales que $\sigma * \underline{c}= \tau * \underline{c}$ para $\underline{c}=(i_1, ..., i_p)$, las permutaciones σ y τ difieren en ciclos que dejan invariante el elemento $\underline{c}$ y cada uno de estos ciclos es producto de trasposiciones. Así pues supongamos que $\sigma=Id$ y τ la trasposición (α, β) donde $\alpha<\beta$ e $i_\alpha=i_\beta$ $i_{\tau(\alpha)}=i_{\tau(\beta)}$, entonces se tiene

$$a_{1,i_1}.m_{i_1} \wedge ... \wedge a_{p,i_p}.m_{i_p} = a_{1,i_{\tau(1)}} m_{i_{\tau(1)}} \wedge ... \wedge a_{p,i_{\tau(p)}} m_{i_{\tau(p)}}$$

y para los índices para los que $i_{\tau(\alpha)} = i_{\tau(\beta)}$, se verifica

$$\prod_{k=2}^{p}\Big(\varepsilon\Big(\sum_{r=1}^{k-1} | m_{i_{\sigma(r)}}|, |v_k|-| m_{i_{\sigma(k)}}|\Big)= \prod_{k=2}^{p}\Big(\varepsilon\Big(\sum_{r=1}^{k-1} | m_{i_{\tau(r)}}|, |v_k|-| m_{i_{\tau(k)}}|\Big)$$

con lo cual se tiene $I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, ..., v_p) = I_{\underline{c}}(\underline{d}, \tau, v_1, ..., v_p)$ cuando se verifique

$$i(\sigma)\prod_{\substack{l>s\\ \sigma(l)<\sigma(s)}} \varepsilon(| m_{i_{\sigma(l)}}| , | m_{i_{\sigma(s)}}|)=i(\tau) \prod_{\substack{l>s\\ \tau(l)<\tau(s)}} \varepsilon(| m_{i_{\tau(l)}}| , | m_{i_{\tau(s)}}|).$$

Como $\sigma=Id$ y $\tau=(\alpha,\beta)$ se tiene

$$i(\sigma)\prod_{\substack{l>s\\ \sigma(l)<\sigma(s)}} \varepsilon (| m_{i_{\sigma(l)}}| , | m_{i_{\sigma(s)}}|)=1 \qquad \text{e}$$

$$i(\tau) \prod_{\substack{l>s\\ \tau(l)<\tau(s)}} \varepsilon(| m_{i_{\tau(l)}}| , | m_{i_{\tau(s)}}|)= i(\tau) \prod_{r=\alpha+1}^{\beta} \varepsilon(| m_{i_r}| , | m_{i_\alpha}|) \prod_{r=\alpha+1}^{\beta-1} \varepsilon(| m_{i_r}| , | m_{i_\beta}|)=$$

$$= i(\tau) \prod_{r=\alpha+1}^{\beta-1} \varepsilon(| m_{i_r}| , | m_{i_\alpha}|+ | m_{i_\beta}|) . \varepsilon(| m_{i_\alpha}| , | m_{i_\beta}|)= i(\tau)\, \varepsilon(| m_{i_\alpha}| , | m_{i_\beta}|)$$

al verificarse $i_\alpha=i_\beta$. Con ello $| m_{i_\alpha}|+ | m_{i_\beta}| =2. | m_{i_\alpha}|$ y por tanto

$\varepsilon(| m_{i_r} | , | m_{i_\alpha} |+ | m_{i_\beta} |)=1$

de esta forma

$l_{\underline{c}}(\underline{d} , \sigma, v_1 , ..., v_p)= l_{\underline{c}}(\underline{d}, \tau, v_1 , ..., v_p).(i(\tau) \varepsilon(| m_{i_\alpha} | , | m_{i_\beta} |))$

Por tanto la condición $l_{\underline{c}}(\underline{d}, \tau, v_1 , ..., v_p)\neq l_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1 , ..., v_p)$.

implica

$$m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p} = m_{i_{\sigma(1)}} \wedge ... \wedge m_{i_{\sigma(p)}}$$

$$m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p} = m_{i_{\tau(1)}} \wedge ... \wedge m_{i_{\tau(p)}} = m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_\beta} \wedge ... \wedge m_{i_\alpha} \wedge ... \wedge m_{i_p} =$$

$$= i(\tau) \varepsilon(| m_{i_\alpha} | , | m_{i_\beta} |) . m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_\alpha} \wedge ... \wedge m_{i_\beta} \wedge ... \wedge m_{i_p} = -m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}$$

luego $2.m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}=0$ y al ser 2 un elemento inversible de $\mathcal{D}$

$$m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}=0$$

En general si σ, τ como al principio son representantes de la misma clase $\bar{\sigma}$ en $\$_p/H_{\underline{c}}$ entonces se tendrá $i(\sigma).l_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1 , ..., v_p)= l_{\underline{c}}(\underline{d}, \tau, v_1 , ..., v_p).i(\tau)$ (*) siendo (*) un producto de elementos del tipo $\varepsilon(|m_{i_\alpha} |, |m_{i_\beta} |)$ donde los pares (α, β) corresponden a la descomposición de $\tau.\sigma^{-1}$ en transposiciones invariantes. El mismo argumento anterior muestra que la condición $l_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1 , ..., v_p)\neq l_{\underline{c}}(\underline{d}, \tau, v_1 , ..., v_p)$ implicaría $m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}=0$ para las variaciones con repetición correspondientes a la combinación con repetición.

Entonces podemos escribir

$$v_1 \wedge ... \wedge v_p= \sum_{\underline{c}=(i_1, ..., i_p)\in CR_{q,p}} a_{i_1 ... i_p} m_{i_1} \wedge ... \wedge m_{i_p}$$

donde

$$a_{i_1,\dots,i_p}= \sum_{\bar\sigma\in \$_p/H_{\underline{c}}} I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, \dots, v_p).a_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots a_{p,i_{\sigma(p)}}$$

<u>Definición I.3.2.2.</u>- Dado un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}= \{m_1, \dots, m_q\}$ del $\mathcal{D}$-módulo graduado ε- conmutativo M, si $\underline{d} = (d_1,\dots,d_q)$ y $v_1, \dots, v_p$ son elementos homogéneos de M que definen la matriz de coeficientes $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$. Dada una combinación con repetición $\underline{c}=(i_1, \dots, i_p)$ de q elementos tomados de p en p denotaremos mediante $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1,\dots,v_p)$ al valor

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1,\dots,v_p))= \sum_{\bar\sigma\in \$_p/H_{\underline{c}}} I_{\underline{c}}(\underline{m}, \sigma, v_1,\dots,v_p).a_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots a_{p,i_{\sigma(p)}}$$

siendo $\quad v_i = a_{i,1}m_1+\dots+a_{i,q}m_q \qquad i = 1,\dots,p.$

<u>Lema I.3.2.3.</u>- En las condiciones de la definición anterior si $m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_p}$ es no nulo para la combinación con repetición $\underline{c}= \{i_1, \dots, i_p\}$ se verifica que el coeficiente $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1,\dots,v_p)$ es independiente de la elección del representante σ elegido de la clase $\bar\sigma\in \$_p/H_{\underline{c}}$.

De esta forma el desarrollo del producto exterior de orden p de los elementos $v_1, \dots, v_p$ viene dado por

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p = \sum_{\bar\sigma\in \$_p/H_{\underline{c}}} \det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1,\dots,v_p)\, m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_p}$$

Consideremos ahora un anillo $\mathcal{D}= \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_r$ graduado y ε-conmutativo y una q-upla $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)\in \mathbb{Z}^q$. Esta q-upla define sobre $\mathcal{D}^q$ por traslación relativa a $\underline{d}$ una graduación. De forma más precisa, la componente de grado j de $\mathcal{D}^q$ respecto de esta graduación viene definida por

$$\mathcal{D}^q_{j,\underline{d}} = \mathcal{D}_{j,d_1} \times \dots \times \mathcal{D}_{j,d_q}$$

siendo, para $1 \leq i \leq q$

$$\mathcal{D}_{j,d_i} = \mathcal{D}_{j-d_i} \qquad \forall\ j \in \mathbb{Z}$$

Para el $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo $\mathcal{D}^q$ tenemos definido el producto exterior de orden p $\overset{p}{\wedge}\mathcal{D}^q$. Puesto que la base estándar $\{e_1, \dots, e_q\}$ es un sistema de generadores homogéneos (de grados respectivos $d_1, \dots, d_q$) se verifica que dados $v_1, \dots, v_q \in \mathcal{D}^q$.

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_q = \sum_{\underline{c} \in CR_{q,p}} \det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1, \dots, v_q).e_{\underline{c}}$$

donde por $e_{\underline{c}}$ denotaremos el elemento $e_{\underline{c}} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ siendo $\underline{c} = (i_1, \dots, i_p)$ y $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq q$.

El sistema de generadores del producto exterior $\overset{p}{\wedge}\mathcal{D}^q$

$$\{\, e_{\underline{c}} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \ /\ \underline{c} = (i_1, \dots, i_p) \in CR_{q,p} \}$$

es también un conjunto $\mathcal{D}$-linealmente independiente, por tanto se tienen las aplicaciones

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}, \ ,\dots, \ ): \mathcal{D}^q \times \dots \times \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}$$

obtenidas componiendo la aplicación producto exterior

$$\mathcal{D}^q \times \dots \times \mathcal{D}^q \longrightarrow \overset{p}{\wedge}\mathcal{D}^q$$

con la función coordenada $\underline{c}$-ésima sobre $\overset{p}{\wedge}\mathcal{D}^q$. Al ser el producto exterior ε-multilineal y ε-alternada las aplicaciones anteriores son ε-multilineales y ε-alternadas y además de grado cero al considerar sobre el $\mathcal{D}$, conjunto imagen, la graduación por la traslación de orden $\quad d_{i_1} + \dots + d_{i_p}$.

Se define, en conclusión, para cada valor de p y q, para cada variación con repetición $\underline{c}$, y para cada q-upla $\underline{d}$ una aplicación determinante sobre el conjunto de matrices pxq

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}) : \mathfrak{M}_{pxq}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

sin más que asociar a cada matriz las imágenes por las aplicaciones $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, \dots,)$ de la q-upla de $\mathcal{D}^q$ formada por sus vectores fila. La propiedad universal del producto exterior, permite caracterizar las aplicaciones $\det_{\underline{c}}(\underline{d})$ mediante las propiedades obvias.

Más concretamente si M es un $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo y

$$d_{\underline{c}}(\underline{d}) : \mathfrak{M}_{pxq}(\mathcal{D}) \longrightarrow M$$

una aplicación ε-multilineal , ε-alternada de grado cero; si denotamos por $A_{\underline{c}_1}$, la matriz cuyas filas son $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ donde $\underline{c}_1$ es la combinación con repetición $\underline{c}_1 = (j_1, \dots, j_p)$ $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_p \leq q$ entonces $d_{\underline{c}}(\underline{d})(A_{\underline{c}_1}) = 0$ si $\underline{c}_1 \neq \underline{c}$, entonces existe un único diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_{p\times q}(\mathcal{D}) \arrow[rr, "d_{\underline{c}}(\underline{d})"] \arrow[dr, "\det_{\underline{c}}(\underline{d})"'] & & M \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde φ es la aplicación $\mathcal{D}$-lineal dada por

$\varphi(1) = I_{\underline{c}}(\underline{d}, \mathrm{Id}, e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).d_{\underline{c}}(\underline{d})(A_{\underline{c}})$ $\qquad$ (Id denota el elemento neutro de $\$_p$).

En particular si $M = \mathcal{D}$, la aplicación $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, \dots,)$ es la única aplicación

ε-multilineal, ε-alternada tal que $d_{\underline{c}}(\underline{d})(A_{\underline{c}_1})=0$ si $\underline{c}_1 \neq \underline{c}$ y

$$d_{\underline{c}}(\underline{d})(A_{\underline{c}})= l_{\underline{c}}(\underline{d}, \mathrm{Id}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

Nótese que si $p=q$ $\underline{d}=(0, \ldots, 0)$ y $\underline{c}=(1, 2, \ldots, q)$ la aplicación

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}) : \mathcal{M}_{q\times q}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

es exactamente la aplicación definida en el parágrafo I §2 de esta Memoria.

§4.- FUNCION DETERMINANTE SOBRE DOMINIOS DE ORE Y SOBRE ANILLOS FILTRADOS

El planteamiento de los determinantes sobre cuerpos no conmutativos debido a Dieudonné y analizado en el parágrafo I §1 puede generalizarse en dos casos particulares de anillos. En primer lugar lo estudiaremos en el caso de los dominios de Ore, y en segundo lugar los anillos filtrados con graduado conmutativo.

§4.1.- DETERMINANTE SOBRE ANILLOS DE ORE

Sea $\mathcal{D}$ un dominio no conmutativo y unitario ($1 \in \mathcal{D}$). Denotaremos mediante $\mathcal{D}^*$ el conjunto de elementos no divisores de cero, es decir $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Definiciones I.4.1.1.- 1.- Sea $\mathcal{D}$ un dominio diremos que $\mathcal{D}$ es de Ore a la izquierda (resp. a la derecha) o que $\mathcal{D}$ verifica la condición de Ore a la izquierda(resp. a la derecha) sí y sólo sí para cada par de elementos $(a, s) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ con s regular ($s \in \mathcal{D}^*$) existen b, t elementos de $\mathcal{D}$ con t regular tales que

$$t.a = b.s \qquad \text{(resp.} \quad a.t = s.b).$$

2.- Sea $\mathcal{D}$ un anillo diremos que el cuerpo k es cuerpo de fracciones a la izquierda de $\mathcal{D}$ sí y sólo sí existe un homomorfismo de anillos $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow k$ tal que

1.- $\varphi(\mathcal{D}^*) \subset k^*$.

2.- $\forall\, r \in k$ existen a, t elementos de $\mathcal{D}$ con $t \neq 0$ tales que $r = \varphi(t)^{-1}.\varphi(a)$.

Los dos conceptos anteriores son equivalentes, es decir si $\mathcal{D}$ es un dominio con unidad, entonces $\mathcal{D}$ admite un cuerpo de fracciones a la izquierda k sí y sólo sí $\mathcal{D}$ es de Ore a la izquierda, (véase [17] IV Proposición 16.9 pág 529).

De esta forma tenemos asociado a un dominio de Ore $\mathcal{D}$, un cuerpo (no conmutativo en general) $k(\mathcal{D})$ que verifica las condiciones de cuerpo de fracciones a la izquierda para el anillo $\mathcal{D}$. El cuerpo $k(\mathcal{D})$ como conjunto se obtiene mediante el cociente de $\mathcal{D}\times\mathcal{D}^*$ por la siguiente relación de equivalencia R

" (a, s) R (b, t) sí y sólo sí para todo par $(u, v)\in \mathcal{D}^*\times\mathcal{D}^*$ tales que $u.s = v.t$ se tiene $u.a = v.b$ ";

las leyes de composición interna vienen dadas por

- $[a, s] + [b, t] = [a.u + b.v, m]$ donde $(u, v)\in \mathcal{D}\times\mathcal{D}^*$ son tales que $u.s = v.t = m$ y $[\ ,\ ]$ denota la clase de un par en $\mathcal{D}\times\mathcal{D}^*$.
- $[a, s]. [b, t] = [u.b, v.s]$ donde $(u, v)\in \mathcal{D}\times\mathcal{D}^*$ son tales que $u.t = v.a$.

El cuerpo $k(\mathcal{D})$ es único salvo isomorfismo, pues de hecho verifica la siguiente propiedad universal:

" Si $g: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ es un homomorfismo de anillos unitarios tal que $g(s)$ es una unidad en $\mathcal{D}'$ cualquiera que sea s elemento no nulo de $\mathcal{D}$, entonces existe un único homomorfismo $f: k(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ tal que $g = f \circ \varphi$ ".

En efecto, basta definir f como $f([a, s])= g(s)^{-1}.g(a)$ para $[a, s] \in k(\mathcal{D})$.

Como consecuencia de la propiedad universal si $g:\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ es un homomorfismo de anillos, donde $\mathcal{D}$ es un dominio de Ore a la izquierda, tal que

1.- $g(\mathcal{D}^*)$ está contenido en el conjunto de unidades de $\mathcal{D}'$,

2.- Todo elemento $d\in \mathcal{D}'$ es de la forma $d = g(s)^{-1}.g(a)$ siendo $a\in \mathcal{D}$ y $s \in \mathcal{D}^*$,

entonces existe un único isomorfismo $f : k(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ verificando $g = f \circ \varphi$.

En efecto la suprayectividad de f es evidente en virtud de la condición 2. Supongamos que $f([a, s]) = 0 \in \mathcal{D}'$ entonces $g(s)^{-1}.g(a)= 0$ y por tanto $g(a)= 0$ con lo cual $g(a)$ no es unidad en $\mathcal{D}'$. Por la condición 1 se tiene que $a =0$ de donde

$[a, s] = [0, s]$, es decir $[a, s]=0 \in k(\mathcal{D})$ y por tanto f es inyectiva y consecuentemente isomorfismo.

Nótese que este proceso de paso de un dominio de Ore al cuerpo de las fracciones se corresponde exactamente con el paso al localizado con respecto al sistema multiplicativamente cerrado $S = \mathcal{D}\setminus\{0\}=\mathcal{D}^*$.

Los elementos de $k(\mathcal{D})$ son clases de equivalencia $[a, s]$ que denotaremos usualmente por $s^{-1}.a$ ó a/s.

Consideremos un dominio de Ore a la izquierda $\mathcal{D}$ con cuerpo de fracciones asociado (k, φ). Sobre el cuerpo k (en principio no conmutativo) se tiene definida la aplicación determinante det definida para matrices cuadradas de orden arbitrario, es decir sobre $\mathcal{M}(k) = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{M}_n(k)$, con valores en el semigrupo $\bar{k}$ abelianizado de k,

$$\det: \mathcal{M}_n(k) \longrightarrow \bar{k}$$

Utilizando la inyección canónica $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow k$ podemos considerar la aplicación natural sobre conjuntos de matrices

$$(\varphi): \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{M}(k)$$

que inducirá la aplicación

$$\det_\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow \bar{k}$$

dada por

$$\det_\varphi = \det_{|\mathcal{M}(\mathcal{D})} = \det \circ (\varphi)$$

Se tiene así un concepto de determinante sobre anillos de Ore, concepto que precisará algunas generalizaciones para ser más productivo.

En lo sucesivo consideraremos monoides $(M, *)$ (a los que llamaremos semigrupos como en §1) es decir conjuntos provistos de una operación interna asociativa y con elemento unidad.

- Dado un semigrupo $(M, *)$, un elemento $a \in M$ diremos que es simplificable o regular a la izquierda (resp. a la derecha) si y solo si para cada par de elementos s, t de M tales que $a*s = a*t$ se verifica que $s=t$ (resp. $s*a = t*a \Rightarrow s = t$).

- Si e denota el elemento neutro de M, diremos que un elemento $a \in M$ es inversible o unidad sí y sólo sí esiste un elemento s de M tal que $s*a = e$.

- Finalmente como en el parágrafo I §1 un elemento $a \in M$ se dirá que es absorbente si para cada $m \in M$ se verifica $a*m = m*a = a$. Evidentemente si hay un elemento absorbente éste es único y será denotado por 0.

- Por un subsemigrupo (o submonoide) de M entenderemos un subconjunto (que contiene al elemento neutro) que es cerrado para la operación $*$.

- Diremos que un homomorfismo de semigrupos $f: M \longrightarrow M'$ es regular sí y sólo sí la imagen de todo elemento regular es regular.

Consideremos un semigrupo conmutativo $(M, .)$ cuyo elemento neutro denotaremos como 1. Dado un subsemigrupo S de M, su propia definición dice que S es multiplicativamente cerrado, luego en analogía con el álgebra conmutativa podemos definir la relación de equivalencia R sobre $M \times S$ mediante

" $(a, s) R (b, t)$ sí y sólo sí existe $u \in S$ verificando $u.a.t = u.b.s$".

Esta relación que es de equivalencia, sus clases las denotaremos por $[a, s]$, da lugar a un conjunto cociente $(M \times S)/R$, sobre el que se tiene la ley interna, bien definida, $[a, s].[b, t] = [a.b, s.t]$ que es asociativa y tiene al elemento $[1, 1]$ como elemento neutro.

<u>Definición I.4.1.2.</u>- Sea $(M, .)$ un semigrupo conmutativo y S un subsemigrupo de M. Denotaremos por $S^{-1}M$ y lo llamaremos subsemigrupo de fracciones al semigrupo $(M \times S)/R$ que acabamos de definir.

Dados $a \in M$ y $s \in S$ la clase $[a, s]$ módulo R del elemento $(a, s) \in M \times S$ la denotaremos por a/s ó $s^{-1}.a$. El homomorfismo de semigrupos

$$\Delta: M \longrightarrow S^{-1}M$$

dado por $\Delta(a) = a/1$ verifica

$$a/s = (a/1).(1/s) = (a/1).(s/1)^{-1} = \Delta(a).\Delta(s)^{-1} \quad \text{para todo} \quad a/s \in S^{-1}M$$

por tanto el par $(S^{-1}M, \Delta)$ verificará una propiedad universal semejante a las demostradas en el caso de anillos, es decir

<u>Proposición I.4.1.3.</u>- Sean M y M' dos semigrupos conmutativos $g: M \longrightarrow M'$ un homomorfismo de semigrupos tal que dado un subsemigrupo S de M $g(S)$ está contenido en el conjunto de elementos inversibles (o unidades) de M'. Entonces existe un único homomorfismo de semigrupos $f: S^{-1}.M \longrightarrow M'$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & M' \\ & S^{-1}.M \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Nótese que dado un semigrupo conmutativo $(M, .)$ y un subsemigrupo S de

M, el homomorfismo canónico $\Delta: M \longrightarrow S^{-1}M$ es inyectivo sí y sólo sí todo elemento de S es regular.

La demostración es análoga a la que se realiza en el caso conmutativo.

Sea $\mathcal{D}$ un dominio de Ore a la izquierda y M un semigrupo conmutativo. Podemos considerar homomorfismos de semigrupos sobre el semigrupo multiplicativo no conmutativo $(\mathcal{D}, .)$ con valores en el semigrupo M

$$\alpha: \mathcal{D} \longrightarrow M$$

que sean regulares.

Para un tal homomorfismo al ser $\mathcal{D}$ un dominio, el conjunto de puntos regulares viene definido por $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\backslash\{0\}$, por tanto el conjunto imagen $\alpha(\mathcal{D}^*)=S$ es un conjunto formado por elementos regulares que contiene a $1= \alpha(1)$, cerrado para la ley de composición es interna , es decir $S = \alpha(\mathcal{D}^*)$ es un subsemigrupo. Luego tenemos definido el homomorfismo inyectivo

$$\Delta: M \longrightarrow S^{-1}M$$

donde $S^{-1}M$ es el semigrupo de fracciones sobre M, para $S= \alpha(\mathcal{D}^*)$. Denotaremos dicho semigrupo de fracciones por M_α debido a su dependencia del homomorfismo α . En resumen, tenemos por el momento el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & M \arrow[d, hook, "\Delta"] \\ k & M_\alpha \end{tikzcd}$$

donde el par (k, φ) denota el cuerpo de fracciones a la izquierda del dominio de Ore $\mathcal{D}$.

Ahora bien dado $r \in k$ se verifica que existen $(a, s) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}^*$ tales que $r = \varphi(s)^{-1}.\varphi(a)$ con lo cual podemos prolongar el homomorfismo α obteniendo

$$\alpha^*: k \longrightarrow M_\alpha$$

definida mediante

$$\alpha^*(r) = \Delta[\alpha(s)]^{-1}.\Delta[\alpha(a)]$$

que nos cierra el diagrama anterior. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & M \arrow[d, hook, "\Delta"] \\ k \arrow[r, "\alpha^*"] & M_\alpha \end{tikzcd}$$

En este diagrama el cuerpo k es en principio no conmutativo, M_α es un semigrupo conmutativo y α^* es un homomorfismo regular de semigrupos con lo cual la restricción de α^* al grupo k^* es un homomorfismo entre los grupos k^* y $\alpha^*(k^*) \subset M_\alpha$ siendo $\alpha^*(k^*) \subset M_\alpha$ abeliano. Por tanto el homomorfismo α^* se factoriza a través de $\bar{\alpha}$ definida sobre el grupo cociente $k^*/(k^*; k^*)$; pudiéndose extender al abelianizado $\bar{k}$ definiendo $\bar{\alpha}(\bar{0}) = \Delta \circ \alpha(0)$. De esta forma obtenemos un homomorfismo de semigrupos

$$\bar{\alpha}: \bar{k} \longrightarrow M_\alpha$$

que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & & M \arrow[d, hook, "\Delta"] \\
k \arrow[rr, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\rho"'] & & M_\alpha \\
& \bar{k} \arrow[ur, "\bar{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Este diagrama nos induce aplicaciones sobre conjuntos de matrices, resultado de componer $\bar{\alpha}$ con la función determinante de Dieudonné

$$\mathfrak{M}_n(\mathcal{D}) \xrightarrow{(\varphi)} \mathfrak{M}_n(k) \xrightarrow{\det} \bar{k} \xrightarrow{\bar{\alpha}} M_\alpha .$$

<u>Definición I.4.1.5.</u>- Sean $\mathcal{D}$ un dominio de Ore a la izquierda de cuerpo de fracciones (k, φ), M un semigrupo conmutativo y $\alpha : \mathcal{D} \longrightarrow M$ un homomorfismo regular de semigrupos. Llamaremos determinante sobre $\mathcal{D}$ asociado al homomorfismo α y lo denotaremos por $\det_\alpha$ a la aplicación

$$\det_\alpha : M(\mathcal{D}) \longrightarrow M_\alpha$$

definida por $\det_\alpha = \bar{\alpha} \circ \det \circ(\varphi) = \bar{\alpha} \circ \det_{|M(\mathcal{D})}$.

-En las condiciones anteriores diremos que $\det_\alpha$ es regular o bien que el determinante sobre $\mathcal{D}$ asociado a α es regular si $\det_\alpha(M(\mathcal{D})) = \Delta \circ \alpha(\mathcal{D})$.

Nótese que $\Delta \circ \alpha(\mathcal{D})$ se identifica con $\alpha(\mathcal{D})$ ya que Δ es inyectivo por tanto la representación del determinante dice que el determinante de Dieudonné de una matriz de coeficientes en $\mathcal{D}$ es un elemento de M. Es claro que la definición de función det sobre $\mathcal{D}$ en el apartado I.4.1 de esta Memoria es un caso particular de ésta, para el caso

$M = \bar{k}$ y el homomorfismo de monoides $\rho \circ \varphi$

$$\alpha = \rho \circ \varphi : \mathfrak{D} \longrightarrow \bar{k}$$

§ 4-2.- DETERMINANTE SOBRE DOMINIOS FILTRADOS

Denotemos por $\mathcal{D}$ un anillo unitario.

Definiciónes I.4.2.1.- 1.-Diremos que el anillo $\mathcal{D}$ es filtrado si existe una sucesión creciente $\Sigma = \{F_n\mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos aditivos de $\mathcal{D}$ verificando

a.- El elemento unidad $1\in\mathcal{D}$ es un elemento de $F_0\mathcal{D}$.

b.- $(F_n\mathcal{D}).(F_m\mathcal{D}) \subset (F_{n+m}\mathcal{D}) \quad \forall\ n, m \in \mathbb{Z}$.

c.- $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n\mathcal{D} = \mathcal{D}$.

-A la familia $\Sigma = \{F_n\mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos de $\mathcal{D}$ la llamaremos filtración del anillo $\mathcal{D}$ y al par $(\mathcal{D}, \Sigma)$ le llamaremos anillo filtrado.

2.- Dado un anillo filtrado $(\mathcal{D}; \Sigma)$ y un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda M (resp. a la derecha), llamaremos filtración sobre M a toda sucesión creciente $\Sigma M = \{F_nM\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos aditivos de M tales que

$$(F_n\mathcal{D}).(F_mM) \subset F_{n+m}M \quad (\text{resp. } (F_nM).(F_m\mathcal{D}) \subset F_{n+m}M) \ \forall\ n,m\in\mathbb{Z}.$$

-Al par (M, Σ_M) le llamaremos $\mathcal{D}$-módulo filtrado. En lo sucesivo evitaremos decir módulo a la izquierda o a la derecha si las nociones que se introducen o estudian son válidas en ambos casos, la notación corresponderá como es habitual a la de módulos a la izquierda.

3.- Dado un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ y un homomorfismo $f: M \longrightarrow N$ entre los $\mathcal{D}$-módulos filtrados (M, Σ_M) (N, Σ_N); diremos que f es un homomorfismo filtrado si para cada entero n se verifica $f(F_nM) \subset F_nN$.

4.- Dado un $\mathcal{D}$-módulo filtrado (M, Σ_M) diremos que la filtración $\Sigma_M = \{F_nM\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es discreta si existe un entero $n_o \in \mathbb{Z}$ tal que $F_pM = 0 \quad \forall\, p < n_o$. Así mismo diremos que es separada sí y sólo sí $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_nM = \{0\}$. En lo sucesivo todas las filtraciones a considerar serán separadas.

Todo anillo unitario $\mathcal{D}$ podemos considerarlo como un anillo filtrado con la filtración trivial definida por

$$F_n\,\mathcal{D} = \begin{cases} \mathcal{D} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

De esta forma el proceso que vamos a seguir puede considerarse, también, como un proceso aplicable a los anillos unitarios arbitrarios. Como ejemplos de filtraciones más significativas que la trivial, se encuentran las siguientes filtraciones.

- Filtración inducida.- Dado un $\mathcal{D}$-módulo filtrado (M, Σ_M) y un submódulo N de M se llama filtración inducida por Σ_M sobre N a la filtración definida por

$$F_nN = N \cap F_nM \quad n\in\mathbb{Z}.$$

- Filtración imagen.- Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo filtrado entre los $\mathcal{D}$-módulos filtrados (M, Σ_M) y (N, Σ_N) y Σ una filtración sobre M . Al submódulo Imf de N se le puede dotar de la filtración imagen que se define mediante

$$F_n(\mathrm{Imf}) = f(F_nM) \quad n\in\mathbb{Z}.$$

- Filtración por traslación.- Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado dado $r\in\mathbb{Z}$ podemos definir una filtración por traslación de orden r asociada a Σ, siendo $r\in\mathbb{Z}$ mediante

$$\Sigma_r = \{(F^r{}_n\mathcal{D})\} \quad \text{donde} \quad F^r{}_n\mathcal{D} = F_{n-r}\mathcal{D} \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que la filtración trasladada de orden $r \neq 0$ de la filtración estructural de un anillo filtrado $\mathcal{D}$ no es una filtración del anillo $\mathcal{D}$ sino del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}$; a este módulo lo denotaremos mediante $\mathcal{D}_{[r]}$.

-Filtración producto.- Sean M y N dos $\mathcal{D}$-módulos filtrados de filtraciones respectivas $\Sigma_M = \{F_pM\}_{p \in \mathbb{Z}}$ y $\Sigma_N = \{F_pN\}_{p \in \mathbb{Z}}$ Llamaremos filtración producto sobre el $\mathcal{D}$-módulo producto $M \times N$ a la definida por $F_p(M \times N) = F_pM \times F_pN$.

-Filtración libre sobre $\mathcal{D}^p$.- Dado el anillo filtrado $\mathcal{D}$ de filtración asociada $\Sigma = \{F_r\mathcal{D}\}_{r \in \mathbb{Z}}$ llamaremos filtración libre sobre $\mathcal{D}^p$ a la filtración producto de la filtración Σ es decir, a la filtración definida por

$$F_r(\mathcal{D}^p) = F_r\mathcal{D} \times \ldots \times F_r\mathcal{D}.$$

- Filtración producto tensorial.- Sean M un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha filtrado y N un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda filtrado, sobre el $\mathbb{Z}$-módulo $M \otimes N$ se define la filtración $F_p(M \otimes N)$ dada por el $\mathbb{Z}$-submódulo de $M \otimes N$ generado por todos los elementos del tipo $m \otimes n$ siendo $m \in F_tM$, $n \in F_sN$ y $s+t = p$, es decir,

$$F_p(M \otimes N) = \bigoplus_{t+s=p} (F_tM \otimes F_sN).$$

Consideremos un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ siendo Σ la filtración dada por $\Sigma = \{F_n\mathcal{D}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Los conjuntos $F_n\mathcal{D}$ para n entero tienen estructura de subgrupo verificándose además la condición $F_{n-1}\mathcal{D} \subset F_n\mathcal{D}$, con lo cual podemos considerar el grupo aditivo cociente $F_n\mathcal{D}/F_{n-1}\mathcal{D}$ y el grupo aditivo $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (F_n\mathcal{D}/F_{n-1}\mathcal{D}) = gr_\Sigma \mathcal{D}$.

Sobre $gr_\Sigma \mathcal{D}$ se tiene la estructura multiplicativa

$$gr_\Sigma \mathcal{D} \times gr_\Sigma \mathcal{D} \longrightarrow gr_\Sigma \mathcal{D}$$

dada por la extensión de las aplicaciones sobre las componentes homogénea

$$(F_n\mathcal{D} / F_{n-1}\mathcal{D}) \times (F_m\mathcal{D} / F_{m-1}\mathcal{D}) \longrightarrow (F_{n+m}\mathcal{D} / F_{n+m-1}\mathcal{D})$$

inducidas por los productos

$$F_n\mathcal{D} \times F_m\mathcal{D} \longrightarrow F_{n+m}\mathcal{D}$$

que corresponden a la multiplicación en $\mathcal{D}$.

Análogamente dado un $\mathcal{D}$-módulo filtrado a la izq. (M, π) de filtración asociada $\pi = \{F_nM\}_{n\in \mathbb{Z}}$ podemos considerar el grupo abeliano $gr_\pi M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (F_nM / F_{n-1}M)$ que se puede dotar de estructura de $gr_\Sigma\mathcal{D}$-módulo con la ley producto à la izquierda dada por $(a+F_n\mathcal{D}).(m+F_pM) = a.m + F_{n+p-1}M$. De esta manera el $gr_\Sigma \mathcal{D}$-módulo $gr_\pi M$ se llamará el módulo graduado de M para la filtración $\pi = \{F_nM\}_{n\in \mathbb{Z}}$.

En estas condiciones, para cada subgrupo F_nM de M tenemos definido el homomorfismo de paso al cociente

$$\sigma_n : F_nM \longrightarrow F_nM/F_{n-1}M$$

Por ser el $gr_\Sigma\mathcal{D}$-módulo $gr_\pi M$ la suma directa de estos grupos y M la unión de sus subgrupos, los homomorfismos $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ inducen en conjunto

$$\sigma : M \longrightarrow gr_\pi M$$

donde

$$\begin{cases} \sigma(0)=0 \\ \sigma(m)= m+F_{n-1}M = \sigma_n(m) \qquad \text{siendo} \quad n = \inf\{p\in \mathbb{Z} \ / \ m\in F_pM\} \end{cases}$$

Esta aplicación σ está bien definida ya que si $m\neq 0$ se tiene que $m \notin \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ luego existe $p\in\mathbb{Z}$ verificando $m\in F_p$; por ser la sucesión $\pi=\{F_nM\}_{n\in\mathbb{Z}}$ creciente y separada se tiene que el conjunto de tales elementos p es no vacío y acotado inferiormente, es decir existe su mínimo. A la aplicación

$$\sigma : M \longrightarrow gr_{\pi}M$$

la llamaremos aplicación símbolo principal, y para cada $m\in M$ al elemento $\sigma(m)$ le llamaremos el símbolo principal de m.

Consideremos un homomorfismo filtrado de $\mathcal{D}$-módulos filtrados

$$f: M \longrightarrow N$$

Se verifica que denotando por $\Sigma_M=\{F_pM\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y $\Sigma_N=\{F_pN\}_{p\in\mathbb{Z}}$ las filtraciones respectivas sobre M y N, entonces $f(F_pM)\subset F_pN \quad \forall\, p\in\mathbb{Z}$ con lo cual podemos definir el homorfismo composición de grupos aditivos

$$F_pM \xrightarrow{f_{|F_pM}} F_pN \xrightarrow{\sigma_p} F_pN/F_{p-1}N$$

que es nulo sobre $F_{p-1}M$ con lo cual por paso al cociente induce

$$F_pM/F_{p-1}M \xrightarrow{\bar{f}_p} F_pN/F_{p-1}N.$$

Tenemos de este modo la sucesión $\{\bar{f}_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos de grupos aditivos

$$\bar{f}_p: F_pM/F_{p-1}M \longrightarrow F_pN/F_{p-1}N \quad p\in\mathbb{Z}$$

que define

$$\bar{f} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \bar{f}_p : grM \longrightarrow grN.$$

A este homomorfismo $\bar{f}$ lo llamaremos graduado de f (en ocasiones lo denotaremos por $gr(f)$) y se verifica no sólo que es un homomorfismo de grupos aditivos sino que es un homomorfismo de anillos graduados, ya que las filtraciones son compatibles con las leyes producto de $\mathcal{D}$, y de grado cero.

Asímismo dados dos homomorfismos filtrados $f: M \longrightarrow N$ y $g: N \longrightarrow L$ definidos sobre $\mathcal{D}$-módulos filtrados se verifica que la composición $g \circ f: M \longrightarrow N$ es un homomorfismo filtrado verificándose que

$$gr(g \circ f) = \bar{g} \circ \bar{f} = gr(g) \circ gr(f).$$

De esta forma la asignación que a cada $\mathcal{D}$-módulo filtrado le asigna su graduado y a cada $\mathcal{D}$-homomorfismo filtrado f su gr $\mathcal{D}$-homomorfismo graduado $gr(f) = \bar{f}$ es funtorial. Esta asignación funtorial no es exacta ya que no transforma sucesiones exactas en sucesiones exactas. En efecto basta considerar un anillo filtrado $\mathcal{D}$ y el $\mathcal{D}$-módulo filtrado $\mathcal{D}_{[r]}$ obtenido por traslación de orden $r>0$ con lo cual la aplicación identidad de $\mathcal{D}_{[r]}$ en $\mathcal{D}$ es filtrada pero su homomorfismo graduado asociado es la aplicación idénticamente nula.

<u>Nota I.4.2.2.</u>- Asímismo asociado a una filtración π sobre un $\mathcal{D}$-módulo M podemos definir una norma que denotaremos como $|\ |_\pi$ (o bien $|\ |$ cuando no haya confusión)

$$|\ |_\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

que viene definida para $m \in M$ por

$|m|_\pi = 0 \iff m=0$

$|m|_\pi = 2^n \iff n = \inf \{p \in \mathbb{Z} \ / \ m \in F_pM\}$

Esta norma viene de hecho inducida por la función de orden

$$v: M \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \text{ definida por}$$

$v(0) = -\infty \quad v(m) = n \iff m \in F_nM \setminus F_{n-1}M$ (Usando el convenio $2^{-\infty} = 0$)

Las propiedades principales de esta norma son las siguientes

1.- $|m| = 0 \Leftrightarrow m = 0$

2.- $|m + n| \leq \text{máx}(|m|, |n|)$

3.- $|m + n| = \text{máx}(|m|, |n|)$ si $|m| \neq |n|$

4.- $|a.m| = |a|_\Sigma |m|$ donde $|\ |_\Sigma$ denota la norma definida sobre $\mathcal{D}$ por la filtración Σ.

De esta forma, la aplicación símbolo principal puede darse también mediante

$$\sigma: M \longrightarrow gr_\pi M$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} 0 & |m| = 0 \\ \sigma_n(m) = m + F_{n-1}M & |m| = 2^n \Leftrightarrow v(m) = n \end{cases}$$

Nótese también que si las filtraciones que se consideran no fuesen separadas entonces se tendrá una seminorma en vez de una norma, manteniéndose el significado completo en el resto.

La terminología topológica, debida a la expresión en términos de la norma anterior, nos proporciona el puente hacia la teoría de microlocalización algebraica desarrollada recientemente por T. A. Springer y Van den Essen.

Para ello necesitamos más definiciones previas

Definiciónes I.4.2.3.- 1.- Dado un anillo $\mathcal{D}$ y un subconjunto S de $\mathcal{D}$ diremos que $\mathcal{D}$ es reversible a la izquierda (resp. a la derecha) respecto de S si dado $a \in \mathcal{D}$ y $t \in S$ tales que $a.t = 0$ existe $s \in S$ tal que $s.a = 0$.

2.- Dado un subsemigrupo multiplicativo T de $\mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ es un anillo unitario que contenga al 1 diremos que verifica las condiciones de Ore a la izquierda respecto de T si para todo par $(a, s) \in \mathcal{D} \times T$ existe otro par $(b, t) \in \mathcal{D} \times T$ tal que $t.a = b.s$.

3.-Por un anillo normado $(\mathfrak{R}, \|\ \ \|)$ entenderemos un anillo (no conmutativo en general) unitario junto con una norma $\|\ \ \| : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifique las siguientes propiedades:

a.- $\|a\| = 0 \iff a = 0$

b.- $\|a+b\| \leq \text{máx}(\|a\|, \|b\|)$

c.- $\|a+b\| = \text{máx}(\|a\|, \|b\|)$ si $\|a\| \neq \|b\|$

d.- $\|a.b\| = \|a\|.\|b\|$

El anillo normado será completo cuando lo sea como espacio métrico con la distancia inducida por $\|\ \ \|$.

Si $(\mathfrak{D}, \Sigma)$ es un anillo filtrado, la nota anterior muestra que $(\mathfrak{D}, |\ \ |_\Sigma)$ es un anillo normado.

Consideremos un anillo filtrado $(\mathfrak{D}, \Sigma)$ de norma asociada $|\ |$. Dado un subsemigrupo S de $\mathfrak{D}$ tal que $\sigma(S)$ sea subsemigrupo de $gr_\Sigma \mathfrak{D}$ tal que no contenga al $0 \in gr_\Sigma(\mathfrak{D})$ (es decir tal que $0 \notin S$ puesto que la filtración es separada) y $gr_\Sigma \mathfrak{D}$ verifique las condiciones de Ore y reversibilidad a la izquierda respecto de $\sigma(S)$. Por un teorema debido a Springer y Van den Essen (véase [55] Proposición 2.15 pág 314, y [63] Teoremas I y II pág 4 respectivamente) existe una terna $(\mathfrak{R}, \phi, \|\ \ \|)$ donde $\mathfrak{R}$ es un anillo normado completo con norma $\|\ \ \|$ y ϕ es un homomorfismo de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{R}$ verificando

i.- $\phi(s)$ es inversible en $\mathfrak{R}$ para $s \in S$.

ii.- $\|\phi(s)^{-1}\phi(a)\| \leq |s|^{-1}.|a|$ para $s \in S$ y $a \in \mathfrak{D}$.

iii.- Todo homomorfismo de anillos $h: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ siendo $\mathfrak{D}'$ normado y completo para la topología inducida por su norma y que verifique propiedades análogas a 1 y 2 se factoriza canónicamente a través de ϕ. Es decir, en términos precisos, existe un único homomorfismo de anillos $\chi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{D}'$ tal que

$$\chi \circ \varphi = h \quad y \quad \|\chi(r)\| \leq \|r\| \quad \forall \ r \in \mathcal{R}.$$

Definición I.4.2.4.- La terna verificando el resultado anterior se llama microlocalizado algebraico a la izquierda de $\mathcal{D}$ con fracciones en S y se denota por $(E_S(\mathcal{D}), \phi_S, \| \ \|_S)$. Sobre este anillo $E_S(\mathcal{D})$ y a partir de su norma $\| \ \|_S$ se define una filtración natural Σ_S dada por la familia definida mediante

$$F_n(E_S(\mathcal{D})) = \{ a \in E_S(\mathcal{D}) \ / \ \|a\| < 2^n \}$$

que induce un graduado sobre $E_S(\mathcal{D})$ que denotaremos por $gr(E_S(\mathcal{D}))$.

Obtenemos de esta forma asociado a un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ y a un conjunto $S \subset \mathcal{D}$, multiplicativamente cerrado, tal que $0 \notin \sigma(S)$ y $\sigma(S)$ sea de Ore y reversible a la izquierda, un diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\phi"'] & gr_{\Sigma}\mathcal{D} \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\
E_s(\mathcal{D}) \arrow[r, "\sigma_s"] & gr_{\Sigma_s}(E_s\mathcal{D})
\end{tikzcd}$$

donde σ y σ_S son las aplicaciones símbolo principal respectivas y $\bar{\phi}$ es el morfismo inducido por ϕ por paso al graduado que está bien definida al ser ϕ un homomorfismo filtrado en virtud de la propiedad ii) del anillo microlocal $E_S(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$.

Nota I.4.2.5.- Esta construccción puede generalizarse asímismo para un $\mathcal{D}$-módulo filtrado a la izquierda M, obteniendo un $E_S(\mathcal{D})$-módulo a la izquierda que denotaremos por $E_S(M)$ y es un módulo normado y filtrado . La asignación $M \longrightarrow E_S(M)$, entre la categoría de $\mathcal{D}$-módulos filtrados a la izquierda y la categoría de $E_S(\mathcal{D})$-módulos filtrados a la izquierda, es funtorial pero no exacta (sin embargo si nos restringimos a los módulos de tipo finito este funtor sí es exacto).

Para el estudio de la función determinante en el caso de anillos filtrados $(\mathcal{D}, \Sigma)$ de graduado asociado $gr\mathcal{D}$ será necesario imponer una serie de restricciones sobre el graduado. De esta forma consideraremos en adelante un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ cuyo graduado asociado $gr\mathcal{D}$ sea un dominio conmutativo. Considerando el sistema multiplicativamente cerrado $S = \mathcal{D}\backslash\{0\}$ (al ser $gr\mathcal{D}$ dominio lo es $\mathcal{D}$) se tiene que $\sigma(S)=\{\sigma(a)\ /\ a\neq 0\}$ es un sistema multiplicativamente cerrado formado por elementos homogéneos, concretamente todos los elementos homogéneos de $gr\mathcal{D}$. Denotando por $\mathcal{R}_S$ el localizado $\sigma(S)^{-1}gr\mathcal{D}$ del anillo conmutativo $gr\mathcal{D}$ con respecto al sistema multiplicativamente cerrado $\sigma(S)$ se tiene que sobre $\mathcal{R}_S$ la graduación de $gr\mathcal{D}$ induce una graduación definida por

$$\mathcal{R}_S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{S,n} \qquad \text{donde}$$

$\mathcal{R}_{S,n} = \{\sigma(t)^{-1}\sigma(a)/\ \text{grado}(\sigma(a))=l \quad \text{grado}(\sigma(t))=r \ \text{ y } \ l-r=n\}$

Ahora bien el anillo $\mathcal{R}_S$ es isomorfo como anillo graduado al graduado $gr(E_S(\mathcal{D}))$ del microlocalizado de $\mathcal{D}$ con respecto a S. Este isomorfismo viene dado por la aplicación ψ siguiente construida a partir de $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow E_S(\mathcal{D})$

$$\psi(\sigma(t)^{-1}.\sigma(a)) = \phi(t)^{-1}\phi(a)+F_{n-1}(E_S(\mathcal{D}))$$

donde $\sigma(t)^{-1}.\sigma(a)\in \mathcal{R}_{S,n}$ (véase [63])

Más aún, el microlocalizado $E_S(\mathcal{D})$ es, como se puede ver en [40] (5.7 pág 47), un cuerpo que se denomina microlocalizado total de $\mathcal{D}$, y al que denotaremos por $k_{\mathcal{D}}$ o simplemente k si no hay posible confusión. El homomorfismo canónico

$$\psi : \mathcal{D} \longrightarrow k_{\mathcal{D}}$$

es inyectivo ya que por la condición i del teorema de la existencia del microlocalizado se tiene $\phi(t) \neq 0$ para $t \in S$ luego $\phi(a)=0$ sí y sólo sí $a=0$.

Sobre $k_{\mathcal{D}}$ tenemos asímismo definida una filtración Ω cuyo graduado denotaremos mediante $gr_{\Omega}k$ y según lo dicho es isomorfo al localizado $\mathcal{R}_S$ del anillo $gr_{\Sigma}\mathcal{D}$ sobre $S=\sigma(\mathcal{D}^*)$ con lo cual $gr_{\Omega}k$ es conmutativo. Tenemos por tanto el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\phi"'] & gr_{\Sigma}\mathcal{D} \arrow[d, "\bar{\phi}"] \arrow[dr] & \\
k_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\sigma_s"] & gr_{\Omega}k_{\mathcal{D}} & \mathcal{R}_s \arrow[l, "\psi"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

La aplicación σ_S es un homomorfismo de semigrupos para las leyes producto respectivas, con lo cual al ser $gr_{\Omega}k$ conmutativo y $k_{\mathcal{D}}$ un cuerpo σ_S se factoriza a través del abelianizado obteniendo un homomorfismo de semigrupos $\bar{\sigma} : \bar{k}_{\mathcal{D}} \longrightarrow gr_{\Omega}k$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\phi"'] & & gr_{\Sigma}\mathcal{D} \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\
k_{\mathcal{D}} \arrow[rr, "\sigma_3"] \arrow[dr, "\rho"'] & & gr_{\Omega}k_{\mathcal{D}} \\
& \bar{k}_{\mathcal{D}} \arrow[ur, "\bar{\sigma}"'] &
\end{tikzcd}$$

De esta forma asociada a la filtración Σ definida sobre $\mathcal{D}$ toda matriz $A=(a_{i,j})\in \mathcal{M}_n(\mathcal{D})$ podemos considerarla a través del homomorfismo ϕ como una matriz sobre $k_{\mathcal{D}}$ para la cual está definida el determinante de Dieudonné

$$\det: \mathcal{M}(k_{\mathcal{D}}) \longrightarrow \bar{k}_{\mathcal{D}}.$$

Definición I.4.2.6.- Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado cuyo graduado sea un dominio conmutativo; llamaremos determinante sobre $\mathcal{D}$ asociado a Σ a la aplicación que denotaremos por $\det_{\Sigma}$ definida por

$$\det_{\Sigma}= \bar{\sigma} \circ \det \circ (\phi)= \bar{\sigma} \circ \det{}_{|\mathcal{M}(\mathcal{D})}.$$

- En estas condiciones $\det_{\Sigma}$ diremos que es regular sí y sólo sí

$$\det_{\Sigma}(\mathcal{M}(\mathcal{D}))=\bar{\phi} \circ \sigma (\mathcal{D}).$$

es decir la imagen de la aplicación $\det_{\Sigma}$ es $\sigma(\mathcal{D})$ identificado como subsemigrupo de $gr_{\Omega}k$.

Tenemos, por tanto, definidas dos aplicaciones determinante una para los dominios de Ore y otra para los anillos filtrados cuyo graduado es un dominio conmutativo. Veamos ahora qué ocurre cuando tenemos un dominio de Ore que es filtrado y cuyo graduado asociado sea un dominio conmutativo.

Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un dominio de Ore (a la izquierda) filtrado mediante

$\Sigma=\{F_n\mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $gr_\Sigma\mathcal{D} = gr\mathcal{D}$ es un dominio conmutativo. En estas condiciones hemos definido la aplicación

$$det_\Sigma : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow gr_\Omega k_{\mathcal{D}}$$

donde $(k_{\mathcal{D}}, \Omega)$ es el cuerpo microlocalizado total del anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$, que como indicamos anteriormente es filtrado y su graduado $gr_\Omega k_{\mathcal{D}}$ es isomorfo al anillo de fracciones de $gr\mathcal{D}$ respecto al semigrupo (sistema multiplicativamente cerrado) $\sigma(S)$ siendo $S=\mathcal{D}\setminus\{0\}$ y $\sigma: \mathcal{D} \longrightarrow gr\mathcal{D}$ la aplicación símbolo principal.

El dominio $\mathcal{D}$ verifica además la condición de Ore a la izquierda con lo cual para todo homomorfismo regular de semigrupos

$$\alpha: \mathcal{D} \longrightarrow M$$

siendo M un semigrupo multiplicativo y conmutativo, tenemos definida la aplicación

$$det_\alpha : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow M_\alpha$$

que viene inducida por la aplicación determinante sobre el cuerpo de fracciones a la izquierda k asociado al dominio de Ore $\mathcal{D}$. En particular si se toma como α la aplicación símbolo principal σ, se tiene

$$det_\sigma : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow M_\sigma .$$

Se tiene además el isomorfismo natural $gr_\Omega K_{\mathcal{D}} \cong M_\sigma$ según lo indicado más arriba, que induce el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_n(\mathcal{D}) \arrow[r, "(\varphi)"] \arrow[rrr, bend left, dashed, "det_\sigma"] \arrow[d, "(\phi)"'] \arrow[drrr, "det_\Sigma"] & M_n(k) \arrow[r, "det"] & \bar{k} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & M_\sigma \arrow[d, "\wr"] \\
M_n(k_{\mathcal{D}}) \arrow[rr, "det"] & & \bar{k}_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & gr_\Omega(k_{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}$$

Dicho diagrama es conmutativo, ya que de la propiedad universal de k se deduce la existencia de un homomorfismo de cuerpos $j: k \longrightarrow k_{\mathcal{D}}$ que induce $\bar{j}: \bar{k} \longrightarrow \bar{k}_{\mathcal{D}}$ resultando

$$\begin{tikzcd}
M_n(\mathcal{D}) \arrow[r, "(\varphi)"] \arrow[d, "(\phi)"'] & M_n(k) \arrow[r, "det"] \arrow[d, "(j)"] & \bar{k} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[d, "\bar{j}"] & M_\sigma \arrow[d, "\wr"] \\
M_n(k_{\mathcal{D}}) \arrow[r, "Id"] & M_n(k_{\mathcal{D}}) \arrow[r, "det"] & \bar{k}_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & gr_\Omega(k_{\mathcal{D}})
\end{tikzcd}$$

donde los dos cuadros de la izquierda son obviamente conmutativos y la construcción del isomorfismo $M_\sigma \cong gr_\Omega(k_{\mathcal{D}})$ muestra que también lo es el tercero y de aquí el diagrama completo.

Los dos conceptos de determinante det_σ y det_Σ son por tanto coincidentes. Nótese que en este caso M_σ es de hecho un anillo (localizado de gr $\mathcal{D}$ respecto de la parte multiplicativamente cerrada) y que el isomorfismo $M_\sigma \cong gr_\Omega(k_{\mathcal{D}})$ es un isomorfismo de anillos. Más aún dichos anillos son conmutativos, por tanto se tienen aplicaciones determinante sobre el anillo no conmutativo $\mathcal{D}$ con valores en un anillo conmutativo. Sin embargo dichas aplicaciones no verifican en general la condición C-2 definida en el parágrafo I §2, por tanto no se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_n(\mathcal{D}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "det_\sigma"'] & & (\mathcal{D}/J_c) \arrow[dl, "\varphi"] \\
& M_\sigma \cong gr_\Omega k_\sigma &
\end{tikzcd}$$

donde φ es un homomorfismo de anillos, es decir los conceptos d_n del parágrafo §2 y

$\det_\sigma = \det_\Sigma$ del presente parágrafo no son iguales. En efecto, si se cumpliese la condición C-2, como C-1, C-3 y C-4 se verifican (véase I §2), entonces tal homomorfismo

$$\varphi: \mathcal{D}/J_c \longrightarrow M_\sigma$$

existiría, y por tanto un homomorfismo de anillos $\bar{\varphi}: \mathcal{D} \longrightarrow M_\sigma$ definido por composición con la aplicación de paso al cociente $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/J_c$. Ahora bien, para n=1 obtendríamos que $\bar{\varphi}: \mathcal{D} \longrightarrow M_\sigma$ no es otra cosa que la aplicación símbolo principal $\sigma: \mathcal{D} \longrightarrow gr_\Sigma\mathcal{D}$ compuesta con la localización, luego $\mathrm{Im}(\bar{\varphi}) \subset gr_\Sigma\mathcal{D}$ y de aquí la aplicación símbolo principal sería un homomorfismo de anillos. Esto sólo ocurre cuando la filtración es trivial (en caso contrario existirán a y b tales que $v(a) > v(b)$ y $a\neq 0$ $b\neq 0$ con lo cual $\sigma(a+b)= \sigma(a)\neq \sigma(a)+\sigma(b)$). Caso en el cual $\mathcal{D} \cong gr_\Sigma\mathcal{D}$ y por tanto $\mathcal{D}$ sería un dominio conmutativo y todas las definiciones de determinante coinciden. En conclusión si $\mathcal{D}$ es conmutativo las definiciones de D_n y $\det_\sigma = \det_\Sigma$ no tienen relación entre ellas.

CAPITULO II

ANILLOS GRADUADOS ANTICONMUTATIVOS.

INVARIANTES DE FITTING.

En el presente capítulo nos planteamos la construcción de unos invariantes, los invariantes determinantales, que van a depender además del módulo de una familia de grados asociada a sistemas generadores homogéneos. Este planteamiento se realiza para módulos graduados anticonmutativos sobre anillos graduados anticonmutativos basándonos en las construcciones realizadas en I §2 para el producto exterior. Finalmente obtenemos resultados de invariancia para estas construcciones.

§ 1 IDEALES DETERMINANTALES DE MODULOS GRADUADOS ε-CONMUTATIVOS

Consideremos un anillo $\mathcal{D} = \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_r$ verificando las propiedades de ε-conmutación para el factor

$$\varepsilon: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

definido por $\varepsilon(p, q)= (-1)^{p.q}$ Es decir $\mathcal{D}$ es un anillo graduado anticonmutativo.

Sea $M = \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} M_r$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado a la izquierda verificando las propiedades de anticonmutación asociadas a ε respecto de la ley externa (ver I §3). En estas condiciones M admite una estructura de módulo a la derecha y por tanto de bimódulo sobre $\mathcal{D}$ verificándose la igualdad

$$a.m = \varepsilon(|a|,|m|).m.a$$

donde los elementos $a\in \mathcal{D}$ y $m\in M$ son homogéneos de grados respectivos $|a|$ y $|m|$. Para el $\mathcal{D}$-módulo M tenemos definido el $\mathcal{D}$-módulo $\wedge M = \bigoplus_{p\geq 0} (\overset{p}{\wedge} M)$.

En particular si M es un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita M tiene sistemas de generadores finitos formados por elementos homogéneos. Dado un tal sistema de generadores homogéneos $\underline{m}= \{m_1, ..., m_q\}$, de grados respectivos $d_1, ..., d_q$, asociado al sistema de generadores $\underline{m}= \{m_1, ..., m_q\}$ se tiene el homomorfismo suprayectivo de $\mathcal{D}$-módulos

$$\pi : \mathcal{D}^q \longrightarrow M$$

definido tomando como imágenes de los elementos $\{e_1, ..., e_q\}$ de la base estándar de $\mathcal{D}^q$ los elementos de $\underline{m}$. Se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow syz(\underline{m}, M) \longrightarrow \mathcal{D}^q \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

donde el $\mathcal{D}$-módulo $syz(\underline{m}, M)$ es el núcleo del homomorfismo π, es decir, el módulo de syzygeas de π con respecto al sistema de generadores $\underline{m}$. Sus elementos, las syzygeas de M con respecto a $\underline{m}$, son las q-uplas $(a_1, ..., a_q) \in \mathcal{D}^q$ tales que $\sum_{i=1}^{q} a_i.m_i = 0$.

La q-upla $d_1, ..., d_q \in \mathbb{Z}^q$ permite definir sobre $\mathcal{D}^q$ una graduación, llamada graduación por traslación de orden $\underline{d}$, cuyo subgrupo de elementos homogéneos de grado n, $n \in \mathbb{Z}$, está dado por

$$(\mathcal{D}^q)_{n,\underline{d}} = \mathcal{D}_{n-d_1} \times ... \times \mathcal{D}_{n-d_q}.$$

Nótese que $\mathcal{D}^q$ es, en efecto, un $\mathcal{D}$-módulo graduado con dicha graduación y en particular

$$\mathcal{D}^q = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} [(\mathcal{D}^q)_{n,\underline{d}}]$$

Puesto que el homomorfismo π verifica que $\pi(e_i) = m_i$, si $s = (a_1, ..., a_q) \in (\mathcal{D}^q)_{n,\underline{d}}$ se tiene $|a_i| = n - d_i$ luego $\pi(s) = \sum_{i=1}^{q} a_i.m_i$ es homogéneo de grado n, por tanto π es un homomorfismo graduado de grado cero entre los módulos graduados $\mathcal{D}^q$ y M. Su núcleo $syz(\underline{m}, M)$, evidentemente, será un submódulo homogéneo del módulo graduado $\mathcal{D}^q$, es decir si $s = \sum_{n=1}^{r} s_n \in syz(\underline{m}, M)$ con $|s_n| = n$ (respecto de la graduación de $\mathcal{D}^q$) entonces $s_n \in syz(\underline{m}, M)$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Considerando sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^q$ la graduación por traslación de orden $\underline{d} = (d_1, ..., d_q) \in \mathbb{Z}^q$, $\mathcal{D}^q$ es un $\mathcal{D}$-módulo ε-conmutativo sobre el que, por tanto, se tiene definido el producto exterior de orden p, $\bigwedge^p \mathcal{D}^q$, que es también un $\mathcal{D}$-módulo graduado de generación finita con un sistema de generadores homogéneos, asociado al sistema de generadores estándar $\{e_1, ..., e_q\}$, de $\mathcal{D}^q$, que viene definido por

$$\{e_{\underline{c}}= e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \ / \ \underline{c}=(i_1 \dots i_q)\in CR_{q,p}\}.$$

Dadas p syzygeas $s_1, \dots, s_p \in \operatorname{syz}(\underline{m}, M)$ relativas al sistema de generadores $\underline{m}$ de M, se tiene $s_i=(s_{i,1}, \dots, s_{i,q})\in \mathcal{D}^q$ con $s_{i,1}.m_1 + \dots + s_{i,q}.m_q=0$, luego, en particular, tenemos una matriz $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} = (s_1,\dots, s_p)^t$ de elementos de $\mathcal{D}$.

Se tiene el producto

$$s_1\wedge \dots \wedge s_p = \sum_{\underline{c}\in CR_{q,p}} \det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \dots, s_p).\ e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

siendo $CR_{q,p}$ el conjunto de las combinaciones con repetición de q elementos tomados de p en p, $\underline{c}=(i_1 \dots i_p)\in CR_{q,p}$ y

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}, v_1, \dots, v_p)= \sum_{\bar{\sigma}\in \$_p/H_{\underline{c}}} I_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, v_1, \dots, v_p).\ a_{1,i_{\sigma(1)}} \dots a_{p,i_{\sigma(p)}}$$

elemento éste al que llamaremos menor de la matriz A asociado a $\underline{c}$ y a la q-upla $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)$. Nótese que dichos menores no son otra cosa que los determinantes $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \dots, s_p)$ definidos en I.3.2.2.

<u>Definición II.1.1.</u>- Sea $S=(s_1, \dots, s_p)^t$ una matriz cuyos vectores fila son elementos de $\mathcal{D}^q$, una q-upla $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)$ y un número natural $r\in \mathbb{N}$. Llamaremos ideal determinantal de orden p de la matriz S relativa a $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)$, y lo representaremos por $\mathfrak{U}_r(\underline{d}, A)$, al ideal a la izquierda definido por

$$\mathfrak{U}_r(\underline{d}, A) = \begin{cases} - \mathcal{D} \quad \text{si } r=0 \\ - \text{ideal a la izquierda generado por los menores de orden r relativos a} \\ \quad \text{los elementos de } CR_{q,p} \text{ asociados a los vectores } s_1, \dots, s_p \text{ de la matriz A.} \end{cases}$$

<u>Definición II.1.2.</u>- Si M es un $\mathcal{D}$-módulo graduado a la izquierda y $r\in \mathbb{N}$, llamaremos

ideal determinantal de orden r del $\mathcal{D}$-módulo M asociado al sistema de generador homogéneo $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$, y lo representaremos por $\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)$, al ideal a la izquierda suma de los ideales determinantales $\mathcal{U}_r(\underline{d}, A)$ donde A varía en el conjunto de matrices con r filas y q columnas y cuyas filas son syzygeas con respecto al sistema generador $\underline{m}$ y $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$ es la q-upla de grados de $\underline{m}$.

Este ideal a la izquierda $\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)$ es homogéneo en $\mathcal{D}$ ya que admite un sistema de generadores homogéneo. En efecto, el submódulo $\operatorname{syz}(\underline{m}, M)$ es homogéneo y las aplicaciones $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, \ldots,)$ conservan la ley aditiva, luego $\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)$ está generado por los ideales determinantales $\mathcal{U}_r(\underline{d}, A)$ de matrices formadas por syzygeas homogéneas $s_1, \ldots, s_r$. Ahora bién si los grados de los elementos homogéneos $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{D}^q$ son respectivamente $t_1, \ldots, t_r$ entonces, dada una combinación con repetición $\underline{c}=(i_1, \ldots, i_r)$ se tiene

$$\det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \ldots, s_r) = \sum_{\sigma \in \$_r/H_{\underline{c}}} l_{\underline{c}}(\underline{d}, \sigma, s_1, \ldots, s_r) . s_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots s_{r,i_{\sigma(r)}}$$

y siendo $|s_{l,j}| = t_l - d_j$ $\quad l=1, \ldots, r \quad j=1, \ldots, q \quad$ se cumple

$$|s_{1,i_{\sigma(1)}} \cdots s_{r,i_{\sigma(r)}}| = \sum_{l=1}^{r} |s_{l,i_{\sigma(l)}}| = \sum_{l=1}^{r} (t_l - d_{i_{\sigma(l)}}) = \sum_{l=1}^{r} (t_l - d_{i_l})$$

de donde el determinante $\det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \ldots, s_r)$ es homogéneo y sus grados

$$|\det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \ldots, s_r)| = |s_1| + \ldots + |s_r| - d_{i_1} - \ldots - d_{i_r} .$$

Por tanto, los menores de matrices de syzygeas homogéneas son elementos homogéneos de $\mathcal{D}$ y, en consecuencia, los ideales determinantales son homogéneos. Más aún, utilizando las propiedades de ε-conmutación, se verifica que dichos ideales son biláteros. Para cada sistema generador homogéneo $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ de grados asociados $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$ (del $\mathcal{D}$-módulo graduado ε-conmutativo M) tenemos definida una familia de ideales biláteros

$\{\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)\}_{r\in \mathbb{N}}$ que verifica

$$\mathcal{U}_o(\underline{m}, \underline{d}, M)=\mathcal{D} \quad y$$

$$\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)\supset \mathcal{U}_{r+1}(\underline{m}, \underline{d}, M) \quad \forall r\in \mathbb{N}.$$

Esta propiedad es evidente sin más que tener en cuenta las propiedades de multilinealidad del producto exterior

Nota II.1.3.- En el caso particular en el cual ε sea el factor de conmutación trivial $\varepsilon\equiv 1$, $\mathcal{D}$ es un anillo conmutativo, esta construcción se corresponde con la construcción usual de ideales determinantales asociados a matrices o sistemas generadores a partir de los cuales se definen los ideales de Fitting por $\mathfrak{F}_j(M)= \mathcal{U}_{q-j}(\underline{m}, M)$. Determinándose además que $\mathfrak{F}_j(M)$ depende sólo de M ([27] Teorema I.1.7). En este caso particular, para $q<p$ se tiene $\overset{r}{\wedge}\mathcal{D}^p\equiv 0$ luego la cadena de ideales $\{\mathcal{U}_r(\underline{m}, M)\}_{r\in \mathbb{N}}$ es finita ya que para $r\geq q+1$ se tiene $\mathcal{U}_r(\underline{m}, M)=(0)$.

Por el contrario considerando como ε el factor de anticonmutación entonces para $r>q$ no se tiene en general $\overset{r}{\wedge}\mathcal{D}^q=0$ ya que existen combinaciones con repetición de q elementos tomados de r en r y éstos pueden dar lugar a menores no nulos. Tampoco se tendrá en general una construcción similar a los ideales de Fitting que sea independiente del sistema de generadores de M, situación que clarificaremos en los ejemplos que aparecen más abajo. En la siguiente sección veremos, sin embargo, como si se fijan el cardinal q y los grados $(d_1, \ldots d_q)$ del sistema de generadores homogéneo entonces los ideales $\mathcal{U}_r(\underline{m}, \underline{d}, M)$ no dependen de $\underline{m}$.

Ejemplo II.1.4.-

Sea $\mathcal{D}= \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_r$ un anillo graduado anticonmutativo y $M= \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} M_r$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo de generación finita. Supongamos que M está generado por un elemento homogéneo $m \in M$ de grado p. Para este sistema generador se tiene una sucesión exacta del tipo

$$0 \longrightarrow syz(\underline{m}, M) \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $\underline{m}=\{m\}$ y se verifica que $syz(\underline{m}, M)=Ann(m)$. Por tanto se tiene que la graduación sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}$ asociado a este sistema generador, viene dada por $\mathcal{D}= \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} \mathcal{D}'_r$

con $\mathcal{D}'_r=\mathcal{D}_{r-p}$ es decir es la graduación por traslación de orden p obtenida a partir de la graduación estructural de $\mathcal{D}$. Llamaremos $\mathcal{D}'$ al $\mathcal{D}$--módulo $\mathcal{D}$ provisto de esta graduación. Como $\mathcal{D}$ está generado por $e=1$, $1\in \mathcal{D}'_p$, entonces $\overset{q}{\wedge}\mathcal{D}$ está generado por el elemento $e\wedge \ldots \wedge e$.

Distinguiremos dos casos:

- Si p es par, entonces $e\wedge e=(-1)^{p.p}.e\wedge e$ luego $e\wedge e=0$ y por tanto $\overset{r}{\wedge}\mathcal{D}'=0$ para $r>1$. Por tanto se verifica

$$\mathcal{U}_0(\underline{m}, p, M)=\mathcal{D}$$

$$\mathcal{U}_1(\underline{m}, p, M)=Ann(m)$$

$$\mathcal{U}_r(\underline{m}, p, M)=(0) \quad r\geq 2.$$

- Si p es impar, entonces $e\wedge e$ no es nulo con lo cual se verifica que $\overset{r}{\wedge}\mathcal{D}$ está definido y es no nulo, luego $\overset{r}{\wedge}\mathcal{D} \cong \mathcal{D}'$. Por tanto, teniendo en cuenta la noción de determinante, se tiene

$$\mathcal{U}_0(\underline{m}, p, M)=\mathcal{D}$$

$$\mathcal{U}_1(\underline{m}, p, M)= Ann(m)$$

$$\mathcal{U}_r(\underline{m}, p, M)= [Ann(m)]^r \quad r\geq 2.$$

En efecto si $a, b\in Ann(\underline{m})$ son elementos homogéneos, y $\underline{c}$ es la combinación con repetición $(1, 1)$ entonces $det_{\underline{c}}(p, a.e, b.e)= \pm\, a.b$, luego $\mathcal{U}_2(\underline{m}, p, M)= [Ann(\underline{m})]^2$.

En la misma forma si $\underline{c}$=(1, ..., 1) y $a_1, ..., a_r \in$ Ann($\underline{m}$) son elementos homogéneos entonces

$$\det_{\underline{c}}(p, a_1.e, a_2.e, ..., a_r.e) = \pm\, a_1...a_r$$

y por tanto $\mathcal{U}_r(\underline{m}, p, M) = [\mathrm{Ann}(\underline{m})]^r$.

Se obtiene así un ejemplo de un par (M, $\underline{m}$) con una cadena decreciente de ideales determinantales que obviamente no tiene por qué ser finita.

Esta cadena no depende del generador elegido en M si se fija el grado de $\underline{m}$. Así si $m_1 \in M$ es homogéneo con $|m_1|=|m|$ y tal que m_1 genera también M, entonces se verifica $m_1=\lambda.m$ con $\lambda \in \mathcal{D}_0$, con lo cual dado $a \in \mathrm{Ann}(m_1)$ homogéneo, se verifica

$$a.\,m_1 = a.\lambda.m = (-1)^{|a|\cdot|\lambda|}\lambda.a.m = \lambda.a.m = 0$$

es decir $\mathrm{Ann}(m) \subset \mathrm{Ann}(m_1)$. Recíprocamante, por simetría, se tiene $\mathrm{Ann}(m)=\mathrm{Ann}(m_1)$, y de aquí $\mathcal{U}_r(\underline{m}, p, M) = \mathcal{U}_r(\underline{m}_1, p, M)$.

Ejemplo II.1.5.-

Consideremos el anillo $\mathcal{D}$ = A [X,Y], siendo el anillo A = $\mathbb{Z}/(5)$, estando el producto en $\mathcal{D}$ dado por X.Y = -Y.X ; X.X = Y.Y = 0. Asignando a los elementos de A = $\mathbb{Z}/(5)$ grado cero y a los elementos X , Y grado 1 se tiene que $\mathcal{D}$ es un anillo anticonmutativo.

Definiendo M = $\mathcal{D}_{[1]}$, es decir es el $\mathcal{D}$ - módulo $\mathcal{D}$ cuya graduación viene dada por la traslación de orden 1, se verifica que $\underline{m} = \{\bar{1}\}$ y $\underline{n} = \{\bar{1}, \bar{1}\}$ son dos sistemas de generadores del $\mathcal{D}$-módulo M tales que

$$\mathcal{U}_0(\underline{m}, 1, M) = \mathcal{D} = \mathcal{U}_0(\underline{n}, (1, 1), M)$$

$$\mathcal{U}_r(\underline{m}, 1, M) = [\mathrm{Ann}(\bar{1})]^r = (0) \qquad \forall\ r > 0$$

$$\mathcal{U}_r(\underline{n}, (1, 1), M) = \mathcal{D} \qquad \text{ya que } (1, -1) \in \mathrm{syz}\,(\underline{n}, M).$$

Este ejemplo muestra que los ideales determinantales dependen de la selección del sistema de generadores de M.

§2 INVARIANTES DETERMINANTALES DE MODULOS SOBRE ANILLOS GRADUADOS ANTICONMUTATIVOS

Sean $\mathfrak{D}= \bigoplus_{r\in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_r$ un anillo graduado ε-conmutativo y $M= \bigoplus_{r\in \mathbb{Z}} M_r$ un $\mathfrak{D}$-módulo graduado ε-conmutativo de generación finita siendo ε el factor de anticonmutación, es decir, el factor de conmutación definido por

$$\varepsilon(p, q)= \varepsilon(-1)^{p\cdot q}.$$

Diremos por tanto, que $\mathfrak{D}$ y M son respectivamente anillo y módulo graduados anticonmutativos.

Puesto que $\mathfrak{D}_r=0$ para $r\geq 0$, al ser el $\mathfrak{D}$-módulo M es de generación finita y $M\neq 0$ si t es el mínimo grado de un sistema de generadores homogéneos se tiene que $M_r=0$ para $r<t$, es decir, podemos escribir $M= \bigoplus_{r\geq t} M_r$ para $t\in \mathbb{Z}$. Si $M\neq 0$, entonces t está caracterizado por ser el mínimo entero tal que $M_t\neq 0$.

Consideremos dos sistemas de generadores homogéneos $\underline{m}= \{m_1, ..., m_q\}$ $\underline{n}=\{n_1, ..., n_q\}$ de M con el mismo cardinal $q\in \mathbb{N}$ y tales que corresponden a la misma q-upla de grados $\{d_1, ..., d_q\}\in \mathbb{Z}^q$, es decir tales que después de un reordenación de índices se tiene $\qquad |m_i|=|n_i|= d_i \qquad 1\leq i\leq r.$

Nótese que si $\quad m_1\neq 0$ se verifica $t= d_1\leq ... \leq d_r$.

Asociadas a los sistemas de generadores homogéneos $\underline{m}$ y $\underline{n}$ se tienen las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{syz}(\underline{m}, M) \xrightarrow{\lambda_1} \mathfrak{D}^q \xrightarrow{\pi_1} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{syz}(\underline{n}, M) \xrightarrow{\lambda_2} \mathfrak{D}^q \xrightarrow{\pi_2} M \longrightarrow 0$$

y se tienen expresiones

$$m_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}.n_j \qquad n_i = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}.m_j$$

siendo los elementos $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq q)$ elementos homogéneos del anillo $\mathcal{D}$ de grados respectivos

$$|a_{i,j}| = |b_{i,j}| = d_i - d_j \qquad d_i \geq d_j \qquad 1 \leq i, j \leq r$$

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0 \qquad d_i < d_j \qquad 1 \leq i, j \leq r.$$

Estas expresiones definen dos matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q}$ $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q}$ que corresponden homomorfismos de $\mathcal{D}$-módulos

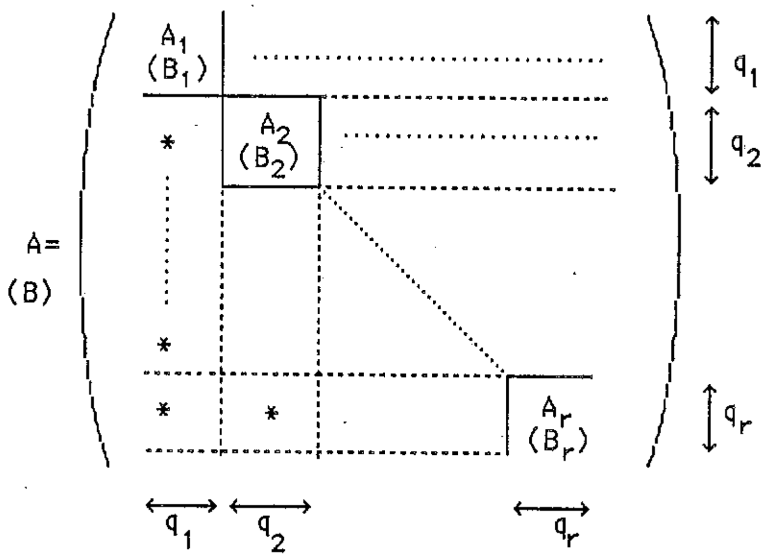
$$\alpha, \beta: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q$$

que inducen a su vez por restricción homomorfismos α_1, β_1 entre syz($\underline{m}$, M) y syz($\underline{n}$, M) y viceversa. Por tanto pasan al cociente respecto de Im π_1 e Im π_2 induciendo por construcción, la aplicación identidad sobre M. Una vez que M se identifica con Cokerπ_1 y Cokerπ_2 se tiene pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{syz}(\underline{m}, M) \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, shift right, "\alpha_1"'] & \mathcal{D}^q \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] & M \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{syz}(\underline{n}, M) \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[u, shift right, "\beta_1"'] & \mathcal{D}^q \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, shift right, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo tanto para α_1 y α como para β_1 y β.

Para comparar determinantes de matrices de syzygeas relativas a ambos sistemas de generadores necesitaremos que tanto α_1 como β_1 sean suprayectivas, con objeto de usar la propiedad de que todo elementos de syz($\underline{n}$, M) provenga de al menos uno de syz($\underline{m}$, M) y viceversa. Ahora bien α_1 y β_1 serán suprayectivas cuando lo sean α y β, por tanto dicha condición la debemos de analizar sobre las matrices A y B. (Nótese que también del diagrama se sigue que si α_1 y β_1 son suprayectivas, α y β lo tienen que ser también ([31] Lema 1.1 pág 14). Dichas matrices tienen una forma muy particular ya que vienen expresadas en la forma siguiente



donde $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_0)$ y $q_1 + \ldots + q_r = q$. Los elementos que están encima de las cajas de la diagonal son nulos y por debajo obtenemos elementos homogéneos de $\mathcal{D}$ de grados estrictamente positivos. Más concretamente un elemento que está debajo de la caja i-ésima y a la izquierda de la caja j-ésima es homogéneo de grado d_j-d_i.

Siendo el homomorfismo α suprayectivo se tiene que dados $s'_1, \ldots, s'_p \in syz(\underline{m}, M)$ existen $s_1, \ldots, s_p \in syz(\underline{m}, M)$ tales que $s'_i = \alpha(s_i)$, luego aplicando las propiedades de ε-multilinealidad del producto exterior se obtiene que cada uno de los menores asociados al elemento $s'_1 \wedge \ldots \wedge s'_p$ es una combinación lineal de los menores asociados a $s_1 \wedge \ldots \wedge s_p$ con lo cual se sigue

$$\mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M) \subset \mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M).$$

En efecto si

$$s_1 \wedge \ldots \wedge s_p = \sum_{\underline{c} \in CR_{q,p}} det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \ldots, s_p) e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

se tiene que

$$s'_1 \wedge \ldots \wedge s'_p = \alpha(s_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(s_p) =$$

$$= \sum_{\underline{c} \in CR_{q,p}} \det_{\underline{c}}(\underline{d}, s_1, \ldots, s_p) . \alpha(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \alpha(e_{i_p})$$

siendo cada uno de los productos $\alpha(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \alpha(e_{i_p})$ combinación lineal de elementos $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$ donde $\underline{c}'=(j_1, \ldots, j_p)$ varía en el conjunto de combinaciones con repetición. Los coeficientes son menores de la matriz $A=(a_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$ en el sentido de la definición dada en I.3.2.2. Recíprocamente si β es suprayectiva entonces

$$\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) \subset \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M)$$

con lo cual la suprayectividad conjunta de α y β implica

$$\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M).$$

Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_q(\mathcal{D})$ del tipo anterior, es decir

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ * & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le q}$$

donde $A_i \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathcal{D}_o)$ $i=1, \ldots, r$ $q_1 + \ldots + q_r = q$, y los elementos $a_{i,j}$ con $i>j$ y no pertenecientes a las matrices $A_1, \ldots, A_r$ son homogéneos de grados estrictamente positivos. Esta matriz se puede descomponer en suma $A = \bar{A} + D$ siendo $\bar{A}=(\bar{a}_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ definido por

$$\bar{a}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si para todo } l \in \{1, \ldots, r\} \text{ el par } (i, j) \text{ no corresponde a } A_l \\ 0 & \text{si existe } l \in \{1, \ldots, r\} \text{ tal que el par } (i, j) \text{ corresponde a } A_l \end{cases}$$

y lógicamente $D=(d_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}$ está definido por

$$d_{i,j}=\begin{cases} a_{i,j} & \text{si existe } l\in\{1,\ldots,r\} \text{ tal que el par } (i,j) \text{ corresponde a } A_l \\ 0 & \text{si para todo } l\in\{1,\ldots,r\} \text{ el par } (i,j) \text{ no corresponde a } A_l. \end{cases}$$

La matriz $\bar{A}$ es por tanto de la forma

$$A=\left(\begin{array}{c|c|ccc}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline
\bar{A}_{1,1} & \boxed{0} & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline
\bar{A}_{r,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \boxed{0}
\end{array}\right)$$

y por tanto es nilpotente, es decir, un elemento nilpotente del anillo de matrices $q\mathrm{x}q$. En efecto, está claro que en la matriz $\bar{A}^2$ las q_1 primeras filas se anulan, además si $q_1< i< q_1+q_2$, el elemento de la fila i-ésima y columna j-ésima viene dado por $\bar{a}_{i,1}.\bar{a}_{1,j}+\ldots+\bar{a}_{i,q_1}.\bar{a}_{q_1,j}$ y al ser $p>q_1$ se tiene que dicho elemento es nulo ya que $\bar{a}_{1,j}=\ldots=\bar{a}_{q_1,j}=0$. De esta forma $\bar{A}^2$ tiene al menos q_1+q_2 filas nulas, e iterando el proceso se llega a que $\bar{A}^r=0$.

En estas condiciones se tiene que la matriz A es inversible si lo es D. En efecto si D^{-1} es la inversa de D se verifica $D^{-1}.A=D^{-1}.\bar{A}+Id$ siendo $D^{-1}.\bar{A}$ otra matriz de la misma forma que $\bar{A}$ (es decir triangular inferior con elementos nulos en las cajas de la diagonal) y por tanto nilpotente luego $(Id+D^{-1}.\bar{A})$ es inversible y, de hecho

$$(Id+D^{-1}.\bar{A})^{-1}=Id-D^{-1}.\bar{A}+(D^{-1}.\bar{A})^2+\ldots+(-1)^{r-1}.(D^{-1}.\bar{A})^{r-1}.$$

Como la condición recíproca se verifica, es decir, si A es inversible lo es D (basta pasar al anillo cociente de $\mathcal{D}$ por el ideal bilátero $\bigoplus_{i>0}\mathcal{D}_i$, anillo que es isomorfo a

$\mathcal{D}_o$), tenemos que la condición de invertibilidad de una matriz A es equivalente a la condición de invertibilidad de sus submatrices asociadas $A_1, \dots, A_r$, matrices que están definidas sobre $\mathcal{D}_o$ que es un anillo conmutativo.

Nótese que si el homomorfismo $\alpha: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q$ dado por la matriz A es suprayectivo, entonces la proyectividad del módulo $\mathcal{D}^q$ garantiza la existencia de una sección de α y de aquí de una inversa a la derecha de A. Pasando al cociente $\mathcal{D}_o \cong \mathcal{D}/(\bigoplus_{i>0} \mathcal{D}i)$ se obtiene una inversa a la derecha de la matriz D y de aquí que $A_1, \dots, A_r$ serían inversibles, por tanto α sería de hecho un isomorfismo. En conclusión para poder asegurar $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{n}; \underline{d}, M)$ se precisará que las matrices A y B sean inversibles. Expresamos a continuación lo anterior directamente sobre el módulo.

Dado el $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo $M = \bigoplus_{r \geq t} M_r$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ $i>t$ podemos considerar el $\mathcal{D}_o$-módulo M_i y el submódulo

$$N_i = \mathcal{D}_{i-t} \cdot M_t + \mathcal{D}_{i-t-1} \cdot M_{t+1} + \dots + \mathcal{D}_1 \cdot M_{i-1}$$

y asociada a M la familia de $\mathcal{D}_o$-módulos dada por

$$\bar{M}_t = M_t \qquad y \qquad \bar{M}_i = M_i/N_i \qquad i \geq t.$$

Si el $\mathcal{D}$-módulo M es de generación finita, por inducción sobre $i \geq t$, se prueba que la familia de $\mathcal{D}_o$-módulos $\bar{M} = \{\bar{M}_i\}_{i \geq t}$ es una familia de $\mathcal{D}_o$-módulos de generación finita y que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{M}_i = 0$ para $i \geq l$. Recíprocamente, si cada $\bar{M}_i$ es un $\mathcal{D}_o$-módulo de generación finita y existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{M}_i = 0$ para cada $i \geq l$ entonces M es de generación finita. En efecto, un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}$ de M se obtiene tomando para cada $i>t$ un conjunto finito de elementos T_i de M_i cuyas clases en $\bar{M}_i$ generan este $\mathcal{D}_o$-módulo, y poniendo $\underline{m} = \bigcup_{i=t}^{l} T_i$

Definiciones II.2.1.- i.- Dado un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ de un $\mathcal{D}$-módulo graduado M, diremos que es minimal o irredundante si no existe otro sistema de generadores $\underline{m}'=\{m'_1, \ldots, m'_p\}$ de M tal que $\underline{m}' \subset \underline{m}$ y $\underline{m}' \neq \underline{m}$.

ii.- Dado un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ de un $\mathcal{D}$-módulo graduado M, diremos que es un sistema de generadores de mínimo cardinal sí y sólo sí está formado por r elementos siendo r el mínimo de los cardinales entre los sistemas generadores homogéneos de M.

Estos dos conceptos no son equivalentes, aunque el segundo sea un concepto más restrictivo, por ejemplo para $\mathbb{Z}$ considerándolo como $\mathbb{Z}$-módulo con la graduación trivial se tiene que $\{2, 3\}$ es un sistema de generadores irredundante para $\mathbb{Z}$ pero no de mínimo cardinal ya que $\{1\}$ es otro sistema de generadores con menor cardinal.

Los conceptos anteriores toman sentido también para los $\mathcal{D}_o$-módulos $\overline{M}_t, \ldots, \overline{M}_l$ que hemos definido más arriba sin más que considerar sobre el anillo conmutativo $\mathcal{D}_o$ y sobre los $\mathcal{D}_o$-módulos la graduación trivial, es decir

$$\mathcal{D}_o = \mathcal{D}_o \oplus 0 \oplus \ldots$$

$$\overline{M}_i = \overline{M}_i \oplus 0 \oplus \ldots \qquad i = t, \ldots, l.$$

Proposición II.2.2.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{D}_r$ un anillo graduado anticonmutativo y $M = \bigoplus_{r \geq t} M_r$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo de generación finita; denotaremos por $\overline{M}_i$ los $\mathcal{D}_o$-módulos definidos por $\overline{M}_i = M_i/N_i$, $\overline{M}_t = M_t$ Entonces un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}$ de M es minimal (resp. de mínimo cardinal) sí y sólo sí es del tipo $\underline{m} = T_t \cup \ldots \cup T_l$ donde cada T_i $i=1, \ldots, l$ es un conjunto de elementos de M_i cuyas clases en $\overline{M}_i$ son un sistema de generadores minimal (resp. de mínimo cardinal) para $\overline{M}_i$.

Dado el sistema generador $\underline{m} = T_t \cup \ldots \cup T_l$ tal que T_i $i=1, \ldots, l$ da lugar a un sistema de generadores minimal de $\bar{M}_i$ entonces ningún elemento de $\underline{m}$ puede ser combinación lineal del resto. En efecto si $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ y

$$m_j = a_1.m_1 + \ldots + a_{j-1}.m_{j-1} + a_{j+1}.m_{j+1} + \ldots + a_q.m_q$$

con $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_q$ elementos homogéneos de $\mathcal{D}$ de grados

$$\begin{cases} |m_j|-|m_i| & \text{si } |m_j|\geq|m_i| \\ a_i=0 & \text{si } |m_j|<|m_i| \end{cases}$$

entonces si $m_j \in T_h$ se tendrá $v_i = a_i.m_i \in M_h$ $i=1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, q$ y se verificará, en $\bar{M}_h$, la igualdad siguiente $\bar{m}_j = \bar{v}_1 + \ldots + \bar{v}_{j-1} + \bar{v}_{j+1} + \ldots + \bar{v}_q$ (denotamos mediante $\bar{m}$ la clase en $\bar{M}_h$ del elemento $m \in M_h$) en la cual los sumandos del segundo miembro son nulos salvo para los elementos m_i tales que $|m_i|=|m_j|$ en cuyo caso $a_i \in \mathcal{D}_0$ y $\bar{v}_i = a_i.\bar{m}_i$; luego se obtiene que $\bar{m}_j$ en $\bar{M}_h$ es combinación lineal con coeficientes en $\mathcal{D}_0$ del resto de elementos de T_h lo cual es absurdo. Por tanto si T_i, para $i= t, \ldots, l$, da lugar a sistemas de generadores minimales entonces $\underline{m}= T_t \cup \ldots \cup T_l$ es un sistema generador minimal.

Recíprocamente, supongamos que $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ es un sistema de generadores homogéneo minimal y definamos $T_i=\{m_j \in \underline{m} \,/\, |m_j|=i\}$. Denotando por $l=\text{máx}\{\, |m_j| \,/\, j=1, \ldots, q\}$ se tiene $\underline{m}= T_t \cup \ldots \cup T_l$ Veamos entonces que la clase de los elementos de T_i en $\bar{M}_i$ es un sistema minimal de generadores de $\bar{M}_i$ como $\mathcal{D}_0$-módulo.

Dado $x \in M_i$ $x = x_t + x_{t+1} + \ldots + x_l$ donde cada $x_i \in M_i$ es combinación lineal con coeficientes homogéneos de los elementos T_i (se supone $i \leq l$ ya que en caso contrario $\bar{M}_i=(0)$). Las clases de los elementos $x_t, \ldots, x_{i-1}$ son nulos en $\bar{M}_i$ luego las clases de $x \in M$ y $x_i \in M_i$ son iguales en $\bar{M}_i$. Ahora bien como x_i es una combinación lineal con coeficientes en $\mathcal{D}_0$ de los elementos de T_i se tiene que la clase de x en $\bar{M}_i$ es una combinación lineal con coeficientes en $\mathcal{D}_0$ de las clases de elementos de T_i y por tanto las clases de los elementos de T_i son sistema de generadores de $\bar{M}_i$. Además si

$$\bar{m}_j = a_1.\bar{m}_{j_1} + \ldots + a_k.\bar{m}_{j_k}$$

para $a_1, \ldots, a_k$ elementos de $\mathcal{D}_0$ y para $T=\{m_j, m_{j_1}, \ldots, m_{j_k}\}$, se tiene

$$m_j = a_1.m_{j_1} + \ldots + a_k.m_{j_k} + y$$

con $y \in N_i = \mathcal{D}_{i-t}.M_t + \ldots + \mathcal{D}_1.M_{t-1}$, con lo cual m_j es combinación lineal de elementos de $\underline{m} = \{m_j\}$ y esto es contradictorio con la hipótesis de minimalidad sobre $\underline{m}$.

La equivalencia de la condición de mínimo cardinal para un sistema generador para M sobre $\mathcal{D}$ y los sistemas generadores para $\bar{M}_i$ $t \leq i \leq l$ sobre $\mathcal{D}_0$ es evidente a la vista del anterior análisis.

Como consecuencia de esta proposición, asociado a un $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo finitamente generado M existe una q-upla de grados $(d_1, \ldots, d_q)$ unívocamente determinada, como la q-upla de grados de un sistema de generadores homogéneos de mínimo cardinal. Nótese que si $\underline{m} = T_t \cup \ldots \cup T_l$ es de mínimo cardinal entonces los enteros d_h son aquellos enteros i tales que $T_i \neq \emptyset$ y el número de veces que se repite d_h es el cardinal del conjunto T_i correspondiente. Nótese que si $(d'_1, \ldots, d'_s)$ es otra s-upla de grados correspondiente a un sistema de generadores homogéneos de M entonces se tiene:

1.- Para todo i se tiene $d_i = d'_j$ para algún j.

2.- Si $d_i = d'_j$ entonces el número de veces que aparece d_i en $(d_1, \ldots, d_q)$ es menor o igual que el número de veces que aparece d'_j en $(d'_1, \ldots, d'_s)$.

3.- $d'_1 = d_1$.

Usaremos, finalmente, para un módulo de generación finita sobre un anillo (conmutativo) $\mathcal{Q}$ la siguiente relación de equivalencia entre sus sistemas de generadores.

Definición II.2.3.- Dados dos sistemas de generadores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ diremos que $\{u_1, \ldots, u_n\} \sim \{v_1, \ldots, v_m\}$ sí y sólo sí $n=m$ y existe una matriz inversible $C \in \mathcal{M}_m(\mathcal{Q})$ tal que

$$(u_1, \ldots, u_n)^t = C.(v_1, \ldots, v_m)^t.$$

Esta relación de equivalencia puede extenderse a sistemas de generadores de un $\mathcal{D}$-módulo graduado de generación finita $M = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} M_r$. Basta considerar para el $\mathcal{D}$-módulo M los $\mathcal{D}_0$-módulos $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$ asociados unívocamente a M y decir que $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\} = \cup T_i$ y $\underline{n}=\{n_1, \ldots, n_q\} = \cup T'_i$ son dos sistemas generadores equivalentes sí y sólo sí para cada $i=t, \ldots, l$, los sistemas de generadores del $\mathcal{D}_0$-módulo $\bar{M}_i$ dados por T_i y T'_i son equivalentes según la anterior definición.

Se verifica, consecuentemente, el siguiente resultado.

Teorema II.2.4.- Sean $\underline{m}$ y $\underline{n}$ dos sistemas generadores equivalentes, entonces para cada $p \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}. M)$$

El teorema es consecuencia del estudio que hemos realizado en este parágrafo ya que existen matrices inversibles que nos relacionan ambos sistemas de generadores, dando lugar a homomorfismos suprayectivos (y de hecho isomorfismos) α y β.

Veamos, entonces, qué significado preciso tienen los conceptos de sistemas generadores de cardinal mínimo y sistemas de generadores irredundantes en algunos casos particulares y las consecuencias del teorema en dichos casos particulares.

Ejemplo II.2.5.- Si $\mathcal{D}_o$ es un cuerpo.

En este caso particular se verifica que los $\mathcal{D}_o$-módulos son $\mathcal{D}_o$-espacios vectoriales con lo cual las condiciones de irredundante y de cardinal mínimo son equivalentes y equivalentes también al concepto de base. Por tanto se verifica que todos los sistemas generadores minimales o de cardinal mínimo de $M=\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} M_r$ son equivalentes definiendo además la q-upla única $(d_1, \ldots, d_q)$ asociada a M que se corresponde al dato de las dimensiones de los $\mathcal{D}_o$-espacios vectoriales $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$. Por tanto se sigue del teorema II.2.4 que si $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son sistemas de generadores homogéneos minimales entonces definen la misma q-upla de grados y $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)= \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M)$ $\forall\ p\in\mathbb{N}$. Se tienen pues asociados canónicamente a cada M una q-upla de grados y una sucesión de ideales $\mathcal{U}_p(M)$.

Ejemplo II.2.6.- $\mathcal{D}_o$ es arbitrario y $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$ son $\mathcal{D}_o$-módulos libres.

En estas condiciones no todo sistema generador irredundante es de cardinal mínimo pero sí se verifica que todo par de sistemas generadores de cardinal mínimo son equivalentes, ya que los sistemas de generadores de cardinal mínimo de un $\mathcal{D}_o$-módulo libre de tipo finito son exactamente las bases. En efecto si el rango del $\mathcal{D}_o$-módulo $\bar{M}$ es n entonces no puede haber sistemas de generadores con menor cardinal que n (de lo contrario se obtendría una contradicción tensorizando con $\mathcal{D}_o/\mathfrak{m}$ para un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{D}_o$) y si $\bar{T}$ es un sistema de generadores con n elementos y $\pi: \mathcal{D}^n \longrightarrow \bar{M}$ el homomorfismo suprayectivo correspondiente a dicho sistema, entonces la proyectividad de $\bar{M}$ asegura la existencia de una sección de π y de aquí una matriz inversa a la derecha de la matriz de coordenadas de los elementos de $\bar{T}$ respecto de una base $\bar{B}$ de $\bar{M}$. La existencia de inversa a la derecha implica que el determinante de dicha matriz es una unidad y de aquí es inversible, luego $\bar{T} \sim \bar{B}$ Por otro lado es obvio que todas las bases son equivalentes entre sí.

Considerando sólamente sistemas de generadores de mínimo cardinal para el $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo $M = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} M_r$ de generación finita, bajo la hipótesis de que cada $\bar{M}_i$ es libre, se tiene la q-upla de grados $\underline{d}$ unívocamente determinada y para dos de tales sistemas de generadores $\underline{m}$ y $\underline{n}$ que $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M)$ por lo tanto se tiene una sucesión de ideales $\mathcal{U}_p(M)$ que depende sólo de M.

Ejemplo II.2.7.- $\mathcal{D}_o$ es un D.I.P.

Si los módulos $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$ son sin torsión, entonces son libres y las conclusiones anteriores se siguen de la misma forma. En particular, todos los sistemas de mínimo cardinal serían equivalentes.

Esto no es así si los módulos $\bar{M}_i$ tienen torsión. Clarificaremos a continuación esta situación. En primer lugar si $\bar{M}$ es un módulo de tipo finito sobre $\mathcal{D}_o$ entonces se tiene por el teorema de estructura de módulos de generación finita sobre D.I.P. que

$$(*) \qquad \bar{M} \cong \overbrace{\mathcal{D}_o \oplus \ldots\ldots \oplus \mathcal{D}_o}^{h)} \oplus \mathcal{D}_o/(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}_o/(d_r)$$

donde $d_1 / d_2 / \ldots / d_r$ son elementos no nulos y no unidades y tanto h como r como los ideales $(d_1) \ldots (d_r)$ están unívocamente determinados por $\bar{M}$. Cada isomorfismo (*) entre $\bar{M}$ y el módulo tipo del segundo miembro corresponde a un sistema de generadores especial de $\bar{M}$, concretamente al formado por las contraimágenes por el isomorfismo de los elementos $\{e_1, \ldots, e_h, e_{h+1}, \ldots, e_{h+r}\}$ donde e_i es el elemento 1 de la i-ésima copia de $\mathcal{D}_o$, $1 \leq i \leq h$, y e_{h+j} es el elemento $\bar{1}$ de $\mathcal{D}_o/(d_j)$ vistos como elementos de la suma directa. Llamaremos a estos sistemas de generadores, sistemas de generadores estructurales.

Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es otro sistema de generadores de $\bar{M}$ entonces se obtiene el homomorfismo suprayectivo de $\mathcal{D}_o$-módulos $\bar{\pi}: \mathcal{D}_o^n \longrightarrow \bar{M}$ asociado a tal sistema de generadores. La teoría de factores invariantes nos dice que se puede cambiar la base en el módulo libre $\mathcal{D}_o^n$ (es decir cambiar $\{u_1, \dots , u_n\}$ por un sistema de generadores equivalente $\{u'_1 , \dots , u'_n\}$) de tal manera que $\ker\bar{\pi}$ es el submódulo de $\mathcal{D}_o^n$ engendrado por $\{d_{h+1}.u'_{h+1}, d_{h+2}.u'_{h+2}, \dots, d_{h+r}.u'_{h+r}\}$. Se tiene en particular $h+r\leq n$ y que los sistemas de generadores con $h+r$ elementos son exactamente los de mínimo cardinal y son también los sistemas de generadores que son equivalentes a uno estructural.

Ahora bien, dos sistemas de generadores estructurales arbitrarios no son equivalentes entre sí salvo en el caso $r=0$, es decir cuando $\bar{M}$ es sin torsión. Esto es consecuencia de que si $d\in \mathcal{D}_o$ $d\neq 0$ y $d\notin \mathcal{D}_o^*$ entonces para el $\mathcal{D}_o$-módulo $\mathcal{D}_o/(d)$ tiene como sistemas de generadores estructurales no sólo a $\{\bar{1}\}$ sino a todos de la forma $\{\bar{b}\}$ donde $b\in \mathcal{D}_o$ y verifica m.c.d.(b, d)=1. La matriz que relaciona al sistema de generadores $\{\bar{1}\}$ con $\{\bar{b}\}$ es $c=(b)$ que no es inversible.

<u>Ejemplo II.2.8.</u>- $\mathcal{D}_o$ es un anillo local.

Si denotamos por $\mathfrak{m}_o$ su ideal maximal se tiene que $k=\mathcal{D}_o/\mathfrak{m}_o$ es un cuerpo conmutativo; entonces, en virtud del teorema de Nakayama, se tiene una caracterización de los sistemas de generadores minimales y de mínimo cardinal para los $\mathcal{D}_o$-módulos de generación finita $\bar{M}$. En efecto, si $x_1, \dots, x_p$ son elementos de $\bar{M}$ entonces $\{x_1, \dots, x_p\}$ es un sistema de generadores de $\bar{M}$ como $\mathcal{D}_o$-módulo sí y sólo sí las clases $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p\}$ de dichos elementos en $\bar{M}/\mathfrak{m}_o\bar{M}$ son un sistema de generadores de $\bar{M}/\mathfrak{m}_o\bar{M}$ como k-espacio vectorial (véase [6] prop. 2.8 pág 25). En particular, es equivalente decir que $\{x_1, \dots, x_p\}$ es un sistema de generadores minimal a decir que es de mínimo cardinal, o bién, a decir que $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p\}$ es una base de $\bar{M}/\mathfrak{m}_o\bar{M}$.

En estas condiciones dado el $\mathcal{D}$-módulo de generación finita M, $M= \bigoplus_{n\geq t} M_n$

considerada la familia de $\mathcal{O}_o$-módulos $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$, un sistema generador homogéneo de mínimo cardinal de M (o equivalentemente minimal) queda determinado por sistemas de generadores de mínimo cardinal para los $\mathcal{O}_o$-módulos $\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l$, es decir por elementos que dan lugar a bases respectivas de los k-espacios vectoriales $\bar{M}_t/\mathfrak{m}_o\bar{M}_t, \ldots, \bar{M}_l/\mathfrak{m}_o\bar{M}_l$.

Por lo tanto la q-upla de grados asociadas a sistemas generadores de mínimo cardinal queda determinada por las dimensiones de los k-espacios vectoriales $\bar{M}_i/\mathfrak{m}_o\bar{M}_i$.

Si ahora $\{x_1, \ldots, x_p\}$, $\{y_1, \ldots, y_p\}$ son dos sistemas de generadores de mínimo cardinal del $\mathcal{O}_o$-módulo de generación finita M, entonces las relaciones $x_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}y_j$ determinan una matriz $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ con coeficientes en $\mathcal{O}_o$, determinando dicha matriz, por reducción módulo $\mathfrak{m}_o$, una matriz inversible $\bar{A}=(\bar{a}_{i,j})$ de elementos de k, ya que $\bar{A}$ corresponde a un cambio de bases en un espacio vectorial. La condición $\det \bar{A}\neq 0$ implica que det A es una unidad en $\mathcal{O}_o$ y por tanto los sistemas de generadores $\{x_1, \ldots, x_p\}$ e $\{y_1, \ldots, y_p\}$ son equivalentes. De este hecho se sigue que si $\{m_1, \ldots, m_q\}$ y $\{n_1, \ldots, n_q\}$ son sistemas de generadores homogéneos de mínimo cardinal para el $\mathcal{O}$-módulo de generación finita M entonces ambos sistemas de generadores son equivalentes de acuerdo con la definición dada más arriba, y por el teorema se sigue que

$$\mathcal{U}_j(\underline{m}, \underline{d}, M)=\mathcal{U}_j(\underline{n}, \underline{d}, M) \qquad \forall\ j\in \mathbb{N}.$$

Lo que ocurre en el ejemplo II.2.8 va a ser la llave para los resultados más fuertes que vienen a continuación. Para acceder a ellos mantendremos por el momento la hipótesis de que $\mathcal{O}_o$ es local y veremos qué sucede con el resto de sistemas generadores homogéneos no necesariamente de mínimo cardinal. Consideremos dos sistemas de generadores $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_r\}$ y $\underline{n}=\{n_1, \ldots, n_r\}$ ambos con el mismo cardinal y definiendo la misma r-upla de grados $(d_1, \dots, d_r)$ es decir $\underline{m}=UT_i$, $\underline{n}=UT'_i$ y $\# T_i = \# T'_i$ para todo i. Entonces ambos sistemas de generadores son equivalentes. En efecto, pasando la cuestión a los módulos $\bar{M}_i$ es suficiente ver que si M es un $\mathcal{O}_o$-módulo de generación finita $\{x_1, \dots, x_s\}$, $\{y_1, \dots, y_s\}$ son dos sistemas de generadores con igual cardinal entonces ambos sistemas se corresponden mediante una matriz inversible con coeficientes en $\mathcal{O}_o$. Esto es claro pues si $p=\dim_k M/\mathfrak{m}_o M$ entonces de $\{x_1, \dots, x_s\}$ (resp. de $\{y_1, \dots, y_s\}$) se puede extraer un sistema de generadores con p elementos, que podremos suponer sin pérdida de generalidad que es $\{x_1, \dots, x_p\}$ (resp. de $\{y_1, \dots, y_p\}$). Entonces se verifica que el sistema de generadores $\{x_1, \dots, x_s\}$ (resp. de $\{y_1, \dots, y_s\}$) es equivalente a $\{x_1, \dots, x_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{\leftarrow s-p \rightarrow}\}$ (resp. de $\{y_1, \dots, y_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{\leftarrow s-p \rightarrow}\}$) ya que aquél se puede obtener a partir de éste mediante una matriz del tipo

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline * & \cdots & * & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow p \\ \\ \\ \updownarrow s-p \\ \\ \end{array} \end{array}$$

donde en los lugares marcados con * aparecen elementos de $\mathcal{O}_o$. Por otro lado si A es una matriz inversible con coeficientes en $\mathcal{O}_o$ que relaciona $\{x_1, \dots, x_p\}$ con $\{y_1, \dots, y_p\}$, una matriz que relaciona $\{x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0\}$ con $\{y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0\}$ es

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & Id \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow p \\ \updownarrow s-p \end{array} \end{array}$$

matriz que es inversible.

La observación anterior nos proporciona a partir del teorema el resultado que enunciaremos a continuación. Para ello recordemos que dado el $\mathcal{D}$-módulo M se tiene definida una q-upla única $(d_1, \ldots, d_q)$ de grados, que verifica las condiciones 1, 2 y 3 dadas en II §1(pág 98), a la que llamaremos q-upla asociada a M y la denotaremos por $\underline{d}_M$. Cualquier otra r-upla $\underline{d}' = (d'_1, \ldots, d'_r)$ que corresponde a un sistema de generadores está caracterizada por la propiedad de que el número de veces que aparece dicho entero en $\underline{d}_M$ es menor o igual al número de veces que aparece dicho entero en $\underline{d}'$. Escribiremos $\underline{d}' \geq \underline{d}_M$ para indicar dicha circunstancia. Se tiene, pues, el siguiente resultado.

Proposición II.2.9.- Sea M es un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita tal que $\mathcal{D}_0$ es local. Sea $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{Z}^r$ una familia de grados con $\underline{d} \geq \underline{d}_M$. Entonces para cada par de sistemas de generadores $\underline{m}$ y $\underline{n}$ cuyas familias de grados sean $\underline{d}$ se verifica

$$\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M) \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

De esta forma para cada r-upla $\underline{d} \in \mathbb{Z}^r$ tal que $\underline{d} \geq \underline{d}_M$ se tiene definida una familia de invariantes $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M) = \mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)$ siendo $\underline{m}$ un sistema de generadores cuya familia de grados es precisamente $\underline{d}$ (la existencia de tales sistemas de generadores es obvia simplemente repitiendo adecuadamente elementos de un sistema de generadores de mínimo cardinal, o repitiendo ceros).

Ahora bien, podemos estudiar la relación entre los ideales $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M)$ para distintos valores $\underline{d}$. Para ello bastará estudiar la relación entre los $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M)$ y $\mathcal{U}_p(\underline{d}', M)$ siendo $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ y $\underline{d}' = (d_1, \ldots, d_r, d_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1}$.

Si $\underline{m} = \{m_1, \ldots, m_r\}$ es un sistema de generadores homogéneo que corresponde a la d-upla de grados $\underline{d}$, entonces un sistema de generadores correspondiente a $\underline{d}'$ se obtiene añadiendo 0 a dicho sistema ($0\in M_{d_{r+1}}$), es decir considerando $\underline{n}=\{m_1, \ldots, m_r, 0\}$ y sobre 0 considerando formalmente el grado d_{r+1}. Ahora la situación es diferente según d_{r+1} sea par o impar.

Si d_{r+1} es impar, entonces una syzygea para $\underline{n}$ es $e_{r+1}=(0, \ldots, 0, 1)\in \mathcal{D}^{r+1}$, por tanto $\forall\ p\geq 1$, se tiene $e_{r+1}\wedge \ldots \wedge e_{r+1}=1.\ e_{r+1}\wedge \ldots \wedge e_{r+1}$ y de aquí el elemento 1 está en el ideal $\mathcal{U}_p(\underline{d}', M)$ ya que es el menor de una matriz de syzygeas que corresponde a tomar la combinación con repetición que consiste en tomar la columna (r+1)-ésima repetida p veces. De aquí $\mathcal{U}_p(\underline{d}', M)=\mathcal{D}$.

Si d_{r+1} es par, entonces las syzygeas homogéneas para n son elementos $s\in \mathcal{D}^{r+1}$ del tipo $s=(a_1, \ldots, a_r, b)$ donde $s'=(a_1, \ldots, a_r)\in \mathcal{D}^r$ es un syzygea homogénea para $\underline{m}$ y $b\in \mathcal{D}$ es homogéneo y arbitrario. Si $s_1, \ldots, s_p$ son p de tales syzygeas donde $s_j=s'_j+b_j.e_{r+1}$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ entonces se tiene

$$s_1\wedge \ldots \wedge s_p=(s'_1+b_1.e_{r+1})\wedge \ldots \wedge(s'_p+b_p.e_{r+1})=$$

$$=s'_1\wedge \ldots \wedge s'_p+\sum_{j=1}^{r} s'_1\wedge \ldots \wedge s'_{j-1}\wedge(b_j.e_{r+1})\wedge s'_{j+1}\wedge \ldots \wedge s'_p$$

ya que $e_{r+1}\wedge e_{r+1}=0$.

Usando las propiedades del producto exterior (véase I §3) se ve que los coeficientes que aparecen en la expresión $s_1\wedge \ldots \wedge s_p$ en la base de $\overset{p}{\wedge}\mathcal{D}^{r+1}$ inducida por la base estándar $\{e_1, \ldots, e_{r+1}\}$, son o bien elementos de $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)$ o bien elementos de $\mathcal{U}_{p-1}(\underline{m}, \underline{d}, M)$. Como $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)\subset \mathcal{U}_{p-1}(\underline{m}, \underline{d}, M)$ dichos coeficientes son todos elementos de $\mathcal{U}_{p-1}(\underline{m}, \underline{d}, M)$ y de aquí

$$\mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}', M)\subset \mathcal{U}_{p-1}(\underline{m}, \underline{d}, M).$$

El recíproco de esta contención es trivial, pues dadas p-1 syzygeas

$s'_1, \ldots, s'_{p-1}$ relativas a $\underline{m}$ entonces los coeficientes de la expresión $s'_1 \wedge \ldots \wedge s'_{p-1}$ son también coeficientes de $s'_1 \wedge \ldots \wedge s'_{p-1} \wedge e_{r+1}$, siendo tanto $s'_1, \ldots, s'_{p-1}$ como e_{r+1} syzygeas relativas a $\underline{n}$. En conclusión

$$\mathcal{U}_p(\underline{d}', M) = \mathcal{U}_{p-1}(\underline{d}, M) \qquad \forall \ p \geq 1.$$

Denotemos ahora por $t_1(\underline{d})$ (resp. $t_2(\underline{d})$) el número de elementos impares (resp. pares) que aparecen en la r-upla $\underline{d}$. Nótese que los enteros $t_1(\underline{d}_M)$ y $t_2(\underline{d}_M)$ vienen dados por

$$t_1(\underline{d}_M) = \sum_{i \text{ impar}} \dim_k \bar{M}_i/\mathfrak{m}_o \bar{M}_i$$

$$t_2(\underline{d}_M) = \sum_{i \text{ par}} \dim_k \bar{M}_i/\mathfrak{m}_o \bar{M}_i.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Proposición II.2.10.- Sea M un $\mathcal{D}$-módulo graduado de generación finita, siendo $\mathcal{D}_o$ un anillo local, y sea $\underline{d}_M$ la q-upla de grados asociada. Entonces para cualquier otra r-upla $\underline{d} \geq \underline{d}_M$ se tiene

1.- $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M) = \mathcal{D}$ $\qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$ si $t_1(\underline{d}) > t_1(\underline{d}_M)$.

2.- $\mathcal{U}_p(\underline{d}_M, M) = \mathcal{U}_{p+t_2(\underline{d})-t_2(\underline{d}_M)}(\underline{d}, M)$ $\qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$ si $t_1(\underline{d}) = t_1(\underline{d}_M)$.

Pasaremos a globalizar el resultado anterior. Supongamos pues que $\mathcal{D}_o$ es un anillo conmutativo general y consideremos un ideal primo $\rho \in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$. Tanto $\mathcal{D} = \bigoplus_{n \geq o} \mathcal{D}_n$ como el $\mathcal{D}$-módulo de generación finita $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ son $\mathcal{D}_o$-módulos, luego localizando respecto a ρ se tienen que $\mathcal{D}_\rho = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{D}_n)_\rho$ es un anillo graduado anticonmutativo y el módulo $M_\rho = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (M_n)_\rho$ es de hecho un $\mathcal{D}_\rho$-módulo graduado también de generación finita.

Ahora los elementos de grado cero de $\mathcal{D}_\rho$ son el anillo local $(\mathcal{D}_o)_\rho$. Si tomamos un sistema de generadores homogéneos $\underline{m}=\{m_1, ..., m_p\}$, se verifica que el conjunto $\underline{m}_\rho=\{m_1/1, ..., m_p/1\}$ sigue siendo un sistema de generadores homogéneos del $\mathcal{D}_\rho$-módulo M_ρ. Asímismo la familia de grados no ha variado ya que si $|m_i|=d_i\in\mathbb{Z}$ entonces $|m_i/1|=d_i$ o bien $m_i/1=0$ en cuyo caso, sin pérdida de generalidad, podemos asociar formalmente a $m_i/1$ el grado d_i lo cual no afecta a las definiciones de ideal determinantal ni a los resultados previos.

Tenemos, para cada $p\in\mathbb{N}$, los ideales $\mathcal{U}_p(\underline{m}_\rho, \underline{d}, M_\rho)$ y $(\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M))_\rho$ que claramente verifican la relación $(\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M))_\rho\subseteq \mathcal{U}_p(\underline{m}_\rho, \underline{d}, M_\rho)$.
Nótese que ambos miembros pueden ser considerados ideales de $\mathcal{D}_\rho$ en virtud de la platitud de la localización. El siguiente lema muestra que de hecho se verifica la igualdad.

Lema II.2.11.- En las condiciones anteriores se verifica

$$(\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M))_\rho = \mathcal{U}_p(\underline{m}_\rho, \underline{d}, M_\rho).$$

Veamos que la contención inversa a la anterior también se verifica. Para ello, bastará observar una matriz de syzygeas homogéneas de M_ρ para $\underline{m}_\rho$ que tendrá la forma $A=(a_{i,j}/s_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ siendo $s_{i,j}\in\mathcal{D}_o\backslash\rho$ $1\le i\le p$ $1\le j\le q$. Multiplicando por $t=\prod_{i,j} s_{i,j}\in\mathcal{D}_o\backslash\rho$, a partir la matriz A se obtiene la matriz $A^*=(t_{i,j}.a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ donde $t_{i,j}=t^{-1}.s_{i,j}$. La matriz A^* es ahora una matriz de syzygeas de M para $\underline{m}$. Por ser los elementos $t_{i,j}$ de $\mathcal{D}_o$ conmutan con cualquier elemento de $\mathcal{D}$ y de esta forma todo menor de A^* se escribirá como un producto de un elemento de $\mathcal{D}_o\backslash\rho$ por el elemento de $\mathcal{D}$ que se obtiene al calcular el correspondiente menor de A. Esto prueba que todos los menores de A son de la forma b/s donde b es un elemento de $\mathcal{U}(\underline{m}, \underline{d}, M)$ y $s\in\mathcal{D}_o\backslash\rho$, que es lo que se quería probar.

Si ahora se tienen dos sistemas de generadores homogéneos $\underline{m}$ y $\underline{n}$ que corresponden a la misma r-upla de grados entonces se tiene, para cada ideal primo $p\in \mathrm{Spec}(\mathcal{B}_0)$, lo siguiente

$$(\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M))_p = \mathcal{U}_p(\underline{m}_p, \underline{d}, M_p) = \mathcal{U}_p(\underline{n}_p, \underline{d}, M_p) = (\mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M))_p$$

en donde la igualdad central es consecuencia de la proposición II.2.9 y las exteriores del lema anterior. Para obtener el resultado definitivo necesitaremos un lema más.

Lema II.2.12.- Sea $\mathcal{A}$ un anillo conmutativo, M un $\mathcal{A}$-módulo y $N, P\subset M$ dos submódulos. Si para todo ideal maximal $\mathfrak{m}\in \mathrm{SpecMax}(A)$ se tiene $N_{\mathfrak{m}}=P_{\mathfrak{m}}$, entonces $N=P$.

En efecto, para cada $x\in N$ consideremos el ideal $I_x=\{a\in A \;/\; a.x\in P\}$. Si fuera $I_x\neq A$ entonces $I_x\subset \mathfrak{m}$ para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$. Ahora bien $x/1\in N_{\mathfrak{m}}=P_{\mathfrak{m}}$ luego existe $s\notin \mathfrak{m}$ tal que $s.x\in P$, es decir $s\in I_x$ lo cual es contradictorio. Por tanto $I_x=A$ y de aquí $x\in P$. Esto prueba que $N\subset P$ y la contención contención contraria se tiene igualmente por simetría.

Enunciaremos ahora el principal resultado de esta sección.

Teorema II.2.14.- Sea $\mathcal{B}= \bigoplus_{n\in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ un anillo graduado anticonmutativo y M un $\mathcal{B}$-módulo graduado de generación finita. Si $\underline{m}$ y $\underline{n}$ son dos sistemas de generadores homogéneos que definen la misma r-upla de grados $\underline{d}$ entonces se tiene

$$\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)= \mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M) \qquad \forall\ p\in \mathbb{N}$$

(por tanto para cada r-upla $\underline{d}\geq \underline{d}_M$ se tienen ideales determinantales $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M)$ bien definidos). Además se tiene

1.- $\mathcal{U}_p(\underline{d}, M)=\mathfrak{D}$ si $t_1(\underline{d})>t_1(\underline{d}_M)$.

2.- $\mathcal{U}_p(\underline{d}_M, M)=\mathcal{U}_{p+t_2(\underline{d})-t_2(\underline{d}_M)}(\underline{d}, M)$ si $t_1(\underline{d})=t_1(\underline{d}_M)$.

Ambas pruebas se obtienen aplicando a los submódulos $\mathcal{U}_p(\underline{m}, \underline{d}, M)$ y $\mathcal{U}_p(\underline{n}, \underline{d}, M)$ de $\mathfrak{D}$ el lema anterior teniendo en cuenta el proposición II.2.10. Nótese, que se tiene $\underline{d}_M \geq d_{M_\varrho}$ para cualquier localizado, y que por tanto el resultado 2 de la proposición II.2.10 es válido si se reemplaza $\underline{d}_M$ por otro $\underline{d}'$ con $\underline{d}' \leq \underline{d}$.

§3.- INVARIANTES DE FITTING DE MODULOS SOBRE ANILLOS GRADUADOS ANTICONMUTATIVOS.

Sea $\mathcal{D}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_n$ un anillo graduado anticonmutativo y $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado anticonmutativo de generación finita. Representaremos por $\underline{d}_M$ la q-upla asociada a M, es decir, la q-upla de grados de los sistemas de generadores homogéneos de mínimo cardinal de M.

En el parágrafo anterior hemos que visto para cualquier r-upla $\underline{d}\geq\underline{d}_M$ se tiene que los ideales determinantales de los sistemas de generadores homogéneos con r elementos y correspondientes a la r-upla $\underline{d}$ no dependen del sistema generador elegido sino tan sólo de $\underline{d}$. También se ha visto que si $t_1(\underline{d})>t_1(\underline{d}_M)$ entonces los ideales determinantales correspondientes a ese valor son triviales, en el sentido que siempre son iguales a $\mathcal{D}$. Esto significa que la elección de sistemas de generadores de mínimo cardinal que hemos venido describiendo desde el principio del presente capítulo es fundamental con vistas a no obtener unos ideales asociados que sean triviales. Sin embargo, como también hemos visto en el parágrafo anterior esta limitación al cardinal mínimo solamente es necesaria sobre los elementos de grado impar de los sistemas de generadores, ya que para los elementos de grado par se tiene un comportamiento análogo al caso conmutativo (véase [27] y [43]) considerando la traslación de índices que se señala en el teorema II.2.14.

En lo sucesivo debemos considerar, por tanto, solamente sistemas de generadores homogéneos que tengan mínimo cardinal en los grados impares, es decir, tales que $t_1(\underline{d})=t_1(\underline{d}_M)$ siendo $\underline{d}$ su r-upla de grados. Si $\underline{m}$ es un tal sistema de generadores, para todo $p\in\mathbb{N}$, los ideales $\mathcal{U}_{p-t_2(\underline{d})+t_2(\underline{d}_M)}(\underline{m},\underline{d},M)$ no dependen de $\underline{m}$ y son por tanto invariantes de M que serán denotados por $\mathcal{F}_p(M)$. Esta invarianza justifica las siguientes definiciones.

Definición II.3.1.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{D}_n$ un anillo graduado anticonmutativo y $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado de generación finita.

1.- Llamaremos invariante global de Fitting de orden p para M al ideal homogéneo $\mathcal{J}_p(M)$.

2.- Llamaremos invariantes locales de Fitting de orden p para M a la familia de ideales $\{\mathcal{J}_p(M_\rho)/\rho\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)\}$ (cada uno de ellos en el correspondiente anillo graduado $\mathcal{D}_\rho$).

La necesidad de introducir invariantes globales y locales asociados a un módulo M viene de la situación que se produce en la práctica ya que los invariantes globales no son estables por localización. En efecto si para $\rho\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ se tiene $t_1(M)>t_1(M_\rho)$ entonces $(\mathcal{J}_p(M))_\rho= \mathcal{J}_p(\underline{d}_M, M_\rho)=\mathcal{D}_\rho$, sin embargo, $\mathcal{J}_p(M_\rho)$ no ha de ser en general $\mathcal{D}_\rho$. Pensemos por ejemplo en el caso en que todos los $\mathcal{D}_o$-módulos $\bar{M}_j$ para j impar sean proyectivos de rango constante pero alguno de ellos no libre. En este caso $t_1(M)>t_1(M_\rho)$ $\forall$ $\rho\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ lo que implicará $\mathcal{J}_p(M)=\mathcal{D}$ (Teorema II.2.14), y sin embargo cada $(\bar{M}_j)_\rho$ es libre para j impar, lo que indicará que sus invariantes de Fitting no serán necesariamente triviales (ver ejemplo II.2.6).

En este punto hemos de indicar lo siguiente. Si $\rho\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$, el $(\mathcal{D}_o)_\rho$-módulo $(\bar{M}_j)_\rho$ es justamente el correspondiente módulo $(\bar{M}_\rho)_j$ (es decir, considerando ahora la estructura de $\mathcal{D}_\rho$-módulo graduado de M_ρ y haciendo la correspondiente construcción). Se tendrá por tanto

$$(*) \qquad t(\bar{M}_j)\geq \dim_{k(\rho)} (\bar{M}_j)_\rho/\rho(\bar{M}_j)_\rho$$

siendo $k(\rho)$ el cuerpo residual de $(\mathcal{D}_o)_\rho$ y $t(\bar{M}_j)$ el mínimo número de generadores de $\bar{M}_j$. De aquí se tendrán las fórmulas

$$t_1(M)=\sum_{j\ \mathrm{impar}} t(\bar{M}_j) \geq \sum_{j\ \mathrm{impar}} \dim_{k(\rho)} (\bar{M}_j)_\rho/\rho\,(\bar{M}_j)_\rho = t_1(M_\rho)$$

$$t_2(M)=\sum_{j\ \mathrm{par}} t(\bar{M}_j) \geq \sum_{t\ \mathrm{par}} \dim_{k(\rho)} (\bar{M}_j)_\rho/\rho\,(\bar{M}_j)_\rho = t_2(M_\rho).$$

Estas fórmulas muestran que para que se tenga $t_1(M)>t_1(M_\rho)$ es necesario y suficiente que se tenga la desigualdad estricta en (*) para algún j impar.

Los comentarios anteriores muestran que no hay una posibilidad razonable para obtener un haz sobre el espacio anillado (más precisamente esquema afín) $\mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ cuyas fibras sean los invariantes locales $\mathcal{J}_p(M_\rho)$. En efecto una construcción de un tal haz pasaría por el siguiente método.

En primer lugar, se tomaría la unión disjunta $\mathcal{Z}_p=\bigsqcup_{\rho\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)} \mathcal{J}_p(M_\rho)$ junto con la proyección natural

$$\pi: \mathcal{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$$

Ahora para cada abierto $V\subset \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ se tomaría

$$I^*_p(V)=\{s:V \longrightarrow \mathcal{Z}_p \,/\, \pi\circ s=id_V \ \text{ y } \ \forall\, \rho\in V\ \exists\, h\in \mathcal{D}_o \text{ con } \rho\in D_h(V)\subset V$$
$$\text{y } \exists\ a\in \mathcal{D}/s(\rho')=a/h \quad \forall\, \rho'\in D(h)\}$$

Tal asignación es por construcción un haz de $\mathcal{D}_o^*$-módulos ($\mathcal{D}_o^*$ es el haz estructural de $\mathrm{Spec}\mathcal{D}_o$) y de hecho un haz I^*_p de $\mathcal{D}^*$-módulos graduados ($\mathcal{D}^*$ es el haz asociado a $\mathcal{D}$). Además,también por construcción se tiene que la fibra $(I^*_p)_\rho$ es un ideal de $\mathcal{D}_p$ contenido en $\mathcal{J}_p(M_p)$ pero obviamente, teniendo en cuenta las observaciones hechas en este parágrafo, no tiene por qué darse la igualdad.

Esta igualdad se da, sin embargo, en el caso en que cada $\bar{M}_j$ con j impar es un $\mathcal{D}_o$-módulo proyectivo. En efecto, en este caso existe una base de abiertos de la forma $D(h)$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ con la propiedad de que cada $(\bar{M}_j)_h$ (localizado de $\bar{M}_j$ respecto del sistema multiplicativamente cerrado $\{1, h, h^2, ...\}$) es libre. Como cada $(\tilde{M}_j)_h$ es el correspondiente $(\mathcal{D}_o)_h$-módulo asignado al $\mathcal{D}_h$-módulo graduado M_h, bastaría probar la igualdad en el caso en que cada $\tilde{M}_j$ es libre. Ahora bien en este caso todo es trivial, porque se tiene $t_1(M)=t_1(M_p)$ $\forall\ p\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$ y por tanto el haz I^*_p no es otra cosa que el haz $I^*(M)$ que corresponde al $\mathcal{D}_o$-módulo $\mathcal{J}_p(M)$ ya que se tiene $(\mathcal{J}_p(M))_p = \mathcal{J}_p(M_p)$ (ver [26] Cap. II).

En resumen lo dicho anteriormente se refleja en el siguiente teorema.

Teorema II.3.2.- Sea $\mathcal{D} = \bigoplus_{n\geq o} \mathcal{D}_n$ un anillo graduado anticonmutativo, $M = \bigoplus_{n\in \mathbb{Z}} M_n$ un $\mathcal{D}$-módulo graduado de generación finita y $\{\mathcal{J}_p(M)\}_{p\in \mathbb{N}}$ los invariantes globales y $\{\mathcal{J}_p(M_p)\}_{p\in \mathbb{N}}$ los invariantes locales de Fitting, $p\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$. Entonces se tiene

a.- Para cada $p\in \mathbb{N}$ existe un haz de $\mathcal{D}_o$-módulos I^*_p tal que la fibra $(I^*_p)_p$ es un ideal contenido en $\mathcal{J}_p(M_p)$. De hecho es un haz de ideales homogéneos de $\mathcal{D}^*$

b.- Si cada $\tilde{M}_j$ para j impar es proyectivo como $\mathcal{D}_o$-módulo, entonces $(I^*_p)_p$ es el invariante local $\mathcal{J}_p(M_p)$ para cada $p\in \mathbb{N}$ y cada $p\in \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_o)$.

c.- Si cada $\tilde{M}_j$ es libre para j impar entonces el haz I^*_p coincide con el haz determinado por el invariante global $\mathcal{J}_p(M)$.

Recordemos que hemos dicho más arriba que si en las hipótesis b) algún $\tilde{M}_j$ no es libre entonces $\mathcal{J}_p(M)=\mathcal{D}$ y por tanto no se tendrá en general que las secciones globales de I^*_p son el invariante global $\mathcal{J}_p(M)$. Esto justifica la necesidad de las hipótesis en c) para obtener una conexión completa entre invariantes globales y locales. Se puede probar, de hecho, que bajo las hipótesis b) el haz I^*_p es casi-coherente, y por tanto, está determinado por sus secciones globales. Así pues, en ese caso, el único objeto "secciones globales" equivale a todo el haz o lo que es lo mismo determina un nuevo invariante global, invariante que será igual al invariante global de Fitting $\mathcal{J}_p(M)$ solamente bajo las hipótesis de c).

Para finalizar esta sección haremos una enumeración de las principales propiedades relativas al comportamiento algebraico de los ideales de Fitting. Nos ceñiremos, por razones de extensión, a enumerar las propiedades que son análogas a las que caracterizan los ideales de Fitting en el caso conmutativo ([27] pág II).

<u>Teorema II.3.3.</u>- a.- Sean $\mathcal{D}= \bigoplus_{n\geq o} \mathcal{D}_n$ $\mathcal{D}'= \bigoplus_{n\geq o} \mathcal{D}'_n$ anillos graduados anticonmutativos unitarios, dado $f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un homomorfismo graduado de anillos. Sea M un $\mathcal{D}$-módulo graduado de tipo finito y M' el $\mathcal{D}'$-módulo graduado $M\otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{D}'$. Entonces se tiene

$$\mathcal{J}_p(M).\ \mathcal{D}'= \begin{cases} \mathcal{J}_p(M\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{D}') & \text{si } t_1(M')=t_1(M) \\ \mathcal{D}' & \text{si } t_1(M')<t_1(M) \end{cases}$$

En particular si $\mathcal{R}$ es una $\mathcal{D}_o$-álgebra conmutativa y $\mathcal{D}'=\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{D}_o}\mathcal{R}$ entonces se tiene $M\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{D}'=M\otimes_{\mathcal{D}_o}R$ y de aquí

$$\mathcal{J}_p(M).\mathcal{D}'= \begin{cases} \mathcal{J}_p(M\otimes_{\mathcal{D}_o} R) & \text{si } t_1(M')=t_1(M) \\ \mathcal{D}' & \text{si } t_1(M')<t_1(M) \end{cases}$$

b.- Si M y N son $\mathcal{D}$-módulos graduados finitamente generados entonces

$$\mathcal{J}_p(M\oplus N)= \sum_{s+u=p} \mathcal{J}_s(M)\ \mathcal{J}_u(N)$$

c.- Si M es un $\mathcal{D}$-módulo graduado finitamente generado y $t(M)=t_1(M)+t_2(M)$ entonces

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M)} \subset \sqrt{\mathcal{J}_{t(M)}(M)}$$

(Aquí para un ideal homogéneo $I \subset \mathcal{D}$ $\sqrt{I} = \{b \in \mathcal{D} / b^m \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}\}$

d.- Si M es un $\mathcal{D}$-módulo graduado monógeno, es decir $t(M)=1$, entonces

- si $t_1(M)=0$

$$\mathcal{J}_p(M) = \begin{cases} \mathrm{Ann}(M) & p=0 \\ 0 & p>0 \end{cases}$$

- si $t_1(M)=1$, $\mathcal{J}_p(M) = (\mathrm{Ann}(M))^p \quad \forall\ p \geq 1$.

La demostración de estos hechos es en cierto modo similar a las del caso conmutativo (ver [27] Cap. I). La demostración de a) consiste en darse cuenta que para cada $j \in \mathbb{Z}$ se tiene $\bar{M}'_j = \bar{M}_j \otimes_{\mathcal{D}_0} \mathcal{D}'_0$, lo cual se sigue de las definiciones, y entonces teniendo en cuenta $t_1(M') \leq t_1(\bar{M})$ usar el hecho de que la igualdad se dará sí y sólamente sí el mínimo número de un sistema de generadores de $\bar{M}'_j$ es igual al mínimo número de un sistema de generadores de $\bar{M}_j$ para cada j impar.

El apartado b) se sigue fácilmente de que $t_1(M \oplus N) = t_1(M) + t_1(N)$, $t_2(M \oplus N) = t_2(M) + t_2(N)$ y de la multilinealidad del producto exterior (véase I. §3 y II.1.2).

Para probar el apartado c) pongamos $q=t(M)$, elijamos un sistema de generadores homogéneo $\underline{m}$ con q elementos y tomemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{syz}(\underline{m}, M)) \longrightarrow \mathcal{D}^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

El anulador de M, $\mathrm{Ann}(M)$, será el ideal homogéneo cuyos elementos homogéneos son los elementos $a \in \mathcal{D}$ tales que $a.e_i \in \mathrm{syz}(\underline{m}, M)$, donde $\{e_1, \ldots, e_q\}$ es la base estándar de $\mathcal{D}^q$.

Así si $a \in \mathrm{Ann}(M)$, entonces se tiene una matriz de syzygeas en la forma

$$\begin{bmatrix} a & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es $\pm a^q$, por tanto $a^q \in \mathfrak{I}_{t(M)}(M)$ y de aquí

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M)} \subset \sqrt{\mathfrak{I}_{t(M)}(M)}$$

Finalmente el apartado d) está probado en el ejemplo II.1.4.

§4.- ALGUNOS EJEMPLOS

En este parágrafo describiremos algunos ejemplos sistemáticos que respaldan las construcciones y resultados del presente capítulo.

En primer lugar, como ejemplo general de un anillo graduado anticonmutativo tenemos el álgebra exterior asociada a un módulo $\mathfrak{M}$ sobre un anillo conmutativo A. En este caso $\mathcal{D}=\wedge\mathfrak{M}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_n$ donde $\mathcal{D}_0=A$ $\mathcal{D}_1=\mathfrak{M}$ y $\mathcal{D}_n=\overset{n}{\wedge}\mathfrak{M}$ y la multiplicación es la multiplicación exterior.

Si $\mathfrak{N}$ es un A-módulo fijo y $\mathfrak{M}$ es un A-módulo variable provisto de un homomorfismo de A-módulos $f:\mathfrak{N}\longrightarrow\mathfrak{M}$ entonces $M=\wedge\mathfrak{M}$ tiene una estructura de $\mathcal{D}=\wedge\mathfrak{N}$-módulo graduado, vía f, siendo dicho módulo de generación finita si lo es el A-módulo $\mathfrak{M}/\mathrm{Imf}$. Se tiene pues asociado al par $(\mathfrak{M}, f)$ una sucesión de invariantes, locales y globales de Fitting que son ideales de $\mathcal{D}=\wedge\mathfrak{N}$, o bien, de $\mathcal{D}_p=(\wedge\mathfrak{N})_p$ siendo $p\in\mathrm{SpecA}$.

Por ejemplo si se toma $\mathfrak{N}=A^q$ y $f: A^q\longrightarrow\mathfrak{M}$ un homomorfismo suprayectivo, entonces $M=\wedge\mathfrak{M}$ es un módulo monógeno sobre $\mathcal{D}=\wedge A^q$ teniéndose el homomorfismo $\mathcal{D}$-lineal suprayectivo

$$\mathcal{D}\xrightarrow{\ \pi\ }\wedge\mathfrak{M}\longrightarrow 0$$

El generador $1=\pi(1)$ tiene grado cero por lo tanto se tiene un único ideal significativo

$$\mathcal{J}_1(\wedge\mathfrak{M})=\bigoplus_{n=1}^{\infty} I_n$$

Describiremos a continuación los A-módulos I_n. Para ello, nótese que se tiene la sucesión exacta

$$0\longrightarrow I_n\longrightarrow\overset{n}{\wedge}A^q\longrightarrow\overset{n}{\wedge}\mathfrak{M}\longrightarrow 0$$

por tanto, I_n es el A-módulo de syzygeas del producto exterior $\overset{n}{\wedge}\mathfrak{M}$ respecto al sistema de generadores imagen de la base estándar de A^q por f. En conclusión el único ideal

$\mathcal{J}_1(\wedge \mathfrak{M})$ tiene como información los módulos de syzygeas, conjuntamente, para todos los $\overset{n}{\wedge}\mathfrak{M}$. Como los ideales de Fitting, del caso conmutativo, (véase [43] 1.5) son función de conjuntos de syzygeas resulta que implícitamente en $\mathcal{J}_1(\wedge \mathfrak{M})$ está la información sobre todos los ideales de Fitting $\mathfrak{F}_r(\overset{n}{\wedge}\mathfrak{M})$, en particular los propios $\mathfrak{F}_r(\mathfrak{M})$.

De esta manera, si eliminamos las hipótesis de ser f suprayectivo, o ser $\mathfrak{N}$ un módulo libre, los invariantes de Fitting del parágrafo II §3 pueden llegar a proporcionar generalizaciónes de los ideales de Fitting habituales.

Un caso especialmente importante, es cuando A se toma como el anillo de funciones, en una situación geométrica concreta. Así por ejemplo si $A=k[x_1, ..., x_n]$ entonces $\wedge A^n$ se identifica con el álgebra de formas diferenciales polinómicas (o regulares) sobre el espacio afín. Si U es un abierto coordenado de una variedad diferenciable (resp. variedad analítica, real o compleja) y se toma como A el anillo de funciones diferenciables (resp. analíticas) sobre U, entonces, $\wedge A^n$, n=dim U, se identifica nuevamente con las formas diferenciales sobre U (resp. formas diferenciales analíticas u holomorfas sobre U). La misma situación se produce si se toma un punto y los correspondientes anillos de gérmenes en ese punto.

En estos casos, además de los módulos del tipo $\wedge\mathfrak{M}$ aparecen, en la Geometría Diferencial, otros tipos de módulos sobre el álgebra de formas diferenciales $\mathcal{D}$. Por ejemplo, si sobre el abierto coordenado U de una variedad diferenciable se tiene una distribución (posiblemente singular) dada localmente por los campos vectoriales $\bar{X}_1, ..., \bar{X}_s$, entonces se tiene un ideal homogéneo de $\mathcal{D}$ asociado naturalmente a la distribución (o al correpondientesistema de Pfaff). La componente homogénea de grado r de dicho ideal consta de las las r-formas diferenciales tales que para todo $P\in U$ la aplicación lineal alternada asociada a dicha forma en P

$$\varphi_p: T_p \times \overset{r}{\ldots} \times T_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

tiene la propiedad de que $\varphi_p(\bar{X}_{i_1}, ..., \bar{X}_{i_r})=0$ para toda combinación $(i_1, ..., i_r)$ con $1\le i_j\le s$

La situación anterior nos sugiere también considerar ejemplos en los cuales $\mathfrak{D}$ no es necesariamente del tipo $\wedge \mathfrak{N}$, pero sí es el álgebra de formas diferenciales sobre un abierto U (no necesariamente coordenado) o toda una variedad diferenciable, analítica, compleja, etc. Más aún, teniendo en cuenta que el álgebra de formas diferenciales está provista de la diferencial exterior y es por tanto un álgebra diferenciable, pasando al cociente se obtienen los grupos de cohomología de De Rham, y como la diferencial exterior tiene un buen comportamiento respecto del producto exterior se tiene el anillo de cohomología de De Rham

$$H^*_{DR}(U) = \bigoplus_{n=0}^{\dim U} H^n_{DR}(U)$$

Se obtiene así un nuevo anillo graduado anticonmutativo $\mathfrak{D} = H^*_{DR}(U)$.

Más generalmente, se obtienen anillos graduados de este tipo tomando otras teorías de cohomología. Así por ejemplo, si tomamos la cohomología singular sobre espacios topológicos, se obtiene asociado a todo espacio topológico Y, el anillo de cohomología singular

$$H^*(Y, A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(Y, A)$$

para cada anillo conmutativo A (especialmente significativo cuando A es un dominio de ideales principales). Aquí, la multiplicación viene dada por el cup producto. Si el espacio topológico Y se deja fijo y se toma el espacio topológico X variable, dotado de un morfismo $f: X \longrightarrow Y$, se tiene inducido un homomorfismo

$$H^*(Y, A) \longrightarrow H^*(X, A)$$

que da a $M = H^*(X, A)$ de estructura de $\mathfrak{D} = H^*(Y, A)$-módulo graduado anticonmutativo. De esta manera, cuando dicho módulo sea de generación finita, los invariantes de Fitting del parágrado II §3 son invariantes asociados al par (X, f) y son ideales del anillo asociado al objeto fijado. Por los resultados que hemos obtenido, dichos invariantes se pueden calcular a partir de sistemas de generadores homogéneos arbitrarios con la única limitación de que $t_1(\underline{d}) = t_1(M)$ (véase teorema II.2.14). Más aún, supongamos, que $A = \mathbb{Z}$ y que los

$\mathbb{Z}$-módulos $\bar{M}_j$ con j impar tienen torsión pero que para ningún número primo p los módulos $\bar{M}_j$ tienen simultáneamente p-torsión. En este caso, se tendrá $t_1(\underline{d})>t_1(M_p)$ $\forall$ $p\in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, por tanto $\mathcal{J}_p(M)=\mathcal{D}$ $\forall$ $p\in\mathbb{N}$. El invariante global de Fitting es por tanto trivial, de aquí que será preciso usar los invariantes locales, que no serán necesariamente triviales. Nótese que la condición de tener torsión implica que $\bar{M}_j$ no es proyectivo, y por tanto no se cumple la condición b) en el teorema II.3.2.

CAPITULO III

ANILLOS FILTRADOS.

IDEALES DE FITTING.

En este capítulo, usando las definiciones de funciones determinante dadas en el parágrafo I §4 construimos unos ideales de Fitting para anillos filtrados de graduado conmutativo, que generalizan a los construidos en el caso conmutativo. Finalmente probamos ciertos resultados de invariancia.

§1 IDEALES DE FITTING DE MODULOS SOBRE ANILLOS FILTRADOS.

El objeto de este parágrafo es la construcción de ideales de Fitting (o ideales determinantales) asociados a módulos de presentación finita sobre anillos filtrados cuyo graduado sea un dominio conmutativo y noetheriano, utilizando la noción de determinante de matrices sobre tales anillos. Las filtraciones que usaremos serán todas separadas.

Consideremos un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ con filtración $\Sigma=\{F_n\mathcal{D}\}_{n\in \mathbb{Z}}$, cuyo graduado asociado sea un dominio conmutativo y notheriano, que denotaremos mediante $gr\mathcal{D}$. Asociada a la filtración Σ se tiene la construcción siguiente (véase parágrafo I §4.2)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\phi"'] & & gr_{\Sigma}\mathcal{D} = \mathcal{R} \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\
k_{\mathcal{D}} \arrow[rr, "\sigma_S \equiv \sigma"] \arrow[dr, "\rho"'] & & gr_{\Omega} k_{\mathcal{D}} \cong \mathcal{R}_S \\
& \bar{k}_{\mathcal{D}} \arrow[ur, "\bar{\sigma}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde

- $(k_{\mathcal{D}}, \phi)$ denota el microlocalizado de $\mathcal{D}$.
- Ω denota la filtración sobre el microlocalizado $k_{\mathcal{D}}$ inducida por Σ.
- $\bar{k}_{\mathcal{D}}$ es el semigrupo abelianizado de $k_{\mathcal{D}}$.
- ρ es la aplicación canónica entre $k_{\mathcal{D}}$ y $\bar{k}_{\mathcal{D}}$.
- S es el conjunto de elementos no nulos de $\mathcal{D}$.
- $\mathcal{R}_S$ el localizado de $gr_{\mathcal{D}}$ respecto de $\sigma(S)$, siendo

  $\sigma(S)=$ {elementos homogéneos no nulos de $gr_{\mathcal{D}}$}.
- σ_S es la aplicación símbolo principal de $k_{\mathcal{D}}$ en su graduado.

- $\bar{\sigma}$ es el homomorfismo de semigrupos inducido por σ_S.

La aplicación determinante asociada a la filtración Σ viene definida por

$$\det_\Sigma = \bar{\sigma} \circ \det \circ (\phi)$$

siendo det la aplicación determinante, estudiada en el apartado I §1 de esta Memoria, para el cuerpo no conmutativo $k_{\mathcal{D}}$, (ϕ) es la aplicación natural inducida por ϕ entre los conjuntos de matrices respectivos, y $\bar{\sigma}$ la aplicación indicada más arriba.

Supondremos además en este capítulo que esta aplicación determinante es regular (Definición I.4.2.6) de forma que la podemos considerar como una aplicación

$$\det_\Sigma : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{gr}\mathcal{D}^*$$

Asímismo cuando no exista confusión para el microlocalizado $k_{\mathcal{D}}$ usaremos la notación k en vez de $k_{\mathcal{D}}$.

Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita. Dado un sistema de generadores $\underline{m} = \{m_1, ..., m_q\}$ de M, tenemos el homomorfismo suprayectivo canónico de $\mathcal{D}$-módulos

$$\pi : \mathcal{D}^q \longrightarrow M$$

definido por $\underline{m}$. Como en el Capítulo II una syzygea para $\underline{m}$ será un elemento $(a_1, ..., a_q) \in \mathcal{D}^q$ tal que

$a_1.m_1 + ... + a_q.m_q = 0$ es decir, un elemento de $\mathrm{Ker}\pi$. El conjunto de syzygeas para $\underline{m}$ de M forma un submódulo de $\mathcal{D}^q$, recibe el nombre de módulo de syzygeas de M para $\underline{m}$ y será denotado por $\mathrm{syz}(\underline{m}, M)$. Tenemos entonces la sucesión exacta de $\mathcal{D}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{syz}(\underline{m}, M) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Nótese que, en general, el módulo $\mathrm{syz}(\underline{m}, M)$ no es de generación finita. Por esta razón consideraremos, en lo sucesivo módulos de presentación finita, es decir, $\mathcal{D}$-módulos de M de generación finita tales que $\mathrm{syz}(\underline{m}, M)$ es de generación finita para un sistema de generadores $\underline{m}$ de M. Si $\underline{u} = \{u_1, ..., u_r\}$ es otro sistema de generadores del $\mathcal{D}$-módulo M, el lema de Samuel ([43] Cap II Teorema 3) asegura que

$$\mathcal{D}^r \oplus syz(\underline{m}, M) \cong syz(\underline{u}, M) \oplus \mathcal{D}^q$$

y, por lo tanto, siendo $syz(\underline{m}, M)$ de generación finita también lo será $syz(\underline{u}, M)$. Así pues un módulo de generación finita M es de presentación finita sí y sólo sí para todo sistema finito de generadores se verifica que su módulo de syzygeas es de generación finita.

Para un $\mathcal{D}$-módulo M de presentación finita, una selección de un sistema de generadores $\underline{m}$ y de un sistema de generadores en $syz(\underline{m}, M)$ equivale a una sucesión exacta

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Una filtración $\{F_n \mathcal{D}^q\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^q$ induce, asociada al $\mathcal{D}$-homomorfismo λ, una filtración sobre $\mathcal{D}^p$ que está determinada por los elementos $s_1=\lambda(e_1)$, ..., $s_p=\lambda(e_p)$, siendo $\{e_1, ..., e_p\}$ la base estándar del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^p$. Cada elemento s_i de $\{s_1, ..., s_p\}$ tiene un orden m_i $i=1, ..., p$ dado por la propiedad

$$s_i \in F_{m_i} \mathcal{D}^q \backslash F_{m_i - 1} \mathcal{D}^q,$$

con lo cual definiendo sobre cada componente $\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}^p$ la filtración por traslación de orden d_i y sobre $\mathcal{D}^p$ la filtración producto de las p filtraciones por traslación, es decir,

$$F_n(\mathcal{D}^p) = F_{n-m_1}(\mathcal{D}) \times ... \times F_{n-m_p}(\mathcal{D})$$

se tiene que el $\mathcal{D}$-homomorfismo

$$\lambda: \mathcal{D}^p \longrightarrow \mathcal{D}^q$$

es un $\mathcal{D}$-homomorfismo filtrado. Si $gr(\mathcal{D}^q)$ denota el anillo graduado de $\mathcal{D}^q$ para la filtración $\{F_n \mathcal{D}^q\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $gr(\mathcal{D}^p)$ el graduado de $\mathcal{D}^p$ para la filtración producto de las filtraciones por traslación, tenemos, en particular, el homomorfismo de módulos inducido entre graduados

$$\bar{\lambda}: gr(\mathcal{D}^p) \longrightarrow gr(\mathcal{D}^q)$$

y las aplicaciones

$$\sigma^p: \mathcal{D}^p \longrightarrow gr(\mathcal{D}^p)$$

$$\sigma^q: \mathcal{D}^q \longrightarrow gr(\mathcal{D}^q)$$

que son respectivamente las aplicaciones símbolo principal correspondientes a ambas filtraciones.

El $gr\mathcal{D}$-módulo $gr(\mathcal{D}^p)$ podemos identificarlo con $(gr\mathcal{D})^p$ provisto de la graduación cuyos elementos homogéneos de grado n son las p-uplas $(s_1, \ldots, s_p)$ de elementos homogéneos de $\mathcal{D}$ tales que $|s_i|+m_i = n$. Entonces, en función de la base estándar de $(gr\mathcal{D})^p$ se tiene que el $gr\mathcal{D}$-homomorfismo $\bar{\lambda}$ se expresa matricialmente mediante la matriz columna

$$B(\bar{\lambda}) = (\sigma^q(v_1)\ , \ldots, \sigma^q(v_p))^t .$$

Se tiene, pues, una sucesión exacta de $gr\mathcal{D}$-módulos

$$(gr\mathcal{D})^p \xrightarrow{\bar{\lambda}} gr(\mathcal{D}^q) \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \mathrm{Coker}\bar{\lambda} \longrightarrow 0.$$

Si sobre M se considera la filtración imagen por el homomorfismo π de la filtración definida sobre $\mathcal{D}^q$ se tiene, asímismo, una sucesión de $gr\mathcal{D}$-módulos

$$(gr\mathcal{D})^p \xrightarrow{\bar{\lambda}} gr(\mathcal{D}^q) \xrightarrow{\bar{\pi}} grM \longrightarrow 0$$

sucesión que no es en general exacta en el término $gr(\mathcal{D}^q)$, por tanto no se tendrá en general el isomorfismo entre grM y $\mathrm{Coker}\bar{\lambda}$. No obstante, se verifica siempre que $\mathrm{Im}\bar{\lambda} \subset \mathrm{Ker}\bar{\pi}$, pues es obvio que $\bar{\pi} \circ \bar{\lambda} = 0$

La siguiente definición especifica las condiciones suficientes para que la sucesión anterior entre graduados sea también exacta.

Definición III.1.1.- 1) Sean M y N dos $\mathcal{D}$-módulos filtrados y $f\colon M \longrightarrow N$ un $\mathcal{D}$-homomorfismo filtrado diremos que f es estricto sí y sólo sí para cada entero $n \in \mathbb{Z}$ se verifica

$$f(F_nM) = \mathrm{Im}f \cap F_nN$$

siendo $\{F_nM\}_{n\in \mathbb{Z}}$ y $\{F_nN\}_{n\in \mathbb{Z}}$ las filtraciones definidas sobre M y N respectivamente.

2) Una sucesión $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ diremos que es estricta si es una sucesión de $\mathcal{D}$-módulos filtrados tal que f y g son $\mathcal{D}$-homomorfismos filtrados estrictos.

Proposición III.1.2.- Sean L, M y N tres $\mathcal{D}$-módulos filtrados (de filtraciones separadas), $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ una sucesión de $\mathcal{D}$-homomorfismos filtrados y $\mathrm{gr}L \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{gr}M \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{gr}N$ la sucesión de $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-homomorfismos asociada. Entonces si la sucesión

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

es exacta y estricta, entonces la sucesión inducida

$$\mathrm{gr}L \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{gr}M \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{gr}N$$

es exacta.

Es evidente que $\bar{g} \circ \bar{f} = 0$ ya que sobre cada elemento homogéneo $\bar{a} \in \mathrm{gr}L$ se tiene $\bar{a} = \sigma_L(a)$ de donde

$$\bar{g} \circ \bar{f}(\bar{a}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{a})) = \bar{g}(\bar{f}(\sigma_L(a))) = \bar{g}(\sigma_M(f(a))) = \sigma_N(g(f(a))) = \sigma_N(0) = 0$$

donde σ_L, σ_M y σ_N denotan los correspondientes símbolos principales. Por tanto

$$\mathrm{Im}\bar{f} \subset \mathrm{Ker}\bar{g}.$$

Recíprocamente, para ver que $\mathrm{Ker}\bar{g} \subset \mathrm{Im}\bar{f}$ basta ver que si un elemento $\bar{x} \in \mathrm{Ker}\bar{g}$ es homogéneo entonces $\bar{x} \in \mathrm{Im}\bar{f}$ ya que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son homomorfismos graduados. Si $\bar{x} \in \mathrm{Ker}\bar{g}$ y es homogéneo de grado n entonces, puesto que se consideran filtraciones separadas, se tiene $\bar{x} = \sigma_M(x)$ donde $x \in F_nM \setminus F_{n-1}M$. Ahora bien separadas, se tiene $\bar{x} = \sigma_M(x)$ donde $x \in F_nM \setminus F_{n-1}M$. Ahora bien

$g(x) \in \mathrm{Im}g \cap F_{n-1}N = g(F_{n-1}M)$ luego existe $x' \in F_{n-1}M$ tal que $g(x) = g(x')$ de donde

$x - x' \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$ es decir

$x - x' \in \mathrm{Im}f \cap F_nM = f(F_nL)$ y por tanto $x - x' = f(y)$ para $y \in F_nL$. Tomando clases módulo $F_{n-1}M$ se tiene $\sigma_M(x - x') = \sigma_M f(y)$ luego $\bar{x} = \sigma_M(x - x') = \bar{f}(\sigma_L(y))$ y se verifica $\bar{x} \in \mathrm{Im}\bar{f}$.

Como consecuencia, si se tiene como antes una sucesión exacta

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

una filtración sobre $\mathcal{D}^q$ y sobre M y $\mathcal{D}^p$ las filtraciones inducidas vía π y λ, respectivamente, se verifica que si λ es estricto entonces la sucesión inducida

$$(\mathrm{gr}\mathcal{D})^p \xrightarrow{\bar{\lambda}} \mathrm{gr}(\mathcal{D}^q) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathrm{gr}M \longrightarrow 0$$

es exacta y por tanto $\mathrm{gr}M$ se identifica con el $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-módulo $\mathrm{Coker}\bar{\lambda}$. En efecto, esta conclusión se sigue de la proposición anterior ya que π es un homomorfismo estricto al ser la filtración definida sobre M la filtración inducida por π que es suprayectiva.

Nótese que dado un anillo conmutativo y noetheriano $\mathcal{R}$ y un $\mathcal{R}$-módulo M entonces toda presentación finita

$$\mathcal{R}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{R}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{R}$-módulos puede considerarse también como una presentación finita de $\mathcal{R}$-módulos filtrados, sin más que tomar las filtraciones triviales tanto sobre $\mathcal{R}$ como los $\mathcal{R}$-módulos $\mathcal{R}^p$, $\mathcal{R}^q$ y M. En este caso el homomorfismo λ es obviamennte estricto y $\mathrm{gr}\mathcal{R} = \mathcal{R}$, siendo la sucesión inducida la propia sucesión de partida. En este caso se dispone de una teoría de ideales de Fitting que se calculan mediante tales presentaciones (véase [19], [27], [36], [43]).

A continuación usaremos la teoría de determinantes sobre anilllos filtrados detallada en I.4.2 para extender los ideales de Fitting al caso general de anillos filtrados de forma que se obtenga la teoría conocida para el caso conmutativo al considerar las filtraciones triviales.

Como hemos dicho, las filtraciones que estamos considerando sobre $\mathcal{D}^p$ y M en una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

quedan determinadas en función de la filtración $\{F_n \mathcal{D}^q\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definida sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^q$. Esta filtración, en lo sucesivo, va a ser de un tipo especial, el mismo tipo que para la filtración sobre $\mathcal{D}^p$. Explicitaremos esta construcción.

Sean $d_1, \ldots, d_q$ números enteros. Para cada $d_i \in \mathbb{Z}$ podemos considerar la filtración por traslación de orden d_i $\Sigma_{d_i} = \{F^{d_i}_n \mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre $\mathcal{D}$ visto como $\mathcal{D}$-módulo, es decir, si $\Sigma = \{F_n \mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la filtración definida sobre el anillo $\mathcal{D}$ se tiene

$$F^{d_i}_n \mathcal{D} = F_{n-d_i} \mathcal{D} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Por tanto sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^q$ podemos considerar la filtración producto de las filtraciones por traslación, es decir

$$F_n(\mathcal{D}^q) = F_{n-d_1} \mathcal{D} \times \ldots \times F_{n-d_q} \mathcal{D}$$

A estas filtraciones las llamaremos filtración libre relativa a $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_q) \in \mathbb{Z}^q$. Serán precisamente estas filtraciones libres sobre $\mathcal{D}^q$ las que consideraremos en adelante. En particular, la filtración libre sobre $\mathcal{D}^q$ (parágrafo I §4.2) se obtiene relativa a la q-upla $(0,\dots,0)\in\mathbb{Z}^q$ y la referiremos brevemente como filtración libre.

Para una de estas filtraciones el símbolo principal viene definido de la siguiente forma. Para una q-upla $\underline{d}=(d_1,\dots,d_q)$ se tiene

$$F_{n,\underline{d}}\mathcal{D}^q/F_{n-1,\underline{d}}\mathcal{D}^q=F_{n-d_1}\mathcal{D}/F_{n-d_1-1}\mathcal{D}\times\dots\times F_{n-d_q}\mathcal{D}/F_{n-d_q-1}\mathcal{D}$$

por tanto dado $\underline{v}=(v_1,\dots,v_q)\in\mathcal{D}^q$ tal que $\underline{v}\in F_{n,\underline{d}}\mathcal{D}^q/F_{n-1,\underline{d}}(\mathcal{D}^q)$ se verifica que su símbolo principal relativo a la filtración libre relativa a $\underline{d}$ viene dado por

$$\sigma^{\underline{d}}(\underline{v})=(\sigma_{n-d_1}(v_1),\dots,\sigma_{n-d_q}(v_q))$$

donde por $\sigma_r\colon F_r\mathcal{D}\longrightarrow F_r\mathcal{D}/F_{r-1}\mathcal{D}$ se denota el homomorfismo de subgrupos aditivos de paso al cociente. Nótese que si $x\in F_r(\mathcal{D})\backslash F_{r-1}(\mathcal{D})$ entonces $\sigma_r(x)$ es el símbolo principal de x y que $\sigma_r(x)=0$ si $x\in F_{r-1}(\mathcal{D})$. Así pues, no se verifica, en general, $\sigma^{\underline{d}}(\underline{v})=(\sigma(v_1),\dots,\sigma(v_q))$ sino que las componentes de $\sigma^{\underline{d}}(\underline{v})$ son símbolos principales de las componentes de v_i cuando $v_i\notin F_{n-d_i-1}(\mathcal{D})$ o bien son ceros si $v_i\in F_{n-d_i-1}(\mathcal{D})$.

En este sentido se verifica el siguiente resultado

<u>Lema III.1.3.</u>- Sea $(\mathcal{D},\Sigma)$ un anillo filtrado cuyo graduado sea un dominio conmutativo y noetheriano tal que la filtración $\Sigma=\{F_n\mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea discreta, es decir $F_n\mathcal{D}=0$ $n<0$. Dado un $\mathcal{D}$-módulo M y una presentación finita sobre M

$$\mathcal{D}^p\xrightarrow{\ \lambda\ }\mathcal{D}^q\xrightarrow{\ \pi\ }M\longrightarrow 0$$

para una q-upla $\underline{d}\in\mathbb{Z}^q$, considerando sobre $\mathcal{D}^q$ la filtración por traslación definida por $\underline{d}$ y sobre $\mathcal{D}^p$ la filtración por traslación inducida via λ, se verifica que λ es estricta sí y sólo sí el conjunto

$$\{\sigma^{\underline{d}}(\lambda(e_1)), \ldots, \sigma^{\underline{d}}(\lambda(e_p))\} = \{\bar{\lambda}(e_1), \ldots, \bar{\lambda}(e_p)\}$$

genera el submódulo

$$N_{\underline{d}} = < \{\sigma^{\underline{d}}(\lambda(v))/ v\in \mathcal{D}^p\}> \subset \operatorname{gr}\mathcal{D}^q.$$

La condición necesaria es consecuencia inmediata de la proposición III.1.2.

Recíprocamente si $<\{\bar{\lambda}(e_1), \ldots, \bar{\lambda}(e_p)\}> = N_{\underline{d}}$ dado $\underline{\omega} \in F_n\mathcal{D}^q\backslash F_{n-1}\mathcal{D}^q$ $\underline{\omega}\in \operatorname{Im}\lambda$ se tiene que $\sigma^{\underline{d}}(\underline{\omega})\in N_{\underline{d}}$ es decir

$\sigma^{\underline{d}}(\underline{\omega})=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.\bar{\lambda}(e_i)$ siendo $\alpha_i \in \operatorname{gr}\mathcal{D}$ y grados $n - r_i$.

Consideremos $v_i\in \mathcal{D}$ tal que $\sigma(v_i)= \alpha_i$ es decir $v_i\in \mathcal{D}_{n-r_i}$ con lo cual definiendo $\underline{v}=(v_1,\ldots, v_p)\in \mathcal{D}^p$ se tiene que $\underline{v}\in F_n\mathcal{D}^p$. Si $\lambda(\underline{v}) = \underline{\omega}$ se verifica la condición. Si $\lambda(\underline{v})\neq \underline{\omega}$ se tiene que $\underline{\omega} - \lambda(\underline{v})= \underline{\omega}_1\in F_{n-1}\mathcal{D}^q$ con lo cual al ser la filtración de $\mathcal{D}$ discreta lo es la de $\mathcal{D}^q$ (es producto de filtraciones sobre $\mathcal{D}$) y obtendríamos que $\underline{\omega} = \lambda(\underline{v}')$ para algún $\underline{v}'\in F_n\mathcal{D}^p$ y se verifica el resultado.

Daremos entonces las siguientes definiciones

<u>Definiciones III.1.4.</u>-(Primer concepto de ideales de Fitting) Sea $\mathcal{D}$ un anillo filtrado cuyo anillo graduado, $\operatorname{gr}\mathcal{D}$, sea un dominio conmutativo y noetheriano y la aplicación determinante sea regular. Consideremos un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda de M y una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

definida para el $\mathcal{D}$-módulo M .

1.- Llamaremos r-ésimo ideal de Fitting asociado al homomorfismo λ, al ideal de $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ generado por todos los menores de orden q-r de la matriz asociada a λ. Denotaremos este ideal por $\mathfrak{F}_r(\lambda)$. Si $r \geq \min(p, q)$, pondremos por extensión $\mathfrak{F}_r(\lambda) = \mathrm{gr}\mathcal{D}$.

2.- Llamaremos r-ésimo ideal de Fitting asociado al $\mathcal{D}$-homomorfismo π al ideal de $\mathrm{gr}\mathcal{D}$ suma de los ideales $\mathfrak{F}_r(\lambda)$ donde λ varía en el conjunto de $\mathcal{D}$-homomorfismos $\lambda: \mathcal{D}^p \longrightarrow \mathcal{D}^q$ que definen presentaciones finitas para $\pi: \mathcal{D}^q \longrightarrow M$ es decir

$$\mathfrak{F}_r(\pi) = \sum_{\lambda} \mathfrak{F}_r(\lambda) .$$

Consideremos una q-upla $\underline{d} \in \mathbb{Z}^q$ formada por números enteros que define una filtración por traslación para el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}^q$. Los $\mathcal{D}$-homomorfismos de módulos λ y π de una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

nos definen sobre $\mathcal{D}^p$ y M filtraciones tales que los homomorfismos λ y π son filtrados. Obtenemos de esta forma una sucesión entre los graduados respectivos

$$\mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda_{\underline{d}}} \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi_{\underline{d}}} \mathrm{gr}_{\underline{d}}M \longrightarrow 0$$

que, como hemos dicho por lo general no es exacta. Tenemos por tanto definidos un $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-módulo $\mathrm{gr}_{\underline{d}}M$ que al ser conmutativo tiene unívocamente asociada la familia de ideales $\{\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}_{\underline{d}}M)\}_{r\in \mathbb{N}}$ en el anillo $\mathrm{gr}\mathcal{D}$. Del mismo modo se verifica que

$$\lambda_{\underline{d}}: \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \longrightarrow \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^q$$

es un $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-homomorfismo entre $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-módulos y definirá la familia $\{\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}})\}_{r\in \mathbb{N}}$ donde $\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}})$ es el ideal engendrado por los menores $r \times r$ de una matriz que representa a $\lambda_{\underline{d}}$ en el caso $r < \min\{p, q\}$ y $\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}}) = \mathrm{gr}\mathcal{D}$ si $r \geq \min\{p, q\}$. Nótese que $\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}})$ es el r-ésimo ideal de Fitting del $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-módulo conmutativo $\mathrm{Coker}\bar{\lambda}_{\underline{d}}$.

Definición III.1.5.- (Segundo concepto de ideales de Fitting) Sea $\mathcal{D}$ un anillo filtrado cuyo anillo graduado, $gr\mathcal{D}$, sea un dominio conmutativo y la aplicación determinante sea regular. Dado un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda M y una presentación finita para M

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

podemos definir los ideales

i) $\mathfrak{F}_r(gr\pi) = \sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M) \qquad r\in \mathbb{N}$

ii) $\mathfrak{F}_r(gr\lambda) = \sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}}) \qquad r\in \mathbb{N}.$

En estas condiciones dado un $\mathcal{D}$-módulo M y una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

para cada número natural $n\in \mathbb{N}$ se tienen definidos varios ideales de Fitting en el anillo $gr\mathcal{D}$. Los sucesivos conceptos son diferentes pero tienen ciertas relaciones entre ellos que estudiaremos a continuación.

Proposición III.1.6.- En las condiciones anteriores para cada natural $r\in \mathbb{N}$ se verifica

a.- $\mathfrak{F}_r(\lambda) \subset \mathfrak{F}_r(\pi) \qquad \forall\, r\in \mathbb{N}.$

b.- $\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}}) \subset \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M) \qquad \forall\, \underline{d}\in \mathbb{Z}^q\ \forall\, r\in \mathbb{N}.$

c.- $\mathfrak{F}_r(gr\lambda) \subset \mathfrak{F}_r(gr\pi) \qquad \forall\, r\in \mathbb{N}.$

La parte a es trivial. Para ver b consideraremos la presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

La q-upla $\underline{d}\in \mathbb{Z}^q$ define filtraciones respectivas sobre $\mathcal{D}^q$, sobre $\mathcal{D}^p$ (vía λ) y sobre M (vía π), como se ha indicado, de tal forma que los $\mathcal{D}$-homomorfismos λ y π son filtrados y dan lugar a la sucesión de $gr\mathcal{D}$-módulos (no exacta en general)

$$gr_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda_{\underline{d}}} gr_{\underline{d}}\mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi_{\underline{d}}} gr_{\underline{d}}M \longrightarrow 0$$

Esta asignación de paso de un anillo filtrado a su graduado es funtorial luego se verifica que $\pi_{\underline{d}} \circ \lambda_{\underline{d}}=0$, ya que $\pi \circ \lambda=0$, es decir, $\operatorname{Im} \lambda_{\underline{d}} \subset \operatorname{Ker} \pi_{\underline{d}}$ y por tanto las filas de la matriz $\lambda_{\underline{d}}$ son syzygeas para el $gr\mathcal{D}$-módulo $gr_{\underline{d}}M$. Consecuentemente

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}}) \subset \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M).$$

La parte c es inmediata a partir de la anterior contención.

Las relaciones de la proposición anterior nos definen , en conclusión, un diagrama

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{F}_r(gr\lambda) & \mathfrak{F}_r(\lambda) \\ \cap & \cap \\ \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M) & \mathfrak{F}_r(\pi) \end{array}$$

Este diagrama puede completarse mediante la contención $\mathfrak{F}_r(gr\lambda) \subset \mathfrak{F}_r(\lambda)$ y $\mathfrak{F}_r(gr\pi) \subset \mathfrak{F}_r(\pi)$. Para establecerla vamos a necesitar de algunos resultados suplementarios sobre determinantes definidos sobre anillos filtrados.

<u>Proposición III.1.7.</u> - Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado cuyo graduado sea un dominio conmutativo y su microlocalizado total el cuerpo k. Dada $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le p}$, matriz de elementos de k, tal que existen enteros $m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_p$ tales que $a_{i,j}\in \mathfrak{F}_{m_i-n_j}(k)$. Entonces si $\det(\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j}))$ es no nulo, se verifica que $\det_\Sigma A= \det(\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j}))$. (Denotaremos, asimismo, mediante σ la aplicación símbolo principal sobre k y por $\sigma_n : F_nk \longrightarrow gr\, k$ dada por $\sigma_n(x)= \sigma(x)$ si $x\notin F_{n-1}k$ y.

$\sigma_n\ (x)= 0$ si $x\in F_{n-1}k$).

Para demostrarlo procedamos por inducción sobre el orden de la matriz A. Si p=1, A=(a), con lo cual se tiene $\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j})\neq 0$ sí y sólo sí $m_1-n_1=|a|$, y de aquí

$$\det(\sigma(a))= \sigma(a)= \sigma p(a)= \sigma(\bar{a})= \det_{\Sigma}(a)$$

Para probar la etapa inductiva, supongamos que el resultado es cierto para matrices (p-1)x(p-1) y consideremos una matriz de orden pxp $A= (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$. Pongamos $\sigma(A)= (\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq p}$. Como $\det(\sigma(A))\neq 0$ entonces existe $a_{i,1}\in k$ tal que $|a_{i,1}|= m_i-n_1$, ya que en caso contrario $\sigma(A)$ tendrá la primera columna nula lo cual es imposible al ser $\det(\sigma(A))\neq 0$. Podemos suponer que $|a_{1,1}| = m_1-n_1$.

Por la construcción del determinante de Dieudonné se tiene que el determinante de A coincide con el de la matriz

$$A'=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

donde la matriz $A_{1,1}=(b_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$ está definida por

$$b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j} .$$

Así pues $\det_{\Sigma} A = \sigma(a_{1,1}).\det_{\Sigma} A_{1,1}$.

Estudiemos, entonces, la matriz $A_{1,1}$. En primer lugar se tiene

$|b_{i,j}| = |a_{i,j} - a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}| \leq \sup\ \{|a_{i,j}|,\ |a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}|\} \leq$

$\leq \sup\ \{m_i - n_j,\ m_i - n_1+(n_1 - m_1)+ m_1 -n_j\}\leq \sup\ \{m_i - n_j,\ m_i -n_j\}= m_i-n_j$.

Por tanto $m_2, ..., m_p, n_2, ..., n_p$ son una familia de enteros tales que

$$|b_{i,j}| \leq m_i - n_j \qquad 2 \leq i,\ j \leq p$$

Nótese que hemos utilizado la condición $|a_{1,1}^{-1}| = -|a_{1,1}|$ que es cierta debido a que la aplicación símbolo principal es un homomorfismo multiplicativo de semigrupos.

Ahora calculemos $\sigma(A_{1,1}) = (\sigma_{m_i - n_j}(b_{i,j}))_{2\leq i,j\leq p}$

Para ello consideramos $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}$

Si $|a_{i,1}| \leq m_i - n_1$ ó $|a_{1,j}| \leq m_1 - n_j$

entonces se tiene

$$|a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}| < m_i - n_j \quad \text{y}$$

$$\sigma_{m_i - n_1}(a_{i,1}).\ \sigma_{n_1 - m_1}(a_{1,1}^{-1})\ \sigma_{m_1 - n_j}(a_{1,j}) = 0$$

de donde se verifica la igualdad

(1) $$\sigma_{m_i - n_j}(b_{i,j}) = \sigma_{m_i - n_j}(a_{i,j}) - \sigma_{m_i - n_1}(a_{i,1}).\ \sigma_{n_1 - m_1}(a_{1,1}^{-1})\ \sigma_{m_1 - n_j}(a_{1,j}).$$

Supongamos, entonces, que

$|a_{i,1}| = m_i - n_1$ $\quad |a_{1,j}| = m_1 - n_j$ con lo cual, como

$|a_{1,1}^{-1}| = n_1 - m_1$, se tiene que

$$\sigma_{m_i - n_1}(a_{i,1}).\ \sigma_{n_1 - m_1}(a_{1,1}^{-1}).\sigma_{m_1 - n_j}(a_{1,j}) = \sigma_{m_i - n_j}(a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}).$$

Si $|a_{i,j}| < m_i - n_j$ entonces $\sigma_{m_i - n_j}(a_{i,j}) = 0$ y se verifica la condición (1).

Si $|a_{i,j}| = m_i - n_j$ entonces tenemos dos posibilidades, la primera es que

$$|a_{i,j} - a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}| < m_i - n_j$$

de donde

$$\begin{cases} \sigma_{m_i - n_j}(a_{i,j}) = \sigma_{m_i - n_j}(a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}) \\ \sigma_{m_i - n_j}(b_{i,j}) = 0 \end{cases}$$

luego también se verifica (1). La segunda posibilidad es que

$$|a_{i,j} - a_{i,1}.a_{1,1}^{-1}.a_{1,j}| = m_i - n_j$$

y por las propiedades de la aplicación parte principal se verifica asímismo la igualdad (1).

Tenemos, por tanto, que la matriz $\sigma(A_{1,1})$ se puede escribir en la forma

$$\sigma(A_{1,1})=(\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j})-\sigma_{m_i-n_1}(a_{i,1}).\sigma_{n_1-m_1}(a_{1,1}^{-1}).\sigma_{m_1-n_j}(a_{1,j}))$$

Para calcular $\det \sigma(A)$ siguiendo el método de diagonalización se tiene que la matriz $\sigma(A)$ tiene el mismo determinante que la matriz

$$\left(\begin{array}{c|ccc}
\sigma_{m_1-n_1}(a_{1,1}) & \sigma_{m_1-n_2}(a_{1,2}) & \cdots & \sigma_{m_1-n_p}(a_{1,p}) \\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & A'_{11} & \\
0 & & &
\end{array}\right)$$

donde $A'_{1,1}=(b'_{i,j})_{2\le i,j\le p}$ está definida por

$$b'_{i,j}=\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j})-\sigma_{m_i-n_1}(a_{i,1}).\sigma_{n_1-m_1}(a_{1,1}^{-1}).\sigma_{m_1-n_j}(a_{1,j}) \quad \forall\ 2\le i,j\le p$$

es decir

$$b'_{i,j}=\sigma_{m_i-n_j}(b_{i,j}),$$

con lo cual

$$A'_{1,1}=\sigma(A_{1,1}) \quad \text{para } m_2,\ldots,m_p,n_2,\ldots,n_p$$

Como $\det A'_{1,1}\neq 0$ se tiene, por hipótesis de inducción, que

$$\det_\Sigma A=\sigma(a_{1,1}).\det_\Sigma A_{1,1}=\sigma(a_{1,1}).\det \bar{A}_{1,1}=\sigma_{m_1-n_1}(a_{1,1}).\det \bar{A}_{1,1}=$$

$$=\det \sigma(A).$$

El resultado práctico de la anterior proposición forma parte de un resultado más general que enunciamos a continuación.

<u>Proposición III.1.8.</u>- Sea $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ una matriz con coeficientes en el microlocalizado k del anillo $\mathcal{D}$, tal que existen enteros $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ con $|a_{i,j}| \leq m_i - n_j$ para $1\leq i, j\leq p$ Entonces se verifica

1.- $|\det_\Sigma A| \leq \sum_{i=1}^{p} (m_i - n_i)$.

2.- $|\det_\Sigma A| = \sum_{i=1}^{p} (m_i - n_i)$ sí y sólo sí $\det\left(\sigma_{m_i - n_j}(a_{i,j})\right)_{1\leq i,j\leq p} \neq 0$.

La demostración de este apartado 1 es análoga a la realizada en la proposición anterior. En efecto supongamos que existe un elemento $a_{1,j}$ tal que $|a_{1,j}| = m_1 - n_j$ que podremos suponer es el elemento $a_{1,1}$ (en caso contrario efectuando una permutación de columnas obtendremos dicho elemento en la posición (1, 1)). Entonces, como en la proposición anterior se obtiene una matriz

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

tal que si $A_{1,1} = (b_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$ entonces $|b_{i,j}| = |a_{i,j} - a_{i,1} \cdot a_{1,1}^{-1} \cdot a_{1,j}| \leq m_i - n_j$, y entonces usando inducción se tiene $|\det_\Sigma(A_{1,1})| \leq \sum_{i=2}^{p} (m_i - n_j)$ y de aquí

$$|\det_\Sigma(A)| = |\sigma(a_{1,1})| + |\det_\Sigma(A_{1,1})| \leq \sum_{i=1}^{p} (m_i - n_j).$$

Si no existe tal elemento $a_{i,j}$, entonces se verifica que $|a_{1,j}| < m_1-n_j$. Sea $r= \inf \{ m_1-n_j - |a_{1,j}| \ / \ j=1, \ldots, p\}$. Se verifica que $0<r\leq m_1-n_j - |a_{1,j}|$ y existe j tal que $r=m_1-n_j - |a_{1,j}|$, con lo cual $|a_{1,j}| \leq (m_1-r)-n_j = m'_1-n_j$ $j=1, \ldots, p$ existiendo j tal que $|a_{1,j}|= (m_1-r)-n_j = m'_1-n_j$, donde $m'_1= m_1-r$. Poniendo $m'_i = m_i$ $i=2, \ldots, p$ se tiene una familia de enteros $m'_1, \ldots, m'_p, n_1, \ldots, n_p$ con la misma propiedad que la familia anterior, pero ahora sí existe el elemento $a_{i,j}$ con la propiedad buscada, por tanto, se verifica la primera afirmación de la proposición y de aquí

$$|\det_{\Sigma}(A)|\leq \sum_{i=1}^{p}(m'_i-n_i) \leq \sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i).$$

Probemos ahora 2. La condición suficiente es la proposición III.1.7. Veamos que se verifica la condición necesaria.

Supongamos que $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ es una matriz con coeficientes en k verificando $|\det_{\Sigma}(A)|= \sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i)$ y $\det (\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq p} = 0$. Denotemos por $H= (\sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq p}$ es decir, pongamos $h_{i,j} = \sigma_{m_i-n_j}(a_{i,j})$. Se tiene que la matriz H con coeficientes en el anillo conmutativo grk tiene determinante nulo, por lo tanto existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p\in$ grk, homogéneos, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.h_{i,j}=0 \qquad j=1, \ldots, p.$$

En efecto, existen elementos no todos nulos $\xi_1, \ldots, \xi_p$ del cuerpo de fracciones de grk tales que $\sum_{i=1}^{p} \xi_i.h_{i,j} = 0$ y quitando denominadores podemos suponer que $\xi_1, \ldots, \xi_p\in$ grk.Puesto que algún ξ_i es no nulo, supongamos por ejemplo que $\xi_1\neq 0$, y sea α_1 una componente homogénea no nula de ξ_1 de grado r_1, si α_j es la componente homogénea de ξ_j de orden $r_j= r_1+n_j-n_1$ por la definición de $h_{i,j}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i.h_{i,j} = 0 \qquad j=1, \ldots, p.$$

Podemos suponer además $|\alpha_1|\geq|\alpha_2|\geq \ldots \geq|\alpha_p|$ con lo cual $\alpha_1\neq 0$ (recuérdese que si $\alpha_i=0$ se escribe $|\alpha_i|=-\infty$). Sean $a_1, \ldots, a_p\in k$ tales que sus imágenes por la aplicación símbolo pricipal son $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ respectivamente. Definamos la matriz $Q=(q_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ mediante

$$q_{i,j}=\begin{cases} a_j & i=1 \qquad j=1, \ldots, p \\ \delta_{i,j} & i=2, \ldots, p \qquad j=1, \ldots, p \end{cases}$$

se verifica que la matriz $Q.A=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ viene dada por

$$b_{i,j}=\begin{cases} \sum_{l=1}^{p} a_l.a_{l,j} & i=1 \qquad j=1, \ldots, p \\ a_{i,j} & i=2, \ldots, p \quad j=1, \ldots, p \end{cases}$$

donde para $1\leq j\leq p$ se tiene $|b_{1,j}|= | \sum_{l=1}^{p} a_l.a_{l,j} |< \sup \{|a_l|+|a_{l,j}| \ / \ l=1, \ldots, p \}\leq$

$\leq |a_1|+|a_{1,j}|\leq|\alpha_1|+ m_1-n_j$ y $|b_{i,j}|= |a_{i,j}| \leq m_i-n_j$ $2\leq i\leq p$ $1\leq j\leq p$. Ahora tomando $m'_1=m_1+ |\alpha_1| -1$ $m'_i = m_i$ $i = 2,\ldots,p$ se verifica en virtud del apartado 1 que

$$|\det_\Sigma(Q.A)| \leq \sum_{i=1}^{p} (m'_i-n_i)= | \alpha_1 |-1+ \sum_{i=1}^{p} (m_i-n_i).$$

Por otro lado, se tiene

$$|\det_\Sigma(Q.A)|=|\det_\Sigma Q. \det_\Sigma A|= |\det_\Sigma Q| + |\det_\Sigma A|= |\alpha_1|+ \sum_{i=1}^{p} (m_i-n_i)$$

es decir

$$|\alpha_1|+\sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i)\leq |\alpha_1| -1+\sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i)$$

lo cual es absurdo y por tanto la condición necesaria es cierta.

El resultado anterior se verifica para el microlocalizado k del anillo $\mathcal{D}$ y por tanto para $\mathcal{D}$.

Consideremos una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

sobre un $\mathcal{D}$-módulo M, tomando las filtraciones inducidas por una q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$, para cada elemento a de $\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}})$, a se corresponde con un menor de orden $q - r = s$ de la matriz asociada al $gr\mathcal{D}$-homomorfismo $\lambda_{\underline{d}}$. Es decir a es el determinante de una submatriz A' correspondiente a las filas $\{i_1, \ldots, i_s\}$ y columnas $\{j_1, \ldots, j_s\}$ de la matriz $B(\lambda_{\underline{d}})$ asociada a $\lambda_{\underline{d}}$ luego

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1,j_1} & \cdots & \alpha_{i_1,j_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_s,j_1} & \cdots & \alpha_{i_s,j_s} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento α_{i_h,j_l} de la matriz A' tiene grado $t_{i_h} - d_{j_l}$ siendo $t_i=|\lambda(e_i)|$ $i=1, \ldots, p$, o bien es nulo.

Por tanto A' se corresponde con una matriz

$$\sigma(A)= (\sigma_{t_{i_h} - d_{j_l}}(a_{i_h,j_l}))_{1\leq h,l\leq s}$$

según la construcción dada en la proposición anterior. Entonces, si a=0 es evidente que $a\in \mathfrak{F}_r(\lambda)$ y si $a\neq 0$ por la proposición anterior $\det \sigma(A) = \det_{\Sigma} A$ siendo A una submatriz de orden $s = q - r$ de la matriz asociada a λ, es decir $a \in \mathfrak{F}_r(\lambda)$ y se tiene el siguiente resultado.

Proposición III.1.9.- Dado M un $\mathcal{D}$-módulo y una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

sobre M. Para cada q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q) \in \mathbb{Z}^q$ se verifica

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_{\underline{d}}) \subset \mathfrak{F}_r(\lambda) \quad \forall \ r \in \mathbb{N}$$

De esta forma para cada natural $r \in \mathbb{N}$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\lambda) & \subset & \mathfrak{F}_r(\lambda) \\ \cap & & \cap \\ \mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi) & \subset & \mathfrak{F}_r(\pi) \end{array}$$

En efecto, la contención $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\lambda) \subset \mathfrak{F}_r(\lambda)$ se sigue trivialmente de la proposición anterior. Por otro lado, dado $\underline{d}$, existen siempre morfismos estrictos λ relativos a las filtraciones inducidas por $\underline{d}$ (ésto es consecuencia de la noetherianidad de $\mathrm{gr}\mathcal{D}$ y de la caracterización de los morfismos estrictos(Lema III.1.3.) indicada anteriormente); por tanto se tiene $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}_{\underline{d}}M) \subset \mathfrak{F}_r(\tilde{\lambda}_{\underline{d}})$ para un tal homomorfismo λ y de aquí $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}_{\underline{d}}M) \subset \mathfrak{F}_r(\pi)$ $\forall \underline{d} \in \mathbb{Z}^q$, lo cual implica que $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi) \subset \mathfrak{F}_r(\pi)$.

Nótese que para la construcción de los ideales $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\lambda)$ y $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi)$ influyen las filtraciones pero no así en la construcción de $\mathfrak{F}_r(\lambda)$ y $\mathfrak{F}_r(\pi)$ ya que estos últimos sólo dependen de la función determinante luego de la filtración Σ de $\mathcal{D}$.

§ 2. PROPIEDADES DE LOS IDEALES DE FITTING.

En este parágrafo reseñaremos las principales propiedades que se deducen de las diferentes nociones de ideales de Fitting para módulos sobre anillos filtrados introducidos en el parágrafo anterior.

Todos los anillos que consideraremos en este parágrafo, salvo que se diga lo contrario, serán anillos filtrados cuyo graduado respecto de la filtración estructural sea un dominio conmutativo y noetheriano y tales que el determinante relativo a dicha filtración es regular (Def I.4.2.6). En adelante cuando digamos que $\mathcal{D}$ es un anillo filtrado, sobreentenderemos que se verifican las condiciones anteriores.

Proposición III.2.1.- Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ dos anillos filtrados y $f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un homomorfismo de anillos filtrados. Dado un $\mathcal{D}$-módulo de tipo finito M y una presentación finita sobre M

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

se tiene mediante la extensión de escalares inducida por el homomorfismo f, la presentación finita

$$\mathcal{D}'^p \xrightarrow{\lambda_f} \mathcal{D}'^q \xrightarrow{\pi_f} M\otimes\mathcal{D}' \longrightarrow 0$$

En estas condiciones se verifica

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_f) = \mathfrak{F}_r(\lambda).\ \mathrm{gr}\,\mathcal{D}'.$$

En efecto, denotando por k y k' los microlocalizados totales de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ y tensorizando por k y k', respectivamente, las presentaciones finitas obtenemos sucesiones exactas

$$k^p \xrightarrow{\lambda\otimes 1_k} k^q \xrightarrow{\pi\otimes 1_k} M\otimes k \longrightarrow 0$$

$$k'^p \xrightarrow{\lambda_f \otimes 1_{k'}} k'^q \xrightarrow{\pi_f \otimes 1_{k'}} M \otimes k' \longrightarrow 0$$

Consideremos las bases estándar en $\mathcal{D}^p$ y $\mathcal{D}^q$, $\mathcal{D}'^p$ y $\mathcal{D}'^q$, k^p y k^q, k'^p y k'^q y las matrices de λ, λ_f, $\lambda \otimes 1_k$, $\lambda_f \otimes 1_{k'}$ relativas al respectivo par de bases. Entonces se tiene que la matriz asociada a λ_f tiene como coeficientes las imágenes por f de los coeficientes de la matriz asociada a λ. Análogamente la matriz asociada a $\lambda \otimes 1_k$ (resp. a $\lambda_f \otimes 1_{k'}$) tiene como coeficientes las imágenes en k (resp. en k') de los coeficientes de la matriz asociada a λ (resp. a λ_f), por tanto los coeficientes de la matriz asociada a $\lambda_f \otimes 1_{k'}$ son las imágenes, por el homomorfismo de cuerpos

$$f': k \longrightarrow k'$$

inducido por f, de los coeficientes de la matriz asociada a $\lambda \otimes 1_k$.

Si ahora A es una matriz de elementos de k, $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le t}$ se verifica que $f'(A) = (f'(a_{i,j}))_{1 \le i,j \le t}$ es una matriz de elementos de k' cuyo determinante será un elemento del abelianizado $\bar{k}'$. Es decir tenemos una aplicación

$$\det \circ (f'): \mathcal{M}(k) \longrightarrow \bar{k}'$$

que verifica claramente los axiomas del determinante de Dieudonné sobre cuerpos (parágrafo I §1) y, por tanto, se factoriza a través del abelianizado $\bar{k}$ de k (Teorema I.1.6). Obtenemos así un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(k) \arrow[rr, "\det \circ (f)"] \arrow[dr, "\det"'] & & \bar{k}' \\
& \bar{k} \arrow[ur, "f'_1"'] &
\end{tikzcd}$$

siendo f'_1 el homomorfismo de semigrupos que a la imagen en $\bar{k}$ de un elemento $a \in k$ lo envía en la imagen en $\bar{k}'$ del elemento $f'(a) \in k'$.

Como f' es un homomorfismo filtrado de cuerpos, se tiene definida el homomorfismo de anillos graduados asociados.

$$\bar{f}' : \operatorname{gr} k \longrightarrow \operatorname{gr} k'$$

que junto con las aplicaciones naturales ρ, ρ', σ_k, $\sigma_{k'}$, $\bar{\sigma}_k$, $\bar{\sigma}_{k'}$ y las aplicaciones f y f' dan lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, two heads, "\sigma_k"] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[ddd, "f'"'] & & \operatorname{gr} k \arrow[ddd, "\bar{f}'"] \\
& \bar{k} \arrow[ur, "\bar{\sigma}_k"'] \arrow[d, "f'_1"] & \\
& \bar{k}' \arrow[dr, "\bar{\sigma}_{k'}"] & \\
k' \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr, two heads] & & \operatorname{gr} k'
\end{tikzcd}$$

Es ahora obvio que todo menor de la matriz asociada al homomorfismo $\lambda_f \otimes 1_{k'}$ es imagen por $\bar{f}'$ de un menor de la matriz asociada a $\lambda \otimes 1_k$. Es decir los menores de la matriz asociada a λ_f son imagen por $\bar{f}'$ de menores de la matriz asociada a λ. Al ser regulares las aplicaciones determinante asociadas a los anillos filtrados se tiene que dichos menores están en $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ y $\operatorname{gr}\mathcal{D}'$ respectivamente luego se tiene

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_f) = \mathfrak{F}_r(\lambda).\operatorname{gr}\mathcal{D}'$$

para todo $r \in \mathbb{N}$.

Corolario III.2.2.- En las condiciones del lema anterior se verifica

$$\mathfrak{F}_r(\pi_f) \supset \mathfrak{F}_r(\pi).\mathrm{gr}\mathcal{D}'.$$

La demostración es evidente sin más que tener en cuenta que la extensión de escalares conmuta trivialmente con la suma de ideales, con lo cual

$$\mathfrak{F}_r(\pi).\mathrm{gr}\mathcal{D}'=(\sum_{\lambda} \mathfrak{F}_r(\lambda)).\mathrm{gr}\mathcal{D}'= \sum_{\lambda} (\mathfrak{F}_r(\lambda).\mathrm{gr}\mathcal{D}') = \sum_{\lambda} \mathfrak{F}_r(\lambda_f) \subset \mathfrak{F}_r(\pi_f).$$

Nótese que, en principio, pueden existir presentaciones finitas

$$\mathcal{D}'^h \xrightarrow{\lambda'} \mathcal{D}'^q \xrightarrow{\pi_f} M\otimes'\mathcal{D}' \longrightarrow 0$$

que no vienen inducidas por una de M, lo cual es una obstrucción a la igualdad

$$\mathfrak{F}_r(\pi).\mathrm{gr}\mathcal{D}'= \mathfrak{F}_r(\pi_f).$$

Definición III.2.3.- Sean M y N dos $\mathcal{D}$-módulos de generación finita y

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda_M} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{D}^r \xrightarrow{\lambda_N} \mathcal{D}^s \xrightarrow{\pi_N} N \longrightarrow 0$$

presentaciones para M y N respectivamente. Llamaremos presentación suma directa de λ_M y λ_N, para $M\oplus N$ a la presentación dada por

$$\mathcal{D}^p\oplus \mathcal{D}^r \xrightarrow{\lambda_M\oplus\lambda_N} \mathcal{D}^q \oplus \mathcal{D}^s \xrightarrow{\pi_M\oplus\pi_N} M \oplus N \longrightarrow 0$$

donde la aplicaciones $\mathcal{D}$-lineales $\lambda_M \oplus \lambda_N$ y $\pi_M \oplus \pi_N$ son las siguientes

$$\lambda_M\oplus\lambda_N\ (a, b)= \lambda_M\ (a)+ \lambda_N\ (b)$$

$$\pi_M\oplus\pi_N\ (x, y)= \pi_M\ (x)+ \pi_N\ (y)$$

Proposición III.2.4.- En las condiciones de la definición anterior se verifica

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_M \oplus \lambda_N) = \sum_{t+u=r} \mathfrak{F}_t(\lambda_M).\mathfrak{F}_u(\lambda_N)$$

Este resultado es evidente sin más que tener en cuenta que la matriz $B(\lambda_M \oplus \lambda_N)$ asociada a la presentación $\lambda_M \oplus \lambda_N$ relativa a las bases estándar tienen la forma

$$B(\lambda_M \oplus \lambda_N) = \left(\begin{array}{c|c} B(\lambda_M) & 0 \\ \hline 0 & B(\lambda_N) \end{array} \right).$$

siendo $B(\lambda_M)$ y $B(\lambda_N)$ las matrices asociadas a las aplicaciones $\mathfrak{D}$-lineales λ_M y λ_N, respectivamente, relativas a las correspondientes bases estándar. Entonces, como la aplicación determinante de Dieudonné verifica la propiedad P-10 (pág 11), se tiene que cualquier menor de orden (q+s)-r de $B(\lambda_M \oplus \lambda_N)$ es producto de un menor de orden m de $B(\lambda_M)$ por uno de orden m' de $B(\lambda_N)$ con m+m'= q+s-r. Poniendo q-m = t y s-m'=u se tendrá t+u=r y por tanto todo menor de orden (q+s)-r de $B(\lambda_M \oplus \lambda_N)$ es un elemento de $\mathfrak{F}_t(\lambda_M).\mathfrak{F}_u(\lambda_N)$ para algún par (t, u) con t+u = r. Recíprocamente dado un menor de orden q-t de $B(\lambda_M)$ y uno de orden s-u de $B(\lambda_N)$ con t+u = r entonces el producto de ambos es un menor de orden q+r-s de $B(\lambda_M \oplus \lambda_N)$. Se sigue trivialmente

$$\mathfrak{F}_r(\lambda_M \oplus \lambda_N) = \sum_{t+u=r} \mathfrak{F}_t(\lambda_M).\mathfrak{F}_u(\lambda_N)$$

<u>Proposición III.2.5.</u>- En las condiciones anteriores se tiene

$$\mathfrak{F}_r(\pi_M \oplus \pi_N) \supset \sum_{t+u=r} \mathfrak{F}_t(\pi_M).\mathfrak{F}_u(\pi_N)$$

En efecto, si hacemos variar λ_M (resp. λ_N) entonces se tiene

$$\sum_{\lambda_M} \mathfrak{F}_t(\lambda_M) = \mathfrak{F}_t(\pi_M) \quad y \quad \sum_{\lambda_N} \mathfrak{F}_u(\lambda_N) = \mathfrak{F}_u(\pi_N)$$

de donde

$$\mathfrak{F}_t(\pi_M)\, \mathfrak{F}_u(\pi_N) = \sum_{\lambda_M,\lambda_N} \mathfrak{F}_t(\lambda_M).\, \mathfrak{F}_u(\lambda_N) \subset \sum_{\lambda_M,\lambda_N} \mathfrak{F}_r(\lambda_M \oplus \lambda_N) \subset \mathfrak{F}_r(\pi_M \oplus \pi_N)$$

Nótese que el recíproco no tiene porqué darse ya que existen presentaciones finitas del tipo

$$\mathcal{D}^h \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \oplus \mathcal{D}^s \xrightarrow{\pi_M \oplus \pi_N} M \oplus N \longrightarrow 0$$

para las cuales λ no es de la forma $\lambda_M \oplus \lambda_N$.

Proposición III.2.6.- Dado un $\mathcal{D}$-módulo monógeno M y una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

entonces se verifica

$$\mathfrak{F}_0(\lambda) = \mathrm{Im}\bar{\lambda} \subset \mathrm{gr}\mathcal{D} \quad y \quad \mathfrak{F}_0(\pi) = \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}.$$

En efecto, el ideal $\mathfrak{F}_0(\lambda)$ está generado por las partes principales de los elementos de la matriz (de orden p x 1) asociada a λ para las bases estándar respectivas. Dichas partes principales son las imágenes por $\bar{\lambda}$ (para cualquier filtración) de la base estándar de $\mathrm{gr}\mathcal{D}^{p}$ de donde se sigue que $\mathfrak{F}_0(\lambda) = \mathrm{Im}\bar{\lambda}$.

Si ahora dejamos π fijo y hacemos variar λ se tendrá

$$\mathfrak{F}_0(\pi) = \sum_{\lambda} \mathfrak{F}_0(\lambda) = \sum_{\lambda} \mathrm{Im}\bar{\lambda} \subset \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}$$

puesto que $\mathrm{Im}\bar{\lambda} \subset \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}$ para cada λ concreto. Para probar la contención $\mathrm{Ker}\, \bar{\pi} \subset \mathfrak{F}_0(\pi)$ tomamos $\bar{a} \in \mathrm{Ker}\, \bar{\pi}$, es decir un elemento $\bar{a} \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$ tal que $\bar{\pi}(\bar{a})=0$.

Considerando la imagen de la filtración de $\mathcal{D}$ sobre M y sobre Ker π la filtración inducida, se tiene que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{D} \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

es estricta, por tanto se tiene la sucesión exacta de gr$\mathcal{D}$-módulos

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}(\operatorname{Ker}\pi) \xrightarrow{\ \bar{i}\ } \operatorname{gr}\mathcal{D} \xrightarrow{\ \bar{\pi}\ } \operatorname{gr}M \longrightarrow 0$$

de la cual se sigue que $\operatorname{gr}(\operatorname{Ker}\pi)=\operatorname{Ker}\bar{\pi}$ y puesto que $\bar{a}\in\operatorname{Ker}\bar{\pi}$ entonces existe $a\in\operatorname{Ker}\pi$ tal que $\sigma(a)=\bar{a}$.

Si ahora consideramos una presentación finita (que existe ya que hemos supuesto que M es de presentación finita)

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{D} \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

podemos construir una nueva presentación finita añadiendo el elemento a al sistema de generadores $v_1, \ldots, v_p$ de $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\lambda$, determinado por λ, es decir, se tiene

$$\mathcal{D}^{p+1} \xrightarrow{\ \lambda_1\ } \mathcal{D} \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

donde $\lambda_1(e_i)=v_i$ $\quad i=1, \ldots, p \quad$ $\lambda_1(e_{p+1})=a\in\mathcal{D}$.

Ahora se tiene trivialmente que $\bar{a}\in\operatorname{Im}\bar{\lambda}_1=\mathfrak{F}_0(\lambda_1)\subset\mathfrak{F}_0(\pi)$. Lo cual completa la demostración.

En el caso en que $\mathcal{D}$ sea un anillo conmutativo y la filtración sea la trivial, para toda presentación

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{D}^q \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

se tiene $\mathfrak{F}_r(\lambda)=\mathfrak{F}_r(\pi)=\mathfrak{F}_r(M)$ siendo $\mathfrak{F}_r(M)$ el ideal de Fitting usual del módulo M.

En este caso, de hecho, se pueden precisar más las propiedades anteriores en la siguiente línea.

F-1.- Dado un A-módulo M y un homomorfismo $f: A \longrightarrow A'$ de anillos conmutativos se verifica

$$\mathfrak{F}_r(M \otimes A') = \mathfrak{F}_r(M).A'$$

F-2 .- Dados los A-módulos M y N

$$\mathfrak{F}_r(M \oplus N) = \sum_{t+u=r} \mathfrak{F}_t(M).\mathfrak{F}_u(N)$$

F-3.- Para todo A-módulo M se verifica que los ideales $\mathfrak{F}_r(M)$ y $\overset{r+1}{\Lambda}$ Ann M tienen el mismo radical.

F-4.- Dado un ideal I del anillo A, se verifica

$$\mathfrak{F}_r(A/I) = \begin{cases} I & r=0 \\ A & r>0 \end{cases}$$

(o equivalentemente, dado un módulo monógeno se verifica $\mathfrak{F}_o(M) =$ Ann M y $\mathfrak{F}_r(M) = A$ si $r>0$).

De hecho, como se prueba en [27] (Cap. I.3), las propiedades anteriores caracterizan funtorialmente los ideales de Fitting, es decir, si para todo anillo conmutativo A y todo A-módulo de tipo finito M se tiene definida una asignación $\mathfrak{F}'_r(M)$ para cada $r \in \mathbb{N}$ que verifica F-1, F-2, F-3 y F-4 entonces necesariamente se tiene $\mathfrak{F}'_r(M) = \mathfrak{F}_r(M)$ para todo anillo A y todo A-módulo M.

Además de los ideales $\mathfrak{F}_r(\lambda)$, $\mathfrak{F}_r(\pi)$ en el parágrafo anterior, hemos introducido también los ideales de Fitting $\mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}_{\underline{d}})$ y $\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M)$, los cuales a diferencia de los anteriores dependen de la filtración por traslación relativa a $\underline{d}$ sobre $\mathcal{D}^q$. Estos ideales son de hecho los ideales de Fitting de los módulos $Coker(\bar{\lambda}_{\underline{d}})$ y $gr_{\underline{d}}M$ respectivamente sobre el anillo conmutativo $gr\mathcal{D}$. Por tanto las propiedades F-1, F-2, F-3 y F-4 pueden ser usadas para su cálculo y su manejo. Estableceremos a continuación algunas propiedades que indican el comportamiento de estos ideales.

Proposición III.2.7.- Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ dos anillos filtrados y $f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un homomorfismo filtrado de anillos. Dada una q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)\in \mathbb{Z}^q$ entonces para cada $\mathcal{D}$-módulo de tipo finito M y cada presentación finita sobre M

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

se verifica

1.- $\mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) \cdot gr\mathcal{D}' = \mathfrak{F}_r((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}})$ si $gr\mathcal{D} \longrightarrow gr\mathcal{D}'$ es inyectivo.

2.- $\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M) \cdot gr\mathcal{D}' = \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M \otimes gr\mathcal{D}')$.

La condición 2 es la particularización de la propiedad F-1 de los ideales de Fitting sobre anillos conmutativos cuando $A= gr\mathcal{D}$, $A'= gr\mathcal{D}'$ y $M \equiv gr_{\underline{d}}M$.

Para probar la condición 1 consideramos la presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

que induce por tensorización por $\mathcal{D}'$

$$\mathcal{D}'^p \xrightarrow{\lambda_f} \mathcal{D}'^q \xrightarrow{\pi_f} M\otimes\mathcal{D}' \longrightarrow 0$$

y las respectivas filtraciones por traslación relativas a la q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, \dots, d_q)\in \mathbb{Z}^q$ sobre $\mathcal{D}^q$ y $\mathcal{D}'^q$. Pasando a los graduados respectivos se tienen las presentaciones finitas

$$(*) \qquad gr_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \xrightarrow{\bar{\lambda}_{\underline{d}}} gr_{\underline{d}}\mathcal{D}^q \xrightarrow{\bar{\mu}_{\underline{d}}} \text{Coker}\,(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) \longrightarrow 0$$

$$(**) \qquad gr_{\underline{d}}\mathcal{D}'^p \xrightarrow{(\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}}} gr_{\underline{d}}\mathcal{D}'^q \xrightarrow{(\bar{\mu}_f)_{\underline{d}}} \text{Coker}\,(\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}} \longrightarrow 0$$

y tensorizando la presentación finita (*) por $\mathrm{gr}\mathcal{D}'$ obtenemos una nueva presentación

$$\mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \xrightarrow{\lambda_{\underline{d}}\otimes 1} \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^q \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \xrightarrow{\bar{\mu}_{\underline{d}}\otimes 1} \mathrm{Coker}\,(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \longrightarrow 0.$$

Ahora bien, puesto que $\mathrm{gr}\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{gr}\mathcal{D}'$ es inyectivo se tiene $\sigma'(f(a)) = \bar{f}(\sigma(a))$ donde σ y σ' son los símbolos principales sobre $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ respectivamente y $\bar{f}$ el homomorfismo inducido por f sobre los anillos graduados, se sigue que la graduación producto tensorial sobre $\mathcal{D}^q \otimes \mathcal{D}' = \mathcal{D}'^q$ (véase I §4.2) coincide con la graduación por traslación relativa a $\underline{d}$ sobre $\mathcal{D}'^q$ y por tanto, teniendo en cuenta la misma observación para $\mathcal{D}^p \otimes \mathcal{D}' = \mathcal{D}'^p$, se tienen isomorfismos ([42] Lema I.8.2)

$$\alpha_p : \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^p \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \longrightarrow \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}'^p$$

$$\alpha_q : \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}^q \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \longrightarrow \mathrm{gr}_{\underline{d}}\mathcal{D}'^q$$

haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}\mathcal{D}^p \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \arrow[r, "\lambda_{\underline{d}}\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha_p"] & \mathrm{gr}\mathcal{D}^q \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \arrow[r, "\mu_{\underline{d}}\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha_q"] & \mathrm{Coker}\,\lambda_{\underline{d}} \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}' \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{gr}\mathcal{D}'^p \arrow[r, "(\lambda_f)_{\underline{d}}"] & \mathrm{gr}\mathcal{D}'^q \arrow[r, "(\mu_f)_{\underline{d}}"] & \mathrm{Coker}(\lambda_f)_{\underline{d}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Este diagrama induce un isomorfismo entre los $\mathrm{gr}\mathcal{D}'$-módulos $\mathrm{Coker}\,(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}'$ y $\mathrm{Coker}((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}})$ con lo cual se concluye

$$\mathfrak{F}_r((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}}) = \mathfrak{F}_r(\mathrm{Coker}((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}})) = \mathfrak{F}_r(\mathrm{Coker}\,(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) \otimes \mathrm{gr}\mathcal{D}') =$$

$$= \mathfrak{F}_r(\mathrm{Coker}\,(\bar{\lambda}_{\underline{d}})).\,\mathrm{gr}\mathcal{D}' = \mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}_{\underline{d}}).\,\mathrm{gr}\mathcal{D}'.$$

Proposición III.2.8.- Dada una presentación finita del tipo

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

entonces se verifica

1.- $\mathfrak{F}_0(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) = \mathfrak{F}_0(\lambda) \qquad \forall\ \underline{d}=(d)\in \mathbb{Z}^1$

2.- $\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}}M) = \mathfrak{F}_0(\pi) \qquad \forall\ \underline{d}=(d)\in \mathbb{Z}^1$

Para la condición 1 basta tener en cuenta que si $B(\lambda)$ es la matriz columna $p \times 1$ asociada al $\mathcal{D}$-homomorfismo λ, entonces para cualquier 1-upla de grados $d \equiv \underline{d} = (d) \in \mathbb{Z}^1$ se verifica que la matriz $B(\bar{\lambda}_d)$ asociada al $gr\mathcal{D}$-homomorfismo $\bar{\lambda}_d$ viene dada por las partes principales de cada elemento de la columna, y por tanto por sus determinantes, $\det_{\Sigma}$, de orden 1 de la matriz $B(\lambda)$, luego se tiene

$$\mathfrak{F}_0(\bar{\lambda}_{\underline{d}}) = \mathfrak{F}_0(\lambda) \quad \forall\ \underline{d}=(d)\in \mathbb{Z}^1.$$

Análogamente se verifica $\mathfrak{F}_0(\pi) = \mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}}M)$ ya que $\mathfrak{F}_0(\pi) = \operatorname{Ker} \bar{\pi}$ según hemos visto en la proposición III.2.6 y $\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}}M)$ también es trivialmente igual a $\operatorname{Ker} \bar{\pi}$.

Corolario III.2.9.- Dada la presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

si λ es estricto entonces para todo $d \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\mathfrak{F}_0(\bar{\lambda}_d) = \mathfrak{F}_0(gr_d M) = \mathfrak{F}_0(\lambda) = \mathfrak{F}_0(\pi).$$

La prueba es inmediata, teniendo en cuenta que si λ es estricto para $d \in \mathbb{Z}$ entonces $\operatorname{Coker} \bar{\lambda}_d = gr_d M$ verificándose el resultado.

Nota III.2.10.- Nótese que la condición "λ es estricto para $d \in \mathbb{Z}$" es equivalente a "λ es

Nota III.2.10.- Nótese que la condición "λ es estricto para $d \in \mathbb{Z}$" es equivalente a "λ es estricto para cada $d \in \mathbb{Z}$". En efecto, si $\lambda(e_i) \in F^d_{r_i}\mathcal{D}$, es decir si r_i es el d-orden de $\lambda(e_i)$, entonces $\lambda(e_i)$ tiene grado r_i-d como elemento de $\mathcal{D}$ (recuérdese que utilizamos el símbolo $|\ |$ para denotar el orden de los elementos del anillo filtrado $\mathcal{D}$), con lo cual para cualquier $d_1 \in \mathbb{Z}$ $|\lambda(e_i)|=(r_i+d_1-d)-d_1$ y de aquí $\lambda(e_i)$ tiene orden $r_i+d_1-d = s_i$ relativo a la d_1-filtración. Ahora bien, teniendo en cuenta las filtraciones sobre $\mathcal{D}^p$ se tiene

$$\lambda(F^{d_1}_n \mathcal{D}^p)=\lambda(F_{n-s_1}\mathcal{D} \times \ldots \times F_{n-s_p}\mathcal{D})= \lambda(F_{(n+d-d_1)-r_1}\mathcal{D} \times \ldots \times F_{(n+d-d_1)-r_p}\mathcal{D})$$

y por ser λ estricto para el valor d, entonces

$$\lambda(F_{(n+d-d_1)-r_1}\mathcal{D} \times \ldots \times F_{(n+d-d_1)-r_p}\mathcal{D})=\mathrm{Im}\lambda \cap F_{(n+d-d_1)-d}\mathcal{D} = \mathrm{Im}\lambda \cap F^{d_1}_n\mathcal{D}$$

por tanto λ es también estricto para d_1.

El siguiente teorema resume las propiedades de los ideales de Fitting por las que nos hemos interesado en este parágrafo.

Teorema III.2.11.- 1.- Sea $f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un homomorfismo filtrado de anillos, dado un $\mathcal{D}$-módulo M y una presentación finita

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

sobre M que induce la presentación finita

$$\mathcal{D}'^p \xrightarrow{\lambda_f} \mathcal{D}'^q \xrightarrow{\pi_f} M\otimes\mathcal{D}' \longrightarrow 0$$

para cada natural $r \in \mathbb{N}$ se verifica

a.- $\mathfrak{F}_r(\lambda_f)= \mathfrak{F}_r(\lambda).\mathrm{gr}\mathcal{D}'$.

b.- $\mathfrak{F}_r(\pi_f) \supset \mathfrak{F}_r(\pi).\mathrm{gr}\mathcal{D}'$.

c.- Si el homomorfismo de anillos graduados $\bar{f}: gr\mathcal{D} \longrightarrow gr\mathcal{D}'$ inducido por f es inyectivo, entonces para cada q-upla $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q) \in \mathbb{Z}^q$ se verifica

$$\mathfrak{F}_r((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}}) = \mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}_{\underline{d}}).gr\mathcal{D}'.$$

d.- $\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M).gr\mathcal{D}' = \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M \otimes gr\mathcal{D}')$.

e.-En las condiciones del apartado c se tiene

$$\mathfrak{F}_r(gr\lambda_f) = \mathfrak{F}_r(gr\lambda).gr\mathcal{D}'.$$

f.- $\mathfrak{F}_r(gr\pi_f) \supset \mathfrak{F}_r(gr\pi).gr\mathcal{D}'$.

2.- Sean M y N dos $\mathcal{D}$-módulos de presentación finita, dadas las presentaciones

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda_M} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{D}^r \xrightarrow{\lambda_N} \mathcal{D}^s \xrightarrow{\pi_N} N \longrightarrow 0$$

definidas sobre M y N respectivamente, entonces para cada natural $r \in \mathbb{N}$ se verifica

a.- $\mathfrak{F}_r(\lambda_M \oplus \lambda_N) = \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(\lambda_M).\ \mathfrak{F}_j(\lambda_N)$.

b.- $\mathfrak{F}_r(\pi_M \oplus \pi_N) \supset \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(\pi_M).\ \mathfrak{F}_j(\pi_N)$.

c.- Para cada q-upla $\underline{c} \in \mathbb{Z}^q$ y cada s-upla $\underline{d} \in \mathbb{Z}^s$ denotando por $\underline{cd}$ la (q+s)-upla cuyas q primeras componentes son las de $\underline{c}$ y las s últimas son las de $\underline{d}$, se verifica

$$\mathfrak{F}_r((\overline{\lambda_M \oplus \lambda_N})_{\underline{cd}}) = \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}}.\ \mathfrak{F}_j(\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}}.$$

d.- En las condiciones del apartado anterior

$$\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{cd}}(M \oplus N)) = \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(gr_{\underline{c}}M).\ \mathfrak{F}_j(gr_{\underline{d}}N).$$

e.- $\mathfrak{F}_r(gr(\lambda_M \oplus \lambda_N)) = \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(gr\lambda_M).\ \mathfrak{F}_j(gr\lambda_N)$.

f.- $\mathfrak{F}_r(gr(\pi_M \oplus \pi_N)) = \sum_{i+j=r} \mathfrak{F}_i(gr\pi_M).\ \mathfrak{F}_j(gr\pi_N).$

3.- Sea M un $\mathcal{D}$-módulo monógeno, y

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

una presentación finita del $\mathcal{D}$-módulo M, entonces se verifica

a.- $\mathfrak{F}_o(\lambda) = \mathrm{Im}\bar{\lambda} = \mathfrak{F}_o(\bar{\lambda}_d)$ $\qquad \forall d \in \mathbb{Z}.$

b.- $\mathfrak{F}_o(\pi) = \mathrm{Ker}\bar{\pi} = \mathfrak{F}_o(gr_{\underline{d}}M)$ $\qquad \forall d \in \mathbb{Z}.$

c.- $\mathfrak{F}_o(gr\lambda) = \mathrm{Im}\bar{\lambda}.$

d.- $\mathfrak{F}_o(\pi) = \mathrm{Ker}\bar{\pi}.$

4.- Si $\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ es una presentación finita entonces

a.- $$\sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}\ (\ \wedge^{r+1}\ \mathrm{Coker}\ \bar{\lambda}_{\underline{d}})} \subset \sqrt{\mathfrak{F}_r(\lambda)}.$$

b.- $$\sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}\ \wedge^{r+1}\ (gr_{\underline{d}}M)} \subset \sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)}.$$

Probaremos los apartados del anterior teorema que no están explícitamente contenidos en las proposiciones previas de este capítulo.

<u>Prueba de 1.</u>- Los apartados a, b, c y d están probadas en la proposicion III.2.1, corolario III.2.2 y proposición III.2.7 .

El apartado e es consecuencia de c ya que al ser $\bar{f}: gr\ \mathcal{D} \longrightarrow gr\mathcal{D}'$ inyectivo se tiene

$$\mathfrak{F}_r(gr\lambda_f) = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^q} \mathfrak{F}_r((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}}) = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^q} \mathfrak{F}_r((\bar{\lambda}_f)_{\underline{d}})\ .gr\mathcal{D}' = \mathfrak{F}_r(gr\lambda).gr\mathcal{D}'.$$

Para probar el apartado f hemos de tener en cuenta la existencia de un $gr\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo entre $gr_{\underline{d}}M\otimes\mathcal{D}'$ y $gr_{\underline{d}}(M\otimes\mathcal{D}')$([42] Cap I.8), con lo cual en virtud de las propiedades de los ideales de Fitting de módulos sobre anillos conmutativos([27]) se verifica que

$$\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M\otimes\mathcal{D}')\supset \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M\otimes gr\mathcal{D}') = \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M)\ gr\mathcal{D}'$$

y por tanto

$$\mathfrak{F}_r(gr\pi_f)=\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_r(\ gr_{\underline{d}}(M\otimes\mathcal{D}'))\supset\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M)\ gr\mathcal{D}'=\mathfrak{F}_r(gr\ \pi)\ gr\mathcal{D}'.$$

Prueba de 2.- Las apartados a y b están probados en las proposiciones III.2.4 y III.2.5 respectivamente. Los apartados c y d son un caso particular de la propiedad F-2 de los ideales de Fitting para módulos sobre anillos conmutativos, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Coker}(\overline{\lambda_M\oplus\lambda_N})_{\underline{cd}}=\ \mathrm{Coker}(\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}}\oplus\ \mathrm{Coker}(\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}}\ \text{ y }\ gr_{\underline{cd}}(M\oplus N)=\ gr_{\underline{c}}(M)\oplus\ gr_{\underline{d}}(N)$$

respectivamente.

De esta forma, en virtud de los anteriores apartados se tiene

$$\mathfrak{F}_r(gr(\lambda_M\oplus\lambda_N))=\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_r((\overline{\lambda_M\oplus\lambda_N})_{\underline{cd}})=\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^q}\Big(\sum_{i+j=r}\mathfrak{F}_i((\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}})\ \mathfrak{F}_j((\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}})\Big)=$$

$$=\sum_{i+j=r}\Big(\sum_{\underline{cd}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_i((\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}})\ \mathfrak{F}_j((\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}})\Big)=$$

$$=\sum_{i+j=r}\Big(\sum_{\underline{c}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_i((\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}})\ \sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^q}\mathfrak{F}_j((\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}})\Big)=$$

$$=\sum_{i+j=r}\mathfrak{F}_i(gr\ \lambda_M))\ \mathfrak{F}_j(gr\ \lambda_N).$$

El apartado f es análogo al anterior sustituyendo en la anterior cadena de desigualdades $(\bar{\lambda}_M)_{\underline{c}}$ y $(\bar{\lambda}_N)_{\underline{d}}$ por $gr_{\underline{c}}(M)$ y $gr_{\underline{d}}(N)$ respectivamente.

Prueba de 3.- Dado $d\in\mathbb{Z}$ si la matriz asociada al $\mathcal{D}$-homomorfismo λ la denotamos por $B(\lambda)=(a_1, ..., a_p)^t$ entonces se tiene

$\bar{\lambda}(e_i)=\sigma^d(a_i)=\det_{\Sigma}(a_i)$ y se tiene la parte a. La parte b es consecuencia inmediata de la proposición III.2.8 y las partes c y d son evidentes, ya que ahora, puesto que q=1,todas las d-filtraciones sobre $\mathcal{D}$ son traslaciones la una de otra.

Prueba de 4.-.- Las dos demostraciones, son análogas, aplicando la propiedad F-3 de ideales de Fitting para módulos sobre anillos conmutativos respectivamente a $\mathrm{Coker}\bar{\lambda}_{\underline{d}}$ y $\mathrm{gr}_{\underline{d}}M$. En efecto se tiene

$$\sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}\,(\wedge^{r+1}\,\mathrm{Coker}\,\bar{\lambda}_{\underline{d}})} \subset \sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q}\sqrt{\mathfrak{F}_r(\lambda)} \subset \sqrt{\mathfrak{F}_r(\lambda)}$$

$$\sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}\,(\wedge^{r+1}\,\mathrm{gr}_{\underline{d}}M)} \subset \sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q}\sqrt{\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}_{\underline{d}}M)} \subset \sqrt{\mathfrak{F}_r(\lambda)}$$

Nótese que es equivalente poner

$$\sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}\,(\wedge^{r+1}\,\mathrm{Coker}\,\bar{\lambda}_{\underline{d}})} \quad \Big(\text{resp.} \sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \sqrt{\mathrm{Ann}(\wedge^{r+1}\mathrm{gr}_{\underline{d}}M)}\Big)$$

a poner

$$\sqrt{\sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \mathrm{Ann}\,(\wedge^{r+1}\,\mathrm{Coker}\,\bar{\lambda}_{\underline{d}})} \quad \Big(\text{resp.} \sqrt{\sum_{\underline{d}\in \mathbb{Z}^q} \mathrm{Ann}(\wedge^{r+1}\,\mathrm{gr}_{\underline{d}}M)}\Big)$$

en los miembros de la parte izquierda de a y b.

§ 3. RADICALES DE LOS IDEALES DE FITTING

El objetivo fundamental de este parágrafo es probar que los ideales de Fitting $\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi)$ y $\mathfrak{F}_r(\pi)$ construidos en el parágrafo III §1 , tienen ambos el mismo radical.

Para ello consideraremos un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ cuya filtración sea discreta, tal que su graduado asociado sea un dominio noetheriano y la función determinante asociada sea regular. Denotemos mediante k su microlocalizado total que es un cuerpo no conmutativo en general. Asímismo, supondremos que la función $\det_{\Sigma}$ asociada a la filtración Σ es regular (def I.4.2.6). La filtración Σ sobre $\mathcal{D}$ se extiende al microlocalizado, de tal manera que podemos hablar de orden y símbolo principal también para los elemementos de k. Nótese ahora que el orden de los elementos de k varía entre $-\infty$ y $+\infty$ y que una sucesión de elementos de k converge a cero (para la nórma estructural que determina la filtración sobre k) cuando la sucesión de órdenes de tales elementos tiende hacia $-\infty$. Los siguientes resultados, serán utilizados a lo largo de este parágrafo.

<u>Lema III.3.1. Regla de Cramer.</u>- Dado un cuerpo k arbitrario y una matriz cuadrada A de orden q con coeficientes en k para cada $\underline{y}=(y_1, \ldots, y_q)\in k^q$ se verifica que el sistema de ecuaciones $(x_1, \ldots, x_q).A=\underline{y}$ tiene solución para todo $\underline{y}$ sí y sólo sí $\det A \neq 0$ siendo det la función determinante asociada al cuerpo k (I §1). En este caso la solución es única y además si $\underline{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\in k^q$ es tal solución, entonces se verifica $\overline{\alpha}_i \cdot \det A = \det A_i$ donde A_i es la matriz obtenida a partir de A sustituyendo la fila i-ésima por $\underline{y}=(y_1, \ldots, y_q)$. Este resultado está indicado en el capítulo I Nota I.1.8.

<u>Proposición III.3.2.</u>- Sean $(x_1, \ldots, x_q)\in k^q$ e $(y_1, \ldots, y_q)\in \mathcal{D}^q$ dos elementos tales que $\underline{x}.A=\underline{y}$ siendo A una matriz de orden q y con coeficientes en $\mathcal{D}$ cuyo determinante $\det_{\Sigma}$ sea $\delta\neq 0$. Sea $d\in \mathcal{D}$ tal que $\sigma(d)=\delta$. Entonces existe una familia de elementos de $\mathcal{D}$

$\{z_{i,j}\}_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j}}$ tales que

$$|x_i-d^{-n}.z_{i,j}| \leq |x_i|-n \qquad \forall\ i=1, \ldots, q \qquad \forall\ n\geq 1.$$

La demostración la realizaremos por recurrencia sobre n. Para n=1 tenemos que construir $z_{1,1}, \ldots, z_{q,1}$ tales que $|x_i-d^{-n}.z_{i,1}|\leq|x_i|-1$, entonces basta tomar como $z_{i,1}\in \mathcal{D}$ cualquier elemento tal que $\sigma(x_{i,1})= \det_\Sigma A_i$ (este elemento existe al ser la aplicación símbolo principal suprayectiva y la aplicación $\det_\Sigma$ regular). La familia $\{z_{1,1}, \ldots, z_{q,1}\}$ verifica la condición pedida, pues por la regla de Cramer se tiene $\sigma(d).\sigma(x_i)=\sigma(z_{i,1})$ y de aquí $\sigma(d.x_i)= \sigma(z_{i,1})$, es decir $|d.x_i- z_{i,1}| < |d.x_i|$, con lo cual $|x_i-d^{-1}.z_{i,1}| \leq |x_i|-1$.

Supongamos construida la familia $\{z_{i,j}\}_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq n}}$ y construyamos $z_{1,n+1}, \ldots, z_{q,n+1}$. Para ello consideremos $r_i=x_i-d^{-n}.z_{i,n}$. Se tiene $d^n.r_i=d^n.x_i-z_{i,n}$ con $z_{i,n}\in \mathcal{D}$, luego

$$(d^n.r_1, \ldots, d^n.r_q).A=d^n (x_1, \ldots, x_q).A-(z_{1,n}, \ldots, z_{q,n}).A .$$

El segundo miembro es un elemento de $\mathcal{D}^q$, luego aplicando el mismo razonamiento que para el caso n=1, obtenemos que existen $x_{i,n+1}\in \mathcal{D}$ tales que

$$|d^n.r_i-d^{-1}.x_{i,n+1}|\leq|d^n.r_i|-1$$

y, de aquí,

$$|r_i-d^{-(n+1)}.x_{i,n+1}|\leq|r_i|-1\leq|x_i|-(n+1).$$

Sustituyendo r_i por $x_i-d^{-n}.z_{i,n}$ y poniendo $z_{i,n+1}=x_{i,n+1}+d.z_{i,n}$ se obtiene

$$|x_i-z_{i,n+1}|\leq|x_i|-(n+1)$$

como se quería probar.

Si ahora consideramos $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q) \in \mathcal{D}^q$ y sobre $\mathcal{D}^q$ la filtración por traslación de orden $\underline{d}$, se verifica que $|x_i-d^{-n}.z_{i,n}|-d_i \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, y por tanto

$$\sup \{ |x_i-d^{-n}.z_{i,n}|-d_i \,/ i=1, \ldots, q\} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

con lo cual $|x_i-d^{-n}.\underline{z}_n|_{\underline{d}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, siendo $|\ |_{\underline{d}}$ la función de orden para la filtración sobre $\mathcal{D}^q$ asociada a $\underline{d}$ y $\underline{z}_n=(z_{1,n}, \ldots, z_{q,n})$ $\forall$ $n\geq 1$.

Lema III.3.3 Primer Lema de normalización .- Sea $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}$ una matriz cuadrada de elementos de $\mathcal{D}$, y $\lambda_A:\mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q$ la aplicación $\mathcal{D}$-lineal que define. Considerando sobre $\mathcal{D}^q$ la filtración por traslación inducida por una q-upla $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$, se verifica que dado $a\in \mathrm{Ann}(gr_{\underline{d}}\mathrm{Coker}\lambda_A)$ entonces existe $P\in \mathcal{M}_q(\mathcal{D})$ tal que si ponemos $P.A=(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p)^t$ entonces se tiene $\sigma_{\underline{d}}(\underline{b}_i)=a.e_i$ $i=1, \ldots, q$. En particular, la matriz $P.A$ verifica la condición 2 de la proposición III.1.8 y se tiene por tanto $\det P.A=a^n$.

Tomemos $a\in \mathrm{Ann}\,(gr_{\underline{d}}\mathrm{Coker}\lambda_A)$ y consideremos la sucesión exacta

$$\mathcal{D}^q \xrightarrow{\lambda_A} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi_A} \mathrm{Coker}\lambda_A \longrightarrow 0$$

Tomando graduados respecto de la $\underline{d}$ filtración sobre $\mathcal{D}^q$ y su imagen en $\mathrm{Coker}\pi_A$, se verifica que $a.e_i\in \mathrm{Ker}\bar{\pi}_A$ y por ser $\bar{\pi}_A$ estricta para $\underline{d}$ (recuérdese que las filtraciones sobre $\mathcal{D}^q$ inducen sobre $\mathrm{Coker}\lambda_A$ filtraciones que hacen π_A estricta, véase capítulo III §1) se tiene que $a.e_i\in gr_{\underline{d}}(\mathrm{Ker}\pi_A)$ luego $a.e_i\in gr_{\underline{d}}(\mathrm{Im}\lambda_A)$ es decir $b_i\in \mathrm{Im}\lambda_A$ tal que $a.e_i=\sigma_{\underline{d}}(b_i)$ con lo cual como $\mathrm{Im}\,\lambda_A$ está generado por las filas de la matriz A, para una cierta matriz cuadrada P, y ciertamente se verifican las condiciones en el lema.

Proposición III.3.4.- Sea $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}$ una matriz cuadrada de orden q con coeficientes en $\mathcal{D}$ cuyo determinante $\delta=\det_\Sigma A$ sea no nulo, y sea $\lambda_A: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^q$

la aplicación $\mathcal{D}$-lineal cuya matriz asociada a la base estándar de $\mathcal{D}^q$ sea la matriz A. Sea $\underline{d}=(d_1, ..., d_q)\in \mathbb{Z}^q$. Entonces considerando sobre $\mathcal{D}^q$ la filtración por traslación de orden $\underline{d}$ y su imagen sobre $\mathrm{Coker}\lambda_A$, existe un número natural $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$\delta^m\in \mathrm{Ann}\ (gr_{\underline{d}}\mathrm{Coker}\lambda_A)\ .$$

Como $A\in \mathcal{M}_p(\mathcal{D})$ y tiene por determinante $\delta\neq 0$ el sistema $\underline{x}.A=\underline{e}_i$ tiene solución en k para cada $i=1, ...,p$. Sea $\underline{x}^i\in k^q$ ésta solución. Además, si $f\in\mathcal{D}$ es tal que $\sigma(f)=s$, entonces por la proposición III.3.2 existe una familia $\{\underline{z}_{n,i}\}_{n\geq i}$ de elementos de $\mathcal{D}^q$ tal que $|\underline{x}^i\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}| \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Ahora bien, si $c=\sup\{|a_{i,j}| / 1\leq i,j\leq p\}$ entonces se verifica que $|(\underline{x}^i\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}).A|_{\underline{d}}\leq c+|\ \underline{x}^i\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}|_{\underline{d}}$, es decir $|\ \underline{x}^i.A\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A|_{\underline{d}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ y existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|\ \underline{x}^i.A\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A|_{\underline{d}} < d_i$ $\forall$ $n\geq m$ y $\forall$ $y=1, ..., q$. Ahora bien, como $|\underline{x}^i.A\text{-}d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A+d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A|_{\underline{d}}=|e_i|_{\underline{d}}=d_i$, $\forall n\geq 1$ se verifica para $n\geq m$ $|d^{-n}.\underline{z}_{n,1}.A|=d_i$, luego para $n\geq m$ se tiene $\sigma_{\underline{d}}(e_i)=\sigma_{\underline{d}}(\underline{x}^i.A\text{-}\ d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A+\ d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A)=\sigma_{\underline{d}}(d^{-n}.\underline{z}_{n,i}.A\ )$ y por tanto $\delta^m\sigma_{\underline{d}}(e_i)=\ \sigma_{\underline{d}}(\underline{z}_{n,i}.A\ )=\ \sigma_{\underline{d}}(\underline{b}_i)$ siendo $\underline{b}_i=\ \underline{z}_{n,i}.A\in \mathrm{Im}\lambda_A=\mathrm{Ker}\pi_A$ donde π_A es el homomorfismo

$$\pi: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathrm{Coker}\lambda_A \longrightarrow 0.$$

Como el homomorfismo π_A es estricto para la filtración inducida por la de $\mathcal{D}^q$ sobre $\mathrm{Coker}\lambda_A$ se tiene $\sigma_{\underline{d}}(\underline{b}_i)\in \mathrm{Ker}\overline{\pi}_A$ y por tanto $\delta^m\sigma_{\underline{d}}(e_i)\in \mathrm{Ker}\overline{\pi}_A$ para todo $i=1, ..., q$, luego $\delta^m\in \mathrm{Ann}\ (gr_{\underline{d}}\mathrm{Coker}\lambda_A)$.

<u>Corolario III.3.5.</u>-En las condiciones de la proposición anterior, si $\delta=\det(A)\neq 0$, se tiene $(\delta^m)^q\in \mathcal{F}_0(gr_{\underline{d}}(\mathrm{Coker}\lambda_A))$ para algún $m\in\mathbb{N}$.

Es consecuencia inmediata del lema de normalización y de la proposición anterior, ya que como $\delta^m\in \mathrm{Ann}\ (gr_{\underline{d}}\mathrm{Coker}\lambda_A)$ existe B=P.A tal que

$det_\Sigma(B)=det(\sigma_{\underline{d}}(b_1), ..., \sigma_{\underline{d}}(b_q))^t=(\delta^m)^q$. También se sigue el corolario directamente a partir de la proposición anterior y de la propiedad F-3 de los ideales de Fitting en el caso conmutativo.

Teorema III.3.6.- Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita y $\pi: \mathcal{D}^q \longrightarrow M$ un homomorfismo suprayectivo. Dado $0 \leq r \leq q$ y $s = q-r$ y una q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, ..., d_q) \in \mathbb{Z}^q$, si ponemos

$$D=\{ \underline{d}'=(d'_1, ..., d'_q) \in \mathbb{Z}^q / d_i=d'_i \text{ para al menos s componentes}\}$$

entonces se verifica que

$$\sqrt{\sum_{\underline{d}' \in D} \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M)} = \sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)}$$

en particular, $$\sqrt{\mathfrak{F}_r(gr\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)}$$

Sea $A'=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq j\leq q}}$ una matriz de syzygeas tal que det $A=\delta \neq 0$ siendo A la submatriz dada por $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq s}$ Aplicando el primer lema de normalización a la matriz A, existe una matriz cuadrada P de orden s tal que $P.A=B=(\underline{b}_1, ..., \underline{b}_s)^t$ es tal que $\sigma_{\underline{c}}(\underline{b}_i)=\delta.\ \sigma_{\underline{c}}(\underline{e}_i)$ i=1, ..., s siendo $\underline{c}=(d_1, ..., d_s)$. Consideremos B'=P.A'. Entonces B' es una matriz de syzygeas y podemos elegir $d_{s+1}, ..., d_q$ suficientemente grandes de tal forma que si $B'=(b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq j\leq q}}$ entones $\sigma_{\underline{d}'}(b_{i,1}, ..., b_{i,q})=(0, ..., 0, \delta, 0, ..., 0)$ siendo $\underline{d}'=(d_1, ..., d_s, d_{s+1}, ..., d_q)$.

Tomando la submatriz B ,de orden s, de B' (que corresponde a las s primeras columnas), se tiene que dicha submatriz verifica $det_\Sigma B=(\delta)^s$ por tanto teniendo en cuenta que las filas de la matriz $(\sigma_{\underline{d}}(\underline{b}_1), ..., \sigma_{\underline{d}}(\underline{b}_s))$son syzygeas para la aplicación $\bar{\pi}$ inducida a nivel de graduados para su valor de $\underline{d}$ se tiene $(\delta^m)^s \in \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}'}M)$ luego

$$\mathfrak{F}_r(\pi) \subset \sqrt{\sum_{\underline{d}' \in D} \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}'}M)}$$

Por otro lado en virtud de la proposición 3.1.9 se verifica $\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}'}M) \subset \mathfrak{F}_r(\pi)$ para todo $\underline{d}'$, por tanto se tiene

$$\sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)} = \sqrt{\sum_{\underline{d}' \in D} \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}'}M)}$$

y, consecuentemente, también

$$\sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_r(gr\pi)} \quad .$$

Corolario III.3.7.- En las condiciones del teorema anterior para cada $\underline{d} \in \mathbb{Z}^q$ se tiene

$$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_o(gr_{\underline{d}}M)}$$

Es evidente ya que para r=0 es s=q y dado $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$, se tiene $D=\{\underline{d}\}$ y la fórmula en el anterior teorema da como caso particular la de este corolario.

Corolario III.3.8.- En las condiciones del teorema anterior se tiene para cada $\underline{d} \in \mathbb{Z}^q$

$$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathrm{Ann}(gr_{\underline{d}}M)} \quad .$$

Basta tener en cuenta el corolario anterior y la propiedad F-3 de los ideales de Fitting para el caso conmutativo (cap III, §1)

Veremos ahora que, de hecho, el ideal radical de $\mathfrak{F}_o(\pi)$ no depende tampoco de π, es decir, que dado otro $\pi':\mathcal{D}^r \longrightarrow M$ suprayectivo y $\mathcal{D}$-lineal se verifica

$$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi')} \quad .$$

Teorema III.3.9.-Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita y $\pi:\mathcal{D}^q \longrightarrow M$ $\pi':\mathcal{D}^r \longrightarrow M$ dos $\mathcal{D}$-homomorfismos suprayectivos entonces se tiene

$$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi')} \quad .$$

La demostración la haremos en varios pasos. Primeramente supondremos que los sistemas generadores $\underline{m}=\{m_1, ..., m_q\}=\{\pi(e_1), ..., \pi(e_q)\}$ y $\underline{n}=\{n_1, ..., n_r\}=\{\pi'(e_1), ..., \pi'(e_r)\}$ son equivalentes en el sentido que existe una matriz inversible T que relaciona linealmente $\underline{n}$ y $\underline{m}$, o lo que equivalente, que existe un isomorfismo (de matriz T) tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^q & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow \phi & & \big\downarrow \mathrm{Id} & & \\ \mathcal{D}^r & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es conmutativo. En este caso, si A es una matriz de syzygeas de M relativa a $\underline{m}$, entonces A.T. es una matriz de syzygeas de M relativa $\underline{n}$ y recíprocamente. Como $\det_\Sigma(A.T)=\det_\Sigma(A).\det_\Sigma(T)$ se sigue que $\mathfrak{F}_o(\pi)\subset\mathfrak{F}_o(\pi')$ y por simetría que $\mathfrak{F}_o(\pi)\supset\mathfrak{F}_o(\pi')$ por tanto se tiene $\mathfrak{F}_o(\pi)=\mathfrak{F}_o(\pi')$.

Supongamos ahora que r=q+1 y que se verifica $n_i=m_i$ i=1, ..., q y $n_{q+1}=0$. Entonces, evidentemente, se tiene que $\mathfrak{F}_o(\pi)\subset\mathfrak{F}_o(\pi')$ ya que (0, ..., 0,1) es una syzygea de M relativa a $\underline{n}$. Recíprocamente, sea $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le q+1}$ una matriz de syzygeas de orden q+1 de M relativa a $\underline{n}$. Lógicamente suponemos que $\det_\Sigma(A)=\delta\neq 0$ pues en otro caso es obvio que $\delta \in \mathfrak{F}_o(\pi)$. Por el primer lema de normalización si fijamos una (q+1)-upla de grados arbitraria $\underline{d}$, existe P tal que $B=P.A=(b_{i,j})_{1\le i,j\le q+1}$ entonces se verifica $\sigma_{\underline{d}}(b_{i,1}, \ldots, b_{i,q+1})=(0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)$ y además obviamente una matriz de syzygeas de M relativas a $\underline{n}$. Ahora bien, la submatriz B' formada por las q-primeras columnas y q-primeras filas de B es una matriz de syzygeas de M relativas a $\underline{m}$ y tiene por determinante $\delta^q \in \mathfrak{F}_o(\pi)$ y consecuentemente

$$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi')} \quad .$$

Nótese que esta igualdad se deduce también, en este caso, del teorema anterior puesto que si tomamos una q-upla de grados $\underline{d}=(d_1, \ldots, d_q)$ y un número natural d_{q+1} arbitrarios y ponemos $\underline{e}'= (d_1, \ldots, d_{q+1})$ entonces los graduados $gr_{\underline{d}}M$ (relativo a π) y $gr_{\underline{d}'}M$ (relativo a π') coinciden por tanto aplicando el corolario III.3.7 se verifica la igualdad de radicales buscada. Sin embargo hemos preferido efectuar la prueba directamente pues ésta es la etapa de la demostración en la que se ve la imposibilidad de probar el resultado más fuerte que sería $\mathfrak{F}_o(\pi)=\mathfrak{F}_o(\pi')$.

En la tercera etapa consideramos el caso en que $\underline{n}$ se obtiene a partir de $\underline{m}$ añadiendo un solo elemento n_{q+1}. En este caso $\underline{n}$ es equivalente a $\{m_1, \ldots, m_q, 0\}$ ya que si $n_{q+1}=a_1.m_1 + \ldots + a_q.m_q$ entonces la matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} I_p & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline a_1, \ldots \ldots \ldots, a_p & 1 \end{array}\right]$$

induce una equivalencia entre $\underline{n}$ y $\{m_1, \ldots, m_q, 0\}$ y aplicando los dos etapas anteriores se tiene $$\sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_o(\pi')}$$

Con las etapas previas la conclusión del teorema es evidente ya que dados dos sistemas de generadores $\underline{m}$ y $\underline{n}$ y tomando el sistema generador

$\underline{m}.\underline{n}=\{ m_1, ..., m_q, n_1, ..., n_q \}$ se tiene, aplicando iteradamente la última conclusión, que

$$\sqrt{\mathfrak{F}_0(\pi)} = \sqrt{\mathfrak{F}_0(\pi_1)} = \sqrt{\mathfrak{F}_0(\pi')}$$

siendo π_1 el $\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo asociado al sistema generador $\underline{m}.\underline{n}$.

En el conjunto de resultados anteriores se pone de manifiesto cómo los ideales de Fitting conviene estudiarlos relativizados a sistemas de generadores de M más que a filtraciones sobre M. De hecho, con cada sistema de generadores aparecen asociados muchas filtraciones una para cada selección de $\underline{d}$. Este tipo de filtraciones sobre M se llaman, en la literatura, buenas filtraciones y las detallaremos con más precisión.

Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado cuyo graduado asociado sea un dominio conmutativo y la función determinante asociada regular. Supondremos además que la filtración $\Sigma=\{F_n\mathcal{D}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es discreta, es decir $F_n\mathcal{D}=0$ para $n<0$. En estas condiciones el grupo abeliano $\mathcal{D}_0=F_0\mathcal{D}$ tiene estructura de anillo conmutativo, de este hecho coincide con la componente de grado cero de $gr\mathcal{D}$.

<u>Definiciones III.3.10.</u>- Sea (M,Π) un $\mathcal{D}$-módulo filtrado de filtración $\Pi=\{F_n.M\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Diremos que la filtración Π es una buena filtración si existen un sistema de generadores

$m_1, ...,m_q$ de M y enteros $d_1, ..., d_q$ tales que $\quad F_nM=\sum_{i=1}^{q}(F_{n-d_i}\mathcal{D}).m_i$

es decir si es la imagen de la filtración trasladada respecto a $\underline{d}$ para algún $\underline{d}$ y algún $\pi:\mathcal{D}^q \longrightarrow M$ suprayectivo.

Consideremos un $\mathcal{D}$-módulo M dotado de una buena filtración $\Pi=\{F_nM\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y sea $\underline{m}=\{ m_1, ...,m_q \}$ un sistema de generadores de M de órdenes respectivos $(d_1, ..., d_q)$ que verifique la condición de la definición, es decir, $F_nM=\sum_{i=1}^{q}(F_{n-d_i}\mathcal{D}).m_i$.

Si denotamos por $t=\inf\{ d_1, \ldots, d_q \}$, entonces se verifica que $F_nM=0$ para $n<t$

ya que en este caso como $F_m\mathcal{D}=0$ si $m<0$ se tiene $F_n.M=\sum_{i=1}^{q}(F_{n-d_i}\mathcal{D}).m_i=0$.

Para $n>t$ podemos considerar los $\mathcal{D}_o$-módulos $\bar{M}_n=F_n.M/N_n$

para $N_n=F_1\mathcal{D}.F_{n-1}M+\ldots+F_{n-t}\mathcal{D}.F_tM \subset F_nM$. Nótese que esta construcción es análoga a la realizada en el capítulo II.2.

Por ser M de generación finita se verifica que la familia de $\mathcal{D}_o$-módulos $\{\bar{M}_n\}_{n\geq t}$ (tomaremos $\bar{M}_t=F_tM$) es también de generación finita existiendo además un entero $l\in \mathbb{Z}$ $l\geq t$ tal que $\bar{M}_n=0$ para $n>l$. El efecto, tomando el sistema generador $\underline{m}=\{m_1, \ldots, m_q\}$ se tiene

$$F_nM=\sum_{i=1}^{q}(F_{n-d_i}\mathcal{D}).m_i$$

y por tanto para $n>\sup\{d_1, \ldots, d_q\}$ se tiene $F_nM=N_n$ y de aquí $\bar{M}_n=0$.

Recíprocamente, si se tiene una filtración $\Pi=\{F_nM\}$ sobre M, para el cual existe un entero t tal que $\bar{M}_n=F_nM=0$ para $n<t$, y tal que los $\mathcal{D}_o$-módulos $\bar{M}_i=F_iM/N_i$ son de generación finita para $i\geq t$ y nulos para i suficientemente grande, entonces se pueden tomar sistemas de generadores $\underline{m}$ del tipo $\underline{m}=\cup T_i$ donde $T_i=\emptyset$ salvo para un número finito de índices para los cuales T_i es un conjunto de elementos de F_iM cuyas clases en $\bar{M}_i$ como $\mathcal{D}_o$-módulo. Se tiene que para todas las selecciones de familias $\{T_i\}$ con las propiedades anteriores $\underline{m}=\cup T_i$ es un sistema de generadores del $\mathcal{D}$-módulo M, de tal manera que ordenados los elementos de $\underline{m}$ y asociando a cada uno de ellos como grado el índice del conjunto T_i al que pertenence, se obtiene un q-upla de grados $\underline{d}$ ($q=\#\underline{m}$), de tal manera que la filtración imagen de la filtración asociada a $\underline{d}$ por el homomorfismo asociado al sistema generador $\underline{m}$

$$\pi: \mathcal{D} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

coincide con la filtración de partida sobre M. Así a cada buena filtración sobre M le corresponden varios conjuntos de generadores $\underline{m}$ todos ellos de la forma anteriormente dicha; por tanto a dicha filtración le corresponderán varios morfismos π y de aquí varias asignaciones $\mathfrak{F}_r(\pi)$.

La demostración de los resultados anteriores pone de manifiesto que, en general, los $\mathfrak{F}_r(\pi)$ (que corresponden a la filtración) van a depender también de π y no de la filtración. En la última sección daremos un ejemplo en lo cual ésto se constata explícitamente. Para r=0 la situación se puede clarificar mucho más, usando el mismo tipo de argumentos que en el parágrafo II §3. En efecto, a cada sistema de generadores del tipo $m=\bigcup T_i$ se le puede asignar una r-upla de grados $\underline{d}$, pudiendo ordenar tales $\underline{d}$'s de tal manera que se tiene una r-upla mínima $\underline{d}_M$ que sólo depende de la estructura de módulo filtrado. Entonces se tiene que $\mathfrak{F}_0(\pi)$ depende sólamente de $\underline{d}$ y no de $\underline{m}$ (es decir se tiene definida $\mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d})$, y además $\mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d}) \subset \mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d}')$ si $\underline{d}' \leq \underline{d}$. En particular el ideal $\mathfrak{F}_0(M,\Pi) = \mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d}_M)$ depende solo de la filtración y se tendrá

$$\mathfrak{F}_0(M,\Pi) \subset \mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d}_M) \quad \forall\, \underline{d}.$$

La demostración de los hechos anteriores es idéntica a la efectuada en II§3, teniendo en cuenta que la etapa primera en el último teorema, y que por paso al caso local los ideales $\mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d})$ permanecen estables.

Como para cada $\underline{d}$ se tiene

$$\mathfrak{F}_0(gr_\Pi M) = \mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}} M) \subset \mathfrak{F}_0(M,\Pi,\underline{d})$$

y en particular para $\underline{d}=\underline{d}_M$ $\qquad (*)\ \mathfrak{F}_0(gr_\Pi M) \subset \mathfrak{F}_0(M,\Pi)$

cabe preguntarse si ambos ideales son iguales. La respuesta es negativa como se pone de manifiesto en el último parágrafo.

§ 4 . TEOREMAS DE PROXIMIDAD

Como en las secciones precedentes, consideramos un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ cuyo graduado asociado, sea un dominio conmutativo y noetheriano y la función determinante asociada regular. En este parágrafo usaremos algunas hipótesis adicionales con el fin de obtener un resultado que nos permite afirmar la proximidad existente entre los conceptos de ideales de Fitting introducidos en el parágrafo III §1 de este capítulo.

La condición suplementaria estará dada por una parte sobre el graduado y por otra sobre la filtración, ya que consideraremos anillos filtrados $(\mathcal{D}, \Sigma)$ cuya filtración $\Sigma=\{\mathfrak{F}_n\mathcal{D}\}_{n\in \mathbb{Z}}$ es discreta,(es decir $\mathfrak{F}_n\mathcal{D}=0$ para $n<0$), y estrictamente creciente (es decir, $\mathfrak{F}_n\mathcal{D} \neq \mathfrak{F}_{n-1}\mathcal{D}$ $n\geq 1$) y tal que su graduado $gr\mathcal{D}$, sea un dominio conmutativo noetheriano factorial. Como en secciones precedentes denotaremos por $|a|\in \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ el orden relativo a Σ del elemento $a\in \mathcal{D}$.

<u>Definiciones III.4.1.</u>- Sea $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ una matriz cuadrada de elementos de $\mathcal{D}$. Dada una permutación $\tau\in \$_p$ llamaremos orden de A relativo a τ al elemento

$$|A(\tau)|= \sum_{i=1}^{p} |a_{i,\tau(i)}| \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

(por convenio pondremos $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$). En la misma línea, llamaremos orden total de la matriz A y lo denotaremos por $|A|$ al elemento

$$|A|= \sup\{ |A(\tau)| / \tau\in \$_p \} = \sup \{ \sum_{i=1}^{p} |a_{i,\tau(i)}| / \tau\in \$_p \}.$$

<u>Definiciones III.4.2.</u>- Sea $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ una matriz cuadrada de elementos de $\mathcal{D}$ cuyo orden total sobre $\mathcal{D}$ sea $|A|\in \mathbb{Z}$. Diremos que la matriz A es normal si verifica que el orden total $|A|$ de A coincide con el grado del determinante conmutativo de la matriz de los

símbolos principales de A $\qquad \sigma(A) = (\sigma(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq p}$.

Asímismo diremos que el determinante de la matriz A se anula trivialmente (según la terminología de Hufford [32]) si su orden total es $-\infty$.

Consideremos una matriz cuadrada $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ con coeficientes en $\mathcal{D}$. En lo que sigue daremos un método de cálculo efectivo del determinante para matrices normales. Para ello, y con objeto de poder aplicar la proposición III.1.7 tendremos que construir una familia de enteros $m_1,\ldots, m_p, n_1,\ldots, n_p$ tales que

$$|a_{i,j}| \leq m_i - n_j \quad y \quad |A| = \sum_{i=1}^{p} (m_i - n_i)$$

La elección, en principio, no es única ya que dada una familia $m_1,\ldots, m_p$, $n_1,\ldots, n_p$ bastaría tomar $m_1+r,\ldots, m_p+r, n_1+r,\ldots, n_p+r$ para obtener una nueva familia que verifique lo buscado. Construiremos por tanto, una familia particular.

Denotemos por $m_{i,j}$ al valor $|a_{i,j}|$ $1\leq i,j\leq p$ por m el orden $|A|$ de A, y definamos $\qquad \Delta(A)= \{(i, j)\in I^2 \;/\; \exists \; \tau\in \$_p \quad j= \tau(i) \;\; y \;\; |A(\tau)|= |A|= m\}$

siendo $I=\{1, \ldots, p\}$. Esta familia $\Delta(A)$ verifica las siguientes propiedades.

<u>Lema III.4.3.</u>- Sea $\tau\in \$_p$ tal que $|A(\tau)|= |A|=m$. Entonces

$$m_{\alpha,\tau(\alpha)} + m_{\beta,\tau(\beta)} \geq m_{\alpha,\tau(\beta)} + m_{\beta,\tau(\alpha)}$$

Basta considerar la permutación $\eta\in \$_p$ definida por

$$\eta(i)= \begin{cases} \tau(\beta) & i= \alpha \\ \tau(\alpha) & i= \beta \\ \tau(i) & i\neq\alpha \quad i\neq\beta \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$m= |A| \geq |A(\eta)| = |A(\tau)| - m_{\alpha,\tau(\alpha)} - m_{\beta,\tau(\beta)} + m_{\alpha,\tau(\beta)} + m_{\beta,\tau(\alpha)}$$

y como $|A| =|A(\tau)|$ se concluye

$$m_{\alpha,\tau(\alpha)} + m_{\beta,\tau(\beta)} \geq m_{\alpha,\tau(\beta)} + m_{\beta,\tau(\alpha)}.$$

Lema III.4.4.- Sean (α, β) y (α', β') dos elementos de $\Delta(A)$ entonces

$$m_{\alpha,\beta} + m_{\alpha',\beta'} \geq m_{\alpha,\beta'} + m_{\alpha',\beta}$$

Por ser (α, β) y (α', β') elementos del conjunto de índices $\Delta(A)$ existen τ y η elementos de $\$_p$ tales que $\tau(\alpha) = \beta$ y $\eta(\alpha') = \beta'$ y $|A(\tau)| = |A(\eta)| = m$.

Consideremos la permutación $\omega = \tau^{-1}\eta \in \$_p$. Como el orden de ω como elemento de $\$_p$ es finito, el conjunto $\{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^r(\alpha), ...\}$ es también finito. Sea s el cardinal de dicho conjunto, es decir es el menor natural no nulo tal que $\omega^s(\alpha) = \alpha$. Si s=1 entonces se verifica $\eta(\alpha)=\beta$ con lo cual para probar este resultado bastará aplicar el lema III.4.3 a la permutación η.

Supongamos entonces s>1 para $r \in \{1, ..., s\}$ definimos las permutaciones

$$\omega_r(i) = \begin{cases} \omega(i) & i \in \{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^{r-2}(\alpha)\} \\ \alpha & i = \omega^{r-1}(\alpha) \\ i & i \notin \{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^{r-1}(\alpha)\} \end{cases}$$

y las permutaciones $\mu_r = \tau.\omega_r$ $\upsilon_r = \eta(\omega_r)^{-1}$, es decir

$$\mu_r(i) = \begin{cases} \tau.\omega_r(i) = \tau.\omega(i) = \eta(i) & i \in \{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^{r-2}(\alpha)\} \\ \tau.\omega_r(i) = \tau(\alpha) = \beta & i = \omega^{r-1}(\alpha) \\ \tau(i) & i \notin \{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^{r-1}(\alpha)\} \end{cases}$$

$$\upsilon_r(i) = \begin{cases} \eta(\omega_r^{-1})(\alpha) = \eta(\omega^{r-1}(\alpha)) & i = \alpha \\ \eta.\omega_r^{-1}(i) = \eta(\omega^{-1}(i)) = \tau(i) & i \in \{\omega(\alpha), ..., \omega^{r-1}(\alpha)\} \\ \eta(i) & i \notin \{\alpha, \omega(\alpha), ..., \omega^{r-1}(\alpha)\} \end{cases}$$

Denotando $\alpha_r = \omega^{r-1}(\alpha)$ y $\beta_r = \eta(\alpha_r)$ se tiene

$$\upsilon_r(i)=\begin{cases}\eta(\alpha_r)=\beta_r & i=\alpha\\ \tau(i)=\eta(\omega^{r-1}(i))=\tau(i) & i\in\{\omega(\alpha),\ldots,\omega^{r-1}(\alpha)\}\\ \eta(i) & i\notin\{\alpha,\omega(\alpha),\ldots,\omega^{r-1}(\alpha)\}\end{cases}$$

con lo cual

$$|A(\mu_r)|+|A(\upsilon_r)|=|A(\tau)|+|A(\eta)|-m_{\alpha,\tau(\alpha)}-m_{\alpha_r,\beta_r}+m_{\alpha,\beta_r}+m_{\alpha_r,\beta}=$$

$$=2m-m_{\alpha_1,\beta}-m_{\alpha_r,\beta_r}+m_{\alpha_1,\beta_r}+m_{\alpha_r,\beta}.$$

Entonces tenemos dos posibilidades:

1º) $\alpha'=\omega^{r-1}(\alpha)$ para algún $r=1,\ldots,s$. En este caso se tiene $\alpha'=\alpha_r$ $\beta'=\beta_r$ y por tanto al verificarse

$$|A(\mu_r)|+|A(\upsilon_r)|\leq 2m\ ,\ \text{se obtiene}\ m_{\alpha,\beta}+m_{\alpha',\beta'}\geq m_{\alpha,\beta'}+m_{\alpha',\beta}.$$

2º) $\alpha'\neq\omega^{r-1}(\alpha)$ $r=1,\ldots,s$. Ahora se tiene que

$$\beta_s=\eta(\omega^{s-1}(\alpha))=\eta(\omega^{-1}(\alpha))=\tau(\alpha)=\beta$$

y por tanto $\quad |A(\mu_s)|+|A(\upsilon_s)|=|A(\tau)|+|A(\eta)|$

es decir, $\quad |A(\mu_s)|+|A(\upsilon_s)|=m$

verificándose además

$$\upsilon_s(\alpha)=\eta(\alpha_s)=\beta_s=\beta \quad \text{y} \quad \upsilon_s(\alpha')=\eta(\alpha')=\beta'$$

Aplicando el resultado anterior se concluye que

$$m_{\alpha,\beta}+m_{\alpha',\beta'}=m_{\alpha,\upsilon_s(\alpha)}+m_{\alpha',\upsilon_s(\alpha')}\geq m_{\alpha,\beta'}+m_{\alpha',\beta}.$$

<u>Corolario III.4.5.</u>- Supongamos que los elementos $(\alpha,\beta),(\alpha,\beta'),(\alpha',\beta)$ y (α',β') son cuatro elementos del conjunto $\Delta(A)$. Entonces

$$m_{\alpha,\beta}+m_{\alpha',\beta'}=m_{\alpha,\beta'}+m_{\alpha',\beta}.$$

Basta aplicar el lema anterior dos veces.

Proposición III.4.6.- Sea $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le p}$ una matriz de elementos de $\mathcal{D}$ tal que $\Delta(A) = I^2$. En estas condiciones existe una familia $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ de enteros tales que $|a_{i,j}| = m_{i,j} = m_i - n_j$ para $1\le i, j\le p$ y $|A| = m_1 + \ldots + m_p - n_1 - \ldots - n_p$. Además esta familia es única salvo una constante aditiva, es decir, si $m'_1, \ldots, m'_p, n'_1, \ldots, n'_p$ es otra familia que verifica las anteriores condiciones se tiene

$$m'_i = m_i + r \quad n'_i = n_i + r \quad i = 1, \ldots, p \quad \text{para algún } r \in \mathbb{Z}.$$

Para construir la familia $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$, verificando estas dos condiciones, haremos $n_1 = 0$ y definiremos concretamente $m_i = m_{i,1}$ $i = 1, \ldots, p$ y $n_j = m_1 - m_{1,j} = m_{1,1} - m_{1,j}$ $j = 1, \ldots, p$. Esta familia $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ verifica claramente que $|a_{i,j}| = m_{i,j} = m_i - n_j$, ya que (i, j), $(1, j)$, $(i, 1)$ y $(1, 1)$ están en $\Delta(A)$ con lo cual por el corolario III.4.5 se tiene

$$m_{i,j} = m_{i,1} + m_{1,j} - m_{1,1} = m_i + m_1 - n_j - m_1 = m_i - n_j.$$

La segunda condición de la proposición es evidente ya que se tiene para cualquier $\tau \in \$_p$ la igualdad

$$|A| = |a_{1,\tau(1)}| + \ldots + |a_{p,\tau(p)}| = m_1 - n_{\tau(1)} + \ldots + m_p - n_{\tau(p)}.$$

La condición de unicidad, salvo constante, es evidente a partir de la propia definición de la familia.

Teorema III.4.7.- Sea $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le p}$ una matriz de elementos de $\mathcal{D}$ tal que su orden total $|A|$ sea entero. En estas condiciones existe una familia $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ de enteros tales que

$$|a_{i,j}| \le m_{i,j} = m_i - n_j \quad \text{para } 1\le i, j\le p \quad \text{y}$$
$$|A| = m_1 + \ldots + m_p - n_1 - \ldots - n_p.$$

Si el conjunto $\Delta(A) = I^2$ la condición esta probada por la proposición anterior. Supongamos, por tanto, $\Delta(A) \neq I^2$, es decir, $\Delta(A) \subset I^2$. Entonces dado

$(\alpha,\beta)\in I^2$ definimos la deficiencia en (α, β) mediante

$$d_{(\alpha,\beta)}= m - \sup \Big\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\alpha}}^{p} m_{i,\tau(i)} \;/\; \tau(\alpha) = \beta \quad \tau \in \$_p \Big\}.$$

Se tiene que $d_{(\alpha,\beta)} \geq 0$ y además $d_{(\alpha,\beta)} = 0$ sí y sólo sí $(\alpha,\beta) \in \Delta(A)$. Entonces si $(\alpha,\beta) \notin \Delta(A)$ podemos sustituir en la matriz A el elemento $a_{\alpha,\beta}$ por otro elemento $b_{\alpha,\beta}$ tal que $|b_{\alpha,\beta}| = d_{\alpha,\beta} + |a_{\alpha,\beta}|$ (esto es posible porque la filtración que consideramos es estrictamente creciente). Obtenemos de esta forma una matriz A' verificando $|A| = |A'|$ y $\Delta(A) \subset \Delta(A')$ y $\Delta(A) \neq \Delta(A')$. Iterando el razonamiento, obtenemos finalmente una matriz $A^* = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ tal que $\Delta(A^*) = I^2$, $|A| = |A^*|$ y $|a_{i,j}| \leq |c_{i,j}|$ $1\leq i,j\leq p$ (Además $|a_{i,j}| = |c_{i,j}|$ sí y sólo sí $(i, j)\in \Delta(A)$) .

Aplicando la proposición III.4.6 a la matriz A^* se obtiene una familia de enteros $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ de enteros tales que

$|a_{i,j}| \leq |c_{i,j}| = m_i - n_j$ para $1\leq i, j\leq p$ y $|A| = |A^*| = m_1 + \ldots + m_p - n_1 - \ldots - n_p$

con lo cual está probado el resultado.

Supongamos ahora que la matriz $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ tiene como orden total el valor $-\infty$. Entonces para cada permutación $\tau \in \$_p$ se tiene

$|A| = |a_{1,\tau(1)}| + \ldots + |a_{p,\tau(p)}| = -\infty$ es decir $|a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{p,\tau(p)}| = -\infty$ con lo cual $a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{p,\tau(p)} = 0$. Para este tipo de matrices se define el grado de trivialidad de su determinante.

<u>Definición III.4.8.</u>- Sea $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ una matriz de elementos de $\mathcal{D}$. Para cada elemento $a_{i,j}$ $1\leq i,j\leq p$ se define el índice

$$d_{i,j}= \begin{cases} 0 & \text{si } |a_{i,j}| \in \mathbb{Z} \iff a_{i,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } |a_{i,j}| = -\infty \iff a_{i,j} = 0 \end{cases}$$

Llamaremos grado de trivialidad del determinante de la matriz A al número natural $r \in \mathbb{N}$ definido por

$$r = \inf \{ d_{1,\tau(1)} + \dots + d_{p,\tau(p)} \;/\; \tau \in \$_p \}$$

es decir, r es el número mínimo de elementos nulos que aparecen en un producto elemental de la matriz A.

Se verifica entonces el siguiente resultado debido a Frobenius (véase [32] Teorema 4 pág 33).

Lema III.4.9.- Si la matriz A de orden p tiene por grado de trivialidad del determinante el natural $r > 0$ entonces existe una submatriz nula de orden $q \times q'$ tal que $q + q' = n + r$.

Lema III.4.10.- Sea A una matriz de orden p y elementos de $\mathcal{D}$ tal que su orden total es $-\infty$; entonces $\det_\Sigma A = 0$.

Si $| A | = -\infty$ el grado de trivialidad del determinante de A es estrictamente positivo, aplicando el lema anterior la matriz A puede escribirse, una vez efectuada una permutación de filas y columnas, como

$$A = \left(\begin{array}{c:c} A' & 0 \\ \hdashline B' & C' \end{array} \right)$$

donde $A' \in \mathcal{M}_{qx(n-q')}(\mathcal{D})$, $B' \in \mathcal{M}_{(n-q)x(n-q')}(\mathcal{D})$, $C' \in \mathcal{M}_{(n-q)xq'}(\mathcal{D})$ y como $q + q' = n + r > n$ se tiene $q > n - q'$ con lo cual la matriz $A' \in \mathcal{M}_{qx(n-q')}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{M}_{qx(n-q')}(k)$ está formada por vectores fila linealmente dependientes sobre el microlocalizado k, y por tanto los vectores fila de la matriz A son también linealmente dependientes y se tiene entonces que $\det_\Sigma A = 0$

Lema III.4.11.- Sea $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ una matriz normal de elementos de $\mathcal{D}$. Entonces $\det_{\Sigma} A$ coincide con la parte principal del determinante de los simbolos principales de A. (Se entiende por parte principal de un elemento de un anillo graduado a la componente homogénea de orden máximo de dicho elemento). Nótese que en virtud de la proposición III.1.8 las matrices normales se caracterizan por ser aquellas para las cuales se verifica $|\det_{\Sigma} A| = |A|$.

Este resultado es consecuencia inmediata de la proposición III.1.7 y el teorema III.4.7

Hasta el momento no hemos hecho uso de la hipótesis de ser $gr\mathcal{D}$ factorial. Esta hipótesis será necesariapara obtener el siguiente resultado que usaremos más adelante.

Lema III.4.12.- Segundo Lema de normalización.- Sea h un elemento homogéneo e irreducible del dominio factorial $gr\mathcal{D}$, denotemos por v_h la valoración sobre el cuerpo de fracciones $gr\mathcal{D}$ asociada a h, es decir $v_h(b)= m \Leftrightarrow b=f^m. c/d$ donde $c, d \in gr\mathcal{D}$ f no divide a c y f no divide a d . Dada una matriz $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ cuadrada con coeficientes en $\check{\mathcal{D}}$ y tal que su orden total es un entero $|A|\in \mathbb{Z}$ entonces existe una matriz cuadrada P de orden p obtenida como producto de matrices cuadradas con coeficientes en $\mathcal{D}$ que defieren a lo sumo en una fila de la matriz identidad tal que

i.- $v_h(\det_{\Sigma}P)=0$.

ii.- P.A es normal(Definición III.4.2).

En efecto dada la matriz A y denotando también por $|\ |$ el orden de los elementos homogéneos de $gr\mathcal{D}$, podemos definir el entero $n(A)=|A|-|\det_{\Sigma}A|\in \mathbb{N}$ Por la prop III.1.7 se tienen $n(A)\geq 0$, si $n(A)=0$ entonces A es normal(Proposición III.1.8) y tomando $P = I_p$ se verifica el lema

Para $n(A)>0$ probaremos por inducción el resultado suponiendo que se verifica para toda matriz cuadrada B tal que $0 \leq n(B) < n(A)$.

Se consideran $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ elementos de $\mathbb{Z}$ tales que

$$|a_{i,j}| \leq m_i - n_j \quad 1 \leq i,j \leq p \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{p} (m_i - n_i) = |A|$$

y definimos la matriz $H = (\sigma_{m_i - n_j}(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq p} = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ es decir

$$h_{i,j} = \begin{cases} \sigma(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} & |a_{i,j}| = m_i - n_j \\ 0 & |a_{i,j}| \leq m_i - n_j \end{cases}$$

Entonces como $n(A) > 0$ la matriz A no es normal luego det $H = 0$ (Prop. III.1.8). Existen por tanto, elementos homogéneos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in gr\mathcal{D}$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . h_{i,j} = 0$ $j = 1, \ldots, n$. En efecto existen elementos no nulos $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_p$ del cuerpo de fracciones $gr\mathcal{D}$ tales que $\sum_{i=1}^{p} \xi_i . h_{i,j} = 0$ y quitando denominadores se puede suponer que $\xi_1, \ldots, \xi_p \in gr\mathcal{D}$. Puesto que algún ξ_i es distinto de cero supongamos que, por ejemplo, $\xi_1 \neq 0$ y sea α_1 una componente homogénea no nula de ξ_1. Si $|\alpha_1| = r_1$ y si α_j la componente homogénea de ξ_j de orden $r_j = r_1 + n_j - n_1$ entonces se tiene, en virtud de la definición de H,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . h_{i,j} = 0 \qquad \text{para todo j.}$$

Sea ahora $s \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $v_h(\alpha_s) \leq v(\alpha_i)$ $i = 1, \ldots, p$ y sean $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{D}$ tales que

$$\sigma(a_i) = \alpha_i . h^{-v_h(\alpha_s)} \qquad i = 1, \ldots, p$$

Entonces para la matriz $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ dada por

$$q_{i,j} = \begin{cases} a_j & i = s \\ \delta_{i,j} & i \neq s \end{cases}$$

se tiene que $Q.A = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ donde

$$b_{i,j}=\begin{cases} a_{i,j} & i\neq s \\ \sum_{l=1}^{p} a_r.a_{r,j} & i=s \end{cases}$$

y $\quad |b_{i,j}|=|a_{i,j}| \quad i\neq s \quad j=1, \ldots, p \qquad |b_{s,j}|<|a_{s,j}| \quad j=1, \ldots, p$

y por tanto $|A|>|Q.A|$.

Además $|det_{\Sigma}(Q.A)|=|det_{\Sigma}Q.det_{\Sigma} A|=|det_{\Sigma}Q|+|det_{\Sigma} A|=|\alpha_s|+|det_{\Sigma} A|\geq |det_{\Sigma} A|$

al ser la filtración sobre $\mathcal{D}$ discreta y consecuentemente $|\alpha_s|\geq 0$. Por consiguiente $n(Q.A)<n(A)$ y $v_h(detQ)=0$. Entonces aplicando las hipótesis de recurrencia sobre Q.A existe P_1 tal que $v_h(det_{\Sigma}P_1)=0$ y además $P_1.Q.A$ es normal. Tomando $P=P_1.Q$ se verifica el segundo lema de normalización.

Como consecuencia de este lema y de su demostración se sigue que si $gr\mathcal{D}$ es un dominio noetheriano y factorial entonces det_{Σ} es regular. En efecto para toda matriz A con coeficientes en D y para todo h homogéneo e iireducible se tiene $det_{\Sigma}P.det_{\Sigma}A \in gr\mathcal{D}$ donde $v_h(det_{\Sigma}P)=0$. Si $det_{\Sigma}A\notin gr\mathcal{D}$ entonces existe un elemento h homogéneo e irreducible tal que $v_h(det_{\Sigma}A)<0$, luego se tendría $v_h(det_{\Sigma}P.det_{\Sigma}A)<0$ lo cual es contradictorio.

Pasemos ahora a aplicar estos resultados al caso que nos interesa. Para ello consideraremos un $\mathcal{D}$-módulo M de generación finita y una presentación finita sobre M

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Tenemos entonces, el diagrama de ideales determinantales

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_r(gr\lambda) & \subset & \mathfrak{F}_r(\lambda) \\ \cap & & \cap \\ \mathfrak{F}_r(gr\pi) & \subset & \mathfrak{F}_r(\pi) \end{array}$$

El siguiente resultado es fundamental para establecer la comparación entre los ideales $\mathfrak{F}_r(gr\pi)$ y $\mathfrak{F}_r(\pi)$

Lema III.4.13.- Sea $(\mathcal{D},\Sigma)$ un anillo filtrado de filtración separada, discreta, creciente (estrictamente) y tal que su graduado asociado $gr\mathcal{D}$ es un dominio conmutativo noetheriano y factorial. Dados un $\mathcal{D}$-módulo M y un homomorfismo suprayectivo $\pi:\mathcal{D}^q \longrightarrow M$ entonces para cada elemento homogéneo irreducible $h\in gr\mathcal{D}$ si denotamos mediante v_h la valoración discreta asociada al elemento h, se verifica que para cada elemento $a\in \mathfrak{F}_r(\pi)$ existe $b\in gr\mathcal{D}$ tal que $v_h(b)=0$ y además $b.a\in \mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$.

Puesto que $\mathfrak{F}_r(\pi)=\sum_{\lambda} \mathfrak{F}_r(\lambda)$, para probar el resultado bastará probarlo para cada a de $\mathfrak{F}_r(\lambda)$ siendo $\lambda: \mathcal{D}^p \longrightarrow \mathcal{D}^q$ un $\mathcal{D}$-homomorfismo haciendo exacta la sucesión

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Más concretamente bastará suponer que a es el determinante de una submatriz de orden $s=q-r$ de la matriz $B(\lambda)$ asociada al homomorfismo λ.

Sean $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p \in Ker\ \pi$ los elementos imagen por λ de los elementos de la base estándar de $\mathcal{D}^p$, $\underline{a}_i=(a_{i,1}, ..., a_{i,q})\in \mathcal{D}^q$, supongamos que a es el determinante de la submatriz correspondiente a las s-primeras filas y las s-primeras columnas de la matriz formada por $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_p \in Ker\ \pi$. Sea $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le s}$ por el segundo lema de normalización (III.4.12), para cada elemento irreducible y homogéneo $h\in gr\mathcal{D}$, existe una matriz B tal que B.A es normal y $v_h(detB)=0$.

Si ponemos $(\underline{c}_1, ..., \underline{c}_s)^t=B.(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_s)^t$ entonces $\underline{c}_1, ..., \underline{c}_s$ son nuevamente syzygeas, es decir elementos de $Ker\ \pi$.

Definamos $\lambda': \mathcal{D}^{p+s} \longrightarrow \mathcal{D}^q$ mediante

$\lambda'(e_i)=\underline{a}_i \quad i=1, ..., p$

$\lambda'(e_{p+i})=\underline{c}_i \quad i=1, ..., s.$

Entonces obviamente la sucesión

$$\mathcal{D}^{p+s} \xrightarrow{\lambda'} \mathcal{D}^{q} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

es exacta. Si ahora se considera la matriz normal.

$$B.A = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s,1} & \cdots & c_{s,s} \end{pmatrix}$$

y se consideran enteros m_i, n_j tales que $|c_{i,j}| \leq m_i - n_j$ $1 \leq i \leq s$ $1 \leq j \leq s$, y

$\det_{\Sigma}(B.A) = \det(\sigma_{m_i, n_j}(c_{i,j}))$, entonces podemos considerar una q-upla

$\underline{d} = (d_1, \ldots, d_q) \in \mathbb{Z}^q$ donde $d_j = n_j$ $1 \leq j \leq s$, y para cada $s \leq j \leq q$ d_j es un entero suficientemente grande para que $\sigma_{m_i - n_j}(c_{i,j}) = 0$ para cada i con $1 \leq i \leq s$. Tomando ahora la filtración por traslación sobre $\mathcal{D}^q$ relativa a esta q-upla se tiene inducida una filtración sobre $\mathcal{D}^{p+s}$ (en la (p+s)-upla de grados correspondiente los últimos s enteros son los elementos $m_1, \ldots, m_s$) y se tiene el $gr\mathcal{D}$-homomorfismo $\bar{\lambda}'_{\underline{d}} : (gr\mathcal{D})^{p+s} \longrightarrow gr\mathcal{D}^q$ cuya matriz asociada en las bases estándar es

$$B(\bar{\lambda}'_d) = \begin{pmatrix} \sigma_{m_1+d_1}(a_{1,1}) & \cdots & \sigma_{m_1+d_q}(a_{1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m_p+d_1}(a_{p,1}) & \cdots & \sigma_{m_p+d_q}(a_{p,q}) \\ \sigma_{m_1+d_1}(c_{1,1}) & \cdots & \sigma_{m_1+d_q}(c_{1,q}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m_{p+s}+d_1}(c_{s,1}) & \cdots & \sigma_{m_{p+s}+d_q}(c_{s,p}) \end{pmatrix}$$

siendo $m_{s+1}, \ldots, m_{p+s}$ los órdenes respectivos de $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_s$ relativos a la $\underline{d}$-filtración sobre $\mathcal{D}^q$.

El determinante $\det_\Sigma(B.A)$ es pues el determinante de una submatriz sxs de $B(\bar{\lambda}'_d)$ y de aquí $\det_\Sigma(B.A) \in \mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}'_d)$. Como $\mathfrak{F}_r(\bar{\lambda}'_d) \subset \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M) \subset \mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$ se tiene $\det_\Sigma(B.A) = \det_\Sigma(B).\det_\Sigma(A) = \det_\Sigma(B).a \in \mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$.

Poniendo $b = \det_\Sigma(B)$ se tienen $v_h(b)=0$ y $b.a \in \mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$, lo que prueba el lema.

Estamos ahora en condiciones de medir la diferencia entre $\mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$ y $\mathfrak{F}_r(\pi)$. Medida que daremos mediante el ideal transportador que se define de la siguiente forma.

<u>Definición III.4.14.</u>- Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo. Dados dos ideales I,J de dicho anillo llamaremos ideal transportador de J en I al ideal (I; J) definido por

$$(I : J) = \{x \in \mathcal{R} \ / x.I \subset J\}.$$

Esta definición nos permite en función del lema III.4.13 probar el teorema de proximidad siguiente.

<u>Teorema III.4.15. Primer Teorema de proximidad.</u>- Sea $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado de filtración discreta, estrictamente creciente y tal que su graduado asociado $gr\mathcal{D}$ es un dominio conmutativo noetheriano y factorial. Dado un $\mathcal{D}$-módulo M y un $\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo $\pi : \mathcal{D}^q \longrightarrow M$, entonces para cada natural $r \in \mathbb{N}$ se verifica

1.-Para todo elemento irreducible y homogéneo $h \in gr\mathcal{D}$ de valoración asociada v_h existe $b \in gr\mathcal{D}$ tal que $v_h(b)=0$ y $b.\mathfrak{F}_r(\pi) \subset \mathfrak{F}_r(gr\ \pi)$.

2.- Para cada elemento irreducible y homogéneo $h \in gr\mathcal{D}$ se tiene

$$(\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\ \pi) : \mathfrak{F}_r(\pi)) \not\subset (h).$$

El apartado 2 es consecuencia inmediata del apartado 1 y de la noetherianidad del anillo $\mathrm{gr}\mathcal{D}$. En efecto $\mathfrak{F}_r(\pi)$ es de generación finita con lo cual dado un sistema de generadores $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{F}_r(\pi)$ del ideal, existen $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$ tales que $v_h(b_i)=0$ y $b_i.a_i \in \mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\ \pi)$ para $i=1, \ldots, n$. Poniendo $b= b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$ se tiene $b.a \in \mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\ \pi)$ para cada $a \in \mathfrak{F}_r(\pi)$ y además

$$v_h(b)=\sum_{i=1}^{n} v_h(b_i)=0$$

Tenemos por tanto la siguiente conclusión. Nótese que si $(\mathcal{R}_v, v)$ es un anillo de valoración e $I \subset \mathcal{R}_v$ es usual denotar por $v(I)$ al valor $v(I)=\inf\{v(x)/x\in I\}$.

Corolario III.4.16.- En las condiciones del teorema de proximidad se verifica que para cada elemento homogéneo e irreducible $h \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$ entonces

$$v_h(\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi))= v_h(\mathfrak{F}_r(\pi))$$

Para el caso r=0 se tiene un resultado análogo al teorema III.3.9 reemplazando la invariancia del radical respecto de π por la invariancia en el sentido del teorema y corolario anteriores.

Teorema III.4.17. Segundo Teorema de proximidad.- 1.- Sea M un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita . Dados dos $\mathcal{D}$-homomorfismos suprayectivos $\pi : \mathcal{D}^q \longrightarrow M$ $\pi' : \mathcal{D}^r \longrightarrow M$, entonces se verifica que $v_h(\mathfrak{F}_o(\pi))= v_h(\mathfrak{F}_o(\pi'))$ para cada elemento homogeneo e irreducible h de $\mathrm{gr}\mathcal{D}$.

2.- El ideal transportador $(\mathfrak{F}_o(\pi); \mathfrak{F}_o(\pi'))$ no está contenido en ningún ideal principal (h) con h homogéneo.

El proceso a seguir para demostrar este resultado es análogo al realizado en el teorema III.3.9. La primera etapa de la demostración de dicho teorema nos dice que si $\underline{m}$ y $\underline{m}'$ son equivalentes (es decir existe un isomorfismo que los relaciona), entonces se tiene $\mathfrak{F}_o(\pi)= \mathfrak{F}_o(\pi')$, lo cual implica obviamente que $v_h(\mathfrak{F}_o(\pi))=v_h(\mathfrak{F}_o(\pi'))$.

Supongamos ahora que $q=p+1$ y que

$\pi(e_1)= \pi'(e_1)=m_1=n_1$, ... , $\pi(e_p)=\pi'(e_p)=m_p=n_p$, $\pi'(e_{p+1})=0$.

Consideremos una matriz $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p+1}$ de syzygeas de M relativa a $\underline{n}$, y supongamos además que $\det_\Sigma A=\delta\neq 0$. Por el Segundo Lema de normalización dado un elemento $h \in \mathrm{gr}\mathcal{D}$, existe una matriz P tal que $B=P.A$ es normal y $v_h(\det_\Sigma P)=0$.Las filas de la matriz B son nuevamente syzygeas para $\underline{n}$, por tanto de la forma $(b_{i,1}, \dots , b_{i,p}, t_i)$ donde $(b_{i,1}, \dots , b_{i,p})$ es una syzygea para $\underline{m}$ y t_i un elemento arbitrario de $\mathcal{D}$. Como B es normal, el determinante de B se puede calcular mediante símbolos principales, es decir existen enteros $r_1, \dots , r_q$ y $s_1, \dots , s_q$ tales que

$$\det_\Sigma B = \det \begin{pmatrix} \sigma_{r_1+s_1}(b_{1,1}) & \cdots\cdots & \sigma_{r_1+s_p}(b_{1,p}) & \sigma_{r_1+s_q}(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{r_q+s_1}(b_{q,1}) & \cdots\cdots & \sigma_{r_q+s_p}(b_{q,p}) & \sigma_{r_q+s_q}(t_q) \end{pmatrix}$$

Desarrollando dicho determinante conmutativo por los elemento de la última columna se obtiene que cada menor pxp que aparece en dicho desarrollo es o bién cero o es el determinante de una matriz pxp normal de syzygeas relativas a $\underline{m}$, por lo tanto un elemento $\mathfrak{F}_o(\pi)$. Se sigue que $\det_\Sigma B \in \mathfrak{F}_o(\pi)$ y de aquí $\det_\Sigma P. \det_\Sigma A \in \mathfrak{F}_o(\pi)$ con $v_h(\det_\Sigma P)=0$, como se quería probar.

Nótese que esta segunda etapa se podía haber probado usando el teorema anterior, sin más que tener en cuenta que, por las definiciones se tiene $\mathfrak{F}_o(\mathrm{gr}\pi)=\mathfrak{F}_o(\mathrm{gr}\pi')$. Hemos efectuado, sin embargo, la prueba directa por las mismas razones que en el teorema III.3.9.

Si ahora $q=p+1$ pero $n_{p+1}\neq 0$, entonces $\underline{n}$ es equivalente a $\underline{m}\cup\{0\}$ y dichos sistemas son equivalentes, por tanto el resultado se tiene también en este caso.

Finalmente, para dos sistemas de generadores arbitrarios $\underline{m}$ y $\underline{n}$ bastará iterar el razonamiento obteniéndose que

$$v_h(\mathfrak{F}_o(\pi))= v_h(\mathfrak{F}_o(\pi_1))= v_h(\mathfrak{F}_o(\pi'))$$

siendo π_1 el $\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo asociado al sistema generador $\underline{mn}$. La segunda parte del teorema es idéntica a la del primer teorema de proximidad.

Notas III.4.18.- 1.- Considerando el esquema (más concretamente el espacio topológico subyacente) $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}\mathcal{D})$ se tiene una versión geométrica dual de la condición ii) de los teoremas de proximidad III.4.15 y III.4.17. En efecto, la condición ii) en el primer teorema afirma que la variedad del ideal transportador $I_r=(\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi): \mathfrak{F}_r(\pi))$, es decir

$$V_r=V(I_r)=\{\ \rho\in X\ /\ \rho\supset I_r\}\ ,$$

no contiene a ninguna hipersuperficie, es decir, a ninguna subvariedad de la forma

$$V(h)=\{\rho\in X\ /h\in \rho\}$$

donde $h\in\mathrm{gr}\mathcal{D}$ es un elemento homogéneo no unidad. Teniendo en cuenta el terorema de altura de Krull, se tiene que la codimensión V_r es mayor o igual que 2 (véase [24] para el lenguaje geométrico). Un comentario similar se tiene para el segundo teorema de proximidad.

2.- Si $\dim \mathrm{gr}\mathcal{D}=1$ entonces se tendrá $\mathfrak{F}_r(\pi)=\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi)$ y que $\mathfrak{F}_o(\pi)$ no depende de π. Si $\dim \mathrm{gr}\mathcal{D}=2$ entonces los ideales transportadores entre los objetos que se comparan, estarán concentrados en un número finito de puntos.

3.- La condición 1 en el teorema puede escribirse en la forma $v_h(\mathfrak{F}_r(\mathrm{gr}\pi))= v_h(\mathfrak{F}_r(\pi))$

o bién $v_h(\mathfrak{F}_o(\pi)) = v_h(\mathfrak{F}_o(\pi'))$ para todo h. Una pregunta natural es si para toda valoración sobre el anillo se verifica una propiedad similar. No conocemos, por el momento, la respuesta a esta pregunta, aunque parece que el método de la demostración del lema de normalización no es generalizable a otros casos.

§ 5. VARIEDADES CARACTERISTICAS Y CICLOS CARACTERISTICOS.

Consideremos un anillo conmutativo y noetheriano $\mathfrak{R}$ y una familia $\{(\mathfrak{R}_v,\varphi_v)\}_{v\in \mathcal{H}}$ siendo $(\mathfrak{R}_v, v)$un anillo de valoración y $\varphi_v:\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}_v$ un homomorfismo de anillos.

Asociada a esta familia $\mathcal{H}$ podemos definir la siguiente relación de equivalencia entre ideales de $\mathfrak{R}$. Dados dos ideales I, $J\subset\mathfrak{R}$, ponemos

$$I\approx_{\mathcal{H}} J \Leftrightarrow v(\varphi_v(I))= v(\varphi_v(J)) \quad \forall v\in \mathcal{H}.$$

Para diferentes familias de pares $(\mathfrak{R}_v, v)$ tendremos, lógicamente distintas relaciones de equivalencia. Destacaremos las principales propiedades de las mismas.

Caso I.- Supondremos que $\mathcal{H}_1$ está formada por todos los pares posibles $(\mathfrak{R}_v, v)$.

En este caso se tiene $I \approx_1 J$ sí y sólo sí $\bar{I}=\bar{J}$, donde $\bar{I}$ y $\bar{J}$ denotan los cierres enteros de los ideales I y J. Recordemos que, dado el ideal I de $\mathfrak{R}$ el cierre entero de I se define como el conjunto

$$\bar{I}=\{x\in \mathfrak{R}/ \exists n\in \mathbb{N} \text{ y } \exists a_1\in I, \ldots, a_n\in I^n \text{ verificando } x^n+a_1.x^{n-1}+ \ldots +a_n=0\}.$$

La equivalencia anterior entre la relación de equivalencia $\approx_1$ y la dependencia entera se conoce como el criterio valorativo de la dependencia entera (véase por ejemplo [35]). La igualdad de la dependencia entera entre dos ideales induce la igualdad de radicales como fácilmente se puede comprobar a partir de las definiciones de dependencia entera.

Caso II.- Supongamos que $\mathfrak{R}$ es factorial y tomamos la familia $(\mathfrak{R}_{(h)}, \varphi_h)_{h\in \mathcal{H}_2}$ donde $\mathcal{H}_2$ es el conjunto de elementos irreducibles $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{(h)}$ es la localización en el ideal primo (h) y $\varphi_h:\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}_{(h)}$ la aplicación canónica. Se tiene una nueva relación de equivalencia $\approx_2$. Esta relación, gracias a la propiedad de ser $\mathfrak{R}$ factorial nos da una serie de resultados referentes a los ideales. Así son equivalentes

i.- $I \approx_2 J$.

ii.- $\forall h$ irreducible se tiene $v_h(I)= v_h(J)$.

iii.-$I \subset (h^{\alpha}) \Leftrightarrow J \subset (h^{\alpha})$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ $\forall h \in \mathcal{H}_2$.

iv.- $\bigcap_{h \in \mathcal{H}_2} \varphi_h^{-1} \varphi_h(I) = \bigcap_{h \in \mathcal{H}_2} \varphi_h^{-1} \varphi_h(J)$.

<u>Caso III.</u>- Si suponemos que $\mathcal{R}$ es factorial y graduado tomamos la subfamilia $(\mathcal{R}_{(h)}, \varphi_h)_{h \in \mathcal{H}_3}$ donde $\mathcal{H}_3$ es el conjunto de elementos irreducibles homogéneos, entonces la relación la relación de equivalencia $\approx_3$ definida por $\mathcal{H}_3$ verifica también las propiedades análogas, reemplazando $h \in \mathcal{H}_2$ por $h \in \mathcal{H}_3$ en todos ellos.

Consideremos ahora un anillo filtrado $(\mathcal{D}, \Sigma)$ de filtración discreta y creciente estrictamente, cuyo graduado asociado $gr\mathcal{D}$ sea un dominio conmutativo noetheriano y factorial. Dado un $\mathcal{D}$-módulo M de generación finita y un $\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo

$$\pi: \mathcal{D}^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tenemos definidas las familias de ideales $\{\mathcal{F}_r(\pi)\}_{r \in \mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{F}_r(gr\pi)\}_{r \in \mathbb{N}}$ en el anillo $gr\mathcal{D}$ En virtud del teorema III.4.15 se verifica

$$v_h(\mathcal{F}_r(\pi)) = v_h(\mathcal{F}_r(gr\pi))$$

para cada elemento h irreducible y homogéneo es decir $\mathcal{F}_r(\pi) \approx_3 \mathcal{F}_r(gr\pi)$ para cada natural $r \in \mathbb{N}$. Además para estos ideales se tiene la igualdad de radicales

$$\sqrt{\mathcal{F}_r(\pi)} = \sqrt{\mathcal{F}_r(gr\pi)}$$

En estas condiciones podemos asociar a cada homomorfismo suprayectivo π los siguientes objetos.

i.- Un cerrado de Spec($gr\mathcal{D}$) $Y_r(\pi)$ definido por

$$Y_r(\pi) = \mathcal{V}(\mathfrak{F}_r(\pi)) = \mathcal{V}(\mathfrak{F}_r(gr\pi))$$

Nótese que la igualdad muestra dos formas de calcular $Y_r(\pi)$, una a través de determinantes no conmutativos y otra a través de determinantes conmutativos. Asímismo se tienen sus componentes irreducibles $Z_{r,1}(\pi), \ldots, Z_{r,k_r}(\pi)$ que vienen dadas por los ideales primos minimales que contienen tanto a $\mathfrak{F}_r(\pi)$ como a $\mathfrak{F}_r(gr\pi)$.

ii.- Al ser $gr\mathcal{D}$ un anillo factorial las componentes irreducibles de codimensión 1 son hipersuperficies, supongamos que estas son $Z_{r,1}(\pi), \ldots, Z_{r,s_r}(\pi)$ (con $s_r \le k_r$) se tiene un ciclo en codimensión 1 dado por

$$C_r(\pi) = \sum_{h \in \mathcal{H}_3} v_h(\mathfrak{F}r(\pi)).\mathcal{V}(h) = \sum_{h \in \mathcal{H}_3} v_h(\mathfrak{F}r(gr\pi)) = \sum_{i=1}^{s_r} \alpha_{r,i}.\ Z_{r,i}(\pi)$$

donde $\alpha_{r,i} = v_{h_i}(\mathfrak{F}_r(\pi))$ para el elemento homogéneo e irreducible h_i correspondiente a $Z_{r,i}(\pi)$.

iii.- $Y_0(\pi)$ y $C_0(\pi)$ no dependen de π(Teorema III.3.9 yTeorema III.4.17).

Daremos entonces las siguientes definiciones

<u>Definiciones III.5.1.</u>- En las condiciones anteriores llamaremos <u>r-ésima variedad característica relativa a π</u> al cerrado $Y_r(\pi)$ y <u>r-ésimo ciclo característico en codimensión 1</u> al ciclo $C_r(\pi)$. Llamaremos, respectivamente, <u>variedad característica de M</u> y <u>ciclo característico en codimensión 1</u> de M al cerrado $Y_o = Y_0(\pi)$ y al ciclo $C_o = C_0(\pi)$ para cualquier π.

Nótese que Y_0 y C_0 se pueden calcular a partir de cualquier morfismo π y mediante determinantes conmutativos.

El problema del cálculo de estos ideales radica en la dificultad de encontrar $\mathcal{D}$-homomorfismos λ tal que se tenga una presentación

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

y se verifique $\mathfrak{F}_r(\pi)= \mathfrak{F}_r(\lambda)$ para cada $r\in \mathbb{N}$. Tales $\mathcal{D}$-homomorfismos λ existen en virtud de la noetherianidad del anillo gr$\mathcal{D}$ incluso para todo $r\in \mathbb{N}$ simultáneamente el problema es dar criterios para encontrar dichos λ's.

Daremos algunos resultados parciales satisfactorios, usando las principales relaciones obtenidas en los primeros parágrafos de este capítulo.

<u>Teorema III.5.2.</u>- Dados un $\mathcal{D}$-módulos M de generación finita y un $\mathcal{D}$-homomorfismo suprayectivo $\pi:\mathcal{D}^q \longrightarrow M$, se tiene

1.- Si $\lambda: \mathcal{D}^p \longrightarrow \mathcal{D}^q$ un $\mathcal{D}$-homomorfismo haciendo exacta la sucesión

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

tal que es estricto para algún $\underline{d}\in \mathbb{Z}^q$. Entonces

$$\sqrt{\mathfrak{F}_0(\lambda)} = \sqrt{\mathfrak{F}_0(\pi)} \quad .$$

2.- Dado $r>0$, sean $s=q-r$ y $\lambda: \mathcal{D}^p \longrightarrow \mathcal{D}^q$ un $\mathcal{D}$-homomorfismo haciendo exacta la sucesión

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

tal que para cada subconjunto $J\subset\{1,..., q\}$ de cardinal s existan $d_1, ..., d_s\in \mathbb{Z}$ que hagan estricto el $\mathcal{D}$-homomorfismo $\lambda_J=\rho_J\circ\lambda$ donde $\rho_J: \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^s$ es la proyección sobre los índices de J, entonces se verifica

$$\sqrt{\mathcal{F}_r(\lambda)} = \sqrt{\mathcal{F}_r(\pi)}$$

Probemos la parte 1. En virtud del corolario III.3.7 se tiene

$$\sqrt{\mathcal{F}_o(\lambda)} = \sqrt{\mathcal{F}_o(gr_{\underline{d}}M)}$$

y al ser λ estricto para $\underline{d}$ se verifica $gr_{\underline{d}}\pi = \mathrm{Coker}\bar{\lambda}_{\underline{d}}$ por tanto por III.1.6 se tiene

$$\mathcal{F}_o(gr_{\underline{d}}M) \subset \mathcal{F}_o(\lambda) \subset \mathcal{F}_r(\pi)$$

y de aquí

$$\sqrt{\mathcal{F}_o(\lambda)} = \sqrt{\mathcal{F}_o(\pi)} \quad .$$

Para probar la parte 2 consideremos $a \in \mathcal{F}_r(\pi)$ que sea un menor de orden $s=q-r$ de una matriz de syzygeas de M para $\pi(e_1), \ldots, \pi(e_q)$. Si $\{i_1, \ldots, i_s\}=J$ son las columnas correspondientes a dicho menor, se considera la proyección $\rho_J : \mathcal{D}^q \longrightarrow \mathcal{D}^s$ que define un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{D}^p & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{D}^q & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{D}^p & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{D}^s & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

verificándose además que $a \in \mathcal{F}_o(\pi_J)$ como se tienen $d_{i_1}, \ldots, d_{i_s} \in \mathbb{Z}$ tal que λ_J sea estricto relativo a ellos, se tiene por 1 que

$$a \in \sqrt{\mathcal{F}_o(\lambda_J)} = \sqrt{\mathcal{F}_o(\pi_J)}$$

Por otro lado, la matriz asociada a λ_J en las bases estándar es una submatriz de la asociada a λ, y es de tamaño pxs, por tanto se verifica

$$\mathfrak{F}_0(\lambda_J) \subset \mathfrak{F}_r(\lambda)$$

luego se tiene la igualdad

$$\sqrt{\mathfrak{F}_r(\lambda)} = \sqrt{\mathfrak{F}_r(\pi)}$$

Nota III.5.3.- Podríamos obtener unas propiedades similares para la relación de proximidad entre los ideales $\mathfrak{F}_r(\pi)$ y $\mathfrak{F}_r(\lambda)$ ya que al ser $\mathfrak{F}_r(gr\pi)$ de generación finita podremos encontrar un número finito de generadores, y suponiendo que cada uno de ellos pertenezca a algún $\mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}}M)$ se tendría la igualdad $\mathfrak{F}_r(gr\pi) = \mathfrak{F}_r(gr\lambda)$ sin más que tomar λ estricto para cada $\underline{d}$. Dicho de otra forma, si existen $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_t$ tales que

$$\mathfrak{F}_r(gr\pi) = \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}_1}M) + \dots + \mathfrak{F}_r(gr_{\underline{d}_t}M)$$

entonces tomando λ estricto simultáneamente para las famililias de órdenes $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_t$ se tiene $\mathfrak{F}_r(\lambda) \approx_3 \mathfrak{F}_r(\pi)$.

El problema radicaría ahora en dar condiciones para el cálculo de las familias de grados $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_t$ arriba expresadas. Siempre queda el recurso de tomar un $p=\infty$ y λ que sea estricto simultáneamente para todo los valores de p.

El siguiente resultado es de utilidad en muchos casos particulares.

Teorema III.5.4.- Si M es un $\mathcal{D}$-módulo de generación finita se tiene una presentación finita del tipo

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{D}^q \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

con $p \leq q$, entonces se tiene $\mathfrak{F}_{q-p}(\lambda) = \mathfrak{F}_{q-p}(\pi)$ y para todo r con $0 \leq r < q-p$, y

$$\mathfrak{F}_r(\lambda) = \mathfrak{F}_r(\pi) = 0.$$

La demostración es muy simple para el caso q=p. En este caso si A es la matriz asociada a λ en las bases estándar entonces toda matriz cuadrada de syzygeas es de la forma P.A y por tanto $\det_\Sigma(P.A) = \det_\Sigma(P).\det_\Sigma(A)$, y de aquí $\mathfrak{F}_0(\pi)$ es principal engendrado por $\det_\Sigma(A)$ y por tanto $\mathfrak{F}_0(\lambda)=\mathfrak{F}_0(\pi)$.

Si ahora p<q se tiene

$$\mathfrak{F}_{q-p}(\pi)=\sum_{\#J=q-p}\mathfrak{F}_0(\pi_J)$$

donde π_J, λ_J, p_J, etc. tienen el mismo significado que en el teorema anterior. Ahora bien $\mathfrak{F}_0(\pi_J)=\mathfrak{F}_0(\lambda_J)$, pues λ_J está dado por una matriz cuadrada, por tanto $\mathfrak{F}_{q-p}(\pi)=\mathfrak{F}_{q-p}(\lambda)$. Si $0\leq r<q-p$ la prueba se termina completando la matriz de λ con filas de ceros y aplicando el mismo resultado.

§ 6. ALGUNOS EJEMPLOS. ANILLOS DE OPERADORES DIFERENCIALES.

Una vez estudiados los invariantes de Fitting definidos sobre anillos filtrados veremos algunos ejemplos particulares de estos anillos, así como algunos cálculos explícitos en los cuales se observan las patologías que verifican dichos ideales de Fitting.

El ejemplo fundamental que ha motivado el desarrollo del capítulo son los anillos de operadores diferenciales sobre anillos conmutativos. Haremos una breve descripción de estos anillos.

Definición III.6.1.- Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con elemento unidad, llamaremos derivación sobre $\mathfrak{R}$ a toda aplicación

$$D:\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$$

verificando

i.- $D(a+b)=D(a)+D(b) \quad \forall (a, b) \in \mathfrak{R}$.

ii.- $D(a.b)=D(a).b+a.D(b) \quad \forall (a, b) \in \mathfrak{R}$.

Entonces dado un anillo $\mathfrak{R}$ y una derivación D definida sobre $\mathfrak{R}$ se define el anillo de operadores diferenciales de $\mathfrak{R}$ para D como el anillo de polinomios $\mathfrak{R}[\partial]$, es decir expresiones $\sum a_i\partial^i$, cuya ley aditiva viene dada por la suma formal de polinomios y la ley producto, en virtud de la propiedad i) de la definición III.6.1 viene determinada por la expresión

$$\partial.a= a.\partial + D(a)$$

En efecto, esta igualdad induce, recurrentemente, la expresión

$$(*) \qquad \partial^n.a = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} D^r(a).\partial^{n-r}$$

con el convenio D^o=Id, y entonces $(\sum a_i.\partial^i).(\sum b_j.\partial^j)$ es, por definición, $\sum a_i.(\partial^i.b_j)\partial^j$

lo cual tiene una expresión $\sum c_k.\partial^k$ en virtud de la igualdad (*).

Análogamente dadas n derivaciones $\{D_1, ..., D_n\}$ sobre el anillo $\mathcal{R}$ tales que conmutan dos a dos, es decir, $D_i \circ D_j = D_j \circ D_i$ para $1 \leq i,j \leq n$, se puede definir el anillo de operadores diferenciales sobre $\mathcal{R}$ para la familia $\{D_1, ..., D_n\}$ como el anillo de polinomios $\mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_n]$ cuya ley aditiva es la suma formal de polinomios y la ley producto verifica las expresiones

$$\partial_i.\partial_j = \partial_j.\partial_i$$

$$\partial_i^n.a = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D_i^r(a).\partial_i^{n-r}.$$

Esta última construcción puede hacerse recurrentemente mediante la extensión $\bar{D}_i$, de las derivaciones D_i definidas sobre $\mathcal{R}$, al anillo $\mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_{i-1}]$ dada por

$\bar{D}_i(a) = D_i(a) \quad \forall a \in \mathcal{R}$

$\bar{D}_i(\partial_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq i-1.$

Usando esta construcción recurrente se puede probar el siguiente resultado [59]

<u>Lema III.6.2.</u>- Dado un anillo $\mathcal{R}$ y n derivaciones $\{D_1, ..., D_n\}$ tales que $D_i \circ D_j = D_j \circ D_i$ $1 \leq i,j \leq n$. Se verifica que el conjunto de operadores diferenciales es un dominio de Ore a la izquierda sí y sólo sí el anillo $\mathcal{R}$ es un dominio de Ore a la izquierda.

Asímismo sobre el anillo de operadores diferenciales $\mathcal{D} = \mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_n]$ podemos definir filtraciones, lógicamente no triviales, que verifiquen además las hipótesis impuestas en los diversos parágrafos de la presente Memoria. Primeramente indiquemos las notaciones a utilizar.

- Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ denotaremos por ∂^α al elemento $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} . .... . \partial^{\alpha_n}$.

- Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ llamaremos orden del elemento α, y lo denotaremos por $|\alpha|$, al natural $|\alpha|= \alpha_1+ \ldots + \alpha_n$.

En estas condiciones todo elemento no nulo P del anillo $\mathcal{D}=\mathcal{R}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ puede escribirse en forma única como $P=\sum a_\alpha.\partial^\alpha$ verificándose que el conjunto $I_p=\{ \alpha\in \mathbb{N}^n / a_\alpha\neq 0\}$ es un conjunto finito.

Definición III.6.3.- Dado el anillo de operadores diferenciales $\mathcal{D}=\mathcal{R}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ y un elemento no nulo $P=\sum a_\alpha.\partial^\alpha$ del anillo $\mathcal{D}$. Llamaremos orden del elemento P al natural |P| definido por

$$|P|=\sup \{|\alpha| / \alpha\in I_p\} .$$

Esta definición nos permite construir sobre $\mathcal{D}$ la filtración, sin más que considerar

$$F_n \equiv F_n\mathcal{D}=\{P\in \mathcal{D}/ |P|\leq n\}\cup\{0\} \qquad n\in \mathbb{N}$$

$$F_n\mathcal{D}= \{0\} \qquad n<0 \quad n\in \mathbb{Z}.$$

Esta filtración $\Sigma=\{F_n\mathcal{D}\}_{n\in \mathbb{Z}}$ que acabamos de definir es separada, estrictamente creciente y discreta. Denotamos por $gr\mathcal{D}$ su graduado asociado, por $\sigma: \mathcal{D} \longrightarrow gr\mathcal{D}$ la aplicación símbolo principal, que es un homomorfismo de semigrupos (véase I §4.2) y por $\xi_1, \ldots, \xi_n$ los símbolos principales, respectivamente, de los elementos $\partial_1, \ldots, \partial_n$, es decir,

$$\xi_i= \sigma(\partial_i) \qquad i=1, \ldots, n.$$

Se tiene el siguiente resultado.

Lema III.6.4.- En las condiciones anteriores $gr\mathcal{D}$ es un anillo isomorfo al anillo de polinomios $\mathcal{R}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, es decir, al anillo de polinomios en n variables conmutativas con coeficientes en $\mathcal{R}$.

En efecto, los elementos de $\mathcal{R}[\xi_1, ..., \xi_n]$ son expresiones formales $\sum a_\alpha \xi^\alpha$ con $a_\alpha \in \mathcal{R}$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $a_\alpha = 0$ salvo para un número finito de elementos $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suma es la suma formal de polinomios y el producto viene dado por

$$(\sum a_\alpha.\xi^\alpha).(\sum b_\beta.\xi^\beta) = \sum a_\alpha.b_\beta.\xi^{\alpha+\beta} \qquad (*).$$

Si ahora $P \in \mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_n] = \mathcal{D}$ es de orden m entonces se tiene

$$P = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha.\partial^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha.\partial^\alpha$$

y por tanto $\sigma(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha.\xi^\alpha$, es decir se tiene $F_m/F_{m-1} = \{ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha.\xi^\alpha \}$. Las operaciones dadas sobre el graduado $\bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m/F_{m-1} = gr_\Sigma \mathcal{D}$ coinciden con los de $\mathcal{R}[\xi_1, ..., \xi_n]$ cuando dichos conjuntos $gr_\Sigma \mathcal{D}$ y $\mathcal{R}[\xi_1, ..., \xi_n]$ se identifican mediante la anterior observación. En efecto, ésto es obvio para la suma, y también para el producto pues se tiene que

$$\sigma((a_\alpha.\partial^\alpha).(b_\beta.\partial^\beta)) = a_\alpha.b_\beta.\xi^{\alpha+\beta}$$

en virtud de la expresión (*).

Si ahora suponemos que $\mathcal{R}$ es un dominio noetheriano conmutativo entonces $gr_\Sigma \mathcal{D}$ será un dominio noetheriano conmutativo y si suponemos además que $\mathcal{R}$ es factorial, entonces por el teorema de Gauss también lo será $gr_\Sigma \mathcal{D}$.

Como ejemplos, más interesantes, de anillos de operadores diferenciales destacaremos los siguientes.

1.- $\mathcal{R} = k[x_1, ..., x_n]$ siendo k el cuerpo de los números reales o el de los números complejos. En este caso particular $\mathcal{D}$ se conoce como el álgebra de Weyl sobre k y se denota por $\mathbb{A}_n(k)$ [7]. Las derivaciones ∂_i son las derivadas parciales $\partial_i=\partial/\partial x_i$.

2.- $\mathcal{R}$ $=k[[x_1, ..., x_n]]$siendo k el cuerpo de los números reales o el de los números complejos. Este anillo $\mathcal{R}$ denota el anillo de series formales en las indeterminadas $x_1, ..., x_n$ con coeficientes en k. Las derivaciones ∂_i son nuevamente las derivadas parciales $\partial_i=\partial/\partial x_i$ .En estos dos ejemplos obviamente funcionan igual si k es un cuerpo arbitrario.

3.- $\mathcal{R}=k\{x_1, ..., x_n\}$ siendo k el cuerpo de los números reales o el de los números complejos. Esta anillo $\mathcal{R}$ denota el anillo de series convergentes en las indeterminadas $x_1, ..., x_n$ y con coeficientes en k. También aquí las derivaciones son las derivadas parciales usuales $\partial_i=\partial/\partial x_i$.

4.- En los tres ejemplos anteriores el anillo $\mathcal{R}$ y, por tanto $gr_\Sigma\mathcal{D}$, son factoriales. Hay otros ejemplos en los cuales esta hipótesis no se da. Por ejemplo, si V es un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y $\mathcal{R}=\mathcal{O}_V$ es al anillo de funciones holomorfas sobre V y $\partial_i=\partial/\partial z_i$ donde $z_1, ..., z_n$ es un sistema de coordenadas sobre $\mathbb{C}^n$, entonces $\mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_n]$ se identifica con el anillo de operadores diferenciales sobre la variedad analítica compleja V. En este caso $\mathcal{D}$ es un dominio pero no es noetheriano. Si se sustituye, sin embargo, V por un compacto $\mathcal{K}\subset \mathbb{C}^n$ entonces $\mathcal{R}=\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ (las funciones holomorfas sobre $\mathcal{K}$) entonces $\mathcal{D}$ sí es un dominio noetheriano. Otro ejemplo sería tomar un abierto $V\subset\mathbb{R}^n$ y el anillo $\mathcal{R}=\mathcal{C}^\infty(V)$ de las funciones diferenciables de tipo $\mathcal{C}^\infty$ sobre V con $\partial_i=\partial/\partial x_i$. Ahora $\mathcal{D}=\mathcal{R}[\partial_1, ..., \partial_n]$ es un ejemplo en el cual $\mathcal{R}$, y por tanto $gr_\Sigma\mathcal{D}$, no es un dominio.

Nos limitaremos, pues, a casos como los tres primeros, en los cuales $\mathcal{D}$ es un dominio conmutativo noetheriano y factorial y se verifica consecuentemente noetherianidad y factorialidad del graduado $gr_{\Sigma}\mathcal{D}$.

Tenemos definidas, por tanto, dos aplicaciones determinante. La primera det_{Σ} que depende del hecho de ser $(\mathcal{D}, \Sigma)$ un anillo filtrado y la segunda det_{σ} dependiente de ser $\mathcal{D}$ un dominio de Ore a la izquierda (Aquí $\sigma: \mathcal{D} \longrightarrow gr_{\Sigma}\mathcal{D}$ es un homomorfismo de semigrupos lo que define det_{σ} , véase I.4.1). Ambas coinciden para matrices con coeficientes en $\mathcal{D}$ (I.4.2). Asímismo se tienen definidas las condiciones para la definición de invariantes de Fitting para presentaciones finitas de $\mathcal{D}$-módulos, cumpliéndose además las hipótesis del lema de normalización. Los $\mathcal{D}$-módulos son los objetos que resultan de la formalización del concepto de sistema diferencial[45].

Los siguientes ejemplos muestran como los resultados obtenidos en este capítulo no son mejorables.

Ejemplo III.6.5.- Se considera $A=\mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ y $\mathcal{D}$ su anillo de operadores diferenciales que verifica que su graduado viene dado por $A[\xi_1,\xi_2]$. Dada la presentación finita

$$\mathcal{D}^2 \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\ \pi\ } \text{Coker}\,\lambda \longrightarrow 0$$

definida por la matriz

$$B(\lambda)\equiv \begin{bmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene, denotando M= Coker λ

1.- $\mathfrak{F}_0(\pi) = <\xi_1 - \xi_2>$

2.- $\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{0}}M) = <\xi_1(\xi_1 - \xi_2), \xi_2(\xi_2 - \xi_1)>$ donde $\underline{0} = (0,0)$

Evidentemente se tiene que $\mathfrak{F}_0(\pi) \neq \mathfrak{F}_0(gr_{\underline{0}}M)$ aunque sus radicales coinciden

Por otro lado si se considera la buena filtración Π sobre M imagen de la filtración libre, entonces el sistema de generadores $\{\pi(e_1), \pi(e_2)\}$ es de cardinal mínimo (véase III § 4) y se tiene $\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}'}M) \subset \mathfrak{F}_0(\pi')$ pero $\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}'}M) \neq \mathfrak{F}_0(\pi')$ para todo π' que induzca la filtración Π para algún valor de $\underline{d}'$, ya que

$\mathfrak{F}_0(gr_{\underline{d}'}M) = \mathfrak{F}_0(gr_{\Pi}M) = < \xi_1 (\xi_1 - \xi_2) , \xi_2 (\xi_2 - \xi_1)> \neq \mathfrak{F}_0(\pi')$

Ejemplo III.6.6.- Se considera $A=\mathbb{C}\{X\}$ y $\mathcal{D}$ su anillo de operadores diferenciales que verifica que su graduado viene dado por $A[\xi]$. Dada la presentación finita

$$\mathcal{D}^2 \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\pi} \text{Coker } \lambda \longrightarrow 0$$

definida por la matriz

$$B(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

se tiene que $\mathfrak{F}_1(\pi) = < \xi >$. Consideremos ahora el cambio de base en $\mathcal{D}^2$ dado por la matriz

$$T= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

y sea $\phi : \mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathcal{D}^2$ el isomorfismo correspondiente.

Denotando por M= Coker λ sea $\pi' : \mathcal{D}^2 \longrightarrow M$ el $\mathcal{D}$-homomorfismo dado por la matriz $A'= B(\lambda).T$,es decir $\pi' = \pi \circ \phi^{-1}$ y por tanto

$$A' = \begin{bmatrix} D & 0 \\ D.x & D \end{bmatrix}$$

Ahora bién, como $D.x=x.D + 1$ se tiene que $(1, D) \in \mathrm{Ker}\pi'$, por tanto $\mathfrak{F}_1(\pi')=\mathcal{D}$.

En conclusión se tienen para el mismo módulo M dos morfismos π y π' tales que:

- los ideales radicales de $\mathfrak{F}_1(\pi')$ y $\mathfrak{F}_1(\pi)$ no coinciden

- $v_\xi(\mathfrak{F}_1(\pi)) \neq v_\xi(\mathfrak{F}_1(\pi'))$, siendo ξ homogéneo e irreducible en gr $\mathcal{D}$.

Esto muestra que para r>0 las variedades características y el ciclo característico dependen de la elección de π.

Ejemplo III.6.7.- Se considera $A=\mathbb{C}\{X\}$ y $\mathcal{D}$ su anillo de operadores diferenciales que verifica cuyo graduado viene dado por $A[\xi]$. Dada la presentación finita

$$\mathcal{D}^3 \xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\pi} \text{Coker }\lambda = M \longrightarrow 0$$

donde λ está definido por la matriz

$$B(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ D & 1 \\ D^2 & D+1 \end{bmatrix}$$

se tiene que $\mathfrak{F}_0(\lambda) = <\xi>$ y $\mathfrak{F}_0(\pi) = \mathcal{D}$ ya que (1, 1), (0, 1) son elementos de $\operatorname{Ker}\pi$. Por tanto en este caso se tiene:

- $\mathfrak{F}_0(\lambda)$ y $\mathfrak{F}_0(\pi)$ tienen distinto radical.

- $v_\xi(\mathfrak{F}_0(\pi)) \neq v_\xi(\mathfrak{F}_0(\pi))$.

Este ejemplo muestra la necesidad de las hipótesis dadas en III.5.2

Indiquemos, finalmente, que en el caso de los operadores diferenciales existen algoritmos que permiten, en la práctica, localizar explícitamente morfismos estrictos relativos a un valor cualquiera de $\underline{d}$. Este es el objetivo de los trabajos de F. Castro ([13] y

[14]) en los que se estudian las bases de división . La posibilidad de localizar tales morfismos permite reducir considerablemente el cálculo del radical de $\mathfrak{F}_r(\pi)$ y del natural $v_h(\mathfrak{F}_r(\pi))$ a la vista del teorema III.5.2 y la nota III.5.3

BIBLIOGRAFIA.-

[1].- Adjamagbo K. .- "Determinants sur des anneaux filtrés". C.R. Acad. Sc. Paris t.293. 1981.

[2].- Adjamagbo K. .- "Reseaux sur des anneaux filtrés". C.R. Acad. Sc. Paris t.294. 1982.

[3].- Adjamagbo K. .- "Equations aux derivées partielles, hyperboliques et holomorphes". Seminaire Jean Vaillant. Col Travaux en Cours. Hermann-Paris. 1984.

[4].- Adjamagbo K. .- "Sur la calculabilité des determinants de matrices d'operateurs differentiels". Colloque d'Algebre- Université de Rennes I. I.R.M.A.R. 1985.

[5].- Artin E. .- "Algebre Geometrique". Cahiers Scientifiques. Gauthiers-Villars. Paris 1972.

[6] .- Atiyah M.E.; Mac Donald J.G.- "Introduction to Commutative Algebra". Addison-Wesley Publishing Company Inc . Massachussets. 1969.

[7].- Bjork J.E. .- "Rings of differential operators". North- Holland 1979.

[8].- Bourbaki N. .- "Algèbre". Chap. 1-2-3.- Ed Hermann. Paris.

[9].- Bourbaki N. .- "Algèbre Commutative". Chap. 3-4- Ed Hermann. Paris.

[10].- Braçonnier J. .- "Elements d'Algebre differentielle graduee". Publ. Université Claude-Bernard. Lyon-1.1982.

[11] .- Campillo A. - Sánchez Giralda T. .- "Finitely generated pjective modules and Fitting ideals". Collectanea Mathematica vol. XXX Fasc. 2º. 1979.

[12].- Cano F.; Hermida J.A.; Tràng L.D. .- "Introducción a la Geometría de los sistemas diferenciales" Colección de Monografías y Memorias XXX. Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid. 1983.

[13].- Castro F. .- These 3eme Cycle. Paris VII. X-84.

[14].- Castro F. .- "Calculs effectifs pour les ideaux d'operateurs differentiels". Preprint.

[15].- Dixmier J. .-" Algebres Enveloppantes". Cahiers Scientifiques. Fascicule XXXVII. Ed. Gauthier-Villars .1974.

[16].- Dieudonne J. .- "Les determinants sur un corps non commutatif" Bull. Soc. Math. Fran.71. 1943.

[17].- Faith C. .- "Algebra: Ring, Modules and Categories I". Die Grundlehren der ... 190. Springer-Verlag. 1973.

[18].- Findlay G. D. .- "A note on non-commutative localisation". J. London Math. Soc. 1972.

[19].- Fitting H. .-"Die determinantenideale Moduls". Jomresberichtd Deutschen Mathen. Verinigung XLVI.1936.

[20].- Fulton W. .- "Algebraic curves". Benjamin-New York.1971.

[21].- Gabber O. .- "The integrability of the Characteristic Variety".American Journal of Mathematics.103. 1981

[22].- Godefroid M. .- "Determinants sur certains anneaux non commutatifs".C.R.A.S.1985.

[23] .- Greenberg M. .- "Algebraic Topology" . Benjamin.

[24].- Grothendieck A. .- "Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie". Exposé IV de S.G.A.. Lecture Notes in Mathematics 589. Springer- Verlag. 1977.

[25].- Hartley- Hawkes.- "Rings, modules and Linear Algebra". Mathematics Series. Ed Ronald Brown. 1974.

[26].-Hartshorne R. .- "Algebraic Geometry". Graduate Text in Mathematics 52. Springer- Verlag. 1977.

[27].- Hermida J.A. .- "Teoría de ideales de Fitting y clases de Chern". Memorias de Matemáticas del Instituto Jorge Juan, C.S.I.C. Madrid1983.

[28].- Hermida J.A. .- "Resoluciones libres finitas". Notas sobre un curso de Doctorado. Preprint. 1986.

[29].- Hermida J.A. .- "Fitting ideals and valuations". Actas de "Conference on Algebraic Geometry". La Rábida 1984. Colección "Travaux en Cours". Hermann. Por publicar.

[30].- Hermida J.A. Sanchez-Giralda T. .- Linear Equations over Commutative Rings and Determinantal Ideals". Journal of Algebra. 1986.

[31].- Hilton P. - Stambach I.- "Acourse in Homological Algebra". Graduate Text in Mathematics 4. Springer- Verlag. 1977.

[32].- Hufford G. "On the characteristic matrix of a matrix of differential operators". Journal of Differential Equations. 1965.

[33].- Lang. S.- "Algebra".-Addison Wesley Publishing Company. 1965.

[34].-Laumon G.-"Transformations canoniques et spécialisations pour les $\mathcal{D}$-modules filtrés". Asterisque 130 .1985.

[35].- Lejeune M. - Teissier B. .- "Cloture integral d'ideaux et dependance integrale". Publicaciones del Instituto Fourier. 1974.

[36].- Mac Rae R.E. .-"On an application or Fitting invariants". Journal of Algebra 2.1965.

[37].- Malgrange B. .-"Frobenius avec singularities I. Codimension 1". Publ. Sci. I.H.E.S. . 1976.

[38].- Malgrange B. .-"Frobenius avec singularities II. Le cas general". Invent. Math. 39,67-89. 1977.

[39].- Matsumura H. .- "Commutative Algebra". Benjamin. 1970.

[40].- Mehidi S. N. .- "Microlocalisation algebrique.Ideaux de Fitting et $\mathcal{D}$-modules". Publicaciones de la Universidad de Poitiers-20.1986.

[41].- Mueller Bruno J. .- "Localization in non commutative rings". Monografías del Instituto de Matemáticas.1. Universidad Nacional Autónoma de Mexico.

[42].- Nastasescu - Van Oystaeyen F. .- "Graded and filtered rings and modules". Lecture Notes in Mathematiques. 758.

[43].- Nortchott D.G. .- "Finite free resolutions". Cambridge University Press. 1976.

[44].- Ore O. .- "Linear equations in non commutative fields". Ann. Math. 32.1931.

[45].- Pham F. .-"Singularities des systemes differentiels de Gauss-Manin".Progress in Math. 2 Birkhaüser. 1979.

[46].- Puystjens R. .- "Determinants for matrices over noncommutative rings". Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 6. Rings, Modules and Radicals. Keszthely. Hungary.1971.

[47].- Raggi-Cárdenas F. .- "Localización en anillos no conmutativos". Anales del Instituto de Matemáticas. 6. Universidad Nacional Autónoma de México. 1966.

[48].-Renault G. .-"Algèbre non commutative". Col. Varia Mathematica. Ed. Gauthier-Villars.1975.

[49].- Samuel P. - Zariski O. .- "Commutative Algebra" Vol. I y II. Van Nodstran. 1958.

[50].- Sanchez Giralda T. .-"Ideales determinantales. Algunas aplicaciones" Notas redactadas por Hermida J. A. Universidad de La Laguna. 1980.

[51].- Sato N.- Kashiwara M..- "The determinant of the matrices of the peudo-differential operators". Proc. Japan Acad. 51 1975.

[52].- Sato N.- Kawai- Kashiwara. .- "Hyperfunctions and pseudo-differential operators". Lecture Notes in Mathematic 287- Springer-Verlag.1973.

[53] .- Schapira P. .- "Microdifferential systems in the complex domain". Grundlehren.... 269. Springer-Verlag. 1985.

[54].-Schapira P. .- "Une introduction a l'étude des systemes d'equations microdifferentielles". Asterisque 89-90. 1981

[55].- Springer T.A. .-"Microlocalisation algebrique". Seminaire Paul Dubreil et Marie Paule Malliavin 1983-84. Paris VI.

[56].- Stentröm B. .- "Ring of quotiens". Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag 1975

[57].- Susperregui J. .- "Ideales de Fitting sobre anillos graduados". Revista de la Sección de Matemáticas. Universidad de Valladolid. 1985.

[58].-Susperregui J. .-"Invariantes determinantales sobre anillos graduados anticonmutativos".Proceedings of the "VII Congreso Matemático de Expresión Latina". Coimbra. 1985.

[59].- Susperregui J. .-"Sobre la propiedad de Ore para anillos de derivaciones". Proceedings of the "XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas". Badajoz.1986.

[60].- Susperregui J. .- "On determinantal invariants over certain non commutative rings". Actas del "International Meeting on Ring Theory". A aparecer en Lecture Notes in Mathematics. 1986.

[61].- Teissier B. .- "The hunting of invariants in the geometry of discriminants". Ecole Polythechnique. Centre de Mathematiques.1977.

[62].- Tougeron J.C. .- "Ideaux de fonctions differentiables". Ergebnisse der Mathematik. 71. Springer-Verlag. 1972.

[63].- Van den Essen A. .- "Algebraic microlocalization". Report 8345. Dept. Math. Catholic Univ. Nijmegen. The Netherlands.1984.