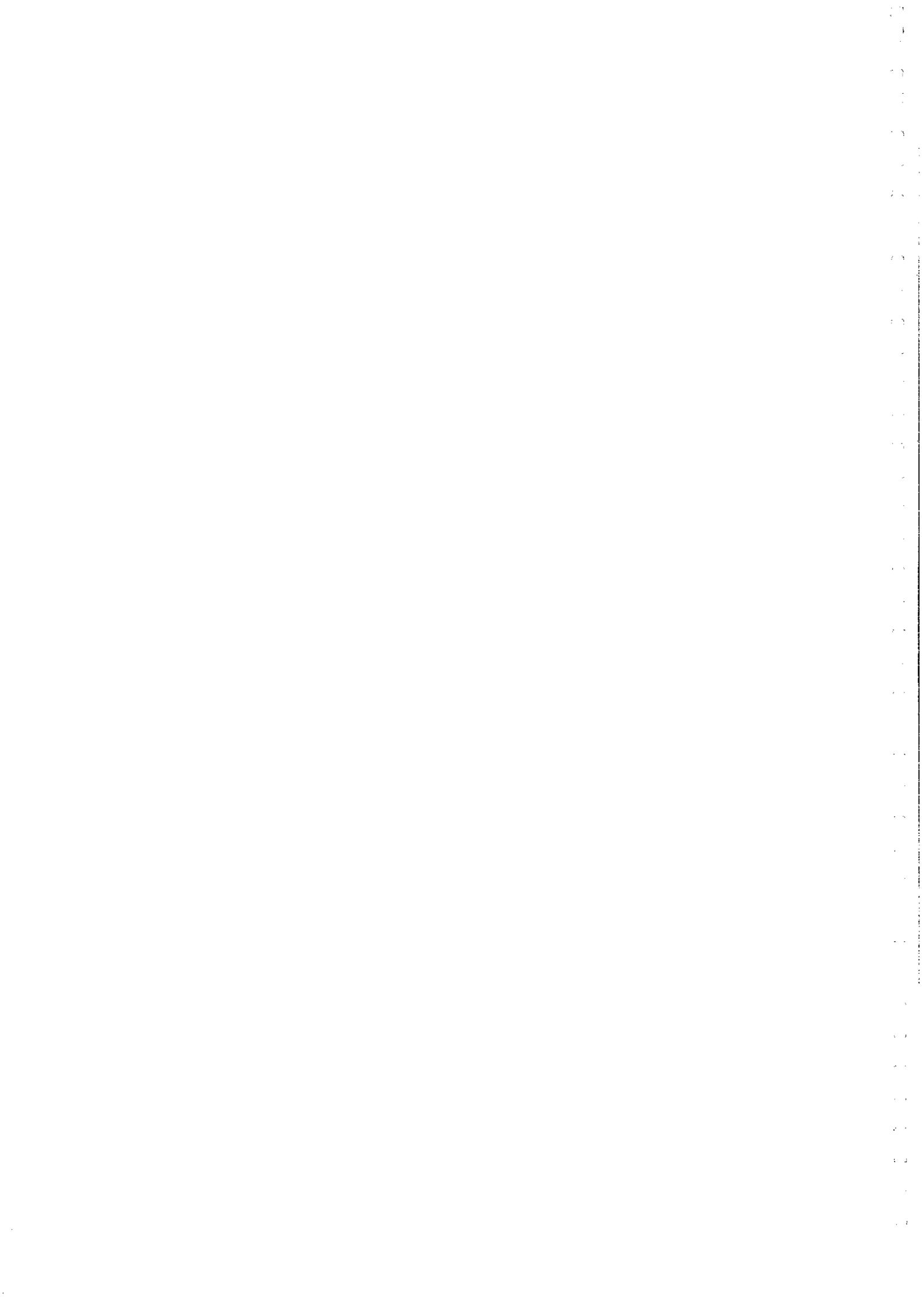


**PROXIMIDAD, CÚMULOS E IDEALES COMPLETOS
SOBRE SINGULARIDADES RACIONALES DE SUPERFICIE**

Ana-José Reguera López

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS, SECCIÓN DE MATEMATICAS, POR

ANA-JOSÉ REGUERA LÓPEZ.



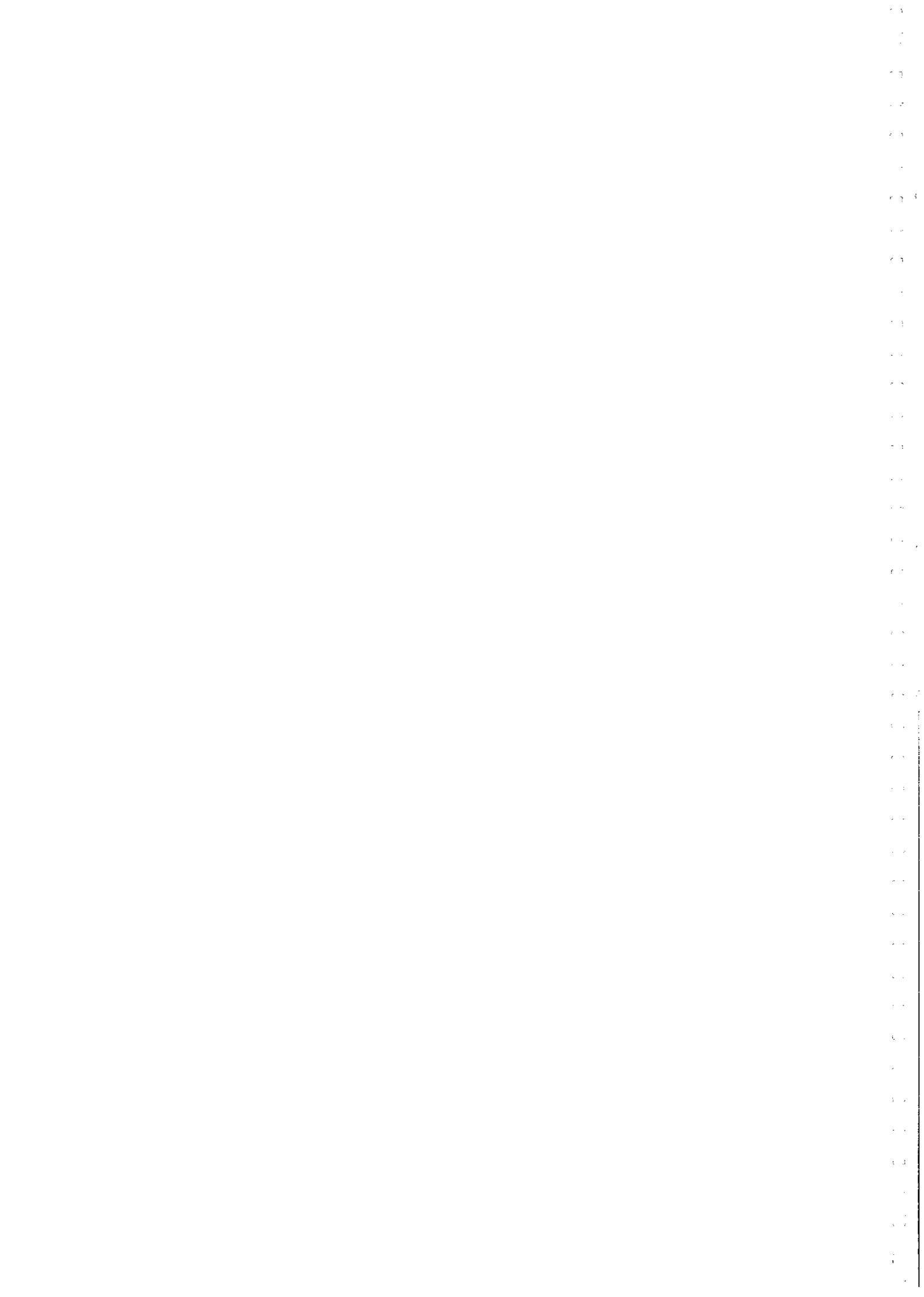
ANTONIO CAMPILLO LÓPEZ, CATEDRÁTICO DE ÁLGEBRA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID Y MONIQUE LEJEUNE-JALABERT, DIRECTEUR DE RECHERCHES DE LA UNIVERSIDAD DE GRENOBLE, CERTIFICAN:

Que la presente memoria *Proximidad, cúmulos e ideales completos sobre singularidades racionales de superficie* ha sido realizada bajo su dirección en el departamento de Álgebra y Geometría de la Universidad de Valladolid por Ana-José Reguera López, y para que conste en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Ciencias de dicha Universidad la referida Tesis Doctoral.

En Valladolid, a treinta de Julio de mil novecientos noventa y tres.

Fdo.: Antonio Campillo López.

Fdo.: Monique Lejeune-Jalabert.



Deseo expresar mi agradecimiento a los Profesores Antonio Campillo López y Monique Lejeune-Jalabert por la dirección realizada en este trabajo de investigación.

Agradezco también las facilidades dadas por el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, que me han permitido ponerme en contacto con Profesores especialistas de otras Universidades españolas y extranjeras. He de hacer mención a las facilidades y ayudas técnicas y humanas por parte de los miembros del Departamento.

Quiero recordar de forma especial a mis padres, a Nuria y a Jesús, ya que sin su apoyo habría sido imposible realizar este trabajo.

A mis Padres

Introducción

En el capítulo II del libro IV de Enriques-Chisini (1915) se hace un estudio de los sistemas de curvas planas que pasan por un conjunto finito de puntos base con multiplicidades asignadas. El conjunto de puntos base está formado por puntos del plano proyectivo (digamos puntos propios) y por puntos infinitamente próximos en los sucesivos entornos de algún punto propio. En particular, en la sección 17 de [EC], se dan condiciones necesarias y suficientes que hay que imponer en un conjunto finito de puntos infinitamente próximos a un punto propio de una superficie algebraica lisa con multiplicidades asignadas, para obtener gérmenes de curvas que pasen por dichos puntos con esas multiplicidades. Su análisis es puramente geométrico.

Veinte años más tarde, Zariski “desarrolló una teoría aritmética paralela a la teoría geométrica de puntos infinitamente próximos”. En [Z1] (1937), introduce el concepto de ideal completo, por analogía con la idea de sistema lineal completo, para estudiar los sistemas de gérmenes de curvas planas que pasan por un conjunto finito de puntos base con multiplicidades asignadas. Uno de los principales resultados es que los ideales completos del anillo local de una superficie en un punto no singular forman un semigrupo multiplicativo y cada ideal completo de dicho anillo local factoriza de forma única en producto de ideales completos simples (es decir, elementos irreducibles del semigrupo). Además, deduce que un ideal completo es simple si y sólo si su elemento genérico es analíticamente irreducible, y la factorización de un ideal completo corresponde a la factorización de su elemento genérico en factores analíticamente irreducibles ([Z1], teorema 11).

Podemos decir que existe una teoría aritmética de ideales completos con un tratamiento en términos de álgebra conmutativa, que ha sido desarrollada y utilizada en distintas épocas por el propio Zariski ([ZS], apéndices 5 y 7) y otros como Hoskin en [Ho], Lipman en [Li1] y [Li2], Deligne en [De], Göhner en [Gö], Rees en [R1], [R2] y [R3], Spivakovsky en [Sp1], Cutkovsky

en [Cu1] y [Cu2] y Huneke y Sally en [HS], mostrándose dicha técnica como una técnica potente en sí misma. En [Li1], Lipman considera la teoría de ideales completos en anillos locales regulares de dimensión dos y la extiende a anillos locales de dimensión dos con singularidad racional, caracterizando dichos ideales completos por medio de ciertos divisores con soporte excepcional asociados ([Li1], sección 18) y estudiando el problema de factorización en este contexto. En general no hay factorización única, pero sí se puede recuperar la semifactorización en este caso (ver [Cu2]). Un trabajo reciente en el que se presenta esta teoría aritmética es [Li2], en el cual extiende también la teoría al caso de ideales de soporte finito sobre anillos regulares de dimensión arbitraria. Aquí tampoco hay factorización única, pero se tiene una factorización única si se permiten exponentes negativos.

Por otro lado, tenemos una teoría geométrica de ideales completos que, partiendo del estudio clásico de los italianos, ha sido elaborada por Casas en [Cs1], Lejeune-Jalabert en [LJ], Lipman en [Li3] y [Li4] y Campillo, González-Sprinberg y Lejeune-Jalabert en [CGL1], [CGL2] y [CGL3]. En particular, en ellos se hace énfasis en el comportamiento de las curvas del sistema y, muy especialmente, de una curva general.

En esta memoria, extendemos la teoría geométrica de ideales completos al caso de singularidades racionales de superficie. En particular, introducimos el concepto de cúmulo (o conjunto de puntos base con órdenes asignados) con origen en un punto con singularidad racional y damos condiciones necesarias y suficientes sobre un cúmulo dado K para obtener curvas (bien divisores de Cartier o bien divisores de Weil) que pasen por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales. Como consecuencia, revisamos desde este punto de vista algunos de los resultados que aparecen en [Li1] y [Cu2]. En particular, estudiamos la semifactorización en el semigrupo de ideales completos del anillo local de una singularidad racional de superficie desde el punto de vista de relaciones de proximidad.

También establecemos un diccionario entre cúmulos por una parte y divisores e ideales completos por otra, y obtenemos algunas aplicaciones de este lenguaje. Por ejemplo, damos una fórmula que calcula la colongitud de un ideal completo \mathfrak{m} -primario y la utilizamos para calcular el número de elementos de un sistema minimal de generadores de un ideal completo \mathfrak{m} -primario, observando en particular que dicho número de generadores depende sólo de los órdenes en el origen del cúmulo. Más aún, el lenguaje de cúmulos aplicado en este contexto, nos permite dar un algoritmo para encontrar explícitamente un sistema minimal de generadores de un ideal completo \mathfrak{m} -primario, que extiende el algoritmo recientemente expuesto por Casas en [Cs2] para el caso

de puntos regulares. Por otro lado, podemos clasificar singularidades racionales de superficie de varias formas equivalentes, todas ellas equivalentes a dar sus grafos duales pesados. Esto permitirá estudiar los gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie de forma completamente similar al estudio de gérmenes de curvas planas.

En el primer capítulo definimos y recordamos propiedades de las singularidades racionales de superficie (tal y como las introdujo y desarrolló Artin en [A1] y [A2]) reproduciendo, por razones de completitud de esta memoria, las demostraciones de los principales resultados. Asimismo, introducimos el concepto de ideal completo tal como lo hizo Zariski en [Z1] o [ZS], explicitando algunas caracterizaciones de los ideales completos de un dominio íntegramente cerrado y el resultado de que el producto de dos ideales completos del anillo local de una singularidad racional de superficie (S, P) es también un ideal completo ([Li1], secciones 6 y 7).

En el capítulo 2 introducimos los conceptos de puntos infinitamente próximos, proximidad, constelaciones de puntos infinitamente próximos y árboles con relaciones de proximidad. Dada una singularidad racional de superficie (S, P) , llamamos punto infinitamente próximo a P a todo punto Q de cualquier superficie S_i obtenida a partir de S tras un número finito de explosiones en puntos, tal que la imagen de Q vía dichas transformaciones sea P . Llamamos constelación de puntos infinitamente próximos a P a todo conjunto \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P (P incluido) tal que todos los puntos que preceden algún punto de \mathcal{C} (es decir, los puntos Q tal que existe $Q' \in \mathcal{C}$ de manera que Q' es infinitamente próximo a Q) están también en \mathcal{C} . Cada constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P define un morfismo $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$. Consideraremos constelaciones \mathcal{C} tales que el morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$ sea una desingularización de (S, P) y estudiaremos el grupo libre $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ generado por las componentes irreducibles $\{E_{\gamma}\}_{\gamma}$ del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$. Se tiene así una base destacada $\{E_{\gamma}\}$ del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{Q}$.

Tras analizar el concepto de transformado total de un divisor de Weil (concepto debido a Mumford, [M1]), podemos definir una nueva base $\{E_{\gamma}^*\}_{\gamma}$ del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{Q}$. La matriz de proximidad expresa la relación entre dichas bases. Teniendo en cuenta esta matriz, y después de definir el concepto de orden de un divisor de Weil respecto a valoraciones divisoriales (definición que se apoya en el hecho de que los divisores de Weil de una singularidad racional de superficie se pueden ver como divisores de Cartier con coeficientes racionales), expresamos el transformado total de un divisor de Weil de (S, P) en función del transformado estricto y de la base $\{E_{\gamma}\}$ (respec-

tivamente $\{E_\gamma^*\}$). Por otro lado, la forma de intersección de divisores de $S_{\mathcal{C}}$ con soporte excepcional define una forma bilineal definida negativa sobre $E_{\mathcal{C}}$, que representaremos mediante una matriz de intersección que asociamos a la constelación \mathcal{C} . Las relaciones entre la noción de proximidad, las propiedades de las singularidades en los puntos infinitamente próximos a un punto con singularidad racional y la forma de intersección queda, por tanto, establecida. Tras este estudio, en la sección 5 describimos los árboles con relaciones de proximidad definidos por las desingularizaciones minimales de los puntos dobles racionales.

Finalmente, en las secciones 6 y 7 de este segundo capítulo, desarrollamos el concepto de cúmulo (o condiciones base) de puntos infinitamente próximos a P . A cada cúmulo K con origen en P le asociamos el ideal I_K formado por todos los divisores de Cartier de (S, P) que pasan por K (es decir, el sistema lineal definido por K) y probamos que I_K es un ideal completo \mathfrak{m} -primario del anillo local $R = \mathcal{O}_{S, P}$ (siendo \mathfrak{m} el ideal maximal de R). Además, si K es un cúmulo con soporte en la constelación \mathcal{C} y el morfismo $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ obtenido al explotar los puntos de \mathcal{C} es una desingularización de (S, P) , entonces definimos un divisor \mathbb{Q} -Cartier D_K con soporte excepcional para $\pi_{\mathcal{C}}$. Decimos que K es un cúmulo bueno si D_K es un divisor de Cartier, y en este caso probamos que el ideal I_K es la fibra en P del haz de ideales $(\pi_{\mathcal{C}})_*(\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D_K))$. Queda así establecida la asignación a cada cúmulo bueno de un ideal completo y un divisor de $E_{\mathcal{C}}$.

El capítulo 3 está dedicado a generalizar la teoría geométrica de Enriques y conectarla con los resultados de Lipman en [Li1] y Cutkovski en [Cu2]. Definimos las desigualdades de proximidad en un cúmulo con origen en P , extendiendo a nuestro caso el concepto que aparece en [EC] para una superficie no singular, y llamamos (DP) -cúmulo a todo cúmulo bueno que satisface las relaciones de proximidad. De esta forma, en los teoremas 3.2.1 y 3.2.2, probamos que existen divisores de Cartier (respectivamente, divisores de Weil) de (S, P) que pasan por un cúmulo dado K con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales si y sólo si K es un (DP) -cúmulo (respectivamente, si K satisface las relaciones de proximidad y todos sus defectos son enteros no negativos). Más aún, en el caso de que el cúmulo K cumpla la anterior propiedad, se tiene que los únicos puntos infinitamente próximos a P por los que pasan todos los divisores de Cartier (respectivamente de Weil) que tienen órdenes efectivos iguales a los virtuales, son exactamente los puntos de \mathcal{C} . Posteriormente, en el teorema 3.3.1 reformulamos las condiciones anteriores en función del ideal I_K y el divisor D_K , conectando nuestro resultado con la teoría de Lipman en [Li1], capítulo V.

En la sección 4 observamos que dos cúmulos distintos K y K' con origen en P pueden definir el mismo ideal completo, es decir, puede que I_K sea igual a $I_{K'}$, pero sin embargo, entre los cúmulos K con el mismo ideal I_K existe un único (DP) -cúmulo. Por tanto, para estudiar ideales completos, podemos restringirnos a considerar (DP) -cúmulos. De hecho, en la sección 5 probamos que, dada una constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P , los morfismos $K \mapsto I_K$ y $K \mapsto D_K$ definen isomorfismos entre el semigrupo $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+$ de (DP) -cúmulos con soporte en \mathcal{C} , el semigrupo $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ de ideales completos \mathfrak{m} -primarios I de R tales que el haz $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible y un subsemigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ del grupo de divisores con soporte excepcional para el morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$. Dicho semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ está formado por todos los divisores D de $S_{\mathcal{C}}$ con soporte excepcional para $\pi_{\mathcal{C}}$ tales que $D.E_i \leq 0$ para $1 \leq i \leq n$, donde $\{E_i\}_{i=1}^n$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de la desingularización $\pi_{\mathcal{C}}$. Posteriormente, utilizando el isomorfismo entre $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ y $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$, damos una prueba alternativa de la semifactorización en el semigrupo de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R (obtenida como consecuencia de que $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ tiene estructura de cono simplicial), estudiamos los generadores del semigrupo de ideales completos de R (que son los elementos extremales del cono $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$) y caracterizamos la factorización en dicho semigrupo en función del determinante de la matriz de intersección asociada a la desingularización minimal de (S, P) .

Finalmente, en la sección 8 describimos explícitamente el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}^+$ asociado a cada tipo de punto doble racional, siendo \mathcal{C}_m una constelación que define la desingularización minimal. Como consecuencia, para cada punto doble racional (S, P) y cada constelación \mathcal{C} con origen en P (no necesariamente minimal) será inmediato describir explícitamente el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$. En particular, tras este análisis exhaustivo y como nueva aplicación de la estructura del semigrupo de ideales completos, mostramos el resultado de Lipman en [Li1] que afirma que las singularidades de tipo \mathbf{E}_8 y los gérmenes de superficie no singular son las únicas singularidades racionales para las cuales hay factorización única en el semigrupo de ideales completos \mathfrak{m} -primarios.

En el capítulo 4 utilizamos la equivalencia entre ideales completos, cúmulos y divisores con soporte excepcional para dar algunas aplicaciones. Como primera aplicación, obtenemos una fórmula que calcula la longitud del R -módulo R/I para cualquier ideal completo \mathfrak{m} -primario I de R . Dicha fórmula es una generalización en el caso en que R es el anillo local de una singularidad racional de superficie de la fórmula de Hoskin y Deligne ([Ho] y [De]) válida cuando R es el anillo local de un germen de superficie no singular. Como consecuencia, en la sección 3 calculamos el número de elementos $\mu(I)$ de

cualquier sistema minimal de generadores de un ideal completo m -primario I , observando en particular que, como sucede en el caso no singular, $\mu(I)$ depende sólo de los órdenes en el origen del (DP) -cúmulo asociado a I . Más aún, en la sección 4 damos un algoritmo que permite encontrar explícitamente un sistema minimal de generadores de un ideal completo m -primario $I = I_K$ a partir del cúmulo K . Este resultado es una generalización del algoritmo expuesto por Casas en [Cs2] para el caso no singular. Es importante notar que el algoritmo anterior está descrito en el lenguaje de cúmulos, no siendo sencilla su transcripción al lenguaje de divisores, mientras que para el cálculo de la longitud de R/I , o en particular de $\mu(I)$, utilizamos el lenguaje de divisores con soporte excepcional.

Como segunda aplicación, en las secciones 5, 6 y 7 estudiamos la relación entre el grafo dual pesado, la forma de intersección, el semigrupo de ideales completos y la matriz de proximidad de una singularidad racional de superficie. Diremos que dos singularidades racionales de superficie son del mismo "tipo" si y sólo si los respectivos grafos duales de las desingularizaciones minimales coinciden. Expresamos este criterio de equivalencia en función de la forma de intersección definida en el grupo de divisores con soporte excepcional para la desingularización minimal y en función del semigrupo $E_{\mathcal{C}_m}^+$ (o más concretamente, del cono simplicial de \mathbb{Z}^n definido por $E_{\mathcal{C}_m}^+$) donde \mathcal{C}_m es una constelación minimal, mostrando que igual grafo dual pesado equivale a igual cono simplicial de \mathbb{Z}^n . En particular, deducimos que, si dos singularidades racionales de superficie son del mismo tipo, entonces los respectivos semigrupos de ideales completos m -primarios asociados son isomorfos. También establecemos la equivalencia entre el tipo de una singularidad racional de superficie (S, P) y las matrices de proximidad e intersección asociadas a su desingularización minimal. Más aún, dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , describimos un algoritmo para calcular la matriz de proximidad $M_{\mathcal{C}}$ y la matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}}$ a partir del grafo dual del morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$.

Finalmente, en las secciones 8 y 9 del capítulo 4 estudiamos los gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie (S, P) . A cada germen de curva reducida C inmerso en (S, P) le asociamos un sistema completo de invariantes expresado de forma compacta por un objeto $\Gamma(C)$ que depende de la inmersión en (S, P) . Probamos como principal teorema que $\Gamma(C)$ determina la clase de equirresolución de C , pero sin embargo, damos ejemplos que muestran que el recíproco no es cierto. Por tanto, los gérmenes de curvas vistos dentro de la singularidad racional de superficie se pueden clasificar por el invariante $\Gamma(C)$ y este invariante tiene una importante información.

Capítulo 1

Singularidades racionales de superficie. Ideales completos.

En [Z1], Zariski introdujo y desarrolló el concepto de ideal completo de un anillo $k[x, y]_{(x, y)}$ o $k[[x, y]]$, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, obteniendo consecuencias geométricas importantes. El adjetivo “completo” proviene de la idea de sistema lineal completo en geometría algebraica, ya que un sistema lineal dado por los divisores de una clase de equivalencia lineal que pasan por ciertos puntos infinitamente próximos (ver definición 2.1.1 siguiente) con multiplicidades asignadas, corresponde a un sistema lineal completo sobre la superficie obtenida por explosión sucesiva de los puntos infinitamente próximos considerados. Condiciones como las anteriores se denominan condiciones base. De hecho Zariski probó que los ideales completos (de $k[x, y]_{(x, y)}$ o de $k[[x, y]]$) son los únicos ideales cuyos elementos pueden ser caracterizados por condiciones base ([Z1], sección 12 y [ZS], apéndice 5).

La idea de ideal completo puede ser generalizada para todo ideal sobre un dominio R (esta definición se debe a Zariski, ver [ZS], apéndice 4). En este capítulo recordaremos esta definición, así como la definición y principales propiedades de las singularidades racionales de superficie, y estudiaremos algunas propiedades de los ideales completos de un anillo local R con singularidad racional (es decir, R es el anillo local $\mathcal{O}_{S, P}$ de una singularidad racional de superficie (S, P)). Las secciones 1 a 7 están dedicadas a reproducir propiedades de las singularidades racionales de superficie y en las secciones

8 a 11 recordamos los conceptos de cierre íntegro, completión e ideales contraídos, para concluir que el producto de ideales completos de un anillo local R con singularidad racional es también un ideal completo de R .

§1. Preliminares.

1.1.1. A lo largo de este trabajo, una *variedad* es un esquema reducido, separado y de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k . Una *superficie* es una variedad de dimensión dos y una *singularidad de superficie* es el germen de una superficie S en un punto P . Por *punto* entendemos un punto cerrado, salvo que se especifique lo contrario.

Dada una singularidad de superficie (S, P) , denotaremos por R el anillo local $\mathcal{O}_{S,P}$ de S en P y por \mathfrak{m} su ideal maximal. Si X es una variedad, por un *morfismo* $p : X \rightarrow (S, P)$ entendemos un morfismo separado de esquemas $X \rightarrow \text{Spec } R$. En general, representamos el morfismo p mediante $p : X \rightarrow S$, donde S es cualquier superficie representante del germen (S, P) . De manera análoga, la *explosión de (S, P) con centro P* es la explosión de $\text{Spec } R$ con centro el ideal \mathfrak{m} , y el esquema así obtenido resulta ser una superficie sobre k .

Un morfismo $p : X \rightarrow S$ es una *desingularización* si X es una superficie no singular y el morfismo $X \rightarrow \text{Spec } R$ es birracional, propio y es un isomorfismo entre la contraimagen del complemento del lugar singular y dicho complemento. Una desingularización $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$ de (S, P) es una *desingularización minimal* si, para cualquier otra desingularización $p : X \rightarrow S$, existe un único morfismo $q : X \rightarrow \tilde{S}$ tal que $p = \tilde{p} \circ q$. Es claro que, si existe una desingularización minimal de (S, P) , es única salvo isomorfismo, y tal desingularización siempre existe como es bien conocido.

Si $p : X \rightarrow S$ es una desingularización, entonces diremos que un divisor D de X tiene *soporte excepcional* si la imagen de D por p está contenida en el lugar singular. *A partir de ahora supondremos que la superficie S es normal* y que P es un punto singular (por tanto con singularidad aislada) y, dada una desingularización $p : X \rightarrow S$, diremos que $p^{-1}(P)$ es el *lugar excepcional* de p .

Un *divisor de Weil* (respectivamente *de Cartier*) de una singularidad de superficie (S, P) es un divisor de Weil (respectivamente de Cartier) de $\text{Spec } R$. En particular, si (S, P) es no singular (es decir, si P es un punto no singular de S) entonces los divisores de Weil son los divisores de Cartier.

1.1.2. Dado un esquema X (por ejemplo, X una variedad o bien un divisor de Weil de una superficie) y un haz de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} , denotamos por $H^i(X, \mathcal{F})$, o bien $H^i(\mathcal{F})$, los grupos de cohomología de \mathcal{F} . Si X es un esquema proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , entonces, para todo haz de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} , $H^i(X, \mathcal{F})$ es un k -espacio vectorial de dimensión finita. En tal caso, denotamos por $h^i(X, \mathcal{F})$ la dimensión en k de $H^i(X, \mathcal{F})$ y definimos la característica de Euler del \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} mediante

$$(1) \quad \chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F})$$

Recordemos que si X es un esquema afín noetheriano entonces, para todo haz casicoherente de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} , se tiene que

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$$

([H], capítulo III, teorema 3.5).

1.1.3. Dados dos esquemas X e Y , un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ y un haz de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} , para $i \geq 0$ denotaremos por $R^i f_*(\mathcal{F})$ el haz asociado al prehaz de Y dado por

$$V \rightarrow H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})$$

donde V recorre el conjunto de abiertos de Y .

De hecho, si X es un esquema noetheriano e Y es un esquema afín (sea $Y = \text{Spec } A$ donde A es un anillo), entonces para todo haz casicoherente de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} se tiene

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F})^\sim \quad \forall i \geq 0$$

donde por $H^i(X, \mathcal{F})^\sim$ denotamos el haz de $\text{Spec } A$ asociado al A -módulo $H^i(X, \mathcal{F})$ ([H], capítulo III, proposición 8.5).

1.1.4. A continuación enunciamos el teorema de Grothendieck de las funciones formales ([EGA III], 4.2.1): Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo proyectivo de esquemas noetherianos, sea \mathcal{F} un haz coherente de \mathcal{O}_X -módulos e $y \in Y$ un punto no necesariamente cerrado. Para cada $r \geq 1$ definimos

$$X_r = X \times_Y \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} / \mathfrak{m}_y^r$$

donde \mathfrak{m}_y es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{Y,y}$. Consideremos el \mathcal{O}_{X_r} -módulo $\mathcal{F}_r = v^* \mathcal{F}$, donde $v : X_r \rightarrow X$ es el morfismo natural. Entonces, fijo $i \geq 0$, para cada $r \geq 0$ tenemos morfismos naturales

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{Y,y} / \mathfrak{m}_y^r \rightarrow H^i(X_r, \mathcal{F}_r)$$

que definen un isomorfismo de $\mathcal{O}_{Y,y}$ -módulos

$$R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge \rightarrow \varprojlim H^i(X_r, \mathcal{F}_r)$$

1.1.5. Finalmente, recordaremos algunos resultados de teoría de intersección que necesitaremos en el trabajo.

Sean C y D dos divisores de Cartier de una superficie X y sean $|C|$ y $|D|$ las curvas reducidas soporte de C y D . Entonces el producto de intersección $C.D$ es un 0-ciclo módulo equivalencia racional en el grupo $A_0(|C| \cap |D|)$ de clases de equivalencia racional de 0-ciclos en $|C| \cap |D|$ (ver [F], capítulo 2). Si además $|C|$, $|D|$ o $|C| \cap |D|$ son proyectivos, entonces el *grado* de $C.D$ es un entero bien definido que denotamos mediante $\text{deg}(C.D)$ o más sencillamente $C.D$. En particular, supongamos que $|C|$ es proyectivo y consideremos C como subesquema de X . Entonces, si $\mathcal{O}_X(-C)$ es el haz de ideales de \mathcal{O}_X que define C , se tiene que $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X(-C)$ y, si $\mathcal{O}_C(D)$ es el haz de \mathcal{O}_C -ideales $\mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C$, entonces el producto de intersección $D.C$ está dado por

$$(2) \quad D.C = \text{deg}_C(\mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C(D)) - \chi(C, \mathcal{O}_C)$$

Recordemos en particular que si C o D son proyectivos, entonces $D.C = C.D$

Nota. Si C es un divisor de Weil y D un divisor de Cartier de una superficie X entonces $D.C$ tiene sentido y es un 0-ciclo módulo equivalencia racional en $A_0(|C| \cap |D|)$. También es cierta la igualdad (2) si $|C|$ o $|D|$ son proyectivos. Sin embargo, no podemos usar una igualdad $D.C = C.D$ ya que sólo está definido el producto de la izquierda.

1.1.6. Sea (S, P) una singularidad (normal) de superficie, $p : X \rightarrow S$ una desingularización de (S, P) y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional $p^{-1}(P)$ de p . La intersección de divisores en X define una forma bilineal sobre el grupo $\mathbb{E}_p = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}E_i$ de divisores con soporte excepcional, forma que representamos mediante los objetos combinatorios dados en la siguiente definición.

Definición. El grafo dual Γ_p asociado a la desingularización $p : X \rightarrow S$ es el grafo formado por:

- (i) Un conjunto de n vértices, uno por cada componente irreducible E_i del lugar excepcional de p .
- (ii) Aristas uniendo los vértices correspondientes a E_i y E_j para todo par (i, j) tal que $i \neq j$ y $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

El grafo dual ponderado Γ_p^ω asociado a p es el grafo dual Γ_p junto con los siguientes pesos en los vértices:

- (iii) En el vértice correspondiente a E_i asignamos el número de intersección $E_i.E_i$.

1.1.7. Sean X y S dos superficies y $p : X \rightarrow S$ un morfismo propio. Sea D un divisor de Cartier de X tal que el subesquema de X que define sea una curva lisa, y sea C un divisor de Cartier de S . Si denotamos por C^* el transformado total de C por p (es decir, $C^* = p^*(C)$), entonces

$$(3) \quad p_*(D.C^*) = p_*(D).C$$

donde por p_* denotamos la imagen directa.

En particular, si $p : X \rightarrow S$ es una desingularización de la superficie S y D un divisor de X con soporte excepcional, entonces

$$(4) \quad D.C^* = 0$$

para cualquier divisor de Cartier C de S .

1.1.8. Por último, si D es un k -esquema proyectivo 1-dimensional, entonces el género aritmético de D se define mediante

$$(5) \quad p_a(D) := 1 - \mathcal{X}(D, \mathcal{O}_D)$$

Supongamos que D es un divisor con soporte proyectivo de una superficie no singular X . Entonces el teorema de Riemann-Roch implica que

$$(6) \quad p_a(D) = 1 + \frac{1}{2}D.(D + K_X)$$

donde K_X es un divisor canónico de X .

§2. Superficies con singularidades racionales. Desingularización.

En esta sección definimos las singularidades racionales de superficie y estudiamos algunas propiedades de dichas singularidades (véase [A2], [Br], [Li1], [P] como referencia).

1.2.1. Definición. Una *singularidad racional de superficie* es una singularidad normal de superficie (S, P) para la cual existe una desingularización $p : X \rightarrow S$ tal que la fibra en P de $R^1 p_* \mathcal{O}_X$ es cero.

En particular, si P es un punto no singular de S , entonces (S, P) es una singularidad racional de superficie (tómese $X = S$, p el morfismo identidad y aplíquese 1.1.2 y 1.1.3).

1.2.2. Definición. Una *superficie con singularidades racionales* es una superficie S tal que para todo punto Q de S , la singularidad de superficie (S, Q) es racional. Por tanto S es una superficie normal y sus singularidades son, por consiguiente, aisladas.

1.2.3. Sea (S, P) una singularidad de superficie. Entonces existe una desingularización de (S, P) obtenida por sucesión finita de explosiones de puntos seguidas de normalizaciones (ver [Z2]).

Si (S, P) es una singularidad racional de superficie, $R = \mathcal{O}_{S, P}$ es el anillo local de S en P , \mathfrak{m} el ideal maximal de R y $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ la explosión con centro P , entonces $S_1 = Proj \mathcal{G}$ donde $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n$ y, por la proposición 1.9.2 (o más directamente el corolario 1.9.3), se tendrá que S_1 es normal.¹ Más aún, veamos que, en la situación anterior, S_1 es una superficie con singularidades racionales, con lo cual habremos probado que existe una desingularización de (S, P) obtenida por sucesión de explosiones en puntos.

Consideremos un punto cerrado P_1 de S_1 . El anillo local \mathcal{O}_{S_1, P_1} es normal y de dimensión dos y por tanto, (S_1, P_1) es una singularidad normal de superficie. Veamos que es racional. Tomemos una desingularización $p : X \rightarrow S$ tal que $(R^1 p_* \mathcal{O}_X)_P = 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que S es local, es decir, $S = Spec R$, y por tanto $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (ver 1.1.3). Por otra parte, el haz $\mathfrak{m} \mathcal{O}_X$ es inversible (ver [Z2], lema p.686 si la característica de k es cero y [Li1], proposición 3.1 en otro caso) y, por la propiedad universal de la explosión, existe un

¹En la demostración de 1.9.2 no utilizaremos la proposición 1.1.3. Por claridad del trabajo hemos incluido dicha demostración en una sección independiente de ésta.

morfismo $q : X \rightarrow S_1$ que factoriza p , es decir, $p = \pi_1 \circ q$. El morfismo q ha de ser birracional y propio (véase [H], capítulo II, corolario 4.8 (e) para la última propiedad), luego $q : X \rightarrow S_1$ es una desingularización. Además, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ y por tanto $(R^1 q_* \mathcal{O}_X)_{P_1} = 0$, con lo que (S_1, P_1) es racional. Así pues, concluimos que si S es una superficie con singularidades racionales y $\pi : S_1 \rightarrow S$ es la explosión de un punto de S , entonces S_1 es también una superficie con singularidades racionales.

1.2.4. Proposición. ([Lil], teorema 4.1) *Sea (S, P) una singularidad racional de superficie. Entonces la desingularización minimal $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$ de (S, P) es un producto de explosiones de puntos, y se tiene que la fibra en P de $R^1 \tilde{p}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ es cero. Más aún, toda desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) es producto de explosiones en puntos y la fibra en P de $R^1 p_* \mathcal{O}_X$ es cero.*

DEMOSTRACIÓN: Si (S, P) es singular, sea $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ la explosión de (S, P) con centro en el punto singular P . La superficie S_1 así obtenida es normal y sólo tiene singularidades racionales, por tanto tiene un número finito de puntos singulares. Explotemos dichos puntos y sigamos haciendo explosiones en los puntos singulares así obtenidos. El argumento en [Z2] para ver que tras un número finito de explosiones se obtiene la desingularización es como sigue: Si el proceso fuera infinito obtendríamos una sucesión infinita de anillos normales con singularidad racional

$$R = R_1 < R_2 < R_3 < R_4 < R_5 < \dots$$

El anillo $\bigcup_{n \geq 1} R_n$ es un anillo de valoración R_v (ver [Z2], sección 19) que domina a cada R_n . Sea $p : X \rightarrow \text{Spec } R$ una desingularización de (S, P) , entonces v domina algún punto $Q \in X$ y por tanto, existe un entero N tal que R_n domina al anillo local $\mathcal{O}_{X, Q}$ para $n \geq N$. Ahora bien, puesto que p factoriza por explosiones de puntos singulares (ya que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ es inversible), se sigue que $\mathcal{O}_{X, Q}$ ha de dominar a R_N y por tanto $R_N = \mathcal{O}_{X, Q}$ en contra de que R_N no es regular.

Así pues, el proceso ha de terminar tras un número finito de explosiones, obteniendo así una desingularización $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$. De la forma en que está construida \tilde{p} , y teniendo en cuenta de nuevo que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ es inversible, se deduce que para cualquier otra desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) , X domina a \tilde{S} y por tanto $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$ es la (única) desingularización minimal de (S, P) . Además es obvio que la fibra en P de $R^1 \tilde{p}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ es cero.

Por último, dada una desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) , X se puede obtener a partir de \tilde{S} por una sucesión de explosiones en puntos.

En efecto, puesto que una superficie no singular es una superficie con singularidades racionales, el argumento anterior es válido en este caso sustituyendo “puntos singulares” por “puntos que no dominan a X ” y se concluye el resultado. Nótese que la última afirmación se sigue también del teorema de estructura de morfismos birracionales entre superficies lisas. ■

§3. Caracterización de las singularidades racionales por el género de los ciclos excepcionales.

Sea (S, P) una singularidad normal de superficie. Consideremos una desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) y sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional $p^{-1}(P)$.

Llamaremos *ciclo excepcional* a todo divisor efectivo no nulo con soporte excepcional. Un divisor tal se escribe de la forma $\sum_{i=1}^n b_i E_i$, siendo los b_i números enteros no negativos y algún b_i estrictamente positivo.

Dado un ciclo excepcional D , denotaremos por \mathcal{O}_D^* el haz de unidades de \mathcal{O}_D . Los elementos de $H^1(D, \mathcal{O}_D^*)$ se corresponden canónicamente con las clases de isomorfismo de haces inversibles de D ([H], capítulo III, ejercicio 4.5). Dado un haz inversible \mathcal{L} de D , denotamos por $d_i(\mathcal{L})$ el grado del haz inversible $\mathcal{L}|_{E_i}$ de E_i . La aplicación $\mathcal{L} \mapsto (d_1(\mathcal{L}), \dots, d_n(\mathcal{L}))$ define un homomorfismo

$$(7) \quad d : H^1(D, \mathcal{O}_D^*) \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

Además, si $D = \sum b_i E_i$ con todos los b_i estrictamente positivos, entonces no es difícil ver que el morfismo d es sobreyectivo.

1.3.1. Lema. ([A1], teorema 1.7) *Sea $D = \sum_{i=1}^n b_i E_i$ un ciclo excepcional tal que $b_i > 0$ para todo i . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

- (i) $H^1(D, \mathcal{O}_D) = 0$
- (ii) El morfismo $d : H^1(D, \mathcal{O}_D^*) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ es isomorfismo.
- (iii) $p_a(C) \leq 0$ para todo ciclo excepcional C tal que $0 < C \leq D$, es decir, tal que $D - C$ es un ciclo efectivo.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $b_i > 0$ para todo i , el morfismo d es sobreyectivo. Por tanto, para probar la equivalencia (i) \iff (ii) bastará con probar que, dado un ciclo excepcional D con soporte conexo (sin ninguna condición adicional), se tiene que $H^1(\mathcal{O}_D) = 0$ si y sólo si el morfismo d definido

en (7) es inyectivo. Esto es un hecho conocido cuando D es irreducible, es decir, D es uno de los E_i , y este hecho, junto con un resultado que relaciona $H^1(\mathcal{O}_D)$ y $H^1(\mathcal{O}_D^*)$ (véase [A1], lemas 1.4 y 1.6), demuestran la equivalencia $(i) \iff (iii)$ para cualquier ciclo excepcional D con la propiedad anterior.

Para probar $(i) \implies (iii)$, tomemos un ciclo excepcional efectivo y no nulo $C \leq D$. La inclusión $C \subseteq D$ induce un morfismo sobreyectivo $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_C$. Puesto que las variedades anteriores son de dimensión 1, tendremos una aplicación sobreyectiva $H^1(\mathcal{O}_D) = 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C)$. Así pues, $H^1(\mathcal{O}_C) = 0$ y $p_a(C) = 1 - h^0(\mathcal{O}_C) \leq 0$.

Probemos ahora $(iii) \implies (i)$. En primer lugar, puesto que $D = \sum b_i E_i$ con $b_i > 0$ para todo i , se tiene que $0 < E_i \leq D$ y por tanto, los E_i son curvas racionales lisas. Utilizando este hecho, probaremos que para todo ciclo excepcional (al que seguiremos llamando $D = \sum b_i E_i$ por abuso de notación, donde ahora $b_i \geq 0$), la igualdad (iii) implica (i) . Razonaremos por recurrencia sobre $b = \sum b_i$. Cuando $b = 1$, necesariamente $D = E_i$ para algún i , y el resultado es cierto. Supongamos que el resultado es cierto para $\sum b_i - 1$. Tomemos $E_i \in \text{Sop } D$ y definamos $D_i = D - E_i$. Se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(-D_i) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D_i} \rightarrow 0$$

Por hipótesis de recurrencia, $H^1(\mathcal{O}_{D_i}) = 0$ para todo i . Así pues, bastará probar que $H^1(\mathcal{O}_D(-D_i)) = 0$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora bien, $\mathcal{O}_D(-D_i)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{E_i}(-D_i)$ y $E_i \cong \mathbb{P}^1$, por lo tanto, será suficiente probar que para algún i tal que $b_i \neq 0$, el grado $-D_i \cdot E_i$ es ≥ -1 , es decir, $D \cdot E_i \leq 1 + E_i \cdot E_i$. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $D \cdot E_i \geq 2 + E_i \cdot E_i$ para todo i con $b_i \neq 0$. Si K_X es un divisor canónico de X , puesto que $p_a(E_i) = 0$, aplicando la fórmula del género se tiene

$$(8) \quad K_X \cdot E_i = -2 - E_i \cdot E_i$$

Por tanto

$$(D + K_X) \cdot D = (D + K_X) \cdot \left(\sum b_i E_i \right) \geq 0$$

y

$$p_a(D) = \frac{1}{2}(D + K_X) \cdot D + 1 \geq 1$$

en contra de que $p_a(D) \leq 0$. ■

Una consecuencia del lema anterior es el siguiente criterio de racionalidad.

1.3.2. Proposición. ([A2], proposición 1) Sea (S, P) una singularidad normal de superficie y $p : X \rightarrow S$ una desingularización. Entonces (S, P) es una singularidad racional si y sólo si para todo ciclo excepcional $D > 0$ se tiene $p_a(D) \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Aplicando el teorema de Grothendieck de las funciones formales (ver 1.1.4) se tiene que el completado de la fibra en el punto P de $R^1 p_* \mathcal{O}_X$ es

$$(9) \quad (R^1 p_* \mathcal{O}_X)_P^\wedge = \varprojlim_{\underline{b} \rightarrow \infty} H^1(X, \mathcal{O}_{D_{\underline{b}}})$$

donde $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ y $D_{\underline{b}} = \sum b_i E_i$. Los morfismos del sistema proyectivo definido en el miembro derecho están dados de la siguiente forma: Para $\underline{b} \leq \underline{b}'$ (es decir, $b_i \leq b'_i$), $\mathcal{O}_X(-D_{\underline{b}'}) \subseteq \mathcal{O}_X(-D_{\underline{b}})$ y por tanto se tiene un morfismo sobreyectivo $\mathcal{O}_{D_{\underline{b}'}} \rightarrow \mathcal{O}_{D_{\underline{b}}}$. Tomando el núcleo de dicho morfismo y la correspondiente sucesión exacta larga de cohomología, y puesto que los E_i son de dimensión 1, se sigue que la aplicación $H^1(X, \mathcal{O}_{D_{\underline{b}'}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D_{\underline{b}}})$ es sobreyectiva.

Por tanto, de la igualdad (9) se deduce que (S, P) es racional si y sólo si $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ para todo ciclo excepcional $D > 0$. Aplicando ahora el lema 1.3.1, se concluye el resultado. ■

El resultado anterior nos facilita información sobre el grafo dual de la desingularización minimal de una singularidad racional de superficie.

1.3.3. Proposición. ([Br], lema 1.3) Sea $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$ la desingularización minimal de la singularidad racional de superficie (S, P) y sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de \tilde{p} . Entonces

- (i) E_i es una curva racional no singular, para $1 \leq i \leq n$.
- (ii) Para $i \neq j$, si E_i y E_j se cortan, lo hacen transversalmente.
- (iii) Si E_i, E_j y E_k son distintos, entonces $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$.
- (iv) El grafo dual del morfismo p es conexo y simplemente conexo, es decir, no contiene caminos cerrados.

DEMOSTRACIÓN: La afirmación (i) está probada en la demostración del lema 1.3.1 (teniendo en cuenta la proposición 1.3.2). Para demostrar (ii) y (iii) basta con verificar que el género de los ciclos excepcionales D_1 y D_2

representados en fig. 1.1 es estrictamente positivo, en contra de la proposición 1.3.2.

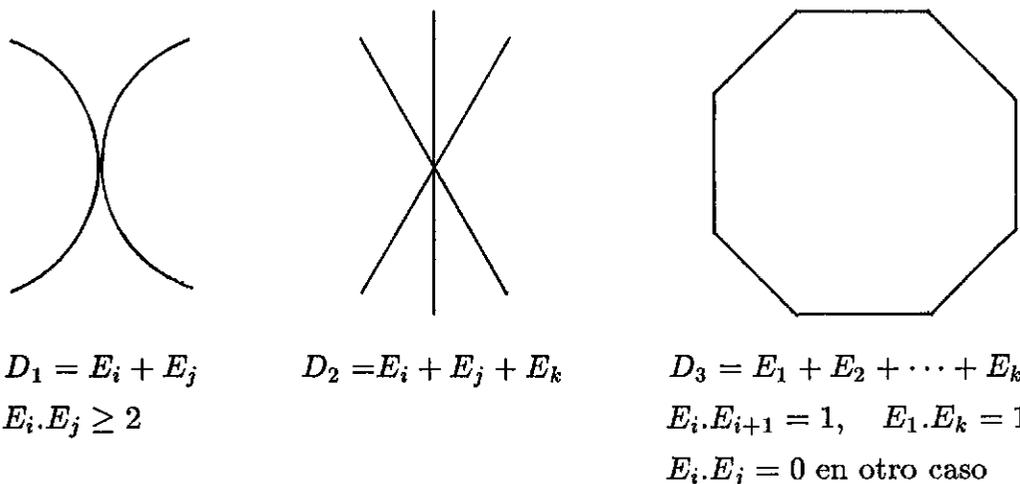


fig. 1.1.

donde cada línea representa una componente $E_i \cong \mathbb{P}^1$.

Por último, el grafo dual del morfismo \tilde{p} es conexo por el teorema principal de Zariski ([H], capítulo III, corolario 11.4). Es simplemente conexo, pues el género del ciclo excepcional D_3 representado en fig.1.1 es estrictamente positivo. ■

§4. Caracterización de las singularidades racionales en función del ciclo fundamental.

Consideremos de nuevo una singularidad normal de superficie (S, P) . Sea $p : X \rightarrow S$ una desingularización de (S, P) y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . La intersección de divisores sobre X define una forma bilineal sobre el grupo $\mathbf{E}_p = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}E_i$ de divisores con soporte excepcional. Dicha forma es definida negativa, como veremos a continuación.

1.4.1. Proposición. ([DV2], sección 4; [M1], sección 1) La matriz $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ es definida negativa.

DEMOSTRACIÓN: Sea h un elemento de $\mathcal{O}_{S,P}$, de forma que $h = 0$ define un divisor de Cartier de (S, P) que pase por P . Sea $(h)^*$ el transformado total de dicho divisor y (\bar{h}) el transformado estricto. Se tiene que

$(h)^* = (\bar{h}) + \sum b_i E_i$ donde $b_i > 0$ para todo i (de hecho $b_i = \text{ord}_{E_i}(h)$ y h se anula en P).

Sea $N = (n_{ij})$ la matriz simétrica de números enteros $N = B(E_i \cdot E_j) B$, donde B es la matriz diagonal con $b_{ii} = b_i$. La matriz $(E_i E_j)$ es definida negativa si y sólo si lo es N . Veamos algunas propiedades de N :

- (a) Si $i \neq j$ entonces $n_{ij} \geq 0$.
- (b) $\sum_i n_{ij} = \sum_i (b_i E_i) \cdot (b_j E_j) = -(\bar{h}) \cdot b_j E_j \leq 0$ para todo j . De hecho $\sum_i n_{ij} < 0$ para algún j , pues (\bar{h}) corta a algún E_j .
- (c) No se puede hacer una partición disjunta $\{1, 2, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ de forma que $n_{i_r, j_s} = 0$ para todo par r, s . Esto se debe a que, por el teorema principal de Zariski ([H], capítulo III, corolario 11.4), el cerrado $\cup_i E_i$ es conexo.

Probemos ahora que N es definida negativa. Supongamos que existen números reales (r_1, \dots, r_n) tales que $0 = \sum_{ij} r_i r_j n_{ij}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i r_i^2 n_{ii} + 2 \sum_{i < j} r_i r_j n_{ij} = \\ &= \sum_j \left(\sum_i n_{ij} \right) r_j^2 - \sum_{i < j} n_{ij} (r_i - r_j)^2 \end{aligned}$$

Aplicando (a) y (b), tenemos que $r_j = 0$ para algún j , y por (c), necesariamente $r_i = r_j$ para todo par i, j . ■

1.4.2. Proposición-Definición. ([A2], proposición 2) Sea (S, P) una singularidad normal de superficie y $p : X \rightarrow S$ una desingularización de (S, P) . Entonces existen ciclos excepcionales $D > 0$ tales que

$$(10) \quad D \cdot E_i \leq 0 \quad \text{para todo } i$$

Además, entre tales ciclos, existe uno mínimo Z con esta propiedad. A dicho ciclo lo llamaremos *ciclo fundamental*.

DEMOSTRACIÓN: Si h es un elemento del ideal maximal del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$, hemos visto que $(h)^* - (\bar{h}) = \sum b_i E_i$ con $b_i > 0$ para todo i . Además, el divisor $D = (h)^* - (\bar{h})$ es tal que $D \cdot E_i = -(\bar{h}) \cdot E_i \leq 0$ para todo i , y por tanto, queda probada la existencia de ciclos excepcionales cumpliendo (10).

Demostraremos ahora la segunda afirmación. En primer lugar, veamos que, si $D > 0$ es un ciclo con la propiedad (10), entonces $D \geq \sum_{i=1}^n E_i$. En efecto, supongamos que no fuera cierto, y sea F la unión de los E_i que

no pertenecen al soporte de D . Puesto que el lugar excepcional $p^{-1}(P)$ es conexo y F no es todo $p^{-1}(P)$ (pues D no es nulo), existe una componente irreducible E_{i_0} de F que interseca a D . Pero entonces $D.E_{i_0} > 0$, en contra de la hipótesis.

Sean $D^1 = \sum b_i^1 E_i$ y $D^2 = \sum b_i^2 E_i$ ciclos excepcionales con la propiedad (10). Tomemos $b_i = \min \{b_i^1, b_i^2\}$ y sea $D = \sum b_i E_i$. Puesto que $D^k \geq \sum E_i$ para $k = 1, 2$, se tiene que $D \geq \sum E_i > 0$. Veamos que D también satisface dicha propiedad, es decir, $D.E_j \leq 0$ para todo j . En efecto, tomemos E_j y supongamos que $b_j^1 \leq b_j^2$, entonces

$$D.E_j = b_j^1 E_j^2 + \sum_{i \neq j} b_i E_i . E_j \leq b_j^2 E_j^2 + \sum_{i \neq j} b_i^1 E_i . E_j = D^1 . E_j \leq 0$$

Puesto que los ciclos excepcionales tienen coeficientes en \mathbb{Z}_+ , el argumento anterior prueba la existencia del ciclo fundamental Z . Además, queda probado que $Z \geq \sum_i E_i$. ■

Veamos ahora una segunda caracterización de las singularidades racionales.

1.4.3. Proposición. ([A2], teorema 3) *Sea (S, P) una singularidad normal de superficie, $p : X \rightarrow S$ una desingularización y Z el ciclo fundamental asociado a p . Entonces (S, P) es una singularidad racional si y sólo si $p_a(Z) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean D y D' ciclos excepcionales positivos. La fórmula de adjunción (6) asegura que

$$(11) \quad p_a(D + D') = p_a(D) + p_a(D') + D.D' - 1$$

Si $D \not\geq Z$, entonces $D.E_i > 0$ para algún i . Tomando $D' = E_i$ en la igualdad anterior, y puesto que $p_a(E_i) \geq 0$, se tiene

$$(12) \quad p_a(D + E_i) \geq p_a(D)$$

Si además $0 < D < Z$, entonces el coeficiente de E_i en D es menor que el de Z , es decir, $D + E_i \leq Z$.

Probemos que $p_a(Z) \geq 0$ por un método recursivo que calcula el ciclo fundamental Z . Tomemos $D_1 = E_1$. Es claro que $0 < D_1 \leq Z$ y $p_a(E_1) \geq 0$. Definamos D_{j+1} por recurrencia: Si existe E_{i_j} tal que $E_{i_j}.D_j > 0$, sea $D_{j+1} = D_j + E_{i_j} \leq Z$. Si no existe, entonces $Z = D_j$ (pues $D_j \leq Z$ por la forma en que están constituidos). De esta forma, tras un número finito de

pasos, obtenemos el ciclo fundamental Z . La desigualdad (12) garantiza que $p_a(D_j) \geq p_a(E_1) \geq 0$ para todo j , y por tanto, $p_a(Z) \geq 0$.

Ahora, la proposición 1.3.2, junto con el resultado anterior, afirma que, si (S, P) es racional, entonces $p_a(Z) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $p_a(Z) = 0$ y tomemos un ciclo excepcional $D > 0$ cualquiera. El propósito es ver que $p_a(D) \leq 0$. De esta forma, aplicando de nuevo la proposición 1.3.2, se concluye la prueba.

Tomemos $Y_1 = D$ y definamos el ciclo excepcional Y_{j+1} inductivamente, de la siguiente forma:

- (a) Si $Y_j \geq Z$, sea $Y_{j+1} = Y_j - Z \geq 0$. Por la igualdad (5), se tiene $p_a(Y_j) = p_a(Y_{j+1}) + p_a(Z) + Z \cdot Y_{j+1} - 1$. Pero $p_a(Z) = 0$ y $Z \cdot Y_{j+1} \leq 0$, pues Y_{j+1} tiene soporte excepcional. Así pues, $p_a(Y_j) < p_a(Y_{j+1})$ en este caso.
- (b) Si $Y_j \not\geq Z$, tomamos E_{i_j} tal que $Y_j \cdot E_{i_j} > 0$ y con la mínima multiplicidad posible en Y_j . Sea $Y_{j+1} = Y_j + E_{i_j}$. La desigualdad (12) afirma que $p_a(Y_{j+1}) \geq p_a(Y_j)$. Terminamos el proceso cuando $Y_j = 0$.

Ahora bien, la etapa (b) no puede repetirse indefinidamente sin llegar a que $Y \geq Z$. Además, la función $p_a(Y)$ está acotada superiormente, pues es función cuadrática de los coeficientes b_i de $Y = \sum b_i E_i$ cuyo término cuadrático es $\frac{1}{2} \sum b_i b_j (E_i \cdot E_j)$ y la matriz $(E_i \cdot E_j)$ es definida negativa. Puesto que cada etapa (a) aumenta el valor de la función g , el proceso necesariamente llega a $Y_j = 0$ para algún j . Entonces $Y_j = Y_{j-1} - Z$ y por tanto

$$p_a(D) = p_a(Y_1) \leq p_a(Y_{j-1}) < p_a(Y_j) = p_a(0) = 1$$

es decir, $p_a(D) \leq 0$, con lo que se concluye la demostración. ■

§5. Finitud del grupo $Cl(\mathcal{O}_{S,P})$ para singularidades racionales.

Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, sea R el anillo local de S en P y \mathfrak{m} su ideal maximal. Entonces el grupo de clases de divisores $Cl(R)$ (es decir, el grupo de divisores de Weil de (S, P) módulo equivalencia lineal) es isomorfo al grupo de Picard de $Spec R - \mathfrak{m}$ ([H], capítulo II, proposición 6.5). En esta sección veremos que dicho grupo es finito, obteniendo como consecuencia que, para todo divisor de Weil C de (S, P) , existe un entero positivo r tal que rC es un divisor de Cartier de (S, P) .

Consideremos una desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) . Sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p y $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p$ el grupo de divisores de X con soporte excepcional. Puesto que ningún divisor principal no nulo tiene soporte excepcional (proposición 1.4.1), la aplicación canónica $\mathbf{E} \rightarrow \text{Pic } X$ es inyectiva. El conúcleo de esta aplicación es $\text{Pic } U$, donde $U = X - p^{-1}(P) \cong \text{Spec } R - \mathfrak{m}$. En efecto, la aplicación restricción $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } U$ es claramente sobreyectiva y su núcleo está formado por las clases de divisores D de X cuya restricción a U es un divisor principal, es decir, los divisores D de X que son equivalentes a un divisor con soporte excepcional. Por tanto, se tiene la siguiente sucesión exacta ([Li1], sección 14):

$$(13) \quad 0 \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } U \rightarrow 0$$

Por otro lado, consideremos el homomorfismo de grupos

$$\theta : \text{Pic } X \rightarrow \mathbf{E}^\vee = \text{Hom}(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$$

definido por $\theta([F])(E_i) = F.E_i$ para toda clase $[F] \in \text{Pic } X$. El núcleo de θ está formado por las clases de divisores F de X tales que $F.E_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$, es decir, las clases de los divisores de X cuya imagen por el homomorfismo d definido en (7) (sección 3) es nula. Ahora bien, el lema 1.3.1 junto con la proposición 1.3.2 permiten afirmar que la aplicación θ es inyectiva. Sea G el conúcleo de θ , entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$(14) \quad 0 \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \mathbf{E}^\vee \rightarrow G \rightarrow 0$$

La restricción de θ a \mathbf{E} es inyectiva ya que la matriz $(E_i.E_j)_{ij}$ es definida negativa (proposición 1.4.1). El conúcleo H de esta restricción es el grupo abeliano con generadores e_1, \dots, e_n sujetos a las relaciones $\sum_{j=1}^n (E_i.E_j)e_j = 0$ para $\{1 \leq i \leq n\}$. Por tanto, el grupo H es un grupo finito de orden $\delta = \det((E_i.E_j)_{ij})$ y tenemos la siguiente sucesión exacta ([Li1], proposición 1.4.2):

$$(15) \quad 0 \rightarrow \text{Pic } U \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 0$$

1.5.1. Proposición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y sea R el anillo local de S en P . Entonces el grupo $Cl(R)$ de divisores de Weil módulo equivalencia lineal es un grupo finito. En particular, para todo divisor de Weil C de (S, P) existe un entero positivo r tal que rC es un divisor de Cartier de (S, P) .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una desingularización $p : X \rightarrow S$ de (S, P) y mantengamos la notación anterior. Entonces el grupo $Cl(R) \cong Pic U$ es subgrupo de un grupo finito (isomorfo al grupo H) y por tanto, $Cl(R)$ es un grupo finito. Sea μ el orden de $Cl(R)$, entonces es claro que para todo divisor de Weil C de (S, P) , el divisor μC es un divisor de Cartier de (S, P) . Además, μ ha de dividir al orden $\delta = \det(E_i \cdot E_j)$ de H y por tanto, para todo divisor de Weil C , δC es un divisor de Cartier. ■

1.5.2. Nota. En [Li1], secciones 14 y 15, Lipman muestra que la sucesión exacta (15) es intrínseca, es decir, no depende de la desingularización $p : X \rightarrow S$, sino que sólo depende del anillo local R . También prueba que, si para todo ideal primo \mathfrak{p} de R de altura uno, el anillo R/\mathfrak{p} tiene una sola rama, entonces $G = 0$ y por tanto $Cl(R)$ es isomorfo al grupo H .

§6. Criterio de existencia de divisores de Cartier en una singularidad racional. Función de Hilbert-Samuel.

En esta sección estudiaremos un importante resultado de teoría de intersección de superficies racionales. Dicho resultado se debe a Artin (ver [A2]) y será fuertemente utilizado en una parte esencial de este trabajo (teorema 3.2.1).

1.6.1. Proposición. ([A2], demostración del teorema 4) Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, $R = \mathcal{O}_{S,P}$ el anillo local de S en P , $p : X \rightarrow S$ una desingularización de (S, P) y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . Sea D un divisor de X tal que $D \cdot E_i = 0$ para todo i . Entonces existe una función h perteneciente al ideal maximal \mathfrak{m} de R tal que $(h)^* = D$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el morfismo p está definido con llegada en $Spec R$, es decir, $p : X \rightarrow Spec R$. Nuestro problema es encontrar una función racional h de X tal que el divisor (h) que define en X coincida con D . En tal caso, puesto que R es normal y

(h) > 0 , necesariamente $h \in \mathfrak{m}$. Dicho problema es equivalente a encontrar una sección no nula del haz inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-D)$, es decir, probar que $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$.

Probaremos que existe una sección formal, es decir, un elemento \hat{s} de $\varprojlim H^0(rZ, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{rZ})$ que induce una sección s_0 en $H^0(Z, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z)$ que no se anula en ningún punto de Z . Entonces, por el teorema de las funciones formales enunciado en 1.1.4, la sección formal \hat{s} se puede interpretar como un elemento del completado de $(R^0 p_* \mathcal{L})_P = H^0(X, \mathcal{L})$. De la definición de completado se sigue que la sección formal \hat{s} se puede aproximar por una sección s de $H^0(X, \mathcal{L})$ de manera que su restricción a $H^0(Z, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z)$ sea s_0 . Entonces, necesariamente s es no nula en todos los puntos de X , y el resultado quedará probado.

Para ver la existencia de \hat{s} , estudiemos en primer lugar el grupo $\varprojlim H^0(rZ, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{rZ})$. Por ser (S, P) una singularidad racional, se tiene que $H^1(rZ, \mathcal{O}_{rZ}) = 0$ para todo r (lema 1.3.1 y proposición 1.3.2). Además, $d_i(\mathcal{L}) = -D.E_i = 0$ para todo i y, aplicando el lema 1.3.1, se deduce que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{rZ} \cong \mathcal{O}_{rZ}$ para todo r . Ahora, si probamos que los morfismos

$$(16) \quad H^0(Z, \mathcal{O}_{(r+1)Z}) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_{rZ})$$

son sobreyectivos, entonces la sección formal \hat{s} se obtiene tomando una sección s_0 de \mathcal{O}_Z que no se anule en ningún punto de Z y levantándola sucesivamente a secciones de \mathcal{O}_{rZ} para todo r .

Sea $\mathcal{F}_r = \text{Ker}(\mathcal{O}_{(r+1)Z} \rightarrow \mathcal{O}_{rZ})$. El objetivo es probar que $H^1(Z, \mathcal{F}_r) = 0$. Es claro que $\mathcal{F}_r = \mathcal{I}_{rZ} \otimes \mathcal{O}_{(r+1)Z}$, donde \mathcal{I}_{rZ} es el haz de ideales de rZ , y por tanto \mathcal{F}_r es un haz inversible de Z . Además, se tiene que

$$d_i(\mathcal{F}_r) = -rZ.E_i \geq 0$$

Por tanto, la existencia de \hat{s} se deduce del siguiente resultado ([Lch]): "Si \mathcal{F} es un haz inversible de un ciclo excepcional Z tal que $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$, y $d_i(\mathcal{F}) = \text{deg}_{E_i}(\mathcal{F}|_{E_i}) \geq 0$ para todo i , entonces $H^1(Z, \mathcal{F}) = 0$." ■

Aplicando el resultado anterior, Artin calcula explícitamente el polinomio de Hilbert-Samuel de una singularidad racional de superficie.

1.6.2. Proposición. ([A2], teorema 4) Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, R el anillo local de S en P y \mathfrak{m} su ideal maximal. Sea $p : X \rightarrow S$ una desingularización de (S, P) y Z el ciclo fundamental asociado a p . Entonces, para todo entero positivo r , se tiene

$$\mathcal{O}_X(-rZ) = \mathfrak{m}^r \mathcal{O}_X$$

Además

$$H^0(rZ, \mathcal{O}_{rZ}) = R/\mathfrak{m}^r$$

y

$$\dim_k(\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}) = -r(Z.Z) + 1$$

Por tanto, el polinomio de Hilbert-Samuel de la singularidad (S, P) es $p(x) = -1/2(Z.Z)(x^2 - x) + x$. En particular, la multiplicidad de (S, P) es $-Z.Z$ y la dimensión del espacio tangente de Zariski de (S, P) es $-(Z.Z) + 1$. ■

1.6.3. Corolario. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie de multiplicidad $m \geq 2$. Sea $\tilde{p} : \tilde{S} \rightarrow S$ la desingularización minimal de (S, P) y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de \tilde{p} . Entonces $-m \leq E_i.E_i \leq -2$ para todo i y a lo más existen $m-2$ componentes irreducibles E_i tales que $E_i.E_i < -2$. En particular, si $E_i.E_i \geq -2$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $m = 2$ y de hecho $E_i.E_i = -2$ para todo i .

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, si $K_{\tilde{S}}$ es un divisor canónico de \tilde{S} , entonces $E_i.E_i = -E_i.K_{\tilde{S}} - 2 \leq -2$ para todo i . Por otro lado, tenemos que $p_a(Z) = 0$ (proposición 1.4.3) y $m = -Z.Z$, luego, de la fórmula del género se deduce que $Z.K_{\tilde{S}} = m - 2$. Sea $Z = \sum b_i E_i$ la expresión de Z en función de los E_i , entonces

$$m - 2 = \sum_i b_i (E_i.K_{\tilde{S}}) = \sum_i b_i (-(E_i.E_i) - 2)$$

y puesto que todos los b_i son positivos, se concluye el resultado. ■

1.6.4. Corolario. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie de multiplicidad m . Entonces (S, P) se puede sumergir en un germen de variedad lisa sobre k de dimensión $m + 1$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que por 1.6.2 se tiene $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = m + 1$, siendo \mathfrak{m} el ideal maximal del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$, y por tanto, existe un morfismo sobreyectivo $k[x_1, \dots, x_{m+1}] \rightarrow R$. ■

§7. Puntos dobles racionales.

Llamamos *punto doble racional* a una singularidad racional de superficie de multiplicidad dos. Sea (S, P) un punto doble racional, $\tilde{p}: \tilde{S} \rightarrow S$ la desingularización minimal de (S, P) y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de \tilde{p} . Entonces los divisores E_i son curvas lisas racionales que se cortan transversalmente y cada una tiene autointersección -2 (proposición 1.3.3 y corolario 1.6.3). Es decir, en el grafo dual ponderado del morfismo \tilde{p} los pesos que representan las autointersecciones son iguales a -2 , y por tanto, el grafo dual $\Gamma_{\tilde{p}}$ contiene toda la información del grafo dual ponderado Γ_p^w asociado al morfismo de desingularización minimal.

En [DV1] (capítulos II y III), Du Val clasifica analíticamente los puntos dobles racionales, es decir, define dos puntos dobles racionales equivalentes si se corresponden por un isomorfismo analítico, y deduce que esto es equivalente a que los correspondientes grafos duales asociados a las desingularizaciones minimales coincidan (ver también [A2], p.135; [P], sección 9). Los diferentes grafos duales alcanzados son:



fig. 1.2.

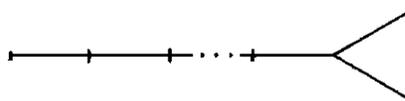


fig. 1.3.

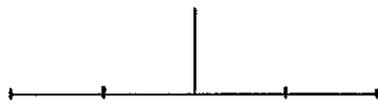


fig. 1.4.

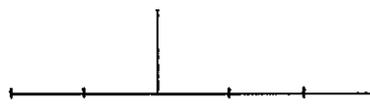


fig. 1.5.



fig. 1.6.

El punto doble racional (S, P) se dice de tipo A_n ($n \geq 1$) (respectivamente de tipo D_n ($n \geq 4$)) si el grafo dual asociado a su desingularización minimal está representado en fig. 1.2 (respectivamente fig. 1.3), siendo n el número de vértices de dicho grafo. El punto doble racional (S, P) es de tipo E_6 , E_7 o E_8 , si el grafo dual asociado a su desingularización minimal está representado en fig. 1.4, fig. 1.5 o fig. 1.6 respectivamente.

Si (S, P) es un punto doble racional sobre el cuerpo k , entonces $\dim_k (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 3$ (proposición 1.6.2) y por tanto (S, P) se puede sumergir en un germen de variedad lisa sobre k de dimensión 3 (corolario 1.6.4). Obviamente, por 1.6.4, se tiene que los puntos dobles racionales son los únicos puntos racionales que tienen dimensión de inmersión 3, y por tanto, son los únicos que se pueden definir por una sola ecuación en un ambiente tridimensional. Las ecuaciones siguientes definen gérmenes de superficie en un entorno del origen de $k[x, y, z]$ que son puntos dobles racionales de los distintos tipos:

$$\begin{array}{ll} z^{n+1} + xy = 0 & \text{de tipo } \mathbf{A}_n \quad (n \geq 1) \\ x^{n-1} + xy^2 + z^2 = 0 & \text{de tipo } \mathbf{D}_n \quad (n \geq 4) \\ x^4 + y^3 + z^2 = 0 & \text{de tipo } \mathbf{E}_6 \\ x^3y + y^3 + z^2 = 0 & \text{de tipo } \mathbf{E}_7 \\ x^5 + y^3 + z^2 = 0 & \text{de tipo } \mathbf{E}_8 \end{array}$$

En la sección 8 del capítulo 2, precisaremos la razón por la que los ejemplos anteriores son los únicos puntos dobles racionales módulo isomorfismo analítico, teniendo en cuenta no sólo el grafo dual sino el proceso de desingularización.

§8. Ideales completos de un dominio íntegramente cerrado. Primera caracterización.

Sea R un dominio, F un cuerpo que contiene a R y \mathcal{V} el conjunto de valoraciones no triviales de F que son no negativas en R (es decir, las valoraciones v de F tales que el anillo de valoración R_v contiene a R). A lo largo de esta sección, todos los R -módulos considerados serán R -módulos contenidos en F .

1.8.1. Definición. Sea M un R -módulo (contenido en F), entonces la *compleción de M* respecto a F y a R es el R -módulo

$$(17) \quad M' = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} MR_v$$

donde, para cada valoración $v \in \mathcal{V}$, R_v es el anillo de valoración de v . Diremos que el R -módulo M es *completo* respecto a F y a R si $M = M'$.

1.8.2. Lema. Si M, N y $\{M_i\}_i$ son R -módulos (contenidos en F), entonces

- (i) $M \subseteq M'$.
- (ii) Si $N \subseteq M$ entonces $N' \subseteq M'$.
- (iii) $(M')' = M$.
- (iv) $\bigcap_i M'_i = \left(\bigcap_i M_i \right)'$

DEMOSTRACIÓN: (i) y (ii) son obvios e implican $M' \subseteq (M')'$. Además, $(M')' \subseteq M'R_v \subseteq MR_v$ para toda valoración $v \in \mathcal{V}$, y por tanto, $(M')' \subseteq M'$ y (iii) queda probado. Finalmente, (i), (ii) y (iii) implican (iv). ■

A continuación, enunciaremos una caracterización de la completación de un R -módulo (proposición 1.8.7). Este resultado está desarrollado en [ZS], apéndice 4, pero, debido a su importancia en relación con este trabajo, reproduciremos aquí su demostración.

1.8.3. Definición. Un elemento z de F es *íntegramente dependiente del módulo M* si satisface una ecuación de la forma

$$(18) \quad z^r + m_1 z^{r-1} + m_2 z^{r-2} + \cdots + m_r = 0$$

donde $m_i \in M^i$ para $1 \leq i \leq r$.

1.8.4. Lema. Un elemento z de F es *íntegramente dependiente del R -módulo M* si y sólo si existe un R -módulo finito N (contenido en F) tal que

$$(19) \quad zN \subseteq MN$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos (19) y tomemos un sistema de generadores $\{n_1, \dots, n_s\}$ de N . Existirán elementos $m_{ij} \in M$ tales que

$$(20) \quad zn_i = \sum_{j=1}^s m_{ij} n_j$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones en las n_i con una solución no nula (el vector (n_1, \dots, n_s)). Por tanto, su determinante es nulo, es decir, $\det(zId - (m_{ij})) = 0$, de donde se deduce una ecuación tipo (18).

Recíprocamente, si (18) es cierto, entonces (19) se satisface tomando $N = M_0^{r-1} + M_0^{r-2}z + \cdots + M_0z^{r-2} + Rz^{r-1}$, donde M_0 es un R -módulo finitamente generado tal que $m_i \in M_0^i$ para $1 \leq i \leq r$. ■

1.8.5. Definición. Aplicando el criterio anterior se deduce que el conjunto de elementos z de F que son íntegramente dependientes de M es un R -módulo. A dicho módulo lo llamamos *cierre íntegro de M en F* y lo denotamos por \overline{M} . Decimos que el R -módulo M es *íntegramente cerrado en F* si $M = \overline{M}$.

1.8.6. Lema. *Todo anillo de valoración R_v es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que R_v es un dominio. Sea F su cuerpo de fracciones y z un elemento de F satisfaciendo (18) con $m_i \in R_v$. Sea \mathfrak{m}_v el ideal maximal de R_v . Si $z \notin R_v$, entonces $z^{-1} \in \mathfrak{m}_v$ y

$$1 + m_1 z^{-1} + \cdots + m_r z^{-r} = 0$$

Por tanto $1 \in \mathfrak{m}_v$, lo que es una contradicción. Así pues, $z \in R_v$ y el lema queda probado. ■

1.8.7. Proposición. (Criterio valorativo de la dependencia entera. [ZS], apéndice 4, teorema 1) *La completación M' de un R -módulo M respecto a F y a R coincide con el cierre íntegro \overline{M} de M en F .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z \in F$ íntegramente dependiente de M . Por el lema 1.8.4. tenemos

$$(20) \quad zn_i = \sum_{j=1}^s m_{ij} n_j$$

donde $N = \sum_{j=1}^s n_j R$ y $m_{ij} \in M$. Tomemos una valoración $v \in \mathcal{V}$, es decir, no negativa en R , y sea $m_0 = m_{i_0 j_0}$ uno de los elementos m_{ij} tal que $v(m_0)$ es mínimo. Puesto que el valor $v(m_{ij}/m_0)$ es no negativo, m_{ij}/m_0 pertenece a R_v para todo par i, j . Dividiendo (20) por m_0 , se tiene que z/m_0 es íntegro sobre R_v , por tanto pertenece a R_v (lema 1.8.6) y $z \in m_0 R_v \subseteq M R_v$. Como esto es cierto para todo $v \in \mathcal{V}$, se deduce que $z \in M'$.

Recíprocamente, supongamos que $z \in M'$. Sea L el conjunto de todos los cocientes m/z tales que $m \in M$ y consideremos el anillo $R[L]$. Para toda valoración $v \in \mathcal{V}$ existe $m \in M$ tal que $v(z) \geq v(m)$. Por tanto, si $v \in \mathcal{V}$ es una valoración no negativa en $R[L]$, entonces $v(m/z) = 0$ para algún $m \in M$. Es decir, no existe ninguna valoración v de F no negativa en $R[L]$ tal que \mathfrak{m}_v contenga el ideal $L.R[L]$, y por tanto, este ideal es el ideal total de $R[L]$

([ZS], capítulo VI, sección 4, teorema 4). Así pues, existirá un conjunto finito $\left\{\frac{m_1}{z}, \dots, \frac{m_l}{z}\right\}$ de elementos de L de manera que

$$(21) \quad 1 = \sum_{i=1}^l \frac{m_i}{z} H_i \left(\frac{m_1}{z}, \dots, \frac{m_l}{z} \right)$$

donde los H_i son polinomios con coeficientes en R . Podemos escribir cada H_i de la siguiente forma

$$(22) \quad H_i \left(\frac{m_1}{z}, \dots, \frac{m_l}{z} \right) = G_i (m_1, \dots, m_l, z) / z^{t-1}$$

donde t es un entero que no depende de i y G_i un polinomio homogéneo de grado $t - 1$ con coeficientes en R . Finalmente, multiplicando (21) por z^t y utilizando (22), se deduce que z satisface una ecuación tipo (18). ■

1.8.8. Corolario. *La completación M' del R -módulo M no depende del dominio R , siempre que F contenga a R y a M . Es decir, si F' es otro cuerpo con la anterior propiedad, entonces*

$$M' = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} MR_v = \bigcap_{v' \in \mathcal{V}'} MR_{v'}$$

donde \mathcal{V}' es el conjunto de valoraciones no triviales de F' no negativas en R .

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de forma inmediata de la proposición 1.8.7 junto con la definición 1.8.3, ya que el cierre íntegro \overline{M} no depende del anillo R . ■

1.8.9. Nota. A partir de ahora, olvidaremos la notación M' y denotaremos por \overline{M} la completación o cierre íntegro del R -módulo M en el cuerpo F . También adoptaremos el siguiente convenio: Dado un dominio R , diremos que R es íntegramente cerrado si es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones F y, dado un ideal I del dominio R , diremos que I es completo (o íntegramente cerrado) si es un R -módulo completo en F .

En lo que sigue, estudiaremos los ideales completos de un dominio íntegramente cerrado R . En primer lugar, observamos que, de la proposición 1.8.7 se sigue que si I es un ideal de R , entonces la completación \overline{I} de I (en el cuerpo de fracciones de R) también es un ideal de R (en efecto, en estas condiciones, todo elemento z de F íntegramente dependiente de I ha de pertenecer a R). Caracterizaremos los ideales completos de R en función de los ideales de valoración. Comencemos definiendo los ideales de valoración de un dominio R .

1.8.10. Definición. Sea R un dominio. Un ideal I de R es un *ideal de valoración* si es la intersección de R con un ideal de un anillo de valoración no trivial R_v que contiene a R . Si v es la correspondiente valoración, decimos que I es un *v -ideal de R* .

1.8.11. Nota. Si R es un dominio íntegramente cerrado (en su cuerpo de fracciones F) y \mathcal{V} es el conjunto de valoraciones no triviales de F que son no negativas en R , entonces, para estudiar los ideales de valoración de R , podemos restringirnos sin pérdida de generalidad a valoraciones v de \mathcal{V} . En efecto, si v es una valoración no trivial de un cuerpo F' de forma que $R \subseteq R_v$, entonces necesariamente $F \subseteq F'$, y si $v_0 \in \mathcal{V}$ es la restricción de v a F , entonces es claro que todo v -ideal de R es un v_0 -ideal.

1.8.12. Lema. Sea I un ideal de un dominio R y v una valoración de \mathcal{V} . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) I es un v -ideal.
- (ii) Si $x, y \in R$, $x \in I$ y $v(y) \geq v(x)$, entonces $y \in I$.
- (iii) $I = IR_v \cap R$.

DEMOSTRACIÓN: Si I es un v -ideal, entonces $I = I_v \cap R$ donde I_v es un ideal de R_v . Además, si $v(y) \geq v(x)$ entonces $y = xy/x$ donde $y/x \in R_v$. Por tanto, si $x \in I$ entonces $y \in IR_v \subseteq I_v$, luego $y \in I_v \cap R = I$.

Supongamos ahora que (ii) es cierto. Tomemos $y \in IR_v \cap R$, entonces $y = x_1r_1 + \dots + x_nr_n$ donde $x_i \in I$, $r_i \in R_v$. Sea x_{i_0} uno de los elementos x_i tal que $v(x_{i_0})$ es mínimo. Entonces $v(y) \geq v(x_{i_0})$, y por tanto $y \in I$. Esto prueba (iii). Finalmente (iii) \implies (i) se sigue de la definición de v -ideales. ■

1.8.13. Proposición. ([ZS], apéndice 4, sección 3) Sea R un dominio íntegramente cerrado. Entonces un ideal I de R es completo si y sólo si es intersección de ideales de valoración.

DEMOSTRACIÓN: Sea I un ideal completo de R , entonces, si \mathcal{V} es el conjunto de valoraciones no triviales del cuerpo de fracciones de R que son no negativas en R , se tiene que

$$I = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} IR_v = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} (IR_v \cap R)$$

(pues \bar{I} está contenido en R) donde cada $IR_v \cap R$ es un ideal de valoración de R . Recíprocamente, veamos que todo ideal de valoración es completo. En efecto, sea $v \in \mathcal{V}$ e I un v -ideal, entonces $I = IR_v \cap R$ (lema 1.8.12) y,

puesto que R es íntegramente cerrado, $\bar{I} = \bar{I} \cap R \subseteq IR_v \cap R = I$. Ahora bien, la intersección de ideales completos es un ideal completo (lema 1.8.2 (iv)) y por tanto la intersección de ideales de valoración de R también es un ideal completo. ■

Por último, estudiaremos el siguiente problema: Sea R un dominio íntegramente cerrado, $Y = \text{Spec } R$ el correspondiente esquema normal, e I un ideal de R . La explosión de Y con centro I está dada por $X = \text{Proj } \mathcal{G} \rightarrow Y$ donde $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$. A continuación calculamos el normalizado $\bar{X} = \text{Proj } \bar{\mathcal{G}}$ de X , o equivalentemente, el cierre íntegro $\bar{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} .

1.8.14. Corolario. Sea R un dominio íntegramente cerrado e I un ideal de R . Entonces el cierre íntegro de la R -álgebra $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ es

$$(23) \quad \bar{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \geq 0} \bar{I}^n$$

DEMOSTRACIÓN: El anillo $A = R[T]$ es un dominio íntegramente cerrado y \mathcal{G} es un subanillo graduado de A . Por tanto $\bar{\mathcal{G}} \subseteq A$, de hecho $\bar{\mathcal{G}}$ es un subanillo graduado de A (lema 1.8.4). Es decir, $\bar{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{G}'_n$ donde $\mathcal{G}'_n = \bar{\mathcal{G}} \cap R^n$.

Veamos que $\mathcal{G}'_n = \bar{I}^n$. La contención $\bar{I}^n \subseteq \mathcal{G}'_n$ es clara. Supongamos que $z \in \bar{\mathcal{G}} \cap R^n$, entonces z satisface la ecuación (2) donde $m_i \in \mathcal{G}^i$. Tomando la parte homogénea de grado rn , podemos suponer que $m_i \in (I^n)^i$ y, por tanto, $z \in \bar{I}^n$ con lo que el resultado queda probado. ■

§9. Ideales contraídos. Segunda caracterización de los ideales completos.

En esta sección definiremos los ideales contraídos para un morfismo p y daremos una caracterización de los ideales completos en relación con dichos ideales. Esta caracterización será útil para probar posteriormente (proposición 1.10.2) que el producto de dos ideales completos de un anillo local con singularidad racional, es también completo. Los resultados de esta sección y de la sección 10 se deben a Lipman ([Lil], secciones 6 y 7). Los reproduciremos aquí por su estrecha relación con nuestro trabajo.

1.9.1. Definición. Sea (Y, P) un germen de variedad y $p : X \rightarrow Y$ un morfismo tal que $p_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Dado un ideal I del anillo local $\mathcal{O}_{Y,P}$, diremos que I es *contraído para p* si el haz de ideales \tilde{I} de \mathcal{O}_Y ([H], capítulo II, sección 5) es de la forma $p_*(\mathcal{J})$ para algún haz de ideales \mathcal{J} de \mathcal{O}_X .

1.9.2. Lema. *En las condiciones anteriores, el ideal I es contraído para p si y sólo si el haz de ideales \tilde{I} de \mathcal{O}_Y coincide con $p_*(I\mathcal{O}_X)$. Por abuso de notación escribiremos*

$$(24) \quad I = p_*(I\mathcal{O}_X)$$

DEMOSTRACIÓN: La condición suficiente es evidente. Supongamos por tanto que I es contraído para p , es decir, $\tilde{I} = p_*(\mathcal{J})$ donde \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -ideal. En primer lugar, se tiene una flecha

$$I\mathcal{O}_X = p^*p_*(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{J}$$

y por tanto, $p_*(I\mathcal{O}_X) \subseteq p_*(\mathcal{J}) = \tilde{I}$. Por otra parte, puesto que $p_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{I} \hookrightarrow p_*p^*(\tilde{I}) & \longrightarrow & p_*(I\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & p_*(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

con lo cual $\tilde{I} \subseteq p_*(I\mathcal{O}_X)$ y se concluye la prueba. ■

1.9.3. Proposición. ([Li1], proposición 6.2) *Sea (Y, P) un germen de variedad normal (por tanto íntegro). Un ideal I de $\mathcal{O}_{Y,P}$ es completo si y sólo si I es un ideal contraído para todo morfismo birracional y propio $p : X \rightarrow Y$ entre esquemas integrales.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observemos que $p_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ por el teorema principal de Zariski ([H], capítulo III, corolario 11.4), ya que X es íntegro y noetheriano. Por tanto, tiene sentido hablar de ideales contraídos para p .

Supongamos que el ideal $I \neq (0)$ es contraído para todo morfismo birracional $p : X \rightarrow Y$ con X íntegro. La R -álgebra de tipo finito $\bigoplus_{n \geq 0} \overline{I}^n$ es la completación de $\bigoplus_{n \geq 0} I^n$ (corolario 1.8.14) y por tanto es un módulo sobre $\bigoplus_{n \geq 0} \overline{I}^n$ de tipo finito. Así pues, para n_0 suficientemente grande, $I \cdot \overline{I}^{n_0} = \overline{I}^{n_0+1}$. Sea $X = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \overline{I}^n)$ y $p : X \rightarrow Y$ el morfismo inducido. El esquema X es íntegro y el morfismo p es birracional y propio, luego I es contraído para p . Se tiene que

$$(25) \quad (I\mathcal{O}_X)(\overline{I}^{n_0}\mathcal{O}_X) = I \cdot \overline{I}^{n_0}\mathcal{O}_X = (\overline{I}\mathcal{O}_X)(\overline{I}^{n_0}\mathcal{O}_X)$$

y, puesto que $\overline{I^{n_0}}\mathcal{O}_X$ es inversible, $I\mathcal{O}_X = \overline{I}\mathcal{O}_X$. Además, por ser I contraído para p ,

$$(26) \quad \overline{I} \subseteq p_*(\overline{I}\mathcal{O}_X) = p_*(I\mathcal{O}_X) = I$$

y por tanto, I es completo.

Recíprocamente, sea $I \neq (0)$ un ideal completo. Tomemos $p : X \rightarrow Y$ un morfismo birracional y propio y consideremos los esquemas siguientes:

$$X' = \text{Spec}(\oplus_{n \geq 0} I^n \mathcal{O}_X) \quad Y' = \text{Spec}(\oplus_{n \geq 0} I^n)$$

X' es un subesquema cerrado de $Y' \times_Y X$, y por tanto, el morfismo canónico $p' : X' \rightarrow Y'$ es propio ([H], capítulo II, corolario 4.8). Puesto que p' es también birracional y el esquema Y' es afín, se tiene que $\oplus_{n \geq 0} p_*(I^n \mathcal{O}_X)$ es íntegramente cerrado sobre $\oplus_{n \geq 0} I^n$ ([EGA II], corolario 7.3.11). En particular $p_*(I\mathcal{O}_X)$ está contenido en $\overline{I} = I$ y por tanto $I = p_*(I\mathcal{O}_X)$. ■

§10. Ideales completos del anillo local de una singularidad racional de superficie.

En esta sección probaremos que el producto de dos ideales completos del anillo local de una singularidad racional de superficie (S, P) es también un ideal completo. Para ello, utilizaremos fuertemente la idea de ideal contraído y la proposición 1.9.3.

1.10.1. Proposición. ([Li1], teorema 7.2) *Sea (Y, P) un germen de variedad íntegro, X una superficie normal y $p : X \rightarrow Y$ un morfismo propio y sobreyectivo tal que $p_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ y $R^1 p_*(\mathcal{O}_X) = 0$. Si I y J son dos ideales de (Y, P) contraídos para p , entonces IJ también es contraído para p .*

DEMOSTRACIÓN: Dado que I y J son ideales contraídos para p , bastará con demostrar que

$$p_*(I\mathcal{O}_X)p_*(J\mathcal{O}_X) = p_*(IJ\mathcal{O}_X)$$

De hecho, podemos suponer que Y es afín y de dimensión mayor que cero y entonces será suficiente probar que

$$(27) \quad \Gamma(X, I\mathcal{O}_X)\Gamma(X, J\mathcal{O}_X) = \Gamma(X, IJ\mathcal{O}_X)$$

El anillo local $R = \mathcal{O}_{Y,P}$ es noetheriano, por tanto los R -ideales I y J están finitamente generados. Si I está generado por s elementos y J por t , entonces existirán sucesiones exactas de \mathcal{O}_X -módulos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{O}_X^s \xrightarrow{\alpha} I\mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{O}_X^t \xrightarrow{\beta} J\mathcal{O}_X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

tales que en las correspondientes sucesiones exactas largas de cohomología

$$\begin{aligned} R^s \xrightarrow{\gamma} I \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_1) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^s) \\ R^t \xrightarrow{\delta} J \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^t) \end{aligned}$$

los morfismos γ y δ son sobreyectivos. Por otro lado, el morfismo p tiene llegada en el esquema afín $\text{Spec } R$, y es tal que $R^1 p_*(\mathcal{O}_X) = 0$. Por tanto, aplicando 1.1.3 se tiene que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ y de aquí se sigue que $H^1(X, \mathcal{K}_1) = H^1(X, \mathcal{K}_2) = 0$.

Sea \mathcal{N} el núcleo de $\alpha \otimes \beta$. Entonces, la sucesión exacta

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{O}_X^t) \oplus (\mathcal{O}_X^s \otimes \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathcal{O}_X^s \otimes \mathcal{O}_X^t \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} IJ\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

da lugar a otra sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

donde $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_X^{st} \oplus \mathcal{O}_X^{ts}$. Además, $H^1(X, \mathcal{K}) = 0$. Si $H^2(X, \mathcal{L}) = 0$, entonces $H^1(X, \mathcal{N}) = 0$ y el morfismo $\Gamma(\alpha \otimes \beta)$ será sobreyectivo. Ahora bien, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R^s \otimes R^t & \xlongequal{\quad} & R^{st} \\ \Gamma(\alpha) \otimes \Gamma(\beta) \downarrow & & \downarrow \Gamma(\alpha \otimes \beta) \\ I \otimes J & \xrightarrow[h]{} & \Gamma(X, IJ\mathcal{O}_X) \end{array}$$

se deduce que, si $H^2(X, \mathcal{L}) = 0$, entonces el morfismo h es sobreyectivo, es decir, $\Gamma(X, IJ\mathcal{O}_X) = \text{Im } h = IJ$.

Veamos que $H^2(X, \mathcal{L}) = 0$ para todo \mathcal{O}_X -módulo casicoherente $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_X^n$. De hecho, bastará con probarlo cuando $n = 1$ (ver [EGA II], demostración de (d') \implies (c') en 3.2.1). En efecto, puesto que el morfismo p es dominante, se tiene que $H^2(X, \mathcal{L}) = 0$ para todo \mathcal{O}_X -módulo casicoherente $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_X$.

Finalmente probaremos que la aplicación h es inyectiva. Bastará con ver que $H^1(X, Ker \mu) = 0$ donde μ es el morfismo $\mu : I\mathcal{O}_X \otimes J\mathcal{O}_X \longrightarrow IJ\mathcal{O}_X$. Supongamos que tanto I como J son ideales no nulos (en otro caso el resultado es evidente), entonces, para cada $x \in X$ con $\dim \mathcal{O}_{X,x} \leq 1$ (es decir, x no es un punto cerrado), los haces de ideales $I\mathcal{O}_{X,x}$ y $J\mathcal{O}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ son inversibles, ya que X es normal. Así pues, el soporte de $Ker \mu$, si no es vacío, tiene dimensión cero y $H^1(X, Ker \mu) = 0$. Con esto se concluye la prueba. ■

1.10.2. Nota. La conclusión técnica de la proposición anterior es que los objetos IJ , $\Gamma(X, IJ\mathcal{O}_X)$ e $I \otimes J$ son canónicamente isomorfos como R -módulos.

1.10.3. Proposición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie. Si I y J son dos ideales completos del dominio local $\mathcal{O}_{S,P}$, entonces IJ es también completo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $L = IJ$, \bar{L} la completión de L y $g : W \longrightarrow S$ la explosión de (S, P) con centro \bar{L} . Supongamos que S es local, es decir, $S = Spec R$ y consideremos $q : Z \longrightarrow S$ una desingularización. Entonces existe una desingularización $p : X \longrightarrow S$ que factoriza q . De hecho, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & W \\ \text{Bl}_{\bar{L}\mathcal{O}_Z} \downarrow & & \downarrow \text{Bl}_{\bar{L}} \\ Z & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

y $p = q \circ \text{Bl}_{\bar{L}\mathcal{O}_Z}$ ([H], capítulo II, corolario 7.15). Por lo tanto, $\bar{L}\mathcal{O}_X$ es inversible.

La superficie X es regular, por tanto normal, y $p : X \longrightarrow S$ cumple las condiciones de la proposición 1.10.1 (gracias al teorema principal de Zariski). Los ideales I y J son completos, luego contraídos para p (proposición 1.9.3) y por tanto, IJ es contraído para p (proposición 1.10.1). Ahora bien, puesto que $\bar{L}\mathcal{O}_X$ es inversible, se tiene que L es completo (véase el argumento de la primera parte de la demostración de 1.9.3, es decir, las igualdades (25) y (26) aplicadas a L). ■

Por último, el siguiente corolario es importante ya que muestra que, al contrario que en la mayoría de las situaciones, la explosión de un ideal completo sobre una singularidad racional es normal.

1.10.4. Corolario. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, I un ideal completo de $\mathcal{O}_{S, P}$ y $p : X \rightarrow S$ la explosión con centro I . Entonces la variedad X es normal.

DEMOSTRACIÓN: Por la definición de explosión con centro I , se tiene que $X = \text{Proj } \mathcal{G}$ donde $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$. Ahora bien, la completación de \mathcal{G} es $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n}$ (corolario 1.8.14) y por la proposición anterior, $\overline{I^n} = I^n$ ya que I es un ideal completo. Por tanto, \mathcal{G} es un dominio íntegramente cerrado y X es normal. ■

1.10.5. Nota. Dado un dominio local R , el conjunto de los ideales completos de R primarios para el ideal maximal tiene estructura de semigrupo con la operación $I * J = \overline{IJ}$. Un problema típico es describir explícitamente dicho semigrupo. En el caso particular en que R es el anillo local de una singularidad racional de superficie, la operación $*$ anterior es el producto usual de ideales.

Capítulo 2

Constelaciones, matriz de proximidad, cúmulos e ideales completos.

Dada una singularidad racional de superficie (S, P) , una constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P (definición 2.1.2) define un morfismo $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$. En este capítulo estudiaremos los morfismos $\pi_{\mathcal{C}}$ que son desingularizaciones de (S, P) . En la sección 1, estudiaremos el grupo libre $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ generado por las componentes irreducibles $\{E_{\gamma}\}_{\gamma}$ del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$. En la sección 2 analizaremos la idea de transformado total de un divisor de Weil, para definir una nueva base $\{E_{\gamma}^*\}_{\gamma}$ del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{Q}$. La relación entre dichas bases la expresaremos en la sección 3 y, en la sección 4, estudiaremos la forma bilineal definida en $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ por la intersección de divisores con soporte excepcional. Una vez introducido el lenguaje de constelaciones, en la sección 5 describiremos los árboles con relaciones de proximidad (definición 2.1.5) definidos por las desingularizaciones minimales de los puntos dobles racionales.

Finalmente, en las secciones 6 y 7, desarrollaremos el concepto de cúmulo (o condiciones base) con origen en el punto P . Estudiaremos su relación con los ideales completos de (S, P) y con cierto tipo de divisores con soporte excepcional. Más concretamente, a cada cúmulo K con soporte en una constelación \mathcal{C} le podemos asociar un ideal completo \mathfrak{m} -primario I_K (\mathfrak{m} es el ideal maximal del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$) y un divisor \mathbb{Q} -Cartier con soporte excepcional D_K de $S_{\mathcal{C}}$, de manera que si D_K es un divisor, entonces el ideal I_K es el conjunto de secciones globales del haz $\pi_{\mathcal{C}*}(\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D_K))$.

§1. Puntos infinitamente próximos y constelaciones.

Fijemos una singularidad racional de superficie (S, P) .

2.1.1. Definición. Llamaremos *punto infinitamente próximo a P* a todo punto Q de cualquier superficie S_i obtenida a partir de S tras un número finito de explosiones de puntos, tal que la imagen de Q vía dichas transformaciones sea P (véase [EC], libro IV, capítulos I, II y [Cs1], sección 1).

2.1.2. Definición. Una *constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P* (o constelación con origen en P) es un conjunto de puntos infinitamente próximos a P , $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ donde $m \geq 1$, $P_1 = P$ y para $1 \leq i \leq m-1$, P_{i+1} es un punto de la superficie S_i obtenida a partir de S_{i-1} tras explotar el punto P_i (S_0 es la superficie inicial S).

Por tanto, una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ con origen en P define una cadena de explosiones de puntos,

$$(1) \quad S_{\mathcal{C}} = S_m \xrightarrow{\pi_m} S_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} S_1 \xrightarrow{\pi_1} S_0 = S$$

donde π_i es la explosión de S_{i-1} con centro P_i y $\pi_{\mathcal{C}}$ es la composición $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_m$. Escribiremos π en vez de $\pi_{\mathcal{C}}$ cuando no haya lugar a confusión.

Sea $\mathcal{C}_1 = \{P\} \subset S$, es decir, \mathcal{C}_1 es la imagen por π del subconjunto cerrado de $S_{\mathcal{C}}$ donde π no es isomorfismo. La explosión de S con centro en \mathcal{C}_1 es $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$. Si llamamos también X_1 a S_1 y φ_1 a π_1 , entonces se tiene un morfismo $p_1 : S_{\mathcal{C}} \rightarrow X_1$ que factoriza φ_1 , es decir, $p_1 = \pi_2 \circ \dots \circ \pi_m$.

Si $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1$, entonces hay un número finito de componentes irreducibles del lugar excepcional de π cuya imagen vía p_1 tiene dimensión cero, es decir, la imagen por p_1 del subconjunto cerrado de $S_{\mathcal{C}}$ donde p_1 no es isomorfismo consiste en un número finito de puntos de X_1 que denotaremos por \mathcal{C}_2 . Obviamente $P_2 \in \mathcal{C}_2$ y, para cada punto $Q \in \mathcal{C}_2$ distinto de P_2 , existe un único i ($3 \leq i \leq m$) tal que P_i es un punto del conjunto abierto de S_{i-1} donde el morfismo $S_{i-1} \rightarrow S_1$ es un isomorfismo y la imagen de P_i por dicha aplicación es Q . Es decir, las superficies S_{i-1} y X_1 son isomorfas en entornos de P_i y Q , y por tanto, los anillos locales $\mathcal{O}_{S_{i-1}, P_i}$ y $\mathcal{O}_{X_1, Q}$ no sólo son isomorfos, sino que son iguales vistos como subanillos del cuerpo de funciones $K(S)$. De esta forma, podemos identificar Q y P_i , y ver \mathcal{C}_2 como subconjunto de \mathcal{C} . Consideremos $\varphi_2 : X_2 \rightarrow X_1$ la explosión de X_1 con centro \mathcal{C}_2 . Por la propiedad universal de la explosión, existe un único morfismo $p_2 : S_{\mathcal{C}} \rightarrow X_2$ que factoriza p_1 .

Si $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, sea \mathcal{C}_3 la imagen por p_2 del subconjunto cerrado de $S_{\mathcal{C}}$ donde p_2 no es isomorfismo. De nuevo \mathcal{C}_3 es un conjunto finito no vacío de X_2 que podemos considerar como subconjunto de \mathcal{C} . En efecto, si $Q \in \mathcal{C}_3$, $\varphi_2(Q)$ es un punto de \mathcal{C}_2 que está identificado con algún punto $P_i \in S_{i-1}$. Las variedades S_{i-1} y X_1 están canónicamente identificadas en entornos de dichos puntos, y por tanto, existe un único punto $P_j \in \mathcal{C}$ tal que S_{j-1} y X_2 son superficies isomorfas en entornos de P_j y Q respectivamente. Así pues, los anillos locales $\mathcal{O}_{S_{i-1}, P_j}$ y $\mathcal{O}_{X_2, Q}$ son iguales como subanillos de $K(S)$, y podemos ver \mathcal{C}_3 como un subconjunto de \mathcal{C} disjunto de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 .

De nuevo, si $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, consideremos la explosión $\varphi_3 : X_3 \rightarrow X_2$ de X_2 con centro \mathcal{C}_3 y el único morfismo $p_3 : S_{\mathcal{C}} \rightarrow X_3$ que factoriza p_2 y continuemos de la misma forma. Finalmente, tras un número finito de pasos, obtenemos una partición $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_t$ y el diagrama conmutativo siguiente:

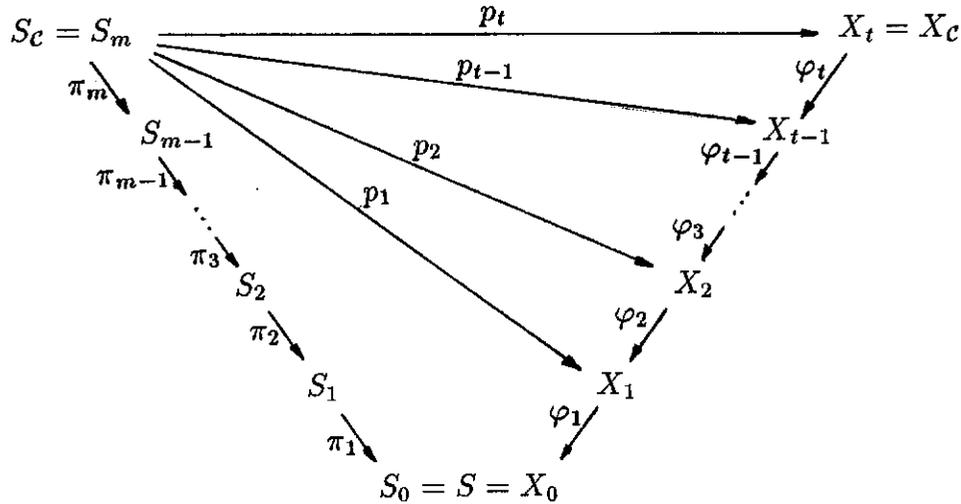


fig. 2.1.

donde $p_t : S_{\mathcal{C}} \rightarrow X_t$ es un isomorfismo.

A la superficie $X_{\mathcal{C}} = X_t \cong S_{\mathcal{C}}$ la llamaremos el *cielo* de la constelación \mathcal{C} . Para cada punto $P_i \in \mathcal{C}$, existirá un entero $l = l(P_i)$ tal que $P_i \in \mathcal{C}_{l+1}$. Al número l lo llamaremos *nivel de P_i* . También diremos, usando la terminología clásica, que P_i está en el *l-ésimo entorno infinitesimal de P* y llamaremos *profundidad* de la constelación \mathcal{C} al entero t , es decir, al mayor entero i tal que el i -ésimo entorno infinitesimal de P contiene puntos de \mathcal{C} .

A lo largo del trabajo, consideraremos constelaciones \mathcal{C} con origen en P tales que el morfismo $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ sea una desingularización de (S, P) .

Diremos que dos constelaciones son *equivalentes* si definen la misma cadena de morfismos $\{\varphi_i\}_{i=1}^t$. De esta forma, y debido a 1.2.4, existe una correspondencia biunívoca entre desingularizaciones de (S, P) y clases de equivalencia de constelaciones con la anterior propiedad. Diremos que una constelación \mathcal{C}_m con origen en P es una *constelación minimal* si el morfismo $\pi_{\mathcal{C}_m} : S_{\mathcal{C}_m} \rightarrow S$ define la desingularización minimal de (S, P) , deduciéndose por tanto que dos constelaciones minimales son equivalentes.

Finalmente, indiquemos que la clase de equivalencia de constelaciones se puede entender también como un conjunto de subanillos locales del cuerpo $K(S)$, subanillos que se identifican con los puntos de cada constelación concreta de la clase. La relación de dominación entre anillos locales da un orden entre los mismos al que llamamos *orden de la constelación*. Si $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ es un representante de la clase, se tiene trivialmente que $i < j$ cuando el anillo local en P_i es dominado por el anillo local en P_j .

2.1.3. Dada una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ de puntos infinitamente próximos a P , consideramos la cadena de explosiones (1) (recorde mos que hemos convenido que $S_{\mathcal{C}}$ es regular). Para $1 \leq i \leq m$, denotamos por $E_{i1}^i, \dots, E_{is_i}^i$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_i (el superíndice i significa que son divisores de S_i).

En general, E_{ik}^i no es un divisor de Cartier de S_i , sino simplemente un divisor de Weil. Para $j > i$ denotaremos por E_{ik}^j el transformado estricto de E_{ik}^i en S_j , es decir, la adherencia en S_j de la imagen inversa de $E_{ik}^i - P_{i+1}$. Por simplicidad, denotaremos por E_{ik} a E_{ik}^m . Así pues, E_{ik} es un divisor de $S_{\mathcal{C}}$, de hecho, es una componente irreducible del lugar excepcional de $\pi : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$. Llamaremos $\Delta_{\mathcal{C}}$, o simplemente Δ , al conjunto de índices de las componentes irreducibles del lugar excepcional de π , es decir,

$$(2) \quad \Delta = \{(i, k) \mid 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq s_i\}$$

Con esta notación, denotaremos por $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ (o simplemente \mathbf{E}) el grupo de divisores de $S_{\mathcal{C}}$ de la forma $\sum_{\gamma \in \Delta} n_{\gamma} E_{\gamma}$, donde los n_{γ} son números enteros.

2.1.4. Definición. Dada la constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ de puntos infinitamente próximos a P , diremos que el punto P_j es *próximo a* P_i , y lo denotaremos por $P_j \rightarrow P_i$ (o simplemente $j \rightarrow i$), si $j > i$ y P_j pertenece a E_{ik}^j para algún k , $1 \leq k \leq s_i$.

2.1.5. Definición. Un *árbol* es un objeto combinatorio formado por vértices y aristas uniendo dichos vértices, de forma que el diagrama sea simplemente conexo.

A cada constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ con origen en P , le asociamos un árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ (o bien \mathcal{T} , si no hay lugar a confusión) de la siguiente forma: Los vértices de \mathcal{T} están en correspondencia biunívoca con los puntos P_1, \dots, P_m , y las aristas con los pares (P_i, P_j) tales que $l(P_j) = l(P_i) + 1$ y P_j es próximo a P_i . Observemos que P_k es infinitamente próximo a P_i si y sólo si, o bien $P_k = P_i$, o bien $l(P_k) > l(P_i)$ y existe una cadena de aristas de \mathcal{T} que comienza en el vértice correspondiente a P_i y termina en el vértice correspondiente a P_k .

También podemos asociar a la constelación \mathcal{C} un *árbol con relaciones de proximidad* $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^p$, o simplemente \mathcal{T}^p . Consiste en añadir a \mathcal{T} líneas de trazos correspondientes a los pares (P_i, P_j) con P_j próximo a P_i y $l(P_j) > l(P_i) + 1$.

Finalmente, observemos que si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son dos constelaciones equivalentes, entonces no sólo coinciden los árboles $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{C}'}$, sino que los árboles con relaciones de proximidad $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^p$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{C}'}^p$ son el mismo objeto combinatorio.

§2. Transformado total de divisores de Weil. Matriz de proximidad.

Dada una singularidad racional de superficie (S, P) y una constelación \mathcal{C} con origen en P , hemos definido en 2.1.3 el grupo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}$. Las componentes irreducibles $\{E_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta}$ del lugar excepcional del morfismo $\pi : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ (que, por convenio, es una desingularización), constituyen una base del \mathbb{Z} -módulo \mathbf{E} . En esta sección, definiremos otra base natural $\{E_{\gamma}^*\}_{\gamma \in \Delta}$ del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E} \otimes \mathbb{Q}$. Asimismo, estudiaremos la relación entre dichas bases.

Comencemos definiendo el transformado total de un divisor de Weil C de una singularidad normal de superficie (S, P) por una desingularización $p : X \rightarrow S$.

2.2.1. Definición. ([M1], sección 2 (b)) Sea (S, P) una singularidad normal de superficie (en particular, una singularidad racional de superficie), sea $p : X \rightarrow S$ una desingularización y sean $\{E_{\gamma}\}_{\gamma}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . Dado un divisor de Weil C de (S, P) , definimos el *transformado total* C^* de C por p como el divisor de X dado por

$$(3) \quad C^* = \bar{C} + \sum_{\gamma} \mu_{\gamma} E_{\gamma}$$

donde \overline{C} es el transformado estricto de C en X y $\{\mu_\gamma\}_\gamma$ son los únicos números racionales que satisfacen

$$(4) \quad \overline{C}.E_\alpha + \sum_{\gamma} \mu_\gamma (E_\gamma.E_\alpha) = 0$$

para todo α . Nótese que la solución de (4) es única puesto que la matriz $(E_\alpha.E_\beta)$ es definida negativa (proposición 1.4.1).

La definición de transformado total se puede extender a divisores de Weil de una superficie normal S (en particular, de una superficie con singularidades racionales). Sea $p : X \rightarrow S$ una desingularización, sean $\{E_\gamma\}_\gamma$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p y sea $\{Q_1, \dots, Q_t\}$ la imagen por p de dicho lugar excepcional (cada Q_i es un punto de S). Agrupemos los E_γ en paquetes $\{E_{\gamma_j}\}_{\gamma_j \in \Delta_j}$ de manera que la imagen por p de E_{γ_j} es Q_j para cada $\gamma_j \in \Delta_j$, $1 \leq j \leq t$ (obsérvese que obtenemos una partición disjunta de $\{E_\gamma\}_\gamma$). Tomemos ahora un divisor de Weil C de S y denotemos por C_j el divisor de Weil inducido en el germen de superficie (S, Q_j) . Para $1 \leq j \leq t$, las igualdades (3) y condiciones (4) definen el transformado total C_j^* de C_j por p mediante

$$C_j^* = \overline{C}_j + \sum_{\gamma_j \in \Delta_j} \mu_{\gamma_j} E_{\gamma_j}$$

En esta situación, definimos el transformado total de C por p como el divisor de X dado por

$$(5) \quad C^* = \overline{C} + \sum_{j=1}^t \sum_{\gamma_j \in \Delta_j} \mu_{\gamma_j} E_{\gamma_j}$$

2.2.2. Nota. Si C es un divisor de Cartier de la superficie normal S y $\mathcal{O}_S(C)$ el haz inversible que define en S , entonces el transformado total C^* de C por p es el divisor de X definido por el haz inversible $p^*\mathcal{O}_S(C)$. Es decir, la definición de transformado total de un divisor de Cartier coincide con la idea correspondiente en teoría de haces.

Dada una singularidad racional de superficie (S, P) , el grupo $Cl(\mathcal{O}_{S,P})$ es finito y por tanto, para todo divisor de Weil C de (S, P) , existe un entero positivo r tal que rC es un divisor de Cartier de (S, P) (proposición 1.5.1). Entonces, teniendo en cuenta la definición anterior, se tiene

$$(6) \quad C^* = \frac{1}{r}(rC)^*$$

Por tanto, el concepto de transformado total dado en 2.2.1 extiende de forma natural la idea de imagen inversa de haces.

2.2.3. Nota. Sea (S, P) una singularidad normal de superficie y $p : X \rightarrow S$ un morfismo birracional, propio y tal que X es una superficie normal, y sean $\{E_\gamma\}_\gamma$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . El argumento de la demostración 1.4.1 puede aplicarse a este caso, deduciéndose que la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ es definida negativa.

Tiene sentido, por tanto, definir el transformado total de un divisor de Weil C de una superficie con singularidades racionales S vía un morfismo $p : X \rightarrow S$ obtenido por composición de explosiones en puntos, aun cuando X sea singular. También el comentario 2.2.2 tiene validez en este caso.

2.2.4. Consideremos una singularidad racional de superficie (S, P) y una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ con origen en P que da lugar a una desingularización $\pi : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ de (S, P) , y mantengamos la notación de la sección 1. Para $0 \leq i < j \leq m$, consideremos el morfismo $S_j \rightarrow S_i$ dado por la cadena de explosiones (1). En S_i están definidos los divisores de Weil $\{E_{ik}^i\}_{k=1}^{s_i}$ (ver 2.1.3). Denotaremos por E_{ik}^{*j} el transformado total de E_{ik}^i por el morfismo $S_j \rightarrow S_i$. Por simplicidad, denotaremos por E_{ik}^{*m} el divisor E_{ik}^{*m} de $S_{\mathcal{C}}$. Entonces los divisores $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ y $\{E_\gamma^*\}_{\gamma \in \Delta}$ son dos bases del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E} \otimes \mathbb{Q}$.

Por otro lado, podemos considerar órdenes totales de los elementos de Δ de tal manera que se tenga $(i, k) < (i', k')$ siempre que $i < i'$, sean cuales sean k, k' con $1 \leq k \leq s_i$, $1 \leq k' \leq s_{i'}$. Llamaremos a dichos órdenes totales *enumeraciones* de Δ . A continuación, utilizaremos matrices cuyos conjuntos de filas o columnas están en correspondencia biunívoca con los elementos de Δ , teniendo en cuenta una de estas enumeraciones, fijada a priori. Nótese que estas enumeraciones son compatibles en el sentido obvio con el orden de la constelación (ver 2.1.2).

2.2.5. Definición Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P , sea $\Delta = \Delta_{\mathcal{C}}$ el conjunto de índices definido en (2) y ω una enumeración de Δ . Llamamos *matriz de proximidad* de la constelación \mathcal{C} respecto a la enumeración ω a la matriz $M_{\mathcal{C}\omega}$ de cambio de base

$$(7) \quad M_{\mathcal{C}\omega} \underline{E}^* = \underline{E}$$

donde por \underline{E} (respectivamente \underline{E}^*) designamos el vector columna formado por los E_γ (respectivamente E_γ^*) ordenados respecto a la enumeración ω . Es decir, $M_{\mathcal{C}\omega}$ es una matriz $(m_{\gamma\alpha})$ de números racionales tales que

$$E_\gamma = \sum_{\alpha} m_{\gamma\alpha} E_\alpha^*$$

y escribiremos M en vez de $M_{\mathcal{C}\omega}$ cuando no haya lugar a confusión.

2.2.6. Nota. Supongamos que el punto P de (S, P) es no singular. En tal caso, todas las superficies S_i obtenidas al explotar los puntos de la constelación \mathcal{C} son no singulares y el lugar excepcional de $\pi_i : S_i \rightarrow S_{i-1}$ tiene una sola componente irreducible $E_i^!$ que es isomorfa a \mathbb{P}^1 . Así pues, el cardinal de Δ es el número m de puntos de \mathcal{C} y la única posible enumeración de Δ no es otra cosa que la de los puntos de \mathcal{C} . En estas condiciones, tenemos la relación siguiente

$$E_i = E_i^* - \sum p_{ij} E_j^*$$

donde $p_{ij} = 1$ si $i < j$ y P_j es próximo a P_i y $p_{ij} = 0$ en otro caso. Designamos por Pr la matriz triangular superior $(p_{ij})_{i,j}$. Entonces la matriz de proximidad es $M = Id - Pr$ y, por tanto, sólo depende de las relaciones de proximidad. Dicha matriz de proximidad fue introducida por Du Val ([DV2], sección 10) y aparece posteriormente en [CGL1], [CGL2], [Dm], [Ho], [LJ].

Posteriormente, en la sección 3, analizaremos la matriz de proximidad de una constelación \mathcal{C} con origen en el punto P de una singularidad racional de superficie. Comencemos por describir un ejemplo de un punto doble racional.

2.2.7. Ejemplo. Sea (S, P) la singularidad racional de superficie de tipo D_5 dada por $x^4 + xy^2 + z^2 = 0$ en un entorno de $P = (0, 0, 0) \in k^3$, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado (ver capítulo 1, sección 7). La desingularización minimal de (S, P) está definida por una constelación \mathcal{C}_m de puntos infinitamente próximos a P cuyo árbol con relaciones de proximidad está representado en fig. 2.2. Es decir, todas las relaciones de proximidad quedan representadas en dicha figura.

El grafo dual de la desingularización está representado en fig. 2.3.

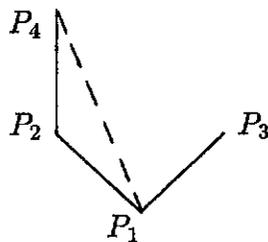


fig. 2.2.

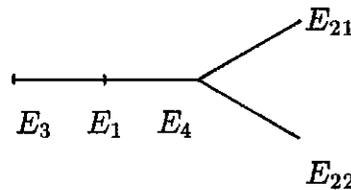


fig. 2.3.

y por tanto, la autointersección de cada E_γ es -2 y $E_\alpha \cdot E_\beta$ es 1 si el vértice correspondiente a E_α está unido directamente al correspondiente a E_β y 0 en otro caso (proposición 1.3.3 y corolario 1.6.3). Siguiendo el proceso

de desingularización, obtenemos

$$\begin{aligned} 2E_1 &= 2E_1^* - E_{21}^* - E_{22}^* - E_3^* - E_4^* \\ 2E_{21} &= 2E_{21}^* - E_4^* \\ 2E_{22} &= 2E_{22}^* - E_4^* \\ E_3 &= E_3^* \\ E_4 &= E_4^* \end{aligned}$$

y por tanto, la matriz de proximidad de C_m (siguiendo cualquier enumeración del conjunto de índices Δ_m) está dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

§3. Órdenes de divisores de Weil respecto de valoraciones divisoriales.

Consideremos un germen de superficie no singular (S, P) y un morfismo $\pi : S_C \rightarrow S$ inducido por una constelación C con origen en P . Los anillos locales $R_i = \mathcal{O}_{S_{i-1}, P_i}$ son todos regulares. Sea \mathfrak{m}_i el ideal maximal de R_i . Dado un divisor C_i de S_i que pasa por el punto P_i , si $h_i = 0$ es una ecuación local de C_i en P_i , entonces la multiplicidad de C_i en P_i es el mayor entero e tal que h_i pertenece a \mathfrak{m}_i^e . De esta forma, dado un divisor C de S , el transformado total C^* de C por π se puede expresar en función de $\{E_i^*\}$ mediante

$$(8) \quad C^* = \bar{C} + \sum_{i=1}^n e_i E_i^*$$

donde e_i es la multiplicidad en P_i del transformado estricto \bar{C}^{i-1} de C en S_{i-1} ([LJ], sección 2).

En esta sección, trataremos de generalizar la igualdad (8) al caso en que P sea un punto singular de S , con singularidad racional. Como consecuencia obtendremos una descripción de la matriz de proximidad.

Fijemos, para el resto del capítulo, una singularidad racional de superficie (S, P) y una constelación C con origen en P . Consideremos la desingularización inducida $\pi : S_C \rightarrow S$ y mantengamos la notación de la sección 1.

2.3.1. Definición. Cada componente irreducible E_γ del lugar excepcional de π induce una valoración divisorial v_γ en el cuerpo de funciones de S . Por tanto, para todo divisor de Cartier D de (S, P) , el valor $v_\gamma(D)$ es un entero bien definido. Puesto que $Cl(\mathcal{O}_{S,P})$ es un grupo finito, podemos definir $v_\gamma(C)$ para cualquier divisor de Weil C de (S, P) de la siguiente manera: Si r es un número natural tal que rC es un divisor de Cartier, entonces

$$(9) \quad v_\gamma(C) := \frac{1}{r} v_\gamma(rC)$$

Obsérvese que $v_\gamma(C)$ es un número racional que no depende de r . Llamaremos a dicho número el *orden γ -ésimo* (o γ -orden) de C .

2.3.2. Nota. En general, si S es una superficie con singularidades racionales (por ejemplo, S es la superficie S_i definida en (1) para la constelación \mathcal{C}), $p : X \rightarrow S$ una desingularización (por ejemplo, el morfismo $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$), E_γ una componente irreducible del lugar excepcional de p y C un divisor de Weil de S , también tiene sentido hablar del γ -orden de C . En efecto, consideremos el punto Q imagen de E_γ por p y sea C_Q el divisor de Weil inducido por C en la singularidad racional de superficie (S, Q) . Entonces definimos el γ -orden de C como $v_\gamma(C_Q)$. En particular, si C es un divisor de Weil de la singularidad racional de superficie (S, P) y la constelación \mathcal{C} induce la sucesión (1) de explosiones en puntos, entonces, para $\gamma = (i, k) \in \Delta$, el γ -orden $v_\gamma(\overline{C}^{i-1})$ de \overline{C}^{i-1} es un número racional bien definido.

2.3.3. Proposición. Sea C un divisor de Weil de (S, P) , C^* el transformado total de C por $\pi_{\mathcal{C}}$ y \overline{C} el transformado estricto. Entonces

$$(10) \quad C^* = \overline{C} + \sum e_\gamma E_\gamma^* = \overline{C} + \sum \mu_\gamma E_\gamma$$

donde, si $\gamma = (i, k)$ entonces

$$(11) \quad e_\gamma = v_\gamma(\overline{C}^{i-1})$$

y, dada una enumeración ω de Δ , si denotamos por $\underline{\mu}$ y \underline{e} los vectores columna de los μ_γ y e_γ respecto a dicha enumeración y $M = M_{\mathcal{C}, \omega}$, entonces se tiene

$$(12) \quad \underline{\mu} = (M^t)^{-1} \underline{e}$$

A los números $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ los llamaremos *órdenes efectivos* (o simplemente *órdenes*, u *órdenes exactos*) de C en \mathcal{C} .

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, supongamos que C es un divisor de Cartier de (S, P) . Sea h un elemento del cuerpo de funciones de S tal que $h = 0$ es una ecuación que define C en (S, P) . Entonces, el transformado total C^{*i} de C en S_i es el divisor de Cartier de S_i dado por $h = 0$. Por inducción se prueba que

$$C^{*i} = \overline{C}^i + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^{s_k} v_{kj} (\overline{C}^{k-1}) E_{kj}^{*i}$$

y puesto que C^{*m} es exactamente C^* , obtenemos la primera igualdad de (10). La segunda igualdad es consecuencia del cambio de base de (7). Por tanto, hemos probado (10) cuando C es un divisor de Cartier.

Si C no es un divisor de Cartier, tomamos $r \in \mathbb{N}$ tal que rC sea divisor de Cartier. Ahora, $(rC)^* = rC^*$, $\overline{(rC)} = r\overline{C}$ y la igualdad (9) implica que $e_\gamma(C) = \frac{1}{r} e_\gamma(rC)$, por tanto (10) queda probado. ■

2.3.4. Nota. De la demostración 2.3.3 se sigue que el resultado es cierto en general para una superficie con singularidades racionales S (en vez de una singularidad racional de superficie (S, P)). Más concretamente, sea S una superficie con singularidades racionales, $p : X \rightarrow S$ una desingularización (que es composición de explosiones en puntos por 1.2.4) y $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . Entonces, para un divisor de Weil C de S , se tiene

$$(13) \quad C^* = \overline{C} + \sum_{\gamma \in \Delta} e_\gamma E_\gamma^* = \overline{C} + \sum_{\gamma \in \Delta} \mu_\gamma E_\gamma$$

donde e_γ es el γ -orden del transformado estricto de C en la superficie obtenida en la etapa anterior a la aparición de E_γ y, fija una enumeración de Δ , $\underline{\mu} = (M^t)^{-1} \underline{e}$.

2.3.5. Nota. Si (S, P) es no singular y C es un divisor de (S, P) , entonces, para $2 \leq i \leq m + 1$, \overline{C}^{i-1} es un divisor de Cartier de S_{i-1} . Sea $h = 0$ una ecuación local de \overline{C}^{i-1} en P_i . Entonces $e_i = v_i(\overline{C}^{i-1})$ es el máximo entero e tal que $h \in \mathfrak{m}_i^e$, es decir, e_i es la multiplicidad de \overline{C}^{i-1} en P_i . En este caso particular, la igualdad (10) coincide con la igualdad (8) y es consecuencia directa de la identidad $\pi_1^* C = \overline{C} + e_1 E_1$, donde $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ es la explosión de la superficie S con centro un punto no singular P , E_1 es el lugar excepcional y e_1 es la multiplicidad del divisor C en P .

2.3.6. Corolario. Sea ω la enumeración siguiendo el orden lexicográfico de Δ y, para $1 \leq i < j \leq m$, sea V_{ij} la $(s_i \times s_j)$ -matriz de números racionales $V_{ij} = (v_{jk}(E_{ir}^{j-1}))_{r,k}$ y V la $(n \times n)$ -matriz triangular superior formada por los $(V_{ij})_{i < j}$ y con ceros en el resto (siendo $n = \sum_i s_i$ el cardinal de Δ). Entonces la matriz de proximidad M de la constelación \mathcal{C} respecto a la enumeración ω es $M = Id - V$.

Más aún, para $i < j$ se tiene:

- (a) Si $P_j \notin \text{Sop } E_{ik}^{j-1}$ entonces $v_{jt}(E_{ik}^{j-1}) = 0$ para $1 \leq t \leq s_j$, es decir, la fila k -ésima de V_{ij} es cero.
- (b) Si $P_j \in \text{Sop } E_{ik}^{j-1}$ entonces $v_{jt}(E_{ik}^{j-1}) \neq 0$ para $1 \leq t \leq s_j$, es decir, todos los elementos de la fila k -ésima de V_{ij} son no nulos.

DEMOSTRACIÓN: Para calcular la matriz M , basta con aplicar la igualdad (13) a cada divisor de Weil E_{ik}^i de S_i . Es decir, suponemos que nuestra superficie S es S_i y el morfismo de desingularización es $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$. De esta forma, obtenemos:

$$(14) \quad E_{ik} = E_{ik}^* - \sum_{j>i} \sum_{t=1}^{s_j} v_{(jt)}(E_{ik}^{j-1}) E_{jt}^*$$

de donde se deduce la matriz M . La última afirmación del corolario es obvia puesto que P_j es el centro en S_j de la valoración v_{jt} , para $1 \leq t \leq s_j$. ■

§4. Forma y matriz de intersección.

En la sección 2 de este capítulo hemos definido la base $\{E_{\gamma}^*\}_{\gamma \in \Delta}$ del \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbf{E}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{Q}$ definido por la constelación \mathcal{C} en (S, P) . En la sección 3 hemos estudiado la matriz de proximidad M que define el cambio de base de $\{E_{\gamma}^*\}$ a $\{E_{\gamma}\}$. Por otro lado, sabemos (proposición 1.4.1) que la intersección de divisores de $S_{\mathcal{C}}$ con soporte excepcional define una forma bilineal definida negativa sobre $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$. Esta sección la dedicaremos a estudiar dicha forma bilineal utilizando la base $\{E_{\gamma}^*\}$.

2.4.1. Definición. Con la notación anterior, dada una enumeración ω compatible con \mathcal{C} , designaremos por $\Lambda_{\mathcal{C}\omega}$ (o simplemente Λ) la matriz de números racionales $(E_{\alpha}^* \cdot E_{\beta}^*)_{\alpha, \beta \in \Delta}$ definida por la enumeración ω . Denominaremos a dicha matriz *matriz de intersección* de la constelación \mathcal{C} respecto a la enumeración ω .

En primer lugar, consideremos el germen de superficie con singularidades racionales (S, P) inmerso en un germen de variedad no singular (Y, O) mediante $\sigma : (S, P) \rightarrow (Y, O)$. De hecho, si la multiplicidad de (S, P) es r , entonces (S, P) está inmersa en un germen de variedad no singular sobre k de dimensión $r + 1$ (ver proposición 1.6.2), pero en esta sección no utilizaremos dicho resultado.

Consideremos la cadena de explosiones de puntos:

$$(15) \quad \begin{array}{ccccccc} Y_{\mathcal{C}} = Y_m & \xrightarrow{\varpi_m} & Y_{m-1} & \xrightarrow{\varpi_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\varpi_2} & Y_1 & \xrightarrow{\varpi_1} & Y_0 = Y \\ \sigma_m \uparrow & & \sigma_{m-1} \uparrow & & & & \sigma_1 \uparrow & & \sigma \uparrow \\ S_{\mathcal{C}} = S_m & \xrightarrow{\pi_m} & S_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & S_1 & \xrightarrow{\pi_1} & S_0 = S \end{array}$$

donde σ_i es la inmersión de S_i en Y_i y ϖ_{i+1} es la explosión de $\sigma_i(P_{i+1}) \in Y_i$. Denotemos por \mathbb{E}_i^i el divisor excepcional de ϖ_i (observemos que \mathbb{E}_i^i es isomorfo a \mathbb{P}^r si $r + 1$ es la dimensión de Y). En esta situación, existen números enteros estrictamente positivos ρ_{ik} , para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq s_i$, tales que

$$(16) \quad \sigma_i^*(\mathbb{E}_i^i) = \mathfrak{m}_i \mathcal{O}_{S_i} = \rho_{i1} E_{i1}^i + \cdots + \rho_{is_i} E_{is_i}^i$$

Estas relaciones nos proporcionan información sobre la matriz Λ .

2.4.2. Proposición. Sea Λ la matriz de intersección de la constelación \mathcal{C} respecto a la enumeración lexicográfica de Δ y sea Λ_i la $(s_i \times s_i)$ -matriz de números racionales $\Lambda_i = (E_{ik}^* \cdot E_{ir}^*)_{k,r}$. Entonces Λ es la matriz simétrica compuesta por las cajas $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq m}$ en la diagonal y ceros en el resto. En particular, si (S, P) es no singular, entonces $\Lambda = -Id$.

Más aún, utilizando la notación de (16), tenemos

$$(17) \quad (\underline{\rho}_i)^t \Lambda_i \underline{\rho}_i = -\text{mult}_{P_i}(S_{i-1})$$

donde $(\underline{\rho}_i)^t = (\rho_{i1}, \dots, \rho_{is_i})$.

DEMOSTRACIÓN: Para i fijo, sigamos denotando por π el morfismo $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$ y por ϖ el morfismo $Y_{\mathcal{C}} \rightarrow Y_i$. Por la conmutatividad del funtor $*$ se tiene $\pi^* \circ \sigma_i^* = \sigma_m^* \circ \varpi^*$. Por tanto, aplicando π^* a (16), obtenemos

$$(18) \quad \sigma_m^*(\mathbb{E}_i^*) = \rho_{i1} E_{i1}^* + \cdots + \rho_{is_i} E_{is_i}^*$$

donde \mathbb{E}_i^* es el transformado total de \mathbb{E}_i^i por ϖ .

Ahora bien, si $i \neq j$ entonces $\mathbb{E}_i^* \cdot \mathbb{E}_j^* = 0$ y por tanto

$$0 = \sigma_m^*(\mathbb{E}_i^* \cdot \mathbb{E}_j^*) = \sigma_m^*(\mathbb{E}_i^*) \cdot \sigma_m^*(\mathbb{E}_j^*)$$

Así pues,

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq s_i \\ 1 \leq t \leq s_j}} \rho_{ik} \rho_{jt} (E_{ik}^* \cdot E_{jt}^*)$$

Pero, para $i \neq j$, $E_{ik}^* \cdot E_{jt}^*$ es no negativo para todo k y t . Puesto que los números ρ_{ik} son estrictamente positivos, se tendrá que $E_{ik}^* \cdot E_{jt}^* = 0$ para $i \neq j$, $1 \leq k \leq s_i$ y $1 \leq t \leq s_j$ y por lo tanto, la matriz Λ tiene la forma deseada.

Observemos ahora que, puesto que σ_i es una inmersión, se tiene que $\sigma_i^*(V) = V \cdot S_i$ para todo elemento V del anillo de Chow de Y_i ([F], capítulo 6, sección 2). Por tanto,

$$(19) \quad \sigma_i^*(\mathbb{E}_i^i \cdot \mathbb{E}_i^i) = (\mathbb{E}_i^i \cdot \mathbb{E}_i^i) \cdot S_i = (\mathbb{E}_i^i \cdot S_i) \cdot \mathbb{E}_i^i = -mult_{P_i}(S_{i-1})$$

ya que $(\mathbb{E}_i^i \cdot S_i) \cdot \mathbb{E}_i^i$ está definido en el anillo de Chow de \mathbb{E}_i^i como la intersección del pullback de \mathbb{E}_i^i y S_i , de manera que dicha intersección es la multiplicidad de S_{i-1} en P_{i-1} . Por otra parte, por la fórmula de la proyección, se tiene $(\mathbb{E}_i^i \cdot \mathbb{E}_i^i) \cdot S_i = (\mathbb{E}_i^* \cdot \mathbb{E}_i^*) \cdot S_C$, y, calculando esta intersección en S , obtenemos

$$(20) \quad \sigma_i^*(\mathbb{E}_i^i \cdot \mathbb{E}_i^i) = (\rho_{i1} E_{i1}^* + \cdots + \rho_{is_i} E_{is_i}^*)^2 = (\rho_i)^t \Lambda_i \rho_i$$

lo que, junto con (19) concluye la prueba. ■

2.4.3. Ejemplo. Para el punto doble racional estudiado en el ejemplo 2.2.7, la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha\beta}$ es la siguiente

$$(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(ver fig 2.3 para calcularla) y por tanto,

$$\Lambda = M^{-1} (E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha\beta} (M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & & \\ & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & & \\ & & & -2 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

Λ es una matriz simétrica definida negativa que toma la forma descrita en 2.4.2. Observemos también que en este caso, tanto la matriz de proximidad M como la matriz de intersección Λ sólo dependen de la constelación \mathcal{C}_m y no de la enumeración de Δ_m .

De hecho, (S, P) está inmerso de forma natural en el germen que define $\text{Spec } k[x, y, z]$ en el origen (ver la definición de la singularidad de superficie (S, P) en 2.2.7) y las relaciones (16) en este caso son:

$$\begin{aligned}\sigma_1^*(\mathbb{E}_1^1) &= 2E_1^1 \\ \sigma_2^*(\mathbb{E}_2^2) &= E_{21}^2 + E_{22}^2 \\ \sigma_3^*(\mathbb{E}_3^3) &= E_3^3 \\ \sigma_4^*(\mathbb{E}_4^4) &= E_4^4\end{aligned}$$

Puesto que P_{i+1} es un punto doble racional de S_i para $0 \leq i \leq 3$, no es difícil comprobar las igualdades (17). Por ejemplo, para $i = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 = -\text{mult}_{P_2}(S_1) \quad \blacksquare$$

§5. Constelaciones asociadas a los puntos dobles racionales.

Sea (S, P) un punto doble racional. Recordemos que si \mathcal{C}_m y \mathcal{C}'_m son dos constelaciones minimales de (S, P) (es decir, que definen la desingularización minimal de (S, P)), entonces son equivalentes (ver 2.1.2), y por tanto, los árboles con relaciones de proximidad $\mathcal{T}_{\mathcal{C}_m}^p$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{C}'_m}^p$ coinciden. Denotemos por $\mathcal{T}_{\mathcal{C}_m}^p$ dicho árbol con relaciones de proximidad y por Γ_m (respectivamente Γ_m^w) el grafo dual (respectivamente el grafo dual ponderado) asociado al morfismo de desingularización minimal de (S, P) , y recordemos que Γ_m contiene toda la información del grafo dual ponderado Γ_m^w , ya que las componentes irreducibles del lugar excepcional de la desingularización minimal $\pi_{\mathcal{C}_m}$ son curvas lisas racionales de autointersección -2 que se cortan transversalmente. En la sección 7 del capítulo 1 están descritos los posibles grafos duales Γ_m que clasifican módulo isomorfismo analítico los puntos dobles racionales en los tipos \mathbf{A}_n ($n \geq 1$), \mathbf{D}_n ($n \geq 4$), \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_7 y \mathbf{E}_8 . En esta sección reproducimos el estudio efectuado por Lipman ([Li1], sección 24) para dar una demostración de que estos tipos son los únicos posibles, al mismo tiempo que describimos los posibles árboles con relaciones de proximidad \mathcal{T}_m^p asociados a puntos dobles racionales. En particular, concluire-

mos que, dados dos puntos dobles racionales (S, P) y (S', P') , si los respectivos grafos duales Γ_m y Γ'_m son iguales, es decir, si (S, P) y (S', P') son del mismo tipo analítico, entonces los árboles con relaciones de proximidad T_m^P y $T_m^{P'}$ coinciden, pero el recíproco no es cierto. En lo que sigue y en [Li1] se aprecia la ventaja de trabajar con constelaciones y relaciones de proximidad en vez de trabajar simplemente con el grafo dual o forma de intersección.

En primer lugar, observemos que si $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ es la explosión del punto P y P_2 es un punto cerrado de S_1 , entonces, o bien P_2 es un punto no singular de S_1 , o bien (S_1, P_2) es una singularidad racional de superficie de multiplicidad dos (ver 1.2.3 y 1.6.3). Por tanto, si $C_m = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ es una constelación minimal de (S, P) entonces, manteniendo la notación de la sección 1, se tiene que (S_{i-1}, P_i) es un punto doble racional para $1 \leq i \leq m$ y la explosión π_i de S_{i-1} con centro P_i define bien una única componente irreducible E_i del lugar excepcional de π_{C_m} , o bien dos componentes irreducibles E_{i1}, E_{i2} .

Sea R el anillo local de S en P y \mathfrak{m} el ideal maximal de R . Recordemos que cualquier sistema minimal de generadores de \mathfrak{m} está formado por tres elementos, ya que $\ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 3$ (ver proposición 1.6.4). Clasificaremos (S, P) eligiendo un sistema adecuado de generadores $\{x, y, z\}$ de \mathfrak{m} y estudiando su comportamiento tras sucesivas explosiones en puntos.

Tomemos un sistema minimal de generadores $\{x, y, z\}$ de \mathfrak{m} y consideremos el homomorfismo sobreyectivo de anillos graduados

$$\varphi : k[X, Y, Z] \rightarrow \bigoplus_{r \geq 0} \mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}$$

donde X, Y, Z son indeterminadas y $\varphi(X), \varphi(Y), \varphi(Z)$ son respectivamente las imágenes de x, y, z en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Puesto que $\dim_k (\mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}) = 2r + 1$ para todo $r \geq 0$ (proposición 1.6.2), el núcleo de φ ha de estar generado por un polinomio homogéneo $Q(X, Y, Z)$ de grado dos.

Consideremos la explosión $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ con centro P . La fibra excepcional $C_1 = Proj(\bigoplus_{r \geq 0} \mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1})$ de π_1 puede identificarse con la curva proyectiva plana cuya ecuación homogénea es $Q(X, Y, Z) = 0$. Sea τ el menor número de combinaciones lineales de X, Y, Z en términos de las cuales se puede expresar Q , es decir, $\tau = 1$ si podemos elegir los generadores de \mathfrak{m} de forma que $Q(X, Y, Z) = Z^2$, $\tau = 2$ si podemos suponer que Q es un polinomio homogéneo de grado dos en las indeterminadas X, Y que factoriza como producto de dos factores lineales distintos, y $\tau = 3$ en otro caso. Se tiene que el lugar singular de C_1 es una variedad de dimensión $2 - \tau$ (en el caso $\tau = 3$, C_1 no tiene puntos singulares).

Sea P_2 un punto cerrado de C_1 y sea R_1 el anillo local de S_1 en P_2 . Si P_2 es un punto no singular de C_1 , entonces $R_1/\mathfrak{m}R_1$ es un dominio de valoración discreta y, puesto que $\mathfrak{m}R_1$ es principal, el ideal maximal de R está generado por dos elementos. Por tanto, R_1 es regular y P_2 es un punto no singular de S_1 . Así pues, cuando $\tau = 3$ tendremos:

2.5.1. Caso I. Si $\tau = 3$, entonces $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ es la desingularización minimal de (S, P) y el lugar excepcional consta de una única componente irreducible. Es decir, la constelación \mathcal{C}_m consta de un único punto P , el árbol con relaciones de proximidad \mathcal{T}_m^P tiene un único vértice, y el grafo dual Γ_m también contiene un solo vértice. En este caso el punto doble racional (S, P) es de tipo A_1 .

2.5.2. El caso siguiente es $\tau = 2$. En este caso C_1 tiene un único punto singular P_2 que (visto como punto de S_1) es el único posible punto singular de S_1 . Además, el polinomio Q es producto de dos factores lineales distintos (por ser k algebraicamente cerrado). Es decir, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Q(X, Y, Z) = XY$, y por tanto, C_1 es una curva reducida con dos componentes irreducibles E_{11} y E_{12} y un punto singular P_2 correspondiente a las coordenadas homogéneas $(0 : 0 : 1)$.

Sea R_1 el anillo local de S_1 en P_2 y \mathfrak{m}_1 el ideal maximal de R_1 . Con la elección anterior de x, y, z se tiene que

$$(21) \quad xy \in \mathfrak{m}^3$$

Además, $\mathfrak{m}R_1 = zR_1$ y \mathfrak{m}_1 está generado por $x_1 = x/z, y_1 = y/z, z_1 = z$. Puesto que $\mathfrak{m}^3R_1 = (z_1)^3R_1$, de la igualdad (21) se sigue que

$$(22) \quad x_1y_1 \in z_1R_1$$

Si R_1 es regular entonces $\mathcal{C}_m = \{P\}$, el árbol \mathcal{T}_m tiene un único vértice y el grafo dual Γ_m está formado por dos vértices unidos entre sí. Si R_1 no es regular, entonces es el anillo local de una singularidad racional de superficie de multiplicidad dos y

$$(23) \quad x_1y_1 \in z_1\mathfrak{m}_1$$

pues si no, $z_1 \in (x_1, y_1)R_1$ y \mathfrak{m}_1 estaría generado por x_1, y_1 . Reemplacemos en el estudio anterior R, x, y, z por R_1, x_1, y_1, z_1 respectivamente. Sea $\pi_2 : S_2 \rightarrow S_1$ la explosión con centro P_2 y C_2 el lugar excepcional de π_2 . El nuevo polinomio homogéneo $Q_1(X, Y, Z)$ ha de ser de la forma

$$Q_1(X, Y, Z) = XY + aXZ + bYZ + cZ^2$$

donde $a, b, c \in k$, y por tanto, $\tau_1 \geq 2$. Si $\tau_1 = 3$, entonces la curva C_2 es no singular, y por tanto, $\mathcal{C}_m = \{P, P_2\}$, el árbol \mathcal{T}_m consta de dos vértices y

el grafo dual Γ_m es

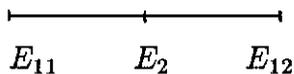


fig. 2.4.

Si $\tau_1 = 2$, entonces $c = ab$ y $Q_1(X, Y, Z) = (X + aZ)(X + bZ)$. El lugar excepcional C_2 de π_2 es por tanto una curva reducida con dos componentes irreducibles E_{21} y E_{22} y un punto singular P_3 que no es próximo a P_1 , y S_2 es una superficie no singular fuera de P_3 .

Reiterando este argumento obtenemos una descripción explícita de los posibles árboles con relaciones de proximidad y grafos duales definidos por una singularidad racional de superficie para la cual $\tau = 2$.

Caso II. Si $\tau = 2$ entonces el árbol con relaciones de proximidad T_m^p es del tipo siguiente

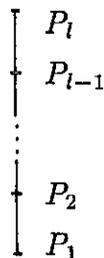


fig. 2.5.

donde $n \geq 2$ y denotamos también por P_i el vértice de T_m^p definido por el punto P_i , y su respectivo grafo dual Γ_m es

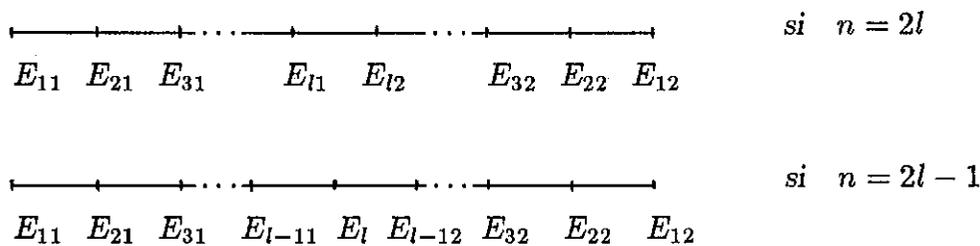


fig. 2.6.

En este caso la singularidad racional de superficie es de tipo A_n , siendo n el número de vértices de Γ_m .

2.5.3. Por último, consideremos el caso $\tau = 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Q(X, Y, Z) = Z^2$, es decir, que hemos hecho una elección de los generadores x, y, z de \mathfrak{m} tal que $z^2 \in \mathfrak{m}^3$. Al igual que en los casos anteriores, sea $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ la explosión con centro P y R_1 el anillo local de S en un punto singular P_2 de S_1 . Entonces $\mathfrak{m}R_1$ es principal, sea $\mathfrak{m}R_1 = tR_1$. Por otro lado, $R_1/\mathfrak{m}R_1$ es el anillo local de un punto de la curva no reducida $Z^2 = 0$, luego la imagen de z/t en $R_1/\mathfrak{m}R_1$ es un elemento no nulo cuyo cuadrado se anula. En particular, z/t no es una unidad de R_1 y por tanto, o bien $t = x$ o bien $t = y$. Supongamos por ejemplo que $\mathfrak{m}R_1 = xR_1$, entonces el ideal maximal \mathfrak{m}_1 de R_1 está generado por $x_1 = x, y_1 = y/x - a, z_1 = z/x$, donde $a \in k$.

La relación $z^2 \in \mathfrak{m}^3$ se puede expresar mediante

$$(24) \quad z^2 - G(x, y) \in z\mathfrak{m}^2$$

donde $G(U, V) \in R[U, V]$ es un polinomio homogéneo de grado 3. En términos de x_1, y_1, z_1 la igualdad (24) toma la forma

$$(25) \quad (z_1)^2 - x_1 G(1, y_1 + a) \in x_1 z_1 R_1$$

Ahora bien, R_1 es un anillo regular si y sólo si $G(1, y_1 + a)$ es una unidad en R_1 . En efecto, si $G(1, y_1 + a)$ es una unidad, entonces la igualdad (25) afirma que $x_1 \in z_1 R_1$ y por tanto \mathfrak{m}_1 está generado por y_1, z_1 . Recíprocamente, si R_1 es regular, entonces \mathfrak{m}_1 está generado por dos de los tres elementos $x_1 = x, y_1, z_1$. Pero x_1 no puede ser uno de esos generadores porque $R_1/x_1 R_1$ contiene un elemento nilpotente no nulo. Así pues, $x_1 \in \mathfrak{m}^2$ y y_1, z_1 son parámetros regulares de R_1 . Se sigue de (25) que $G(1, y_1 + a)$ ha de ser una unidad, pues en otro caso $(z_1)^2 \in \mathfrak{m}_1^3$ y R_1 no sería regular.

Denotemos por $\overline{G}(U, V)$ el polinomio (homogéneo de grado 3) de $k[U, V]$ obtenido a partir de $G(U, V)$ reduciendo los coeficientes módulo \mathfrak{m} . El polinomio $\overline{G}(U, V)$ no es igual a cero. En efecto, si todos los coeficientes de $G(U, V)$ estuvieran en $\mathfrak{m}R_1 = xR_1$, podríamos dividir (24) por x^4 y obtener que z/x^2 es íntegramente dependiente del anillo normal R_1 , con lo que $z/x^2 \in R_1$ en contra de que $z/x \notin xR_1 = \mathfrak{m}R_1$. Por lo tanto, habrá tantos puntos singulares de S_1 (o equivalentemente, anillos locales R_1 no regulares) como factores irreducibles distintos del polinomio $\overline{G}(U, V) \in k[U, V]$ (recorde-mos que k es algebraicamente cerrado y por tanto dichos factores irreducibles son lineales). Así pues, a lo más hay tres puntos singulares en S_1 .

Supongamos, en primer lugar, que $\overline{G}(U, V)$ es producto de tres factores lineales distintos. En este caso, S_1 contiene tres puntos singulares. Sea R_1 el

anillo local de S_1 en uno de tales puntos y $x_1 = x$, $y_1 = y/x - a$, $z_1 = z/x$ los generadores del ideal maximal \mathfrak{m}_1 de R_1 . Manteniendo la notación anterior, se tiene que $G(1, y_1 + a) \in \mathfrak{m}_1$, más aún

$$\overline{G}(1, y_1 + a) = y_1 P(y_1)$$

donde $P(y_1)$ es una unidad de R_1 (por ser distintos los tres factores irreducibles de \overline{G}). Es decir,

$$(26) \quad (z_1)^2 - x_1 y_1 P(y_1) \in x_1 z_1 R_1 + (x_1)^2 R_1$$

y el anillo graduado de R_1 respecto de \mathfrak{m}_1 es isomorfo al anillo $k[X, Y, Z]/(Z^2 - \alpha XY - \beta XZ - \gamma X^2)$ donde $\alpha, \beta, \gamma \in k$ y $\alpha \neq 0$. Por tanto, estamos en las condiciones del caso I, es decir, R_1 queda desingularizado tras la explosión del ideal maximal \mathfrak{m}_1 .

Caso III. Si $\tau = 1$ y $\overline{G}(U, V)$ es producto de tres factores lineales distintos, entonces cualquier constelación minimal \mathcal{C}_m está formada por cuatro puntos. El árbol con relaciones de proximidad T_m^p está representado en fig. 2.7 y el grafo dual Γ_m en fig. 2.8.

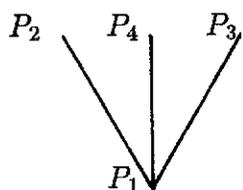


fig. 2.7.

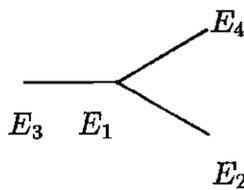


fig. 2.8.

El punto doble racional (S, P) es de tipo D_4 .

2.5.4. Consideremos ahora la posibilidad de que $\overline{G}(U, V)$ tenga factores múltiples. Haciendo una buena elección de x, y podemos suponer que, o bien $\overline{G}(U, V) = UV^2$, o bien $\overline{G}(U, V) = V^3$.

Supongamos que $\overline{G}(U, V) = UV^2$. Entonces en S_1 hay dos puntos singulares P_2 y P_3 . El ideal maximal del anillo local de S_1 en P_3 está generado por $y, x/y, z/y$ y dicho anillo local queda desingularizado tras la explosión con centro P_3 . El ideal maximal del anillo local de S_1 en P_2 (anillo al que llamaremos R_1) está generado por $x_1 = x$, $y_1 = y/x$, $z_1 = z/x$. En este caso, la igualdad (25) se traduce en

$$(27) \quad (z_1)^2 - x_1 (y_1)^2 \in x_1 z_1 R_1 + (x_1)^2 R_1$$

y el anillo graduado de R_1 respecto de \mathfrak{m}_1 es isomorfo al anillo $k[X, Y, Z]/(z^2 - \alpha XZ - \beta X^2)$. Esto muestra que, o bien R_1 cumple las hipótesis del caso II, o bien estamos de nuevo en las condiciones de 2.5.4 (es decir, R_1 corresponde al caso IV).

Sea $\pi_2 : S_2 \rightarrow S_1$ la explosión con centro P_2 , C_2 el lugar excepcional de π_2 y E_1^2 el transformado estricto del divisor excepcional de π_1 (la notación es coherente con la de la sección 1, pues el lugar excepcional de π_1 tiene una única componente irreducible). Observemos que C_2 está formado por dos componentes irreducibles si R_1 corresponde al caso II, o bien por una única componente irreducible si R_1 es del caso IV. Consideremos un punto P_4 de C_2 que pertenezca a E_1^2 (es decir, P_4 es próximo a P_2 y a P_1) y sea R_2 el anillo local de S_2 en P_4 . Puesto que $\mathfrak{m}_{R_1} = R_1$, necesariamente tendremos que $\mathfrak{m}_1 R_2 = y_1 R_2$, es decir, el ideal maximal \mathfrak{m}_2 de R_2 está generado por $x_2 = x_1/y_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1/y_1$. En estos términos, la igualdad (27) se expresa mediante

$$(28) \quad (z_2)^2 - x_2 y_2 \in x_2 z_2 R_2 + (x_2)^2 R_2$$

Veamos que esto implica que R_2 no es regular. En efecto, de (27) se sigue que el anillo graduado de R_1 respecto de \mathfrak{m}_1 es de la forma $k[X, Y, Z]/Q_1(X, Z)$ donde Q_1 es un polinomio homogéneo de grado 2. Así pues, $R_2/y_1 R_2$ no es regular por ser el anillo local del punto singular $(0 : 1 : 0)$ de la curva $Q_1(X, Z) = 0$. Por tanto, si R_2 es regular, entonces $y_2 \in (\mathfrak{m}_2)^2$ y x_2, z_2 son parámetros regulares y de la igualdad (28) se sigue que

$$(z_2)^2 + ax_2 z_2 + b(x_2)^2 \in (\mathfrak{m}_2)^3$$

para $a, b \in k$, en contra de que x_2, z_2 son parámetros regulares. Por tanto, R_2 no es regular y (28) implica que R_2 queda desingularizado por la explosión con centro \mathfrak{m}_2 (pues R_2 corresponde al caso I).

Observemos que si el anillo local R_1 satisface las hipótesis del caso II, entonces C_2 tiene dos componentes irreducibles E_{21}^2 y E_{22}^2 , cada una de las cuales pasa por el punto P_4 (ya que cada componente de la curva $Q_1(X, Z) = 0$ pasa por $(0 : 1 : 0)$). Es decir, E_{21}^2 , E_{22}^2 y E_1^2 se cortan en el punto P_4 y, en este caso, la constelación \mathcal{C}_m está formada por P_1, P_2, P_3, P_4 . En general, si R_1 no corresponde al caso II, reiterando los argumentos anteriores, se deduce:

Caso IV. Si $\tau = 1$ y $\overline{G}(U, V)$ es producto de un factor lineal y el cuadrado de otro factor distinto, entonces el árbol con relaciones de proximidad T_m^p es de uno de los dos tipos siguientes

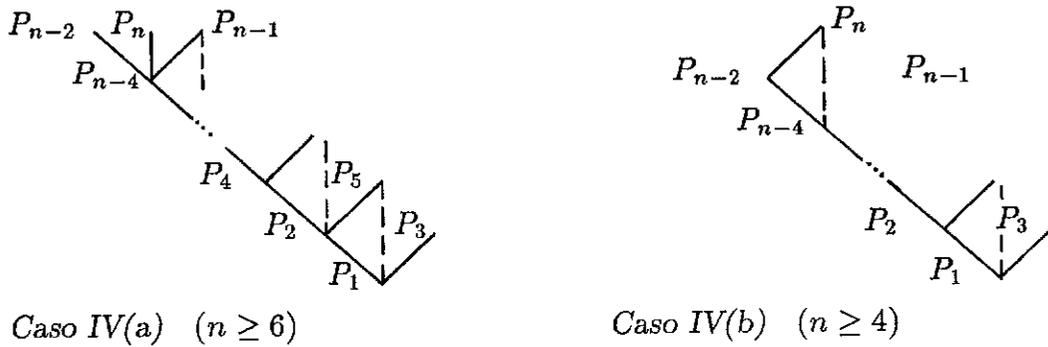
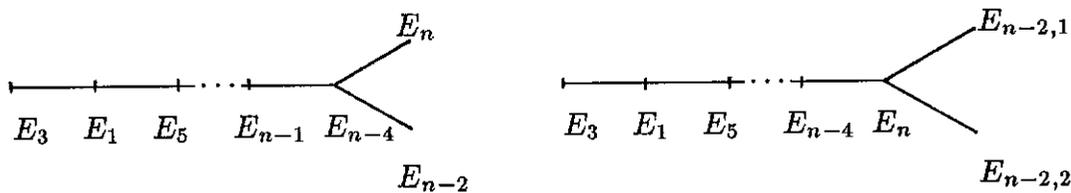


fig. 2.9.

donde n es un número par. Los respectivos grafos duales Γ_m son



Caso IV(a) ($n \geq 6$)

Caso IV(b) ($n \geq 4$)

fig. 2.10.

En el caso IV (a) la singularidad (S, P) es de tipo D_n y en el caso IV (b) es de tipo D_{n+1} . Observemos que, en cualquier caso, el subíndice n (o bien $n + 1$) indica el número de componentes irreducibles del divisor excepcional de la desingularización minimal, es decir, el número de vértices del grafo dual Γ_m . Observemos también que en el caso D_n con n par, cada explosión da lugar a una única componente irreducible del lugar excepcional, mientras que en el caso D_{n+1} ($n + 1$ impar) la explosión π_{n-2} con centro P_{n-2} es la única explosión que da lugar a dos componentes irreducibles del lugar excepcional.

2.5.5. Finalmente, estudiemos el caso en que $\tau = 1$ y $\overline{G}(U, V) = V^3$. Si $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ es la explosión con centro P , entonces en S_1 hay un único punto singular P_2 (pues $\overline{G}(U, V)$ tiene un único factor irreducible). Para una buena elección x, y, z de los generadores de m se tiene

$$(29) \quad \alpha z^2 - \beta y^3 + \gamma z x^2 + \delta x^4 \in (x^3 y, x^2 y^2, x y z, y^2 z) R$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ y si $\bar{\alpha} \in k$ (respectivamente $\bar{\beta}$) denota la clase de α (respectivamente β) módulo \mathfrak{m} , entonces $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 1$. El ideal maximal \mathfrak{m}_1 del anillo local $R_1 = \mathcal{O}_{S_1, P_2}$ está generado por $x_1 = x, y_1 = y/x, z_1 = z/x$ y, en estos términos, la igualdad (29) se expresa mediante

$$(30) \quad (z_1)^2 - x_1(y_1)^3 + \bar{\gamma}z_1x_1 + \bar{\delta}(x_1)^2 \in (x_1)^2\mathfrak{m}_1 + x_1z_1\mathfrak{m}_1$$

Por tanto, el anillo graduado de R_1 respecto de \mathfrak{m}_1 es isomorfo a $k[X, Y, Z]/P(X, Z)$, donde $P(X, Z) = Z^2 + \bar{\gamma}ZX + \bar{\delta}X^2$, y el comportamiento de R_1 depende de la factorización de $P(X, Z)$.

Si $P(X, Z)$ es el producto de dos factores distintos, entonces el anillo local R_1 corresponde al caso II. Sea $\pi_2 : S_2 \rightarrow S_1$ la explosión con centro P_2 . De manera análoga a 2.5.4 se observa que el único punto P_3 que es próximo a P_1 y a P_2 es el único punto singular de S_2 . El ideal maximal \mathfrak{m}_2 del anillo local $R_2 = \mathcal{O}_{S_2, P_3}$ está generado por $x_2 = x_1/y_1, y_2 = y_1, z_2 = z_1/y_1$ y la igualdad (30) se traduce por

$$(31) \quad (z_2)^2 - x_2(y_2)^2 + \bar{\gamma}z_2x_2 + \bar{\delta}(x_2)^2 \in (x_2)^2y_2R_2 + x_2y_2z_2R_2$$

El anillo local R_2 no es regular y, si $\pi_3 : S_3 \rightarrow S_2$ es la explosión con centro P_3 , entonces el único punto P_4 que es próximo a P_1 y a P_3 es el único punto singular de S_3 . De nuevo el anillo local $R_3 = \mathcal{O}_{S_3, P_4}$ no es regular, pero queda desingularizado tras la explosión con centro P_4 . Por tanto, llegamos a la siguiente conclusión.

Caso V. Si $\tau = 1$, $\overline{G}(U, V)$ es el cubo de un factor lineal y $P(X, Y)$ es producto de dos factores lineales distintos, entonces cualquier constelación minimal \mathcal{C}_m está formada por cuatro puntos. El árbol con relaciones de proximidad \mathcal{T}_m^p está representado en fig. 2.11 y el grafo dual en fig. 2.12.

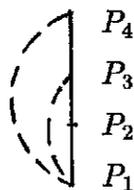


fig. 2.11.

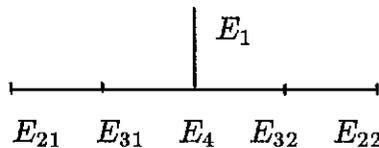


fig. 2.12.

En este caso el punto doble racional (S, P) es de tipo \mathbf{E}_6 (de nuevo el subíndice 6 es el número de vértices del grafo dual Γ_m).

2.5.6. Supongamos ahora que $P(X, Y)$ es un cuadrado. Entonces existe $\epsilon \in R$ tal que

$$\alpha z^2 + \gamma z x^2 + \delta x^4 \equiv (z + \epsilon x^2)^2 \pmod{(z, x^2)^2 \mathfrak{m}}$$

Efectuando un cambio de coordenadas del tipo $z = \lambda(z + \epsilon x^2)$ con $\bar{\lambda} = 1$, obtenemos la relación

$$(32) \quad z^2 - \beta y^3 + \rho x^3 y + \sigma x^5 \in (x^3 z, x^2 y^2, x y z, y^2 z) R$$

donde $\rho, \sigma \in R$. En estos términos, el ideal maximal \mathfrak{m}_1 del anillo local $R_1 = \mathcal{O}_{S_1, P_2}$ está generado por $x_1 = x$, $y_1 = y/x$, $z_1 = z/x$ y la igualdad (32) se expresa mediante

$$(33) \quad (z_1)^2 - x_1(y_1)^3 + \bar{\rho} x_1^2 y_1 + \bar{\sigma} (x_1)^3 \in (x_1 z_1, x_1 (y_1)^2, y_1 z_1, (x_1)^2 y_1, (x_1)^3) x_1 R_1$$

Por lo tanto, para el anillo R_1 se tiene $\tau_1 = 1$ y $\bar{G}_1(U, V) = \bar{\rho} U^2 V + \bar{\sigma} U^3$. Es decir, si $\bar{\rho} \neq 0$ entonces R_1 corresponde al caso IV y si $\bar{\rho} = 0$ entonces necesariamente $\bar{\sigma} \neq 0$ y R_1 está en las mismas condiciones que R . Tras un análisis análogo al efectuado en los casos anteriores, se deducen las siguientes posibilidades:

Caso VI. Si $\tau = 1$, $\bar{G}(U, V)$ es el cubo de un factor lineal, $P(X, Y)$ es el cuadrado de un factor lineal y ρ es una unidad de R , entonces cualquier constelación minimal \mathcal{C}_m está formada por siete puntos. El árbol con relaciones de proximidad T_m^p está representado en fig. 2.13 y el grafo dual Γ_m en fig. 2.14.

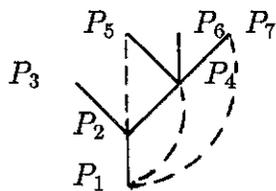


fig. 2.13.

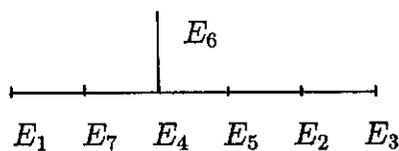


fig. 2.14.

Decimos en este caso que (S, P) es de tipo E_7 .

Caso VII. Si $\tau = 1$, $\overline{G}(U, V)$ es el cubo de un factor lineal, $P(X, Y)$ es el cuadrado de un factor lineal y ρ no es unidad de R , entonces cualquier constelación minimal \mathcal{C}_m consta de ocho puntos. Fig. 2.15 representa el árbol con relaciones de proximidad T_m^p y fig. 2.16 representa el grafo dual Γ_m .

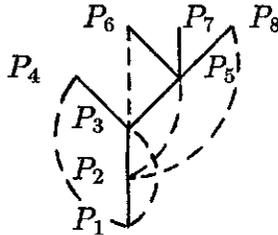


fig. 2.15.

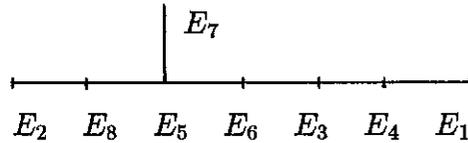


fig. 2.16.

En este caso (S, P) es de tipo \mathbf{E}_8 .

2.5.7. Hemos visto que, dada una singularidad racional de superficie (S, P) de multiplicidad dos definida sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, el par (T_m^p, Γ_m) asociado a (S, P) ha de ser de alguna de las formas descritas anteriormente. Es decir, (S, P) ha de ser de tipo \mathbf{A}_n ($n \geq 1$), \mathbf{D}_n ($n \geq 4$), \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_7 o \mathbf{E}_8 . Además, todos estos tipos se alcanzan para alguna singularidad racional de superficie de multiplicidad dos. En efecto, como vimos en la sección 7 del capítulo 1, basta considerar los gérmenes de superficie definidos por las ecuaciones siguientes en un entorno del origen de $\text{Spec } k[x, y, z]$

$$\begin{array}{ll} z^{n+1} + xy = 0 & \text{para } \mathbf{A}_n \quad (n \geq 1) \\ x^{n-1} + xy^2 + z^2 = 0 & \text{para } \mathbf{D}_n \quad (n \geq 4) \\ x^4 + y^3 + z^2 = 0 & \text{para } \mathbf{E}_6 \\ x^3y + y^3 + z^2 = 0 & \text{para } \mathbf{E}_7 \\ x^5 + y^3 + z^2 = 0 & \text{para } \mathbf{E}_8 \end{array}$$

2.5.8. Nota. La descripción anterior (efectuado por Du Val en [DV1], capítulos II y III y por Lipman en [Lil], sección 24) clasifica los puntos dobles racionales atendiendo al grafo dual Γ_m para la desingularización minimal. De hecho, observamos a posteriori que, dados dos puntos dobles racionales (S, P) y (S', P') , si los respectivos grafos duales Γ_m y Γ'_m son iguales, es decir, si (S, P) y (S', P') son del mismo tipo, entonces los árboles con relaciones de proximidad T_m^p y $T'_m{}^{p'}$ coinciden. Sin embargo, el recíproco no es cierto, pues para n par los árboles con relaciones de proximidad asociados a las

desingularizaciones minimales de singularidades de tipo A_n y de tipo A_{n-1} son iguales (ver caso II).

En este trabajo hemos considerado interesante conocer explícitamente las relaciones de proximidad, o más concretamente, el árbol con relaciones de proximidad T_m^p de cada tipo de punto doble racional, y es por eso por lo que hemos hecho una descripción más exhaustiva. Para estudiar singularidades racionales en general, el árbol con relaciones de proximidad es uno de los objetos centrales en el estudio efectuado en este trabajo.

§6. Concepto de cúmulo.

Sea (S, P) una singularidad racional de superficie.

2.6.1. Definición. Un *cúmulo de puntos infinitamente próximos a P* (o cúmulo con origen en P) es un par $K = (\mathcal{C}, \{\nu_\gamma\}_{\gamma \in \Delta})$ donde \mathcal{C} es una constelación con origen en P , Δ es el conjunto de índices de las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ (ver 2.1.3) y los ν_γ son números racionales no negativos, de forma que al punto P_i de \mathcal{C} se le asocia la s_i -upla $(\nu_{i1}, \dots, \nu_{is_i})$. Llamaremos a dichos números los *órdenes virtuales de P_i en K* .

Diremos que el *soporte* de un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es la constelación \mathcal{C} y llamaremos *profundidad* del cúmulo K a la profundidad de \mathcal{C} , es decir, al mayor entero i tal que el i -ésimo entorno infinitesimal de P contiene puntos del soporte de K .

De la misma forma que representamos la constelación \mathcal{C} por su árbol asociado $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ (o bien el árbol con relaciones de proximidad $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^p$), también asociamos al cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ un árbol ponderado (árbol ponderado con relaciones de proximidad, respectivamente).

2.6.2. Definición. El *árbol ponderado \mathcal{T}_K* asociado al cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es el árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ asociado a \mathcal{C} , junto con pesos $(\nu_{i1}, \dots, \nu_{is_i})$ en el vértice de $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ correspondiente al punto P_i . El *árbol ponderado con relaciones de proximidad \mathcal{T}_K^p* consiste en el objeto combinatorio resultado de añadir a \mathcal{T}_K líneas de trazos correspondientes a las relaciones de proximidad.

A un cúmulo K con origen en P le asociaremos el conjunto de funciones que definen divisores de Cartier que pasan por K . Comencemos introduciendo la idea de pasar por un cúmulo.

2.6.3. Definición. Sea $K = (\mathcal{C}, \{\nu_\gamma\}_{\gamma \in \Delta})$ un cúmulo con origen en P y sea C un divisor de Cartier de (S, P) . Entonces existen números racionales $\{q_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ tales que

$$(34) \quad C^* - \sum \nu_\gamma E_\gamma^* = \bar{C} + \sum q_\gamma E_\gamma$$

De hecho, usando la proposición 2.3.3, podemos calcular explícitamente los q_γ mediante

$$(35) \quad \underline{q} = (M^t)^{-1} (\underline{e} - \underline{\nu})$$

donde $\{e_\gamma\}_\gamma$ son los órdenes de C en \mathcal{C} y M es la matriz de proximidad de \mathcal{C} respecto a la enumeración ω . En estas condiciones, diremos que C pasa por K si todos los q_γ son no negativos.

Observemos que, en general, (34) no define un divisor en $S_{\mathcal{C}}$, pues puede que $\sum \nu_\gamma E_\gamma^*$ no sea un divisor de $S_{\mathcal{C}}$. Sin embargo, siempre se tiene que $\sum \nu_\gamma E_\gamma^*$ es un divisor \mathbb{Q} -Cartier de $S_{\mathcal{C}}$, es decir, es un múltiplo racional de un divisor de Cartier de $S_{\mathcal{C}}$. De hecho, $\sum \nu_\gamma E_\gamma^*$ es combinación lineal de $\{E_\gamma\}_\gamma$ con coeficientes racionales.

2.6.4. Definición. Dado un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ con origen en P , llamamos *divisor \mathbb{Q} -Cartier asociado a K* al divisor \mathbb{Q} -Cartier de $S_{\mathcal{C}}$ dado por

$$(36) \quad D_K := \sum_{\gamma \in \Delta} \nu_\gamma E_\gamma^*$$

Decimos que el cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es un \mathbb{N} -cúmulo si D_K es un divisor de $S_{\mathcal{C}}$, es decir, si en la expresión

$$(37) \quad \sum \nu_\gamma E_\gamma^* = \sum b_\gamma E_\gamma$$

donde

$$(38) \quad \underline{b} = (M^t)^{-1} \underline{\nu}$$

todos los b_ν son enteros. Teniendo en cuenta que los ν_γ son no negativos, de la forma de la matriz M (proposición 2.3.6) se deduce que todos los b_γ son no negativos y por tanto, K es un \mathbb{N} -cúmulo si y sólo si $b_\gamma \in \mathbb{N}$ para todo γ . Observemos en particular que no es necesario que los ν_γ sean enteros.

Observemos que, con esta notación, dado un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ con origen en P , un divisor de Cartier C de (S, P) pasa por K si la parte excepcional del divisor \mathbb{Q} -Cartier $C^* - D_K$ es efectiva. Además, si K es un \mathbb{N} -cúmulo, entonces $C^* - D_K$ es un divisor de $S_{\mathcal{C}}$. Llamaremos a dicho divisor el *transformado virtual de C por K* .

2.6.5. Ejemplo. En la singularidad racional de superficie (S, P) con singularidad D_5 definida en 2.2.7, los cúmulos con soporte en la constelación \mathcal{C}_m definida por la desingularización minimal están representados por los árboles ponderado

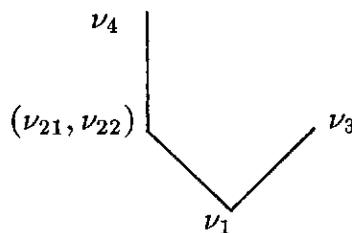


fig. 2.17.

donde los ν_γ son números racionales positivos. El cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es un \mathbb{N} -cúmulo si y sólo si

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\nu_1 + \nu_{21} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\nu_1 + \nu_{22} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\nu_1 + \nu_3 \in \mathbb{N} \\ \nu_1 + \frac{1}{2}(\nu_{21} + \nu_{22}) + \nu_4 \in \mathbb{N} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

2.6.6. Supongamos que el germen de superficie (S, P) es no singular. Entonces un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ con origen en P asocia a cada uno de los puntos P_i de \mathcal{C} un solo peso ν_i al que llamamos orden virtual o multiplicidad virtual ([Cs1], definición 2.1; [LJ], definición 1.4). En este caso, la matriz de proximidad $M = M_{\mathcal{C}}$ de la constelación \mathcal{C} es una matriz de números enteros, triangular superior y con unos en la diagonal (ver 2.2.6), luego su determinante es uno y M es inversible sobre \mathbb{Z} . Por lo tanto, el cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es un \mathbb{N} -cúmulo si y sólo si todas sus multiplicidades virtuales ν_i son números enteros.

En este caso, un divisor C de (S, P) (C es por tanto un divisor de Cartier) pasa por K si y sólo si

$$(M^t)^{-1} (\underline{e} - \underline{\nu}) = \underline{\mu} - (M^t)^{-1} \underline{\nu} \geq 0$$

(ver (12) en la proposición 2.3.3) es decir, si y sólo si

$$\underline{\mu} \geq (M^t)^{-1} \underline{\nu}$$

De esta forma, podemos caracterizar si un divisor C pasa por un IN-cúmulo K en términos del proceso dinámico de desingularización (es decir, de la cadena de explosiones (1) de 2.1.2). En primer lugar, observemos que un divisor C pasa por un cúmulo de profundidad cero $K = (P, \nu_1)$, si y sólo si la multiplicidad de C en P es mayor o igual que ν_1 .

Si la profundidad del cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es mayor que cero, consideremos el conjunto de puntos de la constelación \mathcal{C} menos el punto P . Este conjunto de puntos es la unión disjunta de un número finito de constelaciones y cada punto de \mathcal{C} en el primer entorno infinitesimal de P es el origen de una y sólo una de ellas. Sea P_j uno de tales orígenes y \mathcal{C}_j la correspondiente constelación. Asignando a cada punto P_k de \mathcal{C}_j la multiplicidad virtual ν_k , se obtiene un nuevo cúmulo K_j con soporte en \mathcal{C}_j . Llamaremos a K_j el *cúmulo inducido por K con origen en P_j* .

Por tanto, dado un germen no singular de superficie (S, P) y un IN-cúmulo $(\mathcal{C}, \{\nu_i\}_{i=1}^m)$ con origen en P , un divisor C pasa por K si y sólo si:

- i) C pasa por el cúmulo (P, ν_1) , es decir, $e_1 = \text{mult}_P(C) \geq \nu_1$.
- ii) El transformado virtual $\tilde{C}^1 = C^{*1} - e_1 E_1^1$ de C con respecto de (P, ν_1) pasa por cada uno de los cúmulos inducidos por K con origen en un punto de \mathcal{C} del primer entorno infinitesimal de P .

Observemos que esta definición es consistente puesto que, si K es un IN-cúmulo, entonces (P, ν_1) y los K_j son también IN-cúmulos, \tilde{C}^1 es un divisor efectivo, y la profundidad de los cúmulos inducidos por K es estrictamente menor que la profundidad de K . El argumento de la igualdad (10) en la proposición 2.3.3 muestra la equivalencia entre esta caracterización y la definición 2.6.3 para un germen no singular de superficie (S, P) .

2.6.7. En general, en una singularidad racional de superficie (S, P) también se da una caracterización análoga. Para expresarla, nos encontramos con el problema de que, aunque K sea un IN-cúmulo, los cúmulos (P, ν_1) y los K_j pueden no ser IN-cúmulos (puesto que la matriz M no está definida en \mathbb{Z} sino en \mathbb{Q}). Por tanto, dado un divisor de Cartier C , el transformado virtual \tilde{C}^1 podría no ser ni siquiera un divisor de Weil. Esta dificultad se resuelve si no consideramos sólo divisores de Cartier, sino divisores \mathbb{Q} -Cartier de (S, P) . En particular, como la singularidad de superficie (S, P) es racional, por 1.5.1 los divisores de Weil son divisores \mathbb{Q} -Cartier.

Extendamos ahora la definición 2.6.1 al caso en que C sea un divisor \mathbb{Q} -Cartier.

2.6.8. Definición. Sea $K = (P, (\nu_{11}, \dots, \nu_{1s_1}))$ un cúmulo de profundidad cero con origen en P (siendo (S, P) la singularidad racional de superficie de partida) y sea C un divisor \mathbb{Q} -Cartier. Decimos que C pasa por K si y sólo si

$$e_{1t} = v_{1t}(C) \geq \nu_{1t} \quad \text{para } 1 \leq t \leq s_1$$

y definimos el transformado virtual de C por K como el divisor \mathbb{Q} -Cartier de S_1 dado por

$$\tilde{C}^1 = C^{*1} - \sum_{t=1}^{s_1} \nu_{1t} E_{1t}^1$$

Sea $K = (C, \underline{\nu})$ un cúmulo de profundidad mayor que cero. Entonces, de la misma forma que hicimos en 2.6.6, definimos los cúmulos inducidos K_j con origen en puntos P_j de C en el primer entorno infinitesimal de P . En estas condiciones, dado un divisor \mathbb{Q} -Cartier C de (S, P) , decimos que C pasa por K si y sólo si

- i) C pasa por el cúmulo $(P, (\nu_{11}, \dots, \nu_{1s_1}))$.
- ii) El transformado virtual \tilde{C}^1 de C respecto de $(P, (\nu_{11}, \dots, \nu_{1s_1}))$ pasa por cada uno de los cúmulos inducidos por K con origen en un punto de C del primer entorno infinitesimal de P .

Observemos que esta definición es consistente y que es equivalente a la definición 2.6.3 cuando C es un divisor de Cartier.

Diremos que un divisor \mathbb{Q} -Cartier C de (S, P) pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales si y sólo si se da la igualdad en cada etapa, es decir, si y sólo si $e_\gamma = \nu_\gamma$ para cada $\gamma \in \Delta_C$.

Finalmente, si un divisor \mathbb{Q} -Cartier C pasa por K , entonces definimos el transformado virtual de C por K como el divisor \mathbb{Q} -Cartier de S_C dado por $\tilde{C} = C^* - D_K$. En particular, si C pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales, entonces el transformado virtual \tilde{C} de C por K es el transformado estricto \bar{C} de C por π_C .

§7. Ideal completo asociado a un cúmulo.

2.7.1. Sea $R = \mathcal{O}_{S,P}$ el anillo local de la singularidad racional de superficie (S, P) y \mathfrak{m} su ideal maximal. Tomemos dos divisores de Cartier C_1 y C_2 de (S, P) que pasen por un cúmulo dado $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ con origen en P y sean $h_i = 0$ ($i = 1, 2$) ecuaciones locales de dichos divisores (donde $h_i \in R$). Entonces el divisor $C_1 + C_2$, dado localmente por $f_1 \cdot f_2$, también pasa por K . Por tanto, podemos definir un ideal I_K de R que depende del cúmulo K :

$$(40) \quad I_K := \{0\} \cup \{h \in R - \{0\} \mid \text{el divisor } (h) \text{ pasa por } K\}$$

2.7.2. Proposición. Dado un cúmulo K con origen en P , el ideal I_K asociado es un ideal completo \mathfrak{m} -primario.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que

$$(41) \quad I_K = \{h \in R \mid v_\gamma(h) \geq b_\gamma \text{ para todo } \gamma \in \Delta\}$$

es decir,

$$(42) \quad I_K = \bigcap_{\gamma \in \Delta} (I_K R_{v_\gamma} \cap R)$$

Ahora bien, R es un anillo normal (pues (S, P) es racional), luego R es un dominio y cada ideal $I_K R_{v_\gamma} \cap R$ es un ideal de valoración. Por tanto, (42) expresa I_K como intersección de ideales de valoración, luego I_K es un ideal completo (ver proposición 1.8.13). Por último, de la igualdad (41) se deduce de forma inmediata que una potencia suficientemente grande del ideal maximal \mathfrak{m} está contenida en I_K , y por tanto, I_K es un ideal \mathfrak{m} -primario. ■

2.7.3. Proposición. Si K es un \mathbb{N} -cúmulo, entonces el ideal I_K es la fibra en P del haz de ideales $\pi_*(\mathcal{O}_{S_c}(-D_K))$.

DEMOSTRACIÓN: Un elemento h del anillo local R pertenece al ideal I_K si y sólo si la parte excepcional de $(h)^* - D_K$ es efectiva, es decir, si y sólo si $(h)^* \geq D_K$, o equivalentemente, si h es una sección global de $\pi_*(\mathcal{O}_{S_c}(-D_K))$. ■

Por último, veamos en un ejemplo el divisor D_K y el ideal I_K asociados a un \mathbb{N} -cúmulo K .

definir el mismo ideal completo, es decir, puede que I_K sea igual a $I_{K'}$, pero sin embargo, entre los cúmulos K con el mismo ideal I_K existe un solo cúmulo de Cartier. Por tanto, para estudiar ideales completos, podemos restringirnos a considerar cúmulos de Cartier. De hecho, en la sección 5, veremos que la correspondencia $K \mapsto I_K$ define una biyección entre el conjunto de cúmulos de Cartier con origen en P y el conjunto de ideales completos \mathfrak{m} -primarios del anillo $R = \mathcal{O}_{S,P}$. Más aún, después de definir operaciones en dichos conjuntos, se obtendrán monoides isomorfos.

Fija una constelación \mathcal{C} con origen en P , el semigrupo de ideales completos \mathfrak{m} -primarios I de R tales que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible es isomorfo a los semigrupos \mathbf{E}^+ y $\mathbf{E}^\#$ de $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ (ver definición 3.5.1) de forma que se obtienen cuatro semigrupos isomorfos ([Li1], sección 18). Además, en la sección 6 veremos que \mathbf{E}^+ es un cono convexo racional poliedral que resulta ser un símplice. En la sección 7 aprovecharemos esta estructura simplicial de \mathbf{E}^+ para dar una prueba elemental alternativa de la semifactorialidad de dichos semigrupos (el resultado original aparece en [Cu2], sección 1).

Finalmente, en la sección 8 describiremos el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}^+$ asociado a cada tipo de punto doble racional, siendo \mathcal{C}_m una constelación minimal. Como consecuencia, para cada punto doble racional (S, P) y cada constelación \mathcal{C} con origen en P (no necesariamente minimal) será inmediato describir el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$. En particular, tras este análisis exhaustivo y como nueva aplicación de la estructura de \mathbf{I}^* , en la sección 9 mostramos el resultado de Lipman ([Li1], secciones 22 y 24) que afirma que las singularidades de tipo \mathbf{E}_8 y los gérmenes de superficie no singular son las únicas singularidades racionales para las cuales hay factorización única en el semigrupo \mathbf{I}^* de los ideales completos \mathfrak{m} -primarios.

§1. Desigualdades de proximidad.

Al igual que en los capítulos anteriores, trabajaremos en una singularidad racional de superficie (S, P) . Sea $R = \mathcal{O}_{S,P}$ el anillo local de S en P y \mathfrak{m} su ideal maximal.

3.1.1. Definición. Dado un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \nu)$ con origen en P , para cada $\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}$ llamamos γ -defecto de K al número racional

$$(1) \quad d_{\gamma} = -D_K \cdot E_{\gamma}$$

Decimos que el cúmulo K *satisface las desigualdades de proximidad* si todos sus defectos son no negativos.

Si fijamos una enumeración ω del conjunto de índices $\Delta_{\mathcal{C}}$, entonces el vector de defectos de K respecto a ω está dado por

$$\underline{d} = -M\Lambda\underline{\nu}$$

donde $M = M_{\mathcal{C}\omega}$ y $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{C}\omega}$ son respectivamente las matrices de proximidad y de intersección de \mathcal{C} respecto a ω (definiciones 2.2.5 y 2.4.1). Por lo tanto, K satisface las desigualdades de proximidad si y sólo si todos los elementos de la columna $M\Lambda\underline{\nu}$ son no positivos, es decir, si y sólo si

$$(2) \quad M\Lambda\underline{\nu} \leq \underline{0}$$

3.1.2. Nota. Si el germen de superficie (S, P) es no singular, entonces $\Lambda = -Id$ y un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \{\nu_i\}_{i=1}^m)$ satisface las desigualdades de proximidad si y sólo si, para todo punto P_i de \mathcal{C} se tiene que, si P_{i1}, \dots, P_{ir} son los puntos de \mathcal{C} próximos a P_i , entonces

$$\nu_i \geq \nu_{i1} + \dots + \nu_{ir}$$

(ver [Cs1], definición 3.2; [LJ], definición 3.1). Esta es la razón por la que llamamos a (2) desigualdades de proximidad.

3.1.3. Definición. Un cúmulo K con origen en P es un *cúmulo geométrico* si todos sus defectos son enteros (aunque pueden ser negativos). En particular, todo \mathbb{N} -cúmulo es geométrico puesto que, si D_K es un divisor entonces $d_\gamma = -D_K \cdot E_\gamma$ es un entero.

Decimos que un cúmulo K es un *cúmulo de Weil* si es geométrico y satisface las desigualdades de proximidad, es decir, si y sólo si todos los defectos $\{d_\gamma\}_\gamma$ de K son enteros no negativos. Decimos que un cúmulo K es un *cúmulo de Cartier* si es un \mathbb{N} -cúmulo y satisface las relaciones de proximidad. Así pues, un cúmulo de Cartier es un cúmulo de Weil, pero el recíproco no es cierto, como mostramos en el siguiente ejemplo.

3.1.4. Ejemplo. Un cúmulo $K = (\mathcal{C}_m, \underline{\nu})$ con soporte en la constelación minimal \mathcal{C}_m de la singularidad \mathbb{D}_5 satisface las desigualdades de proximidad si y sólo si

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\nu_{21} + \nu_{22}) + \nu_3 + \nu_4 \leq \frac{1}{2}\nu_1 \\ \frac{1}{2}\nu_{22} + \nu_4 \leq \frac{3}{2}\nu_{21} \\ \frac{1}{2}\nu_{21} + \nu_4 \leq \frac{3}{2}\nu_{22} \\ 0 \leq \nu_3 \\ 0 \leq \nu_4 \end{array} \right.$$

Consideremos el cúmulo K' con soporte en \mathcal{C}_m y cuyo árbol ponderado es el siguiente

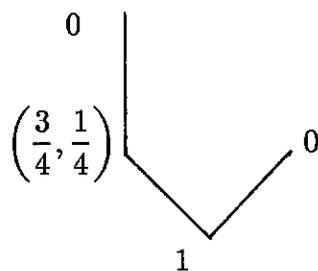


fig. 3.1.

Observemos que K' tiene el mismo soporte que el cúmulo K definido en el ejemplo 2.7.4, y los pesos de K son $1/4$ de los pesos de K' . Por tanto, el vector \underline{b} de K' está dado por $\underline{b}^t = \underline{\nu}^t M^{-1} = (1, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y K' no es un \mathbb{N} -cúmulo. Sin embargo, el vector de defectos de K' es $\underline{d}^t = (0, 1, 0, 0, 0)$, formado por enteros no negativos, es decir, K' es un cúmulo de Weil y no es un cúmulo de Cartier. ■

§2. Órdenes virtuales y órdenes exactos.

En esta sección trataremos de generalizar el resultado de Enriques ([EC], libro IV, capítulo II, sección 17) que da condiciones necesarias y suficientes para que por un cúmulo K con origen en un punto no singular pasen curvas con multiplicidades exactas o efectivas iguales a las virtuales. En nuestro caso, trabajamos con una singularidad racional de superficie (S, P) y por tanto, hay dos posibles generalizaciones de la idea de curva: los divisores de Cartier y los divisores de Weil. Veremos que la condición necesaria y suficiente para que por un cúmulo K con origen en P pasen divisores de Weil de (S, P) (divisores de Cartier, respectivamente) con órdenes efectivos iguales a los virtuales es que K sea un cúmulo de Weil (de Cartier, respectivamente).

3.2.1. Teorema. Dado un cúmulo $K = (C, \underline{\nu})$ con origen en P , las condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) K es un cúmulo de Weil, es decir, todos los defectos $\{d_\gamma\}_\gamma$ de K son enteros no negativos.
- (ii) Existe un divisor de Weil C de (S, P) que pasa por K con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales.
- (iii) Existen divisores de Weil que satisfacen (ii) y además, los únicos puntos infinitamente próximos a P por los que pasan todos los divisores de Weil con la anterior propiedad, son los puntos de C .

DEMOSTRACIÓN: La implicación (iii) \implies (ii) es inmediata. Para probar (ii) \implies (i), supongamos que C es un divisor de Weil que satisface (ii). Entonces, el transformado total de C por el morfismo π_C es $C^* = \overline{C} + D_K$ y, puesto que $C^*.E_\gamma = 0$ para todo γ , se tiene que $d_\gamma = \overline{C}.E_\gamma$ es un entero no negativo.

Finalmente, probemos (i) \implies (iii). Supongamos que K es un cúmulo tal que todos sus defectos d_γ son enteros no negativos y consideremos el cierre de Hensel S_C^h de S_C y el morfismo natural $h : S_C^h \rightarrow S_C$. Para cada $\gamma \in \Delta$ tomamos d_γ curvas algebroides irreducibles distintas en S_C^h , transversales a E_γ y que no se intersecan a ninguno de los E_α para $\alpha \neq \gamma$. Expresamos simbólicamente esta unión de curvas por $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ y consideramos la curva \mathcal{E} de S_C definida por $h_*(\sum_\gamma d_\gamma \mathcal{E}_\gamma)$. Ahora, la curva $C = (\pi_C)_*(\mathcal{E})$ es un divisor de Weil de (S, P) cuyo transformado estricto en S_C es el divisor \mathcal{E} (pues el soporte de cada \mathcal{E}_γ no está contenido en ninguno de los E_α). Por la definición de transformado total, $C^* = \mathcal{E} + \sum \mu_\gamma E_\gamma^*$ donde los μ_γ son los únicos enteros tales que $(\sum \mu_\gamma E_\gamma^*).E_\alpha = -d_\alpha = D_K.E_\gamma$ y, teniendo en cuenta que la matriz de intersección es inversible, obtenemos

$$C^* = \mathcal{E} + \sum_\gamma \nu_\gamma E_\gamma^* = \overline{C} + D_K$$

Por tanto, C es un divisor de Weil que pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales.

Si, para cada γ , hacemos una elección diferente $d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma$ de las d_γ curvas algebroides irreducibles distintas, transversales a E_γ y que no intersequen a ningún E_α para $\alpha \neq \gamma$ (es decir, tal que ninguna de las curvas que aparecen en $d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma$ esté en $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$), entonces obtenemos un nuevo divisor de Weil $C' = (\pi_C \circ h)_*(\sum_\gamma d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma)$ que satisface (ii). Los únicos puntos infinitamente próximos a P que están al mismo tiempo en los transformados estrictos de C y C' son los puntos de C . ■

A continuación mostramos un resultado análogo al teorema anterior, que caracteriza los cúmulos con origen en P por los que pasa algún divisor de Cartier de (S, P) con órdenes efectivos iguales a los virtuales. Si (S, P) es no singular obviamente estas condiciones coinciden con las del teorema 3.2.1.

3.2.2. Teorema. Dado un cúmulo $K = (C, \underline{\nu})$ con origen en P , las condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) K es un cúmulo de Cartier, es decir, es un \mathbb{N} -cúmulo y satisface las desigualdades de proximidad.
- (ii) Existe un divisor de Cartier C de (S, P) que pasa por K con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales.
- (iii) Existen divisores de Cartier que satisfacen (ii) y además, los únicos puntos infinitamente próximos a P por los que pasan todos los divisores de Cartier con la anterior propiedad, son los puntos de C .

DEMOSTRACIÓN: De nuevo (iii) \implies (ii) es inmediato. Probemos a continuación (ii) \implies (i). Sea C un divisor de Cartier que satisface (ii), entonces su transformado total por el morfismo π_C es $C^* = \overline{C} + D_K$ y, puesto que S_C es no singular y C^* y \overline{C} son divisores de S_C , también lo será D_K . Por tanto, K es un \mathbb{N} -cúmulo que satisface las desigualdades de proximidad (pues $d_\gamma = \overline{C} \cdot E_\gamma \geq 0$), es decir, K es un cúmulo de Cartier.

Supongamos ahora que K es un cúmulo de Cartier. Para cada $\gamma \in \Delta$ tomemos d_γ curvas algebroides irreducibles en S_C^h , transversales a E_γ y que no intersequen a ninguno de los E_α para $\alpha \neq \gamma$. Al igual que en la demostración de 3.2.1, expresemos simbólicamente esta unión de curvas por $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ (en este caso, $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ podría ser una sola curva contada d_γ veces, pero también se pueden tomar curvas diferentes). Sea \mathcal{E} la curva de S_C definida por $h_*(\sum_{\gamma \in \Delta} d_\gamma \mathcal{E}_\gamma)$ y consideremos el divisor de S_C dado por

$$D = \mathcal{E} + D_K$$

Para todo $\alpha \in \Delta$, $D \cdot E_\alpha = d_\alpha - D_K \cdot E_\alpha = 0$, por tanto la proposición 1.6.1 garantiza la existencia de un elemento h de R tal que $(h)^* = D$. Sea C el divisor de Cartier de (S, P) dado por (h) , entonces

$$C^* = \mathcal{E} + D_K = \overline{C} + D_K$$

y por tanto C pasa por K con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales.

Por último, para cada $\gamma \in \Delta$, hagamos una elección $d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma$ de las d_γ curvas algebroides con la misma propiedad que $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ pero esencialmente diferente, es decir, ninguna de las curvas que aparecen en $d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma$ está en $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$. De esta forma, aplicando el razonamiento anterior, obtenemos un nuevo divisor de Cartier C' de (S, P) que pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales. Ahora bien, $\bar{C} = h_*(\sum d_\gamma \mathcal{E}_\gamma)$ y $\bar{C}' = h_*(\sum d_\gamma \mathcal{E}'_\gamma)$ y por tanto, los únicos puntos infinitamente próximos a P que están al mismo tiempo en los transformados estrictos de C y C' son los puntos de \mathcal{C} . ■

3.2.3. Ejemplo. El cúmulo K definido en el ejemplo 2.7.4, cuyo soporte es la constelación \mathcal{C}_m que define la desingularización minimal de \mathbf{D}_5 y cuyo árbol ponderado asociado es

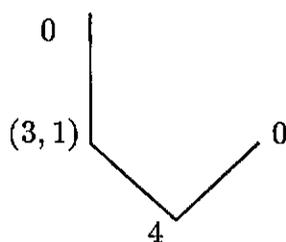


fig. 3.2.

es un cúmulo de Cartier. En efecto, en 2.7.4 vimos que K es un IN-cúmulo. Además, sus defectos son $\underline{d}^t = (0, 4, 0, 0, 0)$, que son no negativos. Tomando las mismas coordenadas que en 2.7.4, consideramos el divisor de Cartier C definido por

$$\frac{(x^2 + iz)^2}{x} = 2x^3 + 2ixz + y^2$$

en (S, P) . Este divisor de Cartier pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales. De hecho, el divisor de Cartier definido por una combinación genérica de los generadores de I_K dados en 2.7.4 con coeficientes en R satisface la misma propiedad.

El cúmulo K' definido en el ejemplo 3.1.4 cuyo soporte es la constelación \mathcal{C}_m y cuyo árbol ponderado asociado es

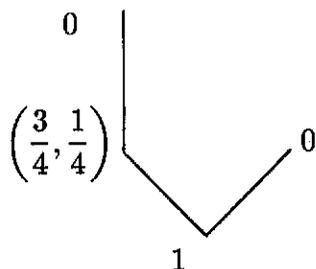


fig. 3.3.

tiene por defectos $\underline{d}^t = (0, 1, 0, 0, 0)$ es decir, K' es un cúmulo de Weil, aunque no es un \mathbb{N} -cúmulo. El divisor de Weil definido por $(x^2 + iz = 0) \cap (y = 0)$ en (S, P) pasa por K' con órdenes efectivos iguales a los virtuales. ■

§3. Reformulación en términos de ideales y de divisores asociados.

A un cúmulo K con origen en P y soporte en la constelación \mathcal{C} , le hemos asociado un divisor \mathbb{Q} -Cartier efectivo D_K de $S_{\mathcal{C}}$ con soporte excepcional y un ideal completo I_K del anillo local R (ver 2.6.4 y 2.7.1). En la proposición 2.7.3 hemos analizado la relación entre I_K y D_K cuando K es un \mathbb{N} -cúmulo. Nuestro próximo objetivo es reescribir las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema 3.2.2 en términos de I_K y D_K . De esta forma conectamos el resultado anterior con la teoría de Lipman ([Li1], capítulo V).

3.3.1. Teorema. Sea $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ un \mathbb{N} -cúmulo con origen en P , sea I_K el ideal completo de R asociado y sea $D_K = \sum b_{\gamma} E_{\gamma}$ el divisor con soporte excepcional de $S_{\mathcal{C}}$ definido por K . Entonces, las condiciones siguientes y las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema 3.2.2 son equivalentes

- (i') $D_K \cdot E_{\gamma} \leq 0$ para todo $\gamma \in \Delta$.
- (ii') $v_{\gamma}(I_K) = b_{\gamma}$ para todo $\gamma \in \Delta$.
- (iii') $I_K \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}} = \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D_K)$, es decir, $\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D_K)$ está generado por sus secciones globales.

DEMOSTRACIÓN: Probemos la equivalencia entre (i) y (i'), entre (ii) y (ii') y entre (iii) y (iii'). De esta manera, el resultado será consecuencia del teorema 3.2.2.

La equivalencia (i) \iff (i') es inmediata. Probemos (ii) \iff (ii'). Supongamos primero que se da (ii), entonces existe un elemento h_0 de I_K tal que

$$(4) \quad (h_0)^* = \overline{(h_0)} + D_K$$

y, aplicando la proposición 2.3.3, se tiene que $v_\gamma(h_0) = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \Delta$. Para cualquier otro elemento h de I_K tenemos

$$(h)^* \geq \overline{(h)} + D_K$$

y por tanto $v_\gamma(h) \geq b_\gamma$. Así pues,

$$v_\gamma(I_K) = \min \{v_\gamma(h) \mid h \in I_K\} = v_\gamma(h_0) = b_\gamma$$

Recíprocamente, si se da (ii'), entonces existe un elemento $h_0 \in I_K$ para el cual $v_\gamma(h_0) = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \Delta$. De hecho, cualquier combinación lineal genérica de un sistema de generadores de I_K satisface la anterior propiedad. Para dicho elemento h_0 , la igualdad (4) es cierta y por tanto, el divisor de Cartier que define h_0 pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales (teniendo en cuenta que M es inversible).

Finalmente, probemos (iii) \iff (iii'). Supongamos que se satisface (iii). Puesto que $I_K \mathcal{O}_{S_c} \subseteq \mathcal{O}_{S_c}(-D_K)$, bastará con probar que para todo $Q \in \pi_c^{-1}(P)$ el ideal $\mathcal{O}_{S_c, Q}(-D_K)$ de $\mathcal{O}_{S_c, Q}$ está contenido en $I_K \mathcal{O}_{S_c, Q}$ (observemos que para $Q \notin \pi_c^{-1}(P)$ ambas localizaciones son el anillo local $\mathcal{O}_{S_c, Q}$). Tomamos $h \in I_K$ tal que el divisor de Cartier que define pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales y tal que Q no pertenezca al transformado estricto de (h) . En esta situación, la restricción de h a $\mathcal{O}_{S_c, Q}$ genera $\mathcal{O}_{S_c, Q}(-D_K)$, y por tanto, $\mathcal{O}_{S_c, Q}(-D_K) \subseteq I_K \mathcal{O}_{S_c, Q}$.

Supongamos ahora que se da (iii') y fijemos $Q \in \pi_c^{-1}(P)$. Tomemos generadores h_1, \dots, h_r de I_K (recordemos que el anillo R es noetheriano). Puesto que el haz $I_K \mathcal{O}_{S_c, Q}$ es inversible y $\mathcal{O}_{S_c, Q}$ es un anillo local regular, existirá $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$(h_j)_Q = I_K \mathcal{O}_{S_c, Q} = \mathcal{O}_{S_c, Q}(-D_K)$$

Añadiendo a h_j una combinación lineal de h_1, \dots, h_r suficientemente genérica, obtenemos un elemento $h \in I_K$ tal que $v_\gamma(h) = b_\gamma$ para $\gamma \in \Delta$ y

$$(h)_Q = I_K \mathcal{O}_{S_c, Q} = \mathcal{O}_{S_c, Q}(-D_K)$$

Por tanto, el divisor de Cartier que define h satisface (ii) y su transformado estricto en S_c no pasa por Q . ■

§4. Órdenes exactos de divisores de Cartier definidos por elementos genéricos del ideal completo asociado a un cúmulo.

Enriques también da solución al siguiente problema: Dado un cúmulo cualquiera K con origen en un punto no singular de una superficie, encontrar las multiplicidades de una curva genérica que pasa por K . Enriques define un nuevo cúmulo \bar{K} que satisface las desigualdades de proximidad y tal que el conjunto de curvas que pasan por K coincide con el conjunto de curvas que pasan por \bar{K} , es decir, $I_K = I_{\bar{K}}$. El mismo resultado es cierto también para singularidades racionales de superficie. De hecho, es una consecuencia del teorema 3.3.1.

3.4.1. Proposición. Dado un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \{\nu_\gamma\}_\gamma)$ con origen en P , existe un único cúmulo de Cartier \bar{K} con soporte en \mathcal{C} tal que $I_K = I_{\bar{K}}$. De hecho, $\bar{K} = (\mathcal{C}, \{\bar{\nu}_\gamma\}_\gamma)$ donde, si M es la matriz de proximidad de \mathcal{C} respecto a una enumeración ω , entonces

$$(5) \quad \bar{\nu} = M^t \bar{b} \quad \text{y} \quad \bar{b}_\gamma = v_\gamma(I_K)$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos generadores h_1, \dots, h_s de I_K (pues R es noetheriano), entonces una combinación lineal genérica h de los h_i satisface $v_\gamma(h) = \bar{b}_\gamma$, y por tanto

$$(h)^* = (\bar{h}) + \sum_\gamma \bar{b}_\gamma E_\gamma = (\bar{h}) + \sum_\gamma \bar{\nu}_\gamma E_\gamma^*$$

Luego \bar{K} es un cúmulo de Cartier (teorema 3.2.2).

Ahora bien, el divisor con soporte excepcional asociado a \bar{K} es $D_{\bar{K}} = \sum \bar{b}_\gamma E_\gamma$ y, puesto que $\bar{b}_\gamma = v_\gamma(I_K)$, se tiene que $D_{\bar{K}} \geq D_K$ y por tanto, $I_{\bar{K}} \subseteq I_K$. Además, si h es un elemento de I_K , entonces $v_\gamma(h) \geq \bar{b}_\gamma$ para todo $\gamma \in \Delta$, luego $h \in I_{\bar{K}}$. Así pues, $I_K = I_{\bar{K}}$.

Finalmente, si $K' = (\mathcal{C}, \{\nu'_\gamma\}_\gamma)$ es otro cúmulo de Cartier tal que $I_K = I_{K'}$, entonces $v_\gamma(I_{K'}) = \bar{b}_\gamma$ tiene que ser igual a b'_γ , donde $\bar{b}' = (M^t)^{-1} \bar{\nu}'$ (teorema 3.3.1). Por tanto, $\nu'_\gamma = \bar{\nu}_\gamma$ para todo $\gamma \in \Delta$ y $K' = \bar{K}$. ■

3.4.2. Ejemplo. Consideremos de nuevo la singularidad racional de superficie (S, P) con singularidad D_5 definida en 2.2.7 y sea \mathcal{C}_m la constelación que define la desingularización minimal de (S, P) . Para cada $q \in \mathbb{Q}_+$, sea $K^{(q)}$ el cúmulo con soporte \mathcal{C}_m cuyo árbol ponderado asociado es

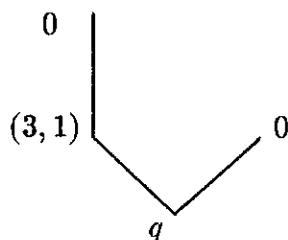


fig. 3.4.

El vector $\underline{b}^{(q)}$ del cúmulo $K^{(q)}$ (ver (38) en 2.6.4) está dado por

$$\left(\underline{b}^{(q)}\right)^t = \left(q, \frac{1}{2}q + 3, \frac{1}{2}q + 1, \frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q + 2\right)$$

y por tanto, $K^{(q)}$ es un \mathbb{N} -cúmulo si y sólo si $q = 2n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq q < 4$, el cúmulo $K^{(q)}$ no satisface las desigualdades de proximidad (ver (3) en el ejemplo 3.1.4). En este caso, el cúmulo de Cartier $K = K^{(4)}$ definido en el ejemplo 2.7.4 (ver también el ejemplo 3.2.3) hace el papel de \overline{K} para todo $K^{(q)}$ con $0 \leq q < 4$, es decir, $I_K = I_{K^{(q)}}$ para $0 \leq q < 4$. ■

3.4.3. Definición. Sea $K = (\mathcal{C}, \nu)$ un cúmulo de Cartier con origen en P y sea I_K el ideal completo \mathfrak{m} -primario de R asociado. Consideremos el único cúmulo de Cartier \overline{K} con soporte en \mathcal{C} tal que $I_K = I_{\overline{K}}$. En esta situación, diremos que un elemento h de I_K es un *elemento general* de I_K si el divisor de Cartier de (S, P) definido por h pasa por el cúmulo \overline{K} con órdenes efectivos iguales a los virtuales.

Dado un sistema de generadores $\{h_1, \dots, h_s\}$ del ideal $I = I_K$, cada punto (a_1, \dots, a_s) del espacio afín $A^s(k)$ define un elemento $\sum a_i h_i$ de I . Por un *elemento genérico de I* entendemos cualquier combinación lineal $\sum a_i h_i$ tal que el punto (a_1, \dots, a_s) pertenece a un abierto U de Zariski de $A^s(k)$ cuyo complementario es el lugar de ceros de un ideal de $k[x_1, \dots, x_s]$ finitamente generado. Obsérvese que esta definición no depende del sistema de generadores elegido.

3.4.4. Nota. Observemos que, dado un cúmulo K con origen en P , un elemento h de I_K es general si y sólo si $(h)^* = \overline{(h)} + D_{\overline{K}}$, siendo $D_{\overline{K}}$ el divisor asociado al cúmulo de Cartier \overline{K} , o equivalentemente, si $v_\gamma(h) = v_\gamma(I_K)$ para todo $\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}$. Por tanto, todo elemento genérico de I_K es general.

§5. Cuatro semigrupos equivalentes.

3.5.1. Definición. Dada una constelación \mathcal{C} con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) , sea $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}$, como en 2.1.3, el grupo de divisores de $S_{\mathcal{C}}$ de la forma $\sum_{\gamma \in \Delta} n_{\gamma} E_{\gamma}$ donde los n_{γ} son números enteros. Sea $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ el conjunto de divisores $D \in \mathbf{E}$, $D \neq 0$ tal que $D \cdot E_{\gamma} \leq 0$ para todo $\gamma \in \Delta$. Por último, sea $\mathbf{E}^{\#} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\#}$ el conjunto de divisores $D \in \mathbf{E}$, $D \neq 0$ tal que $\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D)$ está generado por sus secciones globales en $S_{\mathcal{C}}$. Tanto \mathbf{E}^+ como $\mathbf{E}^{\#}$ son subsemigrupos de \mathbf{E} , es decir, son cerrados para la adición.

Denotemos por $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}$, o simplemente \mathbf{K} , el conjunto de cúmulos de Cartier cuyo soporte es la constelación \mathcal{C} , y por $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+$, o bien \mathbf{K}^+ , el conjunto de cúmulos de Cartier con soporte en \mathcal{C} . Podemos sumar dos cúmulos con soporte en \mathcal{C} de la siguiente forma: si $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ y $K' = (\mathcal{C}, \underline{\nu}')$ entonces $K + K'$ es el cúmulo que tiene como soporte la constelación \mathcal{C} y cuyos pesos son $\{\nu_{\gamma} + \nu'_{\gamma}\}_{\gamma}$. Con esta operación, dotamos a \mathbf{K} de estructura de semigrupo y \mathbf{K}^+ es un subsemigrupo de \mathbf{K} .

Finalmente, sea $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ el conjunto de ideales completos \mathfrak{m} -primarios I de R tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible. En la proposición 1.10.3 hemos visto que, si I y J son dos ideales completos de R , entonces IJ también es completo. Además, si I y J son \mathfrak{m} -primarios, entonces IJ es \mathfrak{m} -primario y si $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ y $J\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ son inversibles, entonces $IJ\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es también inversible. Así pues, \mathbf{I} es cerrado para el producto de ideales y por tanto, \mathbf{I} tiene estructura de semigrupo.

3.5.2. Proposición. Dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , los semigrupos $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$, $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\#}$, $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+$ e $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ son isomorfos. De hecho, $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+ = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\#}$ como subsemigrupos de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ y los morfismos $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ y $\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ definidos por $K \mapsto D_K$ y $K \mapsto I_K$ respectivamente son isomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, veamos que la aplicación $K \mapsto D_K$ define un isomorfismo de semigrupos entre \mathbf{K} y el conjunto de divisores efectivos de \mathbf{E} y estudiemos la restricción de dicho morfismo a \mathbf{K}^+ . Dado un cúmulo $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$, el divisor D_K está definido por $D_K = \sum b_{\gamma} E_{\gamma}$ donde, fijo un orden ω compatible con \mathcal{C} , $\underline{b} = (M^t)^{-1} \underline{\nu}$. Ahora bien, de la forma de la matriz de proximidad M se sigue que $\underline{\nu} \geq \underline{0}$ implica $\underline{b} \geq \underline{0}$. Además, K es un \mathbb{N} -cúmulo si y sólo si $D_K \in \mathbf{E}$ y, puesto que M es inversible, la aplicación $K \mapsto D_K$ define una biyección entre \mathbf{K} y \mathbf{E} . Además, conserva la adición y lleva el cero en el cero, por tanto es un isomorfismo. Ahora bien, el teorema 3.3.1 afirma que $K \in \mathbf{K}^+$ (condición i) si y sólo si $D_K \in \mathbf{E}^+$ (condición i') y

esto ocurre si y sólo si $D_K \in \mathbf{E}^\sharp$ (condición *iii'*). Por tanto, \mathbf{E}^+ coincide con \mathbf{E}^\sharp y es un subsemigrupo de \mathbf{E} isomorfo a \mathbf{K}^+ .

Finalmente, veamos que la aplicación $K \mapsto I_K$ define un isomorfismo entre \mathbf{K}^+ e \mathbf{I} . En la proposición 2.7.3 hemos probado que si $K \in \mathbf{K}^+$, entonces I_K es la fibra en P de $\pi_*(\mathcal{O}_{S_c}(-D_K))$ y por tanto $I_K \in \mathbf{I}$. Además, si K y K' pertenecen a \mathbf{K}^+ , entonces $I_{K+K'} = I_K I_{K'}$, es decir, la aplicación $K \mapsto I_K$ es un morfismo de semigrupos. Recíprocamente, si I es un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R tal que $I\mathcal{O}_{S_c}$ es inversible, entonces existe un divisor D_I de \mathbf{E}^\sharp tal que

$$(6) \quad I\mathcal{O}_{S_c} = \mathcal{O}_{S_c}(-D_I)$$

Sea $K_I \in \mathbf{K}^+$ el cúmulo asociado a D_I por el isomorfismo anterior entre \mathbf{E}^\sharp y \mathbf{K}^+ . Por ser I un ideal completo, I es contraído para el morfismo $\pi : S_c \rightarrow S$ (proposición 1.9.3) y por tanto, I es la fibra en P de $\pi_*(\mathcal{O}_{S_c}(-D_I))$ (lema 1.9.2). Así pues, la aplicación $I \mapsto K_I$ es la inversa de $K \mapsto I_K$ y ambas definen un isomorfismo entre los semigrupos \mathbf{K}^+ e \mathbf{I} . ■

3.5.3. Corolario. ([A2], teorema 4) *Dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , sea $Z_{\mathcal{C}}$ el ciclo fundamental del morfismo de desingularización $\pi : S_c \rightarrow S$. Entonces, para todo entero positivo r , se tiene*

$$(7) \quad \mathcal{O}_{S_c}(-rZ_{\mathcal{C}}) = \mathfrak{m}^r \mathcal{O}_{S_c}$$

En particular, $Z_{\mathcal{C}}$ es el divisor de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ asociado al ideal maximal \mathfrak{m} de R .

DEMOSTRACIÓN: El isomorfismo entre $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ y $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ definido por $I \mapsto D_I$ en 3.5.2 satisface la propiedad siguiente: Si I y J son dos ideales de $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ tales que $I \subseteq J$, entonces $D_I \geq D_J$. Por otra parte, el ciclo fundamental está definido como el mínimo divisor de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ (ver 1.4.2). Así pues, el ideal completo \mathfrak{m} -primario que corresponde a $Z_{\mathcal{C}}$ es el ideal maximal \mathfrak{m} , es decir, la igualdad (2) es cierta para $r = 1$ y por tanto, por los isomorfismos de 3.5.2, para todo entero positivo. ■

3.5.4. Nota. En [Li1], teorema 12.1 y sección 18, Lipman prueba el isomorfismo entre \mathbf{E}^+ , \mathbf{E}^\sharp e \mathbf{I} . En la proposición 3.5.2 hemos dado una prueba diferente y más clásica de este resultado usando la noción de cúmulo y el resultado de Artin citado en 1.6.1.

Sea (Y, Q) un germen de superficie normal, $p : X \rightarrow Y$ una desingularización y $\{E_i\}_{i=1}^n$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de p . Entonces se pueden definir los semigrupos \mathbf{E}^+ y \mathbf{E}^\sharp de la misma forma que en 3.5.1. También en este caso más general, tendremos la inclusión $\mathbf{E}^\sharp \subseteq \mathbf{E}^+$. En efecto, si D es un divisor con soporte excepcional tal que $\mathcal{O}_X(-D)$ está generado por sus secciones globales, entonces, para cada E_i , se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{E_i} \rightarrow \mathcal{O}_{E_i}(-D) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

donde el soporte de \mathcal{L} , si no es nulo, tiene dimensión cero. Por tanto

$$-D.E_i = \text{deg}_{E_i}(\mathcal{O}_{E_i}(D)) = \mathcal{X}(\mathcal{O}_{E_i}(D)) - \mathcal{X}(\mathcal{O}_{E_i}) = \mathcal{X}(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) \geq 0$$

y $D \in \mathbf{E}^+$. Sin embargo, la inclusión $\mathbf{E}^+ \subseteq \mathbf{E}^\sharp$ no es cierta en general. Cuando (S, P) es una singularidad racional de superficie, hemos deducido esta inclusión de la implicación (i) \implies (iii) del teorema 3.2.2, siendo dicha implicación consecuencia del resultado de Artin 1.6.1.

De hecho, si (Y, Q) es una singularidad normal de superficie, $p : X \rightarrow Y$ una desingularización y se tiene que $\mathbf{E}^+ \subseteq \mathbf{E}^\sharp$, entonces es cierta la tesis de la proposición 1.6.1. Es decir, para todo divisor con soporte excepcional D de X tal que $D.E_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$, existe un elemento h del ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y, Q}$ tal que $(h)^* = D$.

3.5.5. Nota. Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos constelaciones con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) . Diremos que $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ si el morfismo $\pi_{\mathcal{C}'} : S_{\mathcal{C}'} \rightarrow S$ factoriza a través de $S_{\mathcal{C}}$, es decir, si existe un morfismo $\varphi_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}'} \rightarrow S_{\mathcal{C}}$ tal que $\pi_{\mathcal{C}'} = \pi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$. En tal caso, se tiene que $\mathbf{I}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathbf{I}_{\mathcal{C}'}$. Consideremos el conjunto de índices T formado por todas las constelaciones \mathcal{C} con origen en P tales que $S_{\mathcal{C}}$ es una superficie no singular, ordenado por la relación anterior. El conjunto $\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C} \in T}$, junto con las inclusiones $\mathbf{I}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathbf{I}_{\mathcal{C}'}$ cuando $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$, forman un sistema directo de semigrupos. Su límite directo es el semigrupo \mathbf{I}^* formado por todos los ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R , junto con el producto usual de ideales (ver proposición 1.10.3). En efecto, de la proposición 1.2.4 se sigue que para todo ideal completo \mathfrak{m} -primario I de R existe una constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible, es decir, I pertenece a $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$.

Aplicando el mismo razonamiento al conjunto de cúmulos, obtenemos que el conjunto \mathbf{K}^* formado por todos los \mathbb{N} -cúmulos con origen en P tiene estructura de semigrupo y es el límite directo de los semigrupos $\{\mathbf{K}_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}}$. Observemos que, si $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ y los cúmulos K y K' con soporte en \mathcal{C} y \mathcal{C}' respectivamente son tales que D_K es el divisor de $S_{\mathcal{C}}$ inducido por $D_{K'}$, es decir, $D_K = \varphi_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}^*(D_{K'})$, entonces K y K' quedan identificados en \mathbf{K}^* . De manera análoga, el subsemigrupo \mathbf{K}^{+*} de \mathbf{K}^* formado por los cúmulos de Cartier con origen en P es el límite directo de los semigrupos $\{\mathbf{K}_{\mathcal{C}}^+\}_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}}$. Por tanto, \mathbf{I}^* y \mathbf{K}^{+*} son semigrupos isomorfos, y todo ideal completo \mathfrak{m} -primario de R está caracterizado por un elemento de \mathbf{K}^{+*} .

§6. Generadores del semigrupo de ideales completos visto como cono simplicial.

En esta sección introduciremos la terminología y los resultados fundamentales acerca de los conos convexos. Nuestro objetivo es probar que, fija una constelación \mathcal{C} , el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ contenido en el \mathbb{Z} -módulo libre $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}$ tiene una estructura de cono convexo racional simplicial. En particular, definiremos unos divisores $\{D_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta}$ de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$, a los que llamaremos *extremales*, y veremos que todo divisor D de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ se expresa de forma única como $D = \sum_{\gamma} q_{\gamma} D_{\gamma}$ donde los q_{γ} son números racionales positivos. De hecho, se pueden calcular en función del divisor D mediante $q_{\gamma} = (D \cdot E_{\gamma}) / (D_{\gamma} \cdot E_{\gamma})$.

3.6.1. Definición. Dado un \mathbb{Z} -módulo libre L de rango d , consideremos el \mathbb{Q} -espacio vectorial $L \otimes \mathbb{Q}$ e identifiquemos L con el subgrupo $L \otimes 1$ de $L \otimes \mathbb{Q}$. Diremos que un subconjunto σ de L es un *cono convexo racional* (o simplemente un cono) si existe una familia finita $\{v_1, \dots, v_t\}$ de elementos de L tal que

$$(8) \quad \sigma = L \cap \left\{ \sum_{i=1}^t q_i v_i \mid q_i \in \mathbb{Q}, q_i \geq 0 \right\}$$

A los elementos v_1, \dots, v_t los llamamos *generadores de σ* . Decimos que σ es *simplicial* si está generado por una familia finita de vectores de L linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Decimos que σ es *regular* si además esa familia es parte de una base del \mathbb{Z} -módulo L . La *dimensión* de un cono σ es la dimensión del \mathbb{Q} -espacio vectorial generado por σ .

3.6.2. Lema. Sea $\sigma \subseteq L$ un cono simplicial de dimensión t . Entonces existe una única familia de t vectores de L linealmente independientes sobre \mathbb{Q} que genera σ . A dichos vectores los llamaremos *elementos extremales* de σ .

DEMOSTRACIÓN: La existencia de una tal familia $\{v_1, \dots, v_t\}$ es consecuencia de la definición de cono simplicial. Supongamos que existe otra familia $\{v'_1, \dots, v'_t\}$ de vectores de L linealmente independientes sobre \mathbb{Q} que genera σ . Sea A la $(t \times t)$ -matriz con coeficientes en \mathbb{Q} de cambio de base de \underline{v} a \underline{v}' , es decir, $\underline{v}' = A\underline{v}$ y análogamente sea B tal que $\underline{v} = B\underline{v}'$. Entonces $AB = Id$ y tanto A como B tienen coeficientes racionales no negativos, por tanto, tras una posible reordenación de los v'_i , podemos suponer que A y B son matrices diagonales, es decir, $v'_i = a_i v_i$ donde $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_i \geq 0$. Ahora bien, puesto que los v_i y los v'_i son vectores de L , se tiene que $a_i = 1$ y $v'_i = v_i$ para todo i . ■

Si L es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango d , entonces su dual $L^\vee = Hom(L, \mathbb{Z})$ es también un \mathbb{Z} -módulo libre de rango d . Dado un cono σ de L , le asociamos el subconjunto de L^\vee dado por

$$(9) \quad \sigma^\vee = \{l \in L^\vee \mid \forall v \in \sigma \quad l(v) \geq 0\}$$

Entonces se tiene:

3.6.3. Lema. La correspondencia $\sigma \mapsto \sigma^\vee$ establece una biyección entre los conos de L y los conos de L^\vee .

DEMOSTRACIÓN: Sea σ un cono de L y supongamos que los vectores $v_1, \dots, v_t \in L$ generan σ , es decir, σ está definido por la igualdad (8). Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de L como \mathbb{Z} -módulo libre y $\{e_1^\vee, \dots, e_d^\vee\}$ la base dual de L^\vee . Si $v_i = x_{i1}e_1 + \dots + x_{id}e_d$ donde $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, entonces σ^\vee está formado por los elementos $l = y_1e_1^\vee + \dots + y_de_d^\vee$ tales que para $1 \leq i \leq t$

$$\sum_j x_{ij}y_j \geq 0$$

y por tanto, es un cono de L^\vee . Además $\sigma = \{v \in L \mid l(v) \geq 0 \quad \forall l \in \sigma^\vee\}$ y, puesto que $(L^\vee)^\vee$ es naturalmente isomorfo a L se concluye el resultado. ■

Por tanto, dado un cono σ de L , al cono σ^\vee definido en (9) lo llamaremos *cono dual* de σ .

3.6.4. Fijemos una constelación \mathcal{C} con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) y consideremos el grupo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}}$. Si n es el cardinal de Δ , entonces \mathbf{E} es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango n . Consideremos también el subsemigrupo \mathbf{E}^+ de \mathbf{E} formado por los divisores $D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} E_{\gamma}$ con $n_{\gamma} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$-D \cdot E_{\alpha} = \sum_{\gamma} n_{\gamma} (-E_{\gamma} \cdot E_{\alpha}) \geq 0$$

para todo $\alpha \in \Delta$. Entonces \mathbf{E}^+ es un cono de \mathbf{E} , de hecho es isomorfo al dual del cono de \mathbb{Z}^n generado por los vectores $\{-(E_{\gamma} \cdot E_{\alpha_1}, \dots, E_{\gamma} \cdot E_{\alpha_n})\}_{\gamma \in \Delta}$. Veremos en 3.6.6 que \mathbf{E}^+ es un cono simplicial. Para ello, comencemos definiendo divisores generadores de \mathbf{E}^+ .

Para cada $\gamma \in \Delta$, tomemos una curva algebroide irreducible \mathcal{E}_{γ} del cierre de Hensel $S_{\mathcal{C}}^h$ de $S_{\mathcal{C}}$, transversal a E_{γ} y que no interseque ninguno de E_{α} para $\alpha \neq \gamma$ (de la misma forma que hicimos en la demostración del teorema 3.2.2) y consideremos la curva de $S_{\mathcal{C}}$ definida por $h_*(\mathcal{E}_{\gamma})$ (siendo $h : S_{\mathcal{C}}^h \rightarrow S_{\mathcal{C}}$ el morfismo de henselización). Puesto que la matriz de intersección Λ es inversible en \mathbb{Q} (por ser definida negativa), existe un único divisor \mathbb{Q} -Cartier \overline{D}_{γ} de $S_{\mathcal{C}}$ con soporte excepcional tal que

$$(10) \quad (h_*(\mathcal{E}_{\gamma}) + \overline{D}_{\gamma}) \cdot E_{\alpha} = 0$$

para todo $\alpha \in \Delta$. Sea r_{γ} el menor entero positivo tal que $r_{\gamma} \overline{D}_{\gamma}$ tiene coeficientes enteros y definamos $D_{\gamma} = r_{\gamma} \overline{D}_{\gamma}$. Es decir, D_{γ} es el único divisor con soporte excepcional de $S_{\mathcal{C}}$ que satisface

$$(11) \quad D_{\gamma} \cdot E_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \gamma \\ -r_{\gamma} & \alpha = \gamma \end{cases}$$

Obsérvese que las definiciones de r_{γ} y D_{γ} no dependen de la elección de \mathcal{E}_{γ} .

3.6.5. Ejemplo. Consideremos la singularidad racional de superficie (S, P) con singularidad \mathbf{D}_5 definida en 2.2.7 y sea \mathcal{C}_m la constelación que define la desingularización minimal de (S, P) . En este caso, los divisores \mathbb{Q} -Cartier \overline{D}_{γ} definidos en (10) son

$$\begin{aligned} \overline{D}_1 &= 2E_1 + E_{21} + E_{22} + E_3 + 2E_4 \\ \overline{D}_{21} &= E_1 + \frac{5}{4}E_{21} + \frac{3}{4}E_{22} + \frac{1}{2}E_3 + \frac{3}{2}E_4 \\ \overline{D}_{22} &= E_1 + \frac{3}{4}E_{21} + \frac{5}{4}E_{22} + \frac{1}{2}E_3 + \frac{3}{2}E_4 \\ \overline{D}_3 &= E_1 + \frac{1}{2}E_{21} + \frac{1}{2}E_{22} + E_3 + E_4 \\ \overline{D}_4 &= 2E_1 + \frac{3}{2}E_{21} + \frac{3}{2}E_{22} + E_3 + 3E_4 \end{aligned}$$

y por tanto, los divisores D_γ definidos en (11) son

$$D_1 = \bar{D}_1 \quad D_{21} = 4\bar{D}_{21} \quad D_{22} = 4\bar{D}_{22} \quad D_3 = 2\bar{D}_3 \quad D_4 = 2\bar{D}_4$$

Observemos que D_{21} es el divisor con soporte excepcional asociado al cúmulo K del ejemplo 2.7.4.

Representamos simbólicamente estos divisores en el grafo dual de la desingularización $\pi : S_{C_m} \rightarrow S$ de la siguiente manera: Para representar el divisor D_γ , dibujamos una flecha con origen en el vértice del grafo dual correspondiente a E_γ y damos peso r_γ a dicha flecha. La ausencia de peso significa que el peso es 1. De esta forma, expresamos que el transformado estricto del divisor de Cartier definido por un elemento genérico del ideal completo I_γ asociado al divisor D_γ es de la forma $r_\gamma h_*(\mathcal{E}_\gamma)$, donde, al igual que en 3.2.1 y 3.2.2, por $r_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ entendemos r_γ curvas algebroides irreducibles del cierre de Hensel de S_{C_m} , transversales a E_γ y que no intersecan a ninguno de los E_α para $\alpha \neq \gamma$. En nuestro caso, estas representaciones son

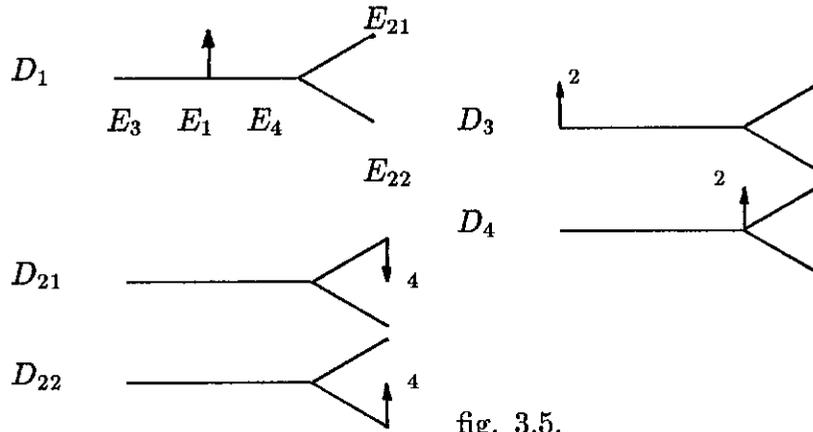


fig. 3.5. ■

3.6.6. Proposición. El subsemigrupo \mathbf{E}_C^+ es un cono simplicial de \mathbf{E}_C de dimensión n y los divisores $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ definidos en 3.6.4 son los elementos extremales de \mathbf{E}_C^+ . Es decir, todo divisor $D \in \mathbf{E}_C^+$ se expresa de forma única como

$$(12) \quad D = \sum_{\gamma \in \Delta} q_\gamma D_\gamma$$

donde los q_γ son números racionales positivos. De hecho, se tiene que

$$(13) \quad q_\gamma = -\frac{1}{r_\gamma} (D \cdot E_\gamma) = \frac{(D \cdot E_\gamma)}{(D_\gamma \cdot E_\gamma)}$$

Más aún, si $\delta_C \in \mathbb{N}$ es el valor absoluto del determinante de una matriz de intersección Λ_C (relativa a la base E_γ^*) asociada a C , entonces el cono \mathbf{E}_C^+ es regular si y sólo si $\delta_C = 1$. En este caso, los q_γ definidos en (13) son enteros no negativos y todo divisor de \mathbf{E}_C^+ se expresa de forma única como combinación lineal de $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ con coeficientes enteros no negativos.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una enumeración ω del conjunto de índices Δ , consideremos la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ con coeficientes en \mathbb{Z} e inversible en \mathbb{Q} y sea $\delta = \delta_C$ el valor absoluto de su determinante (obsérvese que el determinante de dicha matriz es igual al determinante de la matriz de intersección Λ). Sea A la matriz con coeficientes en \mathbb{Q} inversa de $(E_\alpha \cdot E_\beta)$ y sea $\underline{a}^\gamma = (a_\alpha^\gamma)_\alpha$ la columna γ -ésima de A . Si $\delta = 1$, entonces los coeficientes de A son números enteros, pero si $\delta > 1$, entonces son números racionales q tales que $\delta q \in \mathbb{Z}$.

Para $\gamma \in \Delta$, el divisor \mathbb{Q} -Cartier \overline{D}_γ es una combinación lineal en \mathbb{Q} de los $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ de forma que

$$(14) \quad \overline{D}_\gamma \cdot E_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \gamma \\ -1 & \alpha = \gamma \end{cases}$$

Por tanto, \underline{a}^γ es el vector columna de los coeficientes de $-\overline{D}_\gamma$, es decir, se tiene $\overline{D}_\gamma = -\sum_\alpha a_\alpha^\gamma E_\alpha$. Ahora bien, si $\delta = 1$ entonces $\underline{a}^\gamma \in \mathbb{Z}^n$ y $D_\gamma = \overline{D}_\gamma$. Pero en general, \overline{D}_γ no es un divisor y $D_\gamma = r_\gamma \overline{D}_\gamma$ donde r_γ es el menor entero positivo tal que $\underline{b}^\gamma = r_\gamma \underline{a}^\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Es decir, r_γ divide a δ y $D_\gamma = -\sum_\alpha b_\alpha^\gamma E_\alpha$ donde $\underline{b}^\gamma = A(0, \dots, r_\gamma, \dots, 0)^t$.

Puesto que las columnas \underline{a}^γ de la matriz A son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , también los divisores $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ son \mathbb{Q} -linealmente independientes. Veamos que son generadores del cono \mathbf{E}^+ . Sea D un divisor de \mathbf{E}^+ y consideremos

$$D' = \sum_{\gamma \in \Delta} q_\gamma D_\gamma$$

donde

$$q_\gamma = -\frac{1}{r_\gamma} (D \cdot E_\gamma)$$

Tanto D como D' son combinaciones lineales en \mathbb{Q} de $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ y además se tiene que

$$D \cdot E_\alpha = D' \cdot E_\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$$

Puesto que la forma de intersección es no degenerada, los divisores D y D' han de ser iguales, es decir, $D = \sum_{\gamma \in \Delta} q_\gamma D_\gamma$ y la unicidad de los q_γ en esta expresión es consecuencia de la independencia lineal de los D_γ . Así pues, los divisores $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ son los elementos extremales del cono simplicial \mathbf{E}^+ .

Por último, si $\delta = 1$ entonces la matriz A tiene coeficientes en \mathbb{Z} y determinante ± 1 . Además, para todo $\gamma \in \Delta$ se tiene que $D_\gamma = \overline{D}_\gamma = -\sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\gamma} E_{\alpha}$ donde \underline{a}^{γ} es la columna γ -ésima de A . Por tanto, si $\delta = 1$, entonces $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ es una base del \mathbb{Z} -módulo libre \mathbf{E} y el cono \mathbf{E}^+ es regular. Recíprocamente, supongamos que $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ es una \mathbb{Z} -base de \mathbf{E} . Fijo $\gamma \in \Delta$, el máximo común divisor de los números enteros $\{(E_\alpha \cdot E_\gamma)\}_{\alpha \in \Delta}$ es 1, y por tanto, existirán enteros $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ tales que

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} (E_{\alpha} \cdot E_{\gamma}) = -1$$

Ahora bien, el divisor $D = \sum_{\alpha} c_{\alpha} E_{\alpha}$ pertenece a \mathbf{E} , luego se puede expresar como $D = \sum n_{\alpha} D_{\alpha}$ donde $n_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \Delta$. Intersecando ahora D con E_{γ} obtenemos

$$-1 = \sum c_{\alpha} (E_{\alpha} \cdot E_{\gamma}) = D \cdot E_{\gamma} = -n_{\gamma} r_{\gamma}$$

y por tanto, $r_{\gamma} = 1$. Como esto es cierto para todo $\gamma \in \Delta$, se concluye que necesariamente $\delta = 1$. ■

§7. Semifactorización en el semigrupo de ideales completos.

En [Z1], Zariski probó que todo ideal completo I de un anillo regular local de dimensión dos factoriza de forma única en producto de ideales completos simples (ver también [ZS], apéndices 5 y 7). Además, los distintos ideales completos simples que aparecen en la factorización de I están en correspondencia biunívoca con las componentes irreducibles de una curva definida por un elemento genérico de I ([Li3], [Z1], [ZS]). De hecho, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales completos simples de un anillo regular local R de dimensión dos y el conjunto de valoraciones divisoriales ([ZS], apéndice 5).

Para un dominio local completo R de dimensión dos, Cutkosky demostró que si en \mathbf{I}^* (el semigrupo de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R) hay factorización única, entonces R es un D.F.U. (ver [Cu2]). Por otro lado, Lipman probó en [Li2] que si el cuerpo R/\mathfrak{m} es algebraicamente cerrado, entonces el recíproco es cierto, es decir, si R es un D.F.U. entonces en \mathbf{I}^* hay factorización única.

En [Gö], Göhner introdujo el concepto de semifactorización en un semigrupo. Göhner conjeturó, y posteriormente fue probado por Cutkosky en [Cu2], que \mathbf{I}^* es semifactorial si y sólo si el grupo de clases de divisores $Cl(R)$ es un grupo de torsión. Una consecuencia de este resultado es la siguiente: Si el cuerpo R/\mathfrak{m} es algebraicamente cerrado de característica cero, entonces \mathbf{I}^* es semifactorial si y sólo si el anillo local R tiene una singularidad racional.

En esta sección damos una prueba alternativa de la semifactorialidad de \mathbf{I}^* cuando (S, P) es una singularidad racional de superficie. Especificaremos esta condición en términos de los semigrupos \mathbf{E}^+ y \mathbf{K}^+ y utilizaremos los isomorfismos de 3.5.2 y la estructura de cono simplicial de \mathbf{E}^+ .

3.7.1. Definición. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P . Un elemento D del semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ es *irreducible* si no se puede expresar como suma de dos divisores no nulos de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$. Un ideal completo \mathfrak{m} -primario I del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$ es *simple* si no se puede expresar como producto de dos ideales completos propios de R . Observemos que si I pertenece a $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$, es decir, $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible, entonces I es simple si y sólo si el divisor $D \in \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ asociado (es decir, tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}} = \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D)$) es un elemento irreducible del semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$.

Veamos que los divisores $\{D_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta}$ definidos en 3.6.4 son elementos irreducibles del semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$.

3.7.2. Proposición. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P . Entonces los elementos extremales $\{D_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta}$ del cono $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ son irreducibles.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $D_{\gamma} = D' + D''$ donde $D', D'' \in \mathbf{E}^+$. Entonces, para $\alpha \neq \gamma$, se tiene que

$$0 = D_{\gamma}.E_{\alpha} = D'.E_{\alpha} + D''.E_{\alpha}$$

Cada uno de los términos de la derecha es negativo o nulo, y por tanto,

$$D'.E_{\alpha} = D''.E_{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \neq \gamma$$

Puesto que la matriz $(E_{\alpha}.E_{\beta})_{\alpha, \beta}$ es inversible, de la definición (14) de \overline{D}_{γ} se sigue que tanto D_1 como D_2 son múltiplos de \overline{D}_{γ} que pertenecen a \mathbf{E}^+ . La única posibilidad de que esto ocurra es que uno de ellos sea nulo y el otro sea D_{γ} . Por tanto, D_{γ} es un elemento irreducible de \mathbf{E}^+ . ■

Sin embargo, en general el recíproco no es cierto, es decir, existen elementos irreducibles de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ que no son extremales, como veremos a continuación.

3.7.3. Ejemplo. Consideremos de nuevo la singularidad racional de superficie D_5 y la constelación C_m que define la desingularización minimal. Consideremos el siguiente divisor de S_{C_m}

$$D = 4E_1 + 4E_{21} + 3E_{22} + 2E_3 + 6E_4$$

Los defectos de este divisor son $d^t = (0, 2, 0, 0, 1)$, y por tanto, D pertenece a $E_{C_m}^+$. No es difícil probar que D es irreducible, pues conocemos la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ para la desingularización minimal (ejemplo 2.4.3). Sin embargo, D no es un elemento extremal, pues no coincide con ninguno de los divisores D_γ calculados en 3.6.5. La descomposición de D en función de los elementos extremales, según la proposición 3.6.6, es la siguiente

$$(15) \quad D = \frac{1}{2}D_{21} + \frac{1}{2}D_4$$

De hecho, el vector de defectos de D indica que el transformado estricto del divisor de Cartier que define un elemento genérico del ideal completo asociado a D está formado por dos ramas esencialmente distintas. Una de ellas, \mathcal{E}_{21} , contada con multiplicidad 2 y la otra, \mathcal{E}_4 , con multiplicidad 1. Esto demuestra que no existe una correspondencia biunívoca entre los ideales completos simples de I_{C_m} y las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_{C_m} . ■

Definamos ahora lo que entendemos por factorización y semifactorización en E_C^+ y en el semigrupo I^* de los ideales completos \mathfrak{m} -primarios. El primer concepto fue estudiado por Lipman en [Li1] y el segundo lo desarrollaron Göhner y Cutkovsky en [Gö], [Cu1] y [Cu2].

3.7.4. Definición Dada una constelación C con origen en P , decimos que en el semigrupo E_C^+ hay *factorización única* si todo elemento de E_C^+ se expresa de forma única como suma de elementos irreducibles de E_C^+ . Decimos que en el semigrupo I^* de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R hay *factorización única* si todo ideal completo \mathfrak{m} -primario de R se expresa de forma única como producto de ideales completos simples. Puesto que, para toda constelación C' con origen en P , los semigrupos $E_{C'}^+$ e $I_{C'}$ son isomorfos, en I^* hay factorización única si y sólo si hay factorización única en $E_{C'}^+$, para toda constelación C' con origen en P .

Diremos que el semigrupo \mathbf{E}_C^+ es *semifactorial* si cada divisor $D \in \mathbf{E}_C^+$ se puede expresar de forma única como $D = \sum_i q_i D_i$, donde los q_i son números racionales positivos y los D_i son elementos irreducibles de \mathbf{E}_C^+ que satisfacen la siguiente propiedad:

- (*) Si $lD_i = D' + D''$ donde $l \in \mathbb{N}$ y $D', D'' \in \mathbf{E}^+$, entonces existen enteros positivos t_k, t_k ($k = 1, 2$) tales que $l_1 D_i = t_1 D'$ y $l_2 D_i = t_2 D''$.

Finalmente, decimos que el semigrupo \mathbf{I}_C es semifactorial si lo es \mathbf{E}_C y, por paso al límite, decimos que el semigrupo \mathbf{I}^* de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R es semifactorial si, para toda constelación C' con origen en P , el semigrupo $\mathbf{E}_{C'}^+$ es semifactorial.

3.7.5. Ejemplo. Siguiendo el ejemplo 3.7.3, la igualdad (15) afirma que

$$2D = D_{21} + D_4$$

donde D, D_{21} y D_4 son elementos irreducibles, luego no hay factorización única en el semigrupo $\mathbf{E}_{C_m}^+$. Observemos que en este caso, el cono $\mathbf{E}_{C_m}^+$ no es regular ya que el determinante de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ es -8 .

3.7.6. Proposición. Sea C una constelación con origen en P y sea δ_C el determinante de la matriz de intersección definida por C . Entonces, son condiciones equivalentes:

- (i) En el semigrupo \mathbf{E}_C^+ hay factorización única.
(ii) \mathbf{E}_C^+ es un cono regular.
(iii) $\delta_C = 1$.

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia entre (ii) y (iii) está demostrada en 3.6.6. Probemos ahora (i) \implies (ii). Supongamos que hay factorización única en \mathbf{E}^+ , y sea \mathcal{D} el conjunto de elementos irreducibles de \mathbf{E}^+ . Entonces, de la unicidad de la factorización se sigue que los elementos de \mathcal{D} son independientes en \mathbb{Z} . Además, $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ está contenido en \mathcal{D} , y por tanto, es igual a \mathcal{D} . Es decir, $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ es una \mathbb{Z} -base de \mathbf{E} y el cono \mathbf{E}^+ es regular.

Recíprocamente, supongamos que \mathbf{E}^+ es un cono regular. Entonces todo divisor de \mathbf{E}^+ se expresa de forma única como combinación lineal de los $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ con coeficientes enteros no negativos (proposición 3.6.6). Por tanto, los únicos elementos irreducibles de \mathbf{E}^+ son los $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ y hay factorización única en \mathbf{E}^+ . ■

3.7.7. Teorema. Sea I^* el semigrupo de ideales completos m -primarios del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$ de la singularidad racional de superficie (S, P) . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) En el semigrupo I^* hay factorización única.
- (ii) Para toda constelación \mathcal{C} con origen en P (tal que $S_{\mathcal{C}}$ es una superficie no singular), el valor absoluto $\delta_{\mathcal{C}}$ del determinante de cualquier matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C},\omega}$ definida por \mathcal{C} es 1.
- (iii) Existe una constelación \mathcal{C} con origen en P (tal que la superficie $S_{\mathcal{C}}$ es no singular) para la cual el valor absoluto $\delta_{\mathcal{C}}$ del determinante de cualquier matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C},\omega}$ definida por \mathcal{C} es 1.
- (iv) Si \mathcal{C}_m es una constelación minimal de (S, P) , entonces el valor absoluto $\delta_{\mathcal{C}_m}$ del determinante de cualquier matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}_m,\omega}$ definida por \mathcal{C}_m es 1.

DEMOSTRACIÓN: La proposición 3.7.6 afirma que (i) y (ii) son equivalentes. También es claro que (ii) implica (iii) y (iv). Para probar el recíproco, bastará con demostrar que, si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son constelaciones con origen en P tales que $S_{\mathcal{C}}$ y $S_{\mathcal{C}'}$ son superficies no singulares y $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ (es decir, existe un morfismo $\varphi_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}'} \rightarrow S_{\mathcal{C}}$ tal que $\pi_{\mathcal{C}'} = \pi_{\mathcal{C}} \circ \varphi_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$), entonces el valor absoluto $\delta_{\mathcal{C}}$ del determinante de una matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C},\omega}$ definida por \mathcal{C} coincide con el valor absoluto $\delta_{\mathcal{C}'}$ del determinante de una matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}',\omega'}$ definida por \mathcal{C}' . Esto prueba (iii) \implies (ii) y (iv) \implies (ii), ya que el conjunto de constelaciones \mathcal{C} para las cuales la superficie $S_{\mathcal{C}}$ es no singular, junto con el orden \leq , tiene elementos minimales (las constelaciones minimales).

Por tanto, consideremos $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$ dos constelaciones con origen en P y sea $\varphi : S_{\mathcal{C}'} \rightarrow S_{\mathcal{C}}$ un morfismo tal que $\pi_{\mathcal{C}'} = \pi_{\mathcal{C}} \circ \varphi$ (donde las superficies $S_{\mathcal{C}}$ y $S_{\mathcal{C}'}$ son no singulares). Si $\{E_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ y $\{E'_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}'}}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ y $\pi_{\mathcal{C}'}$ respectivamente, entonces existen enumeraciones ω y ω' de $\Delta_{\mathcal{C}}$ y $\Delta_{\mathcal{C}'}$ respectivamente, tales que

$$(16) \quad \Lambda_{\mathcal{C}',\omega'} = (E'_{\alpha}{}^* \cdot E'_{\beta}{}^*) = \begin{pmatrix} \Lambda_{\mathcal{C},\omega} & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix}$$

donde $\Lambda_{\mathcal{C},\omega}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}',\omega'}$ son las matrices de intersección de \mathcal{C} y \mathcal{C}' respecto a dichas enumeraciones. Por tanto, $\delta_{\mathcal{C}'} = \delta_{\mathcal{C}}$ y el resultado queda probado. ■

El resultado anterior fue probado por Lipman en [Li1], secciones 19 y 20 (de hecho, la condición $\delta = 1$ es equivalente a que el grupo H definido en [Li1] sea trivial). En 3.7.7 hemos dado una prueba alternativa basada en el estudio del cono $E_{\mathcal{C}}^+$. De la misma forma, la semifactorialidad de I^* se sigue del hecho que cada cono $E_{\mathcal{C}}^+$ es simplicial. Esta semifactorialidad fue conjeturada por Göhner y probada por Cutkovsky en [Cu2]. De nuestro pun-

to de vista se sigue, no sólo la semifactorialidad, sino la expresión de la descomposición de cada ideal completo \mathfrak{m} -primario en función de los ideales simples, como mostraremos a continuación.

3.7.8. Lema. *Dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , los elementos extremales $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ de $\mathbf{E}_\mathcal{C}^+$ son los únicos elementos irreducibles de $\mathbf{E}_\mathcal{C}^+$ que satisfacen (*).*

DEMOSTRACIÓN: En 3.7.2 hemos probado que los elementos extremales $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ de $\mathbf{E}_\mathcal{C}^+$ (definidos en 3.6.4) son irreducibles. Supongamos que $lD_\gamma = D' + D''$ donde $l \in \mathbb{N}$ y $D', D'' \in \mathbf{E}^+$. El mismo argumento que en 3.7.2 muestra que entonces $D'.E_\alpha = D''.E_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, luego tanto D' como D'' tienen que ser múltiplos de D_γ , es decir, $D' = l_1 D_\gamma$ y $D'' = l_2 D_\gamma$ donde l_1 y l_2 son enteros positivos.

Supongamos ahora que $D \in \mathbf{E}^+$ es otro elemento irreducible que satisface (*). Por la proposición 3.6.6 existirán números enteros no negativos l y $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ tales que

$$lD = \sum_{\gamma} p_\gamma D_\gamma$$

donde $l \neq 0$ y alguno de los p_γ es no nulo. Sea $p_\alpha \neq 0$, entonces, por la propiedad (*), se tiene que $l'D = tD_\alpha$ donde l' y t son enteros positivos. Por tanto, D ha de ser múltiplo de D_α y, puesto que es irreducible, necesariamente $D = D_\alpha$. ■

3.7.9. Proposición. *Para toda constelación \mathcal{C} con origen en P , el semigrupo $\mathbf{E}_\mathcal{C}^+$ es semifactorial.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de la proposición 3.6.6, junto con el lema anterior. ■

3.7.10. Corolario. *El semigrupo \mathbf{I}^* de los ideales completos \mathfrak{m} -primarios del anillo local $R = \mathcal{O}_{S,P}$ es semifactorial. Más aún, dado un ideal completo \mathfrak{m} -primario I y una constelación \mathcal{C} con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_\mathcal{C}}$ es inversible, el ideal I se puede expresar formalmente de forma única como*

$$(17) \quad I = \prod_{\gamma \in \Delta} I_\gamma^{q_\gamma}$$

donde I_γ es el ideal simple correspondiente al divisor con soporte excepcional D_γ y

$$(18) \quad q_\gamma = \frac{(D_I, E_\gamma)}{(D_\gamma, E_\gamma)} \quad \blacksquare$$

3.7.11. Nota. Observemos que en la prueba de 3.6.6 no hemos utilizado que (S, P) sea una singularidad racional de superficie. En 3.5.4 hemos visto que, dado un germen de superficie normal (Y, Q) y una desingularización $p : X \rightarrow Y$, podemos definir los semigrupos E^+ y $E^\#$. De hecho, se tiene que E^+ es un semigrupo semifactorial. También es cierto que el semigrupo $E^\#$ es isomorfo al semigrupo I de ideales completos \mathfrak{m} -primarios I del anillo local $\mathcal{O}_{Y, Q}$ tal que $I\mathcal{O}_X$ es inversible (siendo \mathfrak{m} el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y, Q}$). Sin embargo, en general $E^\#$ está contenido estrictamente en E^+ , y por tanto, no podemos concluir en este caso que I es semifactorial. De hecho, si el cuerpo $\mathcal{O}_{Y, Q}/\mathfrak{m}$ es algebraicamente cerrado de característica cero, entonces se sabe que el semigrupo de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de $\mathcal{O}_{Y, Q}$ es semifactorial si y sólo si (Y, Q) es racional (ver [Cu2]).

3.7.12. Ejemplo. Siguiendo la notación de 3.6.5, los divisores D_1, D_{21}, D_{22}, D_3 y D_4 son los únicos elementos extremales de $E_{\mathcal{C}_m}^+$. Cualquier otro divisor D de $E_{\mathcal{C}_m}^+$ se puede expresar de forma única como

$$D = -(D.E_1)D_1 - \frac{1}{4}(D.E_{21})D_{21} - \frac{1}{4}(D.E_{22})D_{22} - \frac{1}{2}(D.E_3)D_3 - \frac{1}{2}(D.E_4)D_4$$

Tomemos coordenadas $\{x, y, z\}$ de k^3 tales que el germen de superficie (S, P) esté definido por $x^4 + xy^2 + z^2 = 0$ en un entorno de $P = (0, 0, 0)$ (ver ejemplo 2.2.7). Entonces los ideales completos simples correspondientes a los elementos extremales de $E_{\mathcal{C}_m}^+$ son

$$I_1 = \langle x, y, z \rangle$$

$$I_{21} = \langle x^5, yx^3, x^2(x^2 + iz), y(x^2 + iz), 2x^3 + 2ixz + y^2 \rangle$$

$$I_{22} = \langle x^5, yx^3, x^2(x^2 - iz), y(x^2 - iz), 2x^3 - 2ixz + y^2 \rangle$$

$$I_3 = \langle x, z, y^2 \rangle$$

$$I_4 = \langle xz, y^2, yz, x^3, x^2y \rangle$$

donde hemos elegido un sistema de generadores minimal para cada I_γ . Cualquier otro ideal completo \mathfrak{m} -primario I tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}_m}}$ sea inversible se expresa de forma única como

$$I = I_1^{q_1} I_{21}^{q_{21}} I_{22}^{q_{22}} I_3^{q_3} I_4^{q_4}$$

donde $q_1 = -(D_I.E_1)$, $q_{2j} = -\frac{1}{4}(D_I.E_{2j})$ para $j = 1, 2$, $q_3 = \frac{1}{2}(D_I.E_3)$ y $q_4 = \frac{1}{2}(D_I.E_4)$. ■

§8. Semigrupo asociado a puntos dobles racionales.

En esta sección, consideramos un punto doble racional (S, P) y una constelación \mathcal{C}_m minimal para (S, P) y describimos el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}^+$ en este caso. A partir de aquí, será inmediato describir el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ para toda constelación \mathcal{C} no necesariamente minimal.

En la sección 5 del capítulo 2 clasificamos los puntos dobles racionales por el criterio de que dos puntos dobles racionales (S, P) y (S', P') son equivalentes si y sólo si los grafos duales Γ_m y Γ'_m de las respectivas desingularizaciones minimales coinciden, observando que esto implica que los respectivos árboles con relaciones de proximidad T_m^p y $T'_m{}^p$ asociados a las desingularizaciones minimales son iguales. En dicha sección hicimos una descripción del par (T_m^p, Γ_m) para cada tipo de puntos dobles racionales \mathbf{A}_n ($n \geq 1$), \mathbf{D}_n ($n \geq 4$), \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_7 y \mathbf{E}_8 .

Más aún, del estudio efectuado en la sección 5 del capítulo 2 se deduce que, dados dos puntos dobles racionales del mismo tipo (S, P) y (S', P') , existen constelaciones minimales \mathcal{C}_m y \mathcal{C}'_m con origen en P y P' y enumeraciones ω y ω' compatibles con \mathcal{C}_m y \mathcal{C}'_m respectivamente, de manera que las matrices de proximidad $M_{\mathcal{C}_m\omega}$ y $M_{\mathcal{C}'_m\omega'}$ son iguales y las matrices de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}_m\omega}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}'_m\omega'}$ también coinciden. Por tanto, los respectivos semigrupos de ideales completos \mathfrak{m} -primarios que son inversibles tras la desingularización minimal son isomorfos. De hecho, dichos semigrupos, vistos en la forma \mathbf{E}_m^+ , se corresponden por un isomorfismo natural de \mathbb{N}^n en el que \mathbf{E}_m^+ se sumerge. En esta sección describiremos en cada caso dichas matrices así como el semigrupo \mathbf{E}_m^+ asociado a una constelación minimal. De esta forma quedarán descritos el semigrupo \mathbf{K}_m^+ de cúmulos de Cartier y el semigrupo \mathbf{I}_m de ideales completos \mathfrak{m} -primarios asociados a una constelación que define la desingularización minimal de un punto doble racional.

Ahora bien, dada una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ no minimal para el punto doble racional (S, P) , veamos cómo describir el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ una vez conocido \mathbf{E}_m^+ . En primer lugar, podemos suponer que, para $m_1 < m$, los m_1 primeros puntos de \mathcal{C} forman una constelación minimal, es decir, que $\mathcal{C}_m = \{P_1, \dots, P_{m_1}\}$ es una constelación minimal. Fija una enumeración ω de $\Delta_{\mathcal{C}}$, ω induce una enumeración ω_m de $\Delta_{\mathcal{C}_m}$ y, en estas condiciones, la matriz de proximidad $M_{\mathcal{C}\omega}$ es de la forma

$$M_{\mathcal{C}\omega} = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{C}_m\omega_m} & L \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

donde N es una matriz triangular superior de tamaño $(m - n_1) \times (m - n_1)$ definida, como en 2.2.6, a partir de un número finito de constelaciones con origen en puntos no singulares, y $L = (l_{\gamma i})$ es una matriz $n_1 \times (m - n_1)$ (siendo n_1 el cardinal de Δ_m) tal que, para $\gamma \in \Delta_m$ y $m_1 < i \leq m$, $l_{\gamma i} = -1$ si $P_i \in E_\gamma^i$ y $l_{\gamma i} = 0$ en otro caso. Por otro lado, es claro que la matriz de intersección (en función de la base E_γ^*) está dada por

$$\Lambda_{C\omega} = \begin{pmatrix} \Lambda_{C_m\omega_m} & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix}$$

y de esta información se deducen los productos de intersección $E_\alpha \cdot E_\beta$ (ya que $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta} = M_{C\omega} \Lambda_{C\omega} M_{C\omega}^t$). Por tanto, podemos describir explícitamente el semigrupo \mathbf{E}_C^+ a partir de \mathbf{E}_m^+ para toda constelación C con origen en el punto P de un punto doble racional (S, P) .

3.8.1. Singularidades de tipo A_n ($n \geq 1$).

Sea (S, P) una singularidad racional de superficie de tipo A_n ($n \geq 1$) y C_m una constelación minimal de (S, P) . Si n es par, sea $n = 2l$, C_m está formada por l puntos P_1, \dots, P_l con las relaciones de proximidad $P_{i+1} \rightarrow P_i$ ($1 \leq i \leq l - 1$) y de manera que la explosión en cada punto P_i induce dos componentes irreducibles del lugar excepcional de π_{C_m} . Por el contrario, cuando $n = 2l - 1$, C_m está formado por l puntos P_1, \dots, P_l con las relaciones de proximidad $P_{i+1} \rightarrow P_i$ ($1 \leq i \leq l - 1$), de los cuales todos menos P_l dan lugar a dos componentes irreducibles del lugar excepcional y P_l induce una sola componente irreducible. En ambos casos (tanto para n par como impar) el lugar excepcional de π_{C_m} está formado por n componentes irreducibles. En particular, de las relaciones de proximidad se deduce que hay una única constelación C_m con origen en P que define la desingularización minimal de (S, P) . También deducimos en ambos casos el árbol con relaciones de proximidad T_m^P , que está descrito en fig. 3.6, donde denotamos también por P_i el vértice de T_m^P definido por el punto P_i . El grafo dual Γ_m está representado en fig. 3.7.

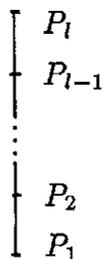


fig. 3.6.

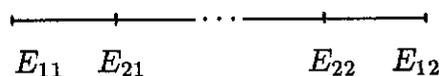
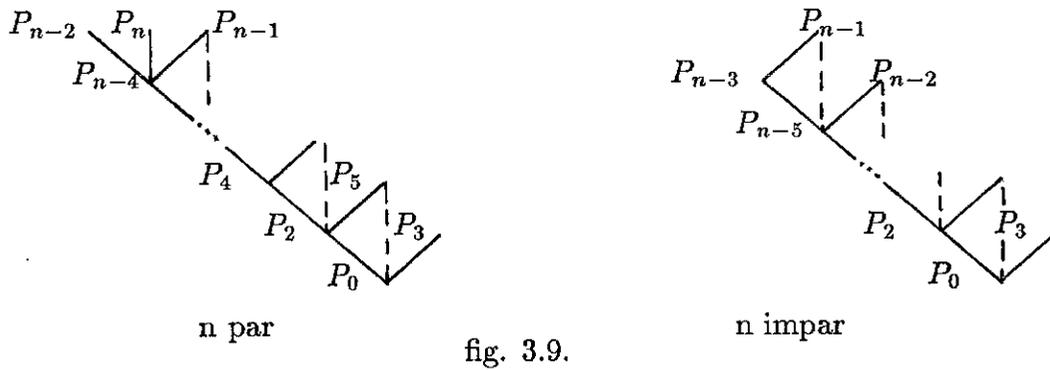


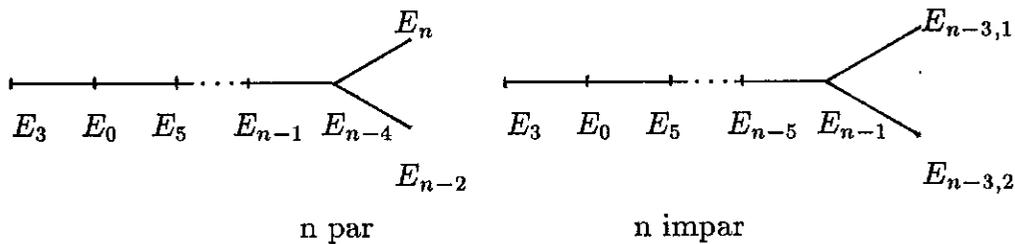
fig. 3.7.

3.8.2. Singularidades de tipo D_n ($n \geq 4$).

Sea (S, P) una singularidad racional de tipo D_n ($n \geq 4$) y \mathcal{C}_m una constelación que define la desingularización minimal de (S, P) . Si n es par, \mathcal{C}_m consta de n puntos, cada uno de los cuales induce una única componente irreducible del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_m}$ (o equivalentemente, una valoración divisorial). Si n es impar, entonces \mathcal{C}_m está formada por $n - 1$ puntos y podemos suponer que $\mathcal{C}_m = \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$, donde todos los puntos excepto P_{n-3} inducen una valoración divisorial y P_{n-3} da lugar a dos valoraciones divisoriales (de hecho no hay una única constelación definida por la desingularización minimal, sino que podemos dar diferentes órdenes a los puntos de \mathcal{C}_m en el sentido de 2.1.2, obteniendo constelaciones equivalentes). El árbol con relaciones de proximidad \mathcal{T}_m^p está dado por



donde, para simplificar la notación, llamamos P_0 en lugar de P_1 al punto singular P de (S, P) . El grafo dual Γ_m es de la forma siguiente



(recordemos que $E_0 = E_1$). La matriz de proximidad sólo depende de la constelación \mathcal{C}_m (no de la enumeración de $\Delta_{\mathcal{C}_m}$) y está definida por las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} 2E_i^* &= 2E_i + 2E_{i+2}^* + E_{i+3}^* + E_{i+5}^* && \text{para } i \text{ par} && 0 \leq i \leq n-5 \\ E_i^* &= E_i && \text{para } i \text{ impar} && 3 \leq i \leq n-2 \end{aligned}$$

junto con $2E_{n-4}^* = 2E_{n-4} + E_{n-2}^* + E_{n-1}^* + E_n^*$ y $E_i^* = E_i$ para $n-2 \leq i \leq n$ cuando n es par y, cuando n es impar,

$$\begin{aligned} 2E_{n-5}^* &= 2E_{n-5} + E_{n-3,1}^* + E_{n-3,2}^* + E_{n-2}^* + E_{n-1}^* \\ 2E_{n-3,j}^* &= 2E_{n-3,j} + E_{n-1}^* \quad \text{for } j = 1, 2 \\ E_{n-1}^* &= E_{n-1} \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de intersección Λ sólo depende de la constelación \mathcal{C}_m . Si n es par, Λ es la $(n \times n)$ -matriz diagonal formada por $-1/2, -1/2, -2, -1/2, -2, \dots, -2, -1/2, -2, \Lambda_0, -2, -2$, en la diagonal, siendo $\Lambda_0 = -2$ y, si n es impar, la matriz Λ se obtiene de la anterior reemplazando Λ_0 por la matriz (2×2) formada por $-3/2$ en la diagonal y $1/2$ en el resto. En ambos casos, el valor absoluto del determinante de Λ es $\delta_m = 4$, y por tanto, no hay factorización única. Siguiendo la notación anterior, los elementos extremales de \mathbf{E}_m^+ están representados mediante

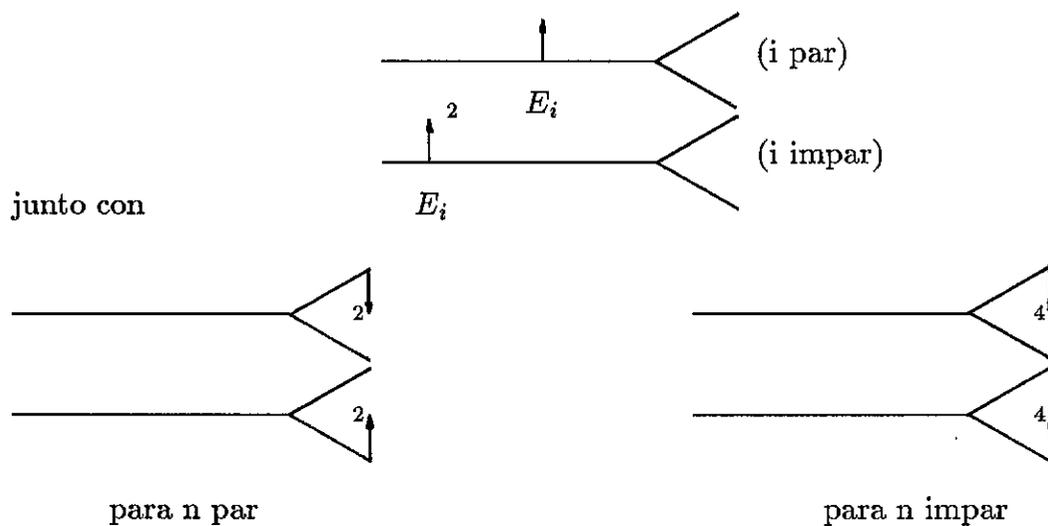


fig. 3.11.

3.8.3. Singularidades de tipo \mathbf{E}_6 .

Sea (S, P) una singularidad de tipo \mathbf{E}_6 . Entonces la desingularización minimal de (S, P) define una única constelación \mathcal{C}_m (es decir, no hay ninguna constelación con origen en P equivalente a \mathcal{C}_m en el sentido de 2.1.2 y distinta de \mathcal{C}_m). Dicha constelación está formada por cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4 . Los puntos P_1 y P_4 dan lugar a una sola valoración divisorial mientras que, tanto P_2 como P_3 inducen dos. Así pues, el lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_m}$ tiene

3.8.4. Singularidades de tipo E_7 .

Sea (S, P) una singularidad racional de tipo E_7 y C_m una constelación que define la desingularización minimal de (S, P) (hay varias posibles elecciones equivalentes de C_m). La constelación C_m consta de siete puntos, cada uno de los cuales induce una única valoración divisorial. Podemos suponer que $C_m = \{P_1, \dots, P_7\}$ y que el árbol con relaciones de proximidad T_m^p está representado en fig. 3.15 donde, al igual que en los ejemplos anteriores, denotamos también por P_i el vértice de T_m^p definido por el punto P_i de C_m . Por otro lado, el grafo dual Γ_m de la desingularización minimal tiene siete vértices y está representado en fig. 3.16.

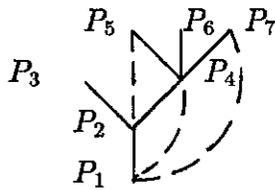


fig. 3.15.

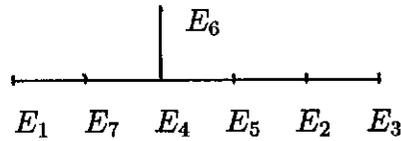
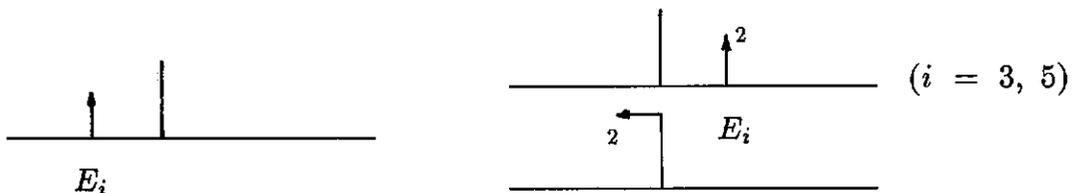


fig. 3.16.

Las igualdades que definen la matriz de proximidad son

$$\begin{aligned} 2E_1^* &= 2E_1 + 2E_2^* + 2E_4^* + E_7^* \\ 2E_2^* &= 2E_2 + E_3^* + 2E_4^* + E_5^* \\ 2E_4^* &= 2E_4 + E_5^* + E_6^* + E_7^* \\ E_i^* &= E_i \quad i = 3, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

y la matriz de intersección Λ (que sólo depende de la constelación C_m , pues hay una única posible enumeración de las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_{C_m} compatible con C_m) es una matriz diagonal (7×7) formada por $-1/2, -1/2, -2, -1/2, -2, -2$, y -2 en la diagonal. Por lo tanto, su determinante es -2 , $\delta_m = 2$, y no hay factorización única ni en E_m^+ ni en el semi-grupo \mathbf{I}^* de los ideales completos \mathfrak{m} -primarios de una singularidad de tipo E_6 . Los elementos extremales de E_m^+ están representados mediante



$(i = 1, 2, 4, 7)$

fig. 3.17.

3.8.5. Singularidad de tipo E_8 .

Sea (S, P) una singularidad racional de tipo E_8 y \mathcal{C}_m una constelación minimal de (S, P) . Al igual que ocurría en 3.8.4 con las singularidades de tipo E_7 , hay varias posibles elecciones equivalentes de la constelación \mathcal{C}_m en el sentido de 2.1.2. Cualquiera que sea la elección de \mathcal{C}_m , esta constelación está formada por ocho puntos, cada uno de los cuales da lugar a una sola componente irreducible del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_m}$, es decir, el lugar excepcional de la desingularización minimal de (S, P) está formada por ocho componentes irreducibles. Así pues, tanto el árbol con relaciones de proximidad \mathcal{T}_m^p como el grafo dual Γ_m contienen ocho vértices, y están representados respectivamente por

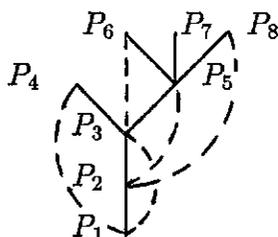


fig. 3.18.

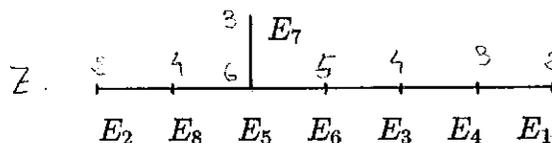


fig. 3.19.

En este caso, la matriz de proximidad está definida por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} 2E_1^* &= 2E_1 + 2E_2^* + 2E_3^* + E_4^* \\ 2E_2^* &= 2E_2 + 2E_3^* + 2E_5^* + E_8^* \\ 2E_3^* &= 2E_3 + E_4^* + 2E_5^* + E_6^* \\ 2E_5^* &= 2E_5 + E_6^* + E_7^* + E_8^* \\ E_i^* &= E_i \quad i = 4, 6, 7, 8 \end{aligned}$$

La matriz de intersección sólo depende de la constelación \mathcal{C}_m , ya que hay una única posibilidad de dar una enumeración en $\Delta_{\mathcal{C}_m}$. Sea $\mathcal{C}_m = \{P_1, \dots, P_8\}$ una constelación minimal de (S, P) tal que las relaciones de proximidad de \mathcal{C}_m están definidas en fig. 3.18, donde el vértice denotado por P_i corresponde al punto P_i . Entonces la matriz de intersección $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{C}_m}$ definida por \mathcal{C}_m es una matriz diagonal de tamaño 8×8 formada por $-1/2, -1/2, -1/2, -2, -1/2, -2, -2$ y -2 en la diagonal. Su determinante es 1, es decir, $\delta_m = 1$, y por tanto, hay factorización única no sólo en el semigrupo \mathbf{E}_m^+ sino en el semigrupo \mathbf{I}^* de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de una singularidad de tipo E_8 (teorema 3.7.7). Así pues, los elementos extremales de \mathbf{E}_m^+ son exactamente los elementos irreducibles, y cada D_i ($1 \leq i \leq 8$) está representado en el grafo dual por una flecha con origen en el vértice correspondiente a E_i y con peso 1 (o equivalentemente sin peso).

§9. Cuándo hay factorización en el semigrupo de los ideales completos.

Del estudio anterior de los puntos dobles racionales se deduce que, si (S, P) es una singularidad racional de superficie de multiplicidad dos para la cual hay factorización única en el semigrupo \mathbf{I}^* de los ideales completos \mathfrak{m} -primarios, entonces (S, P) es una singularidad de tipo \mathbf{E}_8 . En esta sección veremos que, dada una singularidad racional de superficie (S, P) , en el semigrupo \mathbf{I}^* de ideales completos \mathfrak{m} -primarios asociado a (S, P) hay factorización única si y sólo si (S, P) es de tipo \mathbf{E}_8 o bien es no singular.

Comenzaremos reproduciendo el resultado que indica que la factorialidad de \mathbf{I}^* implica que la multiplicidad de (S, P) es menor o igual a dos.

3.9.1. Lema. ([Li1], lemma 22.1) *Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y $\pi_m : X \rightarrow S$ la desingularización minimal de (S, P) . Sean $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_m y $D = \sum n_\gamma E_\gamma$ un divisor con soporte excepcional. Entonces existe $\alpha \in \Delta_m$ tal que*

$$(19) \quad (D - E_\alpha) \cdot E_\alpha \leq 1$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, consideremos la función

$$\mathcal{H}(D') = D' \cdot D' + 2\mathcal{X}(\mathcal{O}_{D'})$$

definida en el grupo de divisores D' con soporte excepcional. Puesto que $D_1 \cdot D_2 = \mathcal{X}(\mathcal{O}_{D_1+D_2}) - \mathcal{X}(\mathcal{O}_{D_1}) - \mathcal{X}(\mathcal{O}_{D_2})$ (ver igualdad (2) en 1.1.5), se tiene que la función \mathcal{H} es aditiva.

Razonando ahora por reducción al absurdo, supongamos que $(D - E_\gamma) \cdot E_\gamma \geq 2$ para todo $\gamma \in \Delta_m$. Entonces

$$D \cdot D = \sum_{\gamma} n_\gamma (D \cdot E_\gamma) \geq \sum_{\gamma} n_\gamma \mathcal{H}(E_\gamma) = \mathcal{H}(D)$$

es decir, $D \cdot D \geq D \cdot D + 2\mathcal{X}(\mathcal{O}_D)$ y por tanto $h^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{X}(\mathcal{O}_D) \leq 0$, llegando a una contradicción. ■

3.9.2. Proposición. ([Li1], proposición 22.5) Sea (S, P) una singularidad racional de superficie de multiplicidad m y sea \mathbf{I}^* el semigrupo de ideales completos m -primarios de (S, P) . Si en \mathbf{I}^* hay factorización única, entonces $m \leq 2$.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{C}_m una constelación que define la desingularización minimal de (S, P) . Entonces el teorema 3.7.7 afirma que la factorialidad de \mathbf{I}^* es equivalente a la existencia de divisores $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}^+$ tales que $D_\gamma \cdot E_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \gamma$ y $D_\gamma \cdot E_\gamma = -1$ para $\alpha, \gamma \in \Delta_m$. Fijemos uno de tales divisores D_γ . Por el lema anterior, existirá $\alpha \in \Delta_m$ tal que

$$E_\alpha \cdot E_\alpha \geq D_\gamma E_\alpha - 1 = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ -2 & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $m \geq 3$. Entonces $E_\alpha \cdot E_\alpha \leq -2$ (corolario 1.6.3) y ha de ser $\alpha = \gamma$ y $E_\gamma \cdot E_\gamma = -2$. Como esto es cierto para todo $\gamma \in \Delta_m$, el corolario 1.6.3 afirma que $m = 2$, en contra de nuestra hipótesis. ■

3.9.3. Corolario. ([Li1], sección 25) Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y sea \mathbf{I}^* el semigrupo de ideales completos m -primarios de (S, P) . Entonces en \mathbf{I}^* hay factorización única si y sólo si (S, P) es no singular o bien es una singularidad racional de tipo \mathbf{E}_8 .

DEMOSTRACIÓN: Si (S, P) es no singular entonces, para toda constelación \mathcal{C} con origen en P , la matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}}$ es $-Id$ (proposición 2.4.2), y por tanto, inversible como matriz de números enteros. Así pues, para toda constelación \mathcal{C} con origen en P , hay factorización única en el semigrupo $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$, luego también hay factorización única en el semigrupo \mathbf{I}^* de ideales completos m -primarios.

Además, en la sección 8 hemos mostrado que, si (S, P) es una singularidad racional de superficie de multiplicidad dos para la cual hay factorización única en \mathbf{I}^* , entonces (S, P) ha de ser de tipo \mathbf{E}_8 . Teniendo esto en cuenta, el resultado es consecuencia de la proposición anterior. ■

Capítulo 4

Algunas consecuencias.

En el capítulo anterior probamos la equivalencia entre los ideales completos \mathfrak{m} -primarios del anillo local R de una singularidad racional de superficie (S, P) y los cúmulos de Cartier con soporte en constelaciones de puntos infinitamente próximos a P . De hecho, para cada constelación \mathcal{C} con origen en P , los semigrupos $I_{\mathcal{C}}$, $K_{\mathcal{C}}^+$ y $E_{\mathcal{C}}^+$ son isomorfos. En este capítulo, utilizamos este hecho para obtener algunas consecuencias.

Como primera aplicación, en la parte I damos una fórmula que calcula la longitud del R -módulo R/I , siendo I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R . Dicha fórmula es una generalización en el caso en que R es el anillo local de una superficie con singularidades racionales de la fórmula de Hoskin y Deligne ([Ho], teorema 5.1; [De], teorema 2.13), válida cuando R es el anillo local de una superficie no singular. Como consecuencia, en la sección 3 calculamos el número de elementos de cualquier sistema minimal de generadores de un ideal completo \mathfrak{m} -primario. Es importante notar que, como sucede en el caso no singular, el número mínimo de generadores de un ideal completo depende sólo de los órdenes en el origen del cúmulo. Además, en la sección 4 damos un algoritmo que permite encontrar un sistema minimal de generadores de un ideal completo \mathfrak{m} -primario. De hecho, el algoritmo depende de la singularidad racional de superficie (S, P) . Parte de un cúmulo K con origen en P y calcula una sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$ de cúmulos de Cartier tales que $I_{K_0} = I_K$ y, para $0 \leq t \leq r$, $I_{K_{t+1}} \subset I_{K_t}$ y $\ell(I_{K_t}/I_{K_{t+1}}) = 1$. Una vez dada esta sucesión de cúmulos de Cartier, si para cada t tomamos $h_t \in I_{K_t} - I_{K_{t+1}}$, entonces $\{h_t\}_{t=0}^{r-1}$ es un sistema minimal de generadores de I_K . Este resultado es una generalización del algoritmo expuesto por Casas en [Cs2] para el caso no singular.

La parte II la dedicamos a estudiar la relación entre el grafo dual ponderado, la forma de intersección, el semigrupo de ideales completos y la matriz de proximidad de una singularidad racional de superficie. Diremos que dos singularidades racionales de superficie son del mismo tipo si y sólo si los respectivos grafos duales ponderados de las desingularizaciones minimales coinciden. En la sección 5 expresaremos este criterio de equivalencia en función de la forma de intersección definida en el grupo de ciclos excepcionales de la desingularización minimal y, en la sección 6, en función del semigrupo E_m^+ asociado a cada singularidad, o más concretamente, en función del cono simplicial de \mathbb{Z}^n definido por E_m^+ . Como consecuencia de esta última caracterización obtenemos que, si dos singularidades racionales de superficie son del mismo tipo, entonces los respectivos semigrupos de ideales completos \mathfrak{m} -primarios asociados son isomorfos. Finalmente, en la sección 7 establecemos la equivalencia entre el tipo de una singularidad racional de superficie y las matrices de proximidad y de intersección asociadas a su desingularización minimal.

En la parte III estudiamos los gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie (S, P) . A cada germen de curva reducida C inmerso en (S, P) le asociamos un sistema de invariantes $\Gamma(C)$ que depende de la inmersión en (S, P) y probamos que $\Gamma(C)$ determina la clase de equirresolución de C . Sin embargo, mostramos que el recíproco no es cierto.

I. Colongitud y sistemas de generadores de un ideal completo.

§1. Colongitud de un ideal completo.

Sea (S, P) una singularidad racional de superficie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k . Sea R el anillo local de S en P y \mathfrak{m} el ideal maximal de R . Dado un R -módulo M , denotaremos por $\ell(M)$ (o bien $\ell_R(M)$) la longitud de M como R -módulo. Dado un ideal I de R , la colongitud de I es $\ell(R/I)$. En esta sección damos fórmulas que calcula la colongitud de un ideal completo I en función del cúmulo asociado y en función del correspondiente divisor con soporte excepcional.

4.1.1. Lema. *Sea M un R -módulo tal que $\mathfrak{m}M = 0$, es decir, tal que la operación $R \times M \rightarrow M$ induce una operación $R/\mathfrak{m} \times M \rightarrow M$ que dota a M de estructura de k -espacio vectorial vía el isomorfismo de cuerpos $k \cong R/\mathfrak{m}$. Entonces se tiene*

$$\ell(M) = \dim_k(M)$$

DEMOSTRACIÓN: Por la estructura de M , dado un subconjunto N de M , N es R -submódulo de M si y sólo si N es k -subespacio vectorial de M . Así pues, se tiene que $\ell_R(M) = \ell_k(M)$ (donde por $\ell_k(M)$ entendemos la longitud de M como k -espacio vectorial) y es igual a $\dim_k(M)$. ■

4.1.2. Lema. Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R . La inclusión $k \subset R$ define en R/I una estructura de k -espacio vectorial y se tiene

$$(1) \quad \ell(R/I) = \dim_k(R/I)$$

DEMOSTRACIÓN: Si I es el ideal maximal \mathfrak{m} , el resultado es consecuencia del lema anterior y se tiene que $\ell(R/\mathfrak{m}) = \dim_k(R/\mathfrak{m}) = 1$. Si $I = \mathfrak{m}^r$, donde r es un entero positivo, entonces, aplicando sucesivamente el lema 4.1.1 a $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ y teniendo en cuenta la aditividad de ℓ y de \dim_k , se deduce el resultado para R/\mathfrak{m}^r , obteniendo en particular que R/\mathfrak{m}^r es un R -módulo de longitud finita.

Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario contenido propiamente en \mathfrak{m} y sea r el entero positivo tal que $\mathfrak{m}^r \subseteq I$ y \mathfrak{m}^{r-1} no está contenido en I . El morfismo sobreyectivo de R -módulos $R/\mathfrak{m}^r \rightarrow R/I$ asegura que R/I es de longitud finita. Consideremos ahora el R -módulo $M = I_1/I$, donde $I_1 = I + \mathfrak{m}^{r-1}$ es un ideal que contiene propiamente a I . Es claro que M satisface las hipótesis del lema 4.1.1, y por tanto, $\ell(I_1/I) = \dim_k(I_1/I)$. Aplicando este argumento un número finito de veces, puesto que R/I es de longitud finita, se concluye la prueba. ■

4.1.3. Proposición. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P . Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible y sea $D \in \mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$ el divisor con soporte excepcional asociado a I . Entonces

$$(2) \quad \ell(R/I) = h^0(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_D)$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que S es afín, es decir, $S = \text{Spec } R$, y sea $\pi : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ la desingularización inducida por \mathcal{C} . Consideremos la sucesión exacta

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D) \rightarrow \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

Por ser $\pi_{\mathcal{C}}$ propio y S un esquema afín, tenemos que $\Gamma(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}) = R$ y $\Gamma(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D)) = I$ (proposición 2.7.3), y por tanto, (3) induce la siguiente sucesión exacta larga

$$(4) \quad 0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow \Gamma(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D)) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}) \rightarrow H^1(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^2(S_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}(-D))$$

El objetivo es probar que $H^1(S_C, \mathcal{O}_{S_C}(-D)) = 0$ y que $H^2(S_C, \mathcal{O}_{S_C}(-D)) = 0$, pues de esta forma, $\Gamma(S_C, \mathcal{O}_D) \cong R/I$ y

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_D) = h^0(S_C, \mathcal{O}_D) = \dim_k(R/I) = \ell(R/I)$$

El haz $\mathcal{O}_{S_C}(-D)$ está generado por sus secciones globales, y por tanto, existirá una sucesión exacta de \mathcal{O}_{S_C} -módulos

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_{S_C}^N \rightarrow \mathcal{O}_{S_C}(-D) \rightarrow 0$$

donde el haz $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{S_C}^N$ es coherente. Ahora bien, en la demostración de 1.10.1 vimos que, con estas hipótesis, se tiene que $H^2(S_C, \mathcal{L}) = 0$. Puesto que $H^1(S_C, \mathcal{O}_{S_C}) = 0$, ya que (S, P) es racional, se concluye que $H^1(S_C, \mathcal{O}_{S_C}(-D)) = 0$. Por último, $H^2(S_C, \mathcal{O}_{S_C}(-D)) = 0$ también se deduce de que $\mathcal{O}_{S_C}(-D)$ es un \mathcal{O}_{S_C} -módulo casicoherente contenido en \mathcal{O}_{S_C} y el morfismo π_C es dominante (demostración de 1.10.1). ■

4.1.4. Teorema. Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R . Tomemos una constelación \mathcal{C} con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_C}$ sea un haz inversible y sean $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ el cúmulo con soporte en \mathcal{C} y $D \in \mathbb{E}_C^+$ el divisor con soporte excepcional asociados a I . Entonces, si K_{S_C} es un divisor canónico de S_C , se tiene

$$(6) \quad \ell(R/I) = -\frac{1}{2}D \cdot (D + K_{S_C}) = -\frac{1}{2}\underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu} + \underline{\nu}^t M^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}(E_\gamma \cdot E_\gamma)\right)_\gamma$$

donde M y Λ son las matrices de proximidad e intersección definidas por alguna enumeración de Δ_C .

DEMOSTRACIÓN: La primera igualdad de (6) es consecuencia de la fórmula de adjunción (igualdad (6) en 1.1.8), teniendo en cuenta que $\ell(R/I) = \mathcal{X}(\mathcal{O}_D) = 1 - p_a(D)$. Ahora bien, si $D = \sum b_\gamma E_\gamma$, entonces $\underline{\nu} = M^t \underline{b}$ y $D \cdot D = \underline{b}^t (E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta} \underline{b} = \underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu}$. Por último, aplicando de nuevo la fórmula del género a cada E_γ , puesto que $p_a(E_\gamma) = 0$ (proposición 1.3.3), se tiene que $E_\gamma \cdot K_{S_C} = -2 - (E_\gamma \cdot E_\gamma)$, y por tanto

$$-\frac{1}{2}D \cdot K_{S_C} = \sum_\gamma b_\gamma \left(1 + \frac{1}{2}(E_\gamma \cdot E_\gamma)\right) = \underline{\nu}^t M^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}(E_\gamma \cdot E_\gamma)\right)_\gamma$$

con lo que queda probado (6). ■

4.1.5. Nota. Obsérvese que se obtiene también la siguiente fórmula para $\ell(R/I)$ en función de los coeficientes b_γ del divisor D

$$\ell(R/I) = -\frac{1}{2} \underline{b}^t (E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta} \underline{b} + \underline{b}^t \left(1 + \frac{1}{2} (E_\gamma \cdot E_\gamma)\right)_\gamma$$

4.1.6. Corolario. ([Ho], teorema 5.1; [De], teorema 2.13) Sea (S, P) un germen de superficie no singular y sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario del anillo local $R = \mathcal{O}_{S, P}$. Si \mathcal{C} es una constelación con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible y $K = (\mathcal{C}, \{\nu_i\}_{i=1}^m)$ es el cúmulo con soporte en \mathcal{C} asociado a I , entonces

$$(7) \quad \ell(R/I) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\nu_i^2 + \nu_i)$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, en este caso $\Lambda = -Id$, y por tanto, el primer término del miembro de la derecha de (6) es $\frac{1}{2} \sum_i \nu_i^2$. Por otro lado, por 2.2.6 se tiene que

$$E_i \cdot E_i = (E_i^* \cdot E_i^*) + \sum_{P_j \rightarrow P_i} (E_j^* \cdot E_j^*) = -1 - \sum_{P_j \rightarrow P_i} 1$$

Así pues, $2 + (E_i \cdot E_i) = 1 - \sum_{j \rightarrow i} 1$ es la suma de los elementos de la fila i -ésima de M , es decir, si $\underline{1}$ es el vector columna cuyos elementos son todos 1, entonces $(2 + (E_i \cdot E_i))_i = M \underline{1}$. Por tanto, el segundo término del miembro de la derecha de (6) es $\frac{1}{2} \underline{\nu}^t \underline{1} = \frac{1}{2} \sum_i \nu_i$, con lo que se concluye la igualdad (7). ■

4.1.7. Teorema. Sea (S, P) un punto doble racional y sea \mathcal{C}_m la constelación con origen en P que define la desingularización minimal de (S, P) . Consideremos un ideal completo \mathfrak{m} -primario I de $R = \mathcal{O}_{S, P}$ tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}_m}}$ es inversible y sea $K = (\mathcal{C}_m, \underline{\nu})$ el cúmulo con soporte \mathcal{C}_m asociado a I . Entonces

$$(8) \quad \ell(R/I) = -\frac{1}{2} \underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu}$$

donde Λ es una matriz de intersección definida por \mathcal{C}_m .

DEMOSTRACIÓN: Basta con tener en cuenta que $E_\gamma \cdot E_\gamma = -2$ para todo γ (corolario 1.6.3) y sustituir en la igualdad (6) del teorema 4.1.4 ■

§2. Polinomio de Hilbert-Samuel de un ideal completo.

En esta sección obtenemos algunas consecuencias del teorema 4.1.4. En primer lugar, dados dos ideales completos \mathfrak{m} -primarios I y J de R , estudiamos la diferencia entre la colongitud de IJ y la suma de las colongitudes de I y de J . Aplicando esto, calculamos la colongitud de I^r para todo $r \geq 0$ y en particular, deducimos la expresión conocida del polinomio de Hilbert-Samuel de (S, P) en función del ciclo fundamental Z de cualquier desingularización de (S, P) .

Comencemos definiendo como en [Li2] el producto de intersección (I, J) de dos ideales completos \mathfrak{m} -primarios I, J de R y calculando la colongitud de IJ en función de la colongitud de I , la colongitud de J y el producto de intersección (I, J) .

4.2.1. Definición. Sean I y J dos ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R y consideremos los divisores de Cartier C y C' definidos por elementos genéricos de I y J respectivamente. El producto de intersección $C.C'$ es un 0-ciclo módulo equivalencia racional en el grupo $A_0(|C| \cap |C'|)$ de clases de equivalencia racional de 0-ciclos en $|C| \cap |C'|$. A continuación veremos que el grado $\deg(C.C')$ de este 0-ciclo es un entero que no depende de los elementos genéricos de I y de J elegidos. Llamaremos a dicho entero *producto de intersección de I y J* , y lo denotaremos por (I, J) .

4.2.2. Lema. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P y sean I y J dos ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R tales que tanto $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ como $J\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ son inversibles. Consideremos los cúmulos $K_I = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ y $K_J = (\mathcal{C}, \underline{\nu}')$ y los divisores $D_I = \sum b_\gamma E_\gamma$ y $D_J = \sum b'_\gamma E_\gamma$ de $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$ correspondientes a I y J respectivamente. Entonces se tiene

$$(9) \quad (I, J) = -\underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu}' = -D_I.D_J$$

donde Λ es una matriz de intersección definida por \mathcal{C} .

DEMOSTRACIÓN: Sean C y C' los divisores de Cartier definidos por elementos genéricos de I y J respectivamente. Podemos suponer que están definidos por elementos generales, es decir, $C^* = \overline{C} + D_I$ y $C'^* = \overline{C}' + D_J$ (ver nota 3.4.4). Más aún, podemos suponer que $\overline{C}.\overline{C}' = 0$. De esta forma, se tiene que

$$C.C' = C^*.\overline{C}' = D_I.(C'^* - D_J) = -D_I.D_J$$

Además,

$$-D_I.D_J = \underline{b}^t (E_\alpha.E_\beta)_{\alpha,\beta} \underline{b}' = -\underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu}'$$

con lo que se concluye la prueba. ■

4.2.3. Proposición. Sean I y J dos ideales completos \mathfrak{m} -primarios de R , entonces

$$(10) \quad \ell(R/IJ) = \ell(R/I) + \ell(R/J) + (I, J)$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una constelación \mathcal{C} con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ y $J\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ sean haces inversibles y sean D_I y D_J los divisores de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ asociados a I y J respectivamente. Entonces IJ es un ideal completo \mathfrak{m} -primario, $IJ\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ es inversible y $D_I + D_J$ es el divisor de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ asociado a IJ . Aplicando ahora el teorema 4.1.4 y teniendo en cuenta que $(I, J) = -D_I \cdot D_J$ se concluye (10). ■

4.2.4. Corolario. Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R , entonces, para todo $r \geq 0$, se tiene

$$(11) \quad \ell(R/I^r) = r \ell(R/I) + \frac{r(r-1)}{2} (I, I)$$

$$(12) \quad \ell(I^r/I^{r+1}) = \ell(R/I) + r(I, I)$$

DEMOSTRACIÓN: La primera igualdad se obtiene aplicando $r-1$ veces la identidad (10). La igualdad (12) es consecuencia de (11), teniendo en cuenta que $\ell(I^r/I^{r+1}) = \ell(R/I^{r+1}) - \ell(R/I^r)$. ■

4.2.5. Proposición. Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R . Tomemos una constelación \mathcal{C} con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_{\mathcal{C}}}$ sea un haz inversible y sean $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ el cúmulo con soporte en \mathcal{C} asociado a I y $D \in \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ el correspondiente divisor con soporte excepcional. Entonces, para todo $r \geq 0$, se tiene

$$(13) \quad \begin{aligned} \ell(R/I^r) &= -\frac{r^2}{2}(D \cdot D) - \frac{r}{2}D \cdot K_{S_{\mathcal{C}}} = \\ &= -\frac{r^2}{2} \underline{\nu}^t \Lambda \underline{\nu} + r \underline{\nu}^t M^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}(E_{\gamma} \cdot E_{\gamma})\right)_{\gamma} \end{aligned}$$

donde $K_{S_{\mathcal{C}}}$ es un divisor canónico de $S_{\mathcal{C}}$. En particular, dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , si Z es el ciclo fundamental de la desingularización $\pi_{\mathcal{C}}$, entonces el polinomio de Hilbert-Samuel de la singularidad racional de superficie (S, P) es

$$(14) \quad p(x) = -\frac{1}{2}(Z \cdot Z)(x^2 - x) + x$$

y por tanto, la multiplicidad de (S, P) es $-Z \cdot Z$.

DEMOSTRACIÓN: La igualdad (13) se obtiene a partir de (11) sustituyendo $\ell(R/I)$ e (I, I) por las expresiones (6) y (9) respectivamente. Por otro lado, el corolario 3.5.3 afirma que el ciclo fundamental Z es el divisor de E_C^+ asociado al ideal maximal \mathfrak{m} . Puesto que el género de Z es cero (proposición 1.4.3), al sustituir Z por D en (13), obtenemos la expresión del polinomio de Hilbert-Samuel de (S, P) (ver 1.6.2). ■

4.2.6. Nota. Recordemos que, dada una singularidad racional de superficie (S, P) de multiplicidad $m \geq 2$, si $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de la desingularización minimal y Z es el ciclo fundamental de dicha desingularización, entonces, de las igualdades $m = -Z.Z$ y $p_a(Z) = 0$, se deduce que $-m \leq E_i.E_i \leq -2$ (ver corolario 1.6.3). En particular, si (S, P) es un punto doble racional, entonces $E_\gamma.E_\gamma = -2$ para todo $\gamma \in \Delta_m$.

Recordemos también que una singularidad racional de superficie (S, P) de multiplicidad m se puede sumergir en un germen de variedad lisa de dimensión $m + 1$, ya que en este caso $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = m + 1$ (ver corolario 1.6.4).

§3. Cardinal de un sistema minimal de generadores de un ideal completo.

A continuación calculamos el mínimo número de generadores $\mu(I)$ de un ideal completo \mathfrak{m} -primario I de R . De hecho, si C es una constelación con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_C}$ es inversible, Z es el ciclo fundamental del morfismo π_C y $D \in E_C^+$ es el divisor con soporte excepcional asociado a I , entonces $\mu(I) = -D.Z + 1$. En particular, y como sucede en el caso no singular, $\mu(I)$ depende sólo de los órdenes en el origen del cúmulo asociado a I .

4.3.1. Teorema. Sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de R , C una constelación con origen en P tal que $I\mathcal{O}_{S_C}$ es inversible, Z el ciclo fundamental del morfismo π_C y $D \in E_C^+$ el divisor con soporte excepcional asociado a I . Entonces el mínimo número de generadores $\mu(I)$ de I viene dado por

$$(15) \quad \mu(I) = \ell(I/\mathfrak{m}I) = -D.Z + 1$$

DEMOSTRACIÓN: Por el lema de Nakayama se tiene que, dados x_1, \dots, x_r elementos de I , $\{x_1, \dots, x_r\}$ es un sistema minimal de generadores de I si y sólo si $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ es una base del k -espacio vectorial $I/\mathfrak{m}I$,

y por tanto, $\mu(I) = \ell(I/\mathfrak{m}I)$. Aplicando ahora el teorema 4.1.4 a los ideales completos I y $\mathfrak{m}I$, se deduce que

$$(16) \quad \mu(I) = \ell(I/\mathfrak{m}I) = \ell(R/\mathfrak{m}I) - \ell(R/I) = -D.Z - \frac{1}{2}Z.(Z + K_{S_C})$$

donde K_{S_C} es un divisor canónico de S_C y, puesto que $p_a(Z) = 0$, se tiene que $Z.(Z + K_{S_C}) = -2$, con lo que queda probada la igualdad (15). ■

4.3.2. Proposición. Sea $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ un cúmulo de Cartier con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) y sea Z el ciclo fundamental del morfismo π_C . Entonces, manteniendo la notación del capítulo 2, $Z = \sum_i \rho_{1i} E_{1i}^*$ donde los ρ_{1i} son enteros positivos y el mínimo número de generadores del ideal I_K está dado por

$$(17) \quad \mu(I_K) = 1 + \sum_{ij} \nu_{1i} \rho_{1j} (E_{1i}^* . E_{1j}^*)$$

DEMOSTRACIÓN: El hecho de que $Z = \sum \rho_{1i} E_{1i}^*$ es consecuencia de que Z es el divisor de \mathbf{E}_C^+ correspondiente al ideal maximal de R , junto con la definición de los ρ_{1i} (igualdad (16) en la sección 4 del capítulo 2). La expresión de $\mu(I_K)$ en función de los ν_{1i} y ρ_{1i} se sigue de 4.3.1. ■

4.3.3 Corolario. ([Li2], corolario 3.2) Sea (S, P) un germen de superficie no singular y sea I un ideal completo \mathfrak{m} -primario de $R = \mathcal{O}_{S,P}$. Si ν_1 es la multiplicidad de I en P , entonces todo sistema minimal de generadores está formado por $\nu_1 + 1$ elementos.

DEMOSTRACIÓN: En este caso, $Z = E_1^*$ y por tanto $-D.Z = \nu_1$. ■

4.3.4. Corolario. Sea (S, P) un punto doble racional. Sea $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ un cúmulo de Cartier con origen en P e I_K el ideal completo definido por K . Entonces el mínimo número de generadores de I_K viene dado por

$$\begin{aligned} \mu(I_K) &= \nu_{11} + \nu_{12} + 1 && \text{si } (S, P) \text{ es de tipo } \mathbf{A}_n \text{ (} n \geq 2 \text{)} \\ \mu(I_K) &= 2\nu_1 + 1 && \text{si } (S, P) \text{ es de tipo } \mathbf{A}_1 \\ \mu(I_K) &= \nu_1 + 1 && \text{si } (S, P) \text{ es de tipo } \mathbf{D}_n \text{ (} n \geq 4 \text{), } \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7 \text{ o } \mathbf{E}_8 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Si (S, P) es de tipo \mathbf{A}_n ($n \geq 2$) el cúmulo K ha de tener como pesos en el origen un par (ν_{11}, ν_{12}) , ya que la explosión del punto P da lugar a dos componentes irreducibles del lugar excepcional (ver 3.8.1).

Además, también se sigue de 3.8.1 que el ciclo fundamental del morfismo π_C es $Z = E_{11}^* + E_{12}^*$ y que $E_{11}^*.E_{11}^* = E_{12}^*.E_{12}^* = -n/(n-1)$ y $E_{11}^*.E_{12}^* = 1/(n-1)$. Con esta información, aplicando la igualdad (17) se deduce que $\mu(I_K) = \nu_{11} + \nu_{12} + 1$. Análogamente, si (S, P) es de tipo A_1 , el cúmulo K tiene un solo peso ν_1 en el origen y $Z = E_1^*$, donde $E_1^*.E_1^* = -2$, con lo que se tiene que $\mu(I_K) = 2\nu_1 + 1$.

En los casos D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 y E_8 se sigue de 3.8.2, 3.8.3, 3.8.4 y 3.8.5 que el cúmulo K tiene un solo peso ν_1 en el origen y que $Z = 2E_1^*$ donde $E_1^*.E_1^* = -1/2$. Por tanto, aplicando la igualdad (17) se obtiene $\mu(I_K) = \nu_1 + 1$ y se concluye la prueba. ■

4.3.5. Ejemplo. En el ejemplo 3.7.12 consideramos la singularidad racional de superficie D_5 y la constelación minimal C_m y describimos explícitamente sistemas minimales de generadores de los ideales completos simples correspondientes a los elementos extremales $D_1, D_{21}, D_{22}, D_3, D_4$ de $E_{C_m}^+$. Por otra parte, de 3.6.5 se sigue que los pesos ν_1 en el origen de los respectivos cúmulos asociados a los anteriores divisores son 2, 4, 4, 2, 4 respectivamente. Por tanto, el corolario 4.3.4 afirma que $\mu(I_1) = \mu(I_3) = 3$ y $\mu(I_{21}) = \mu(I_{22}) = \mu(I_4) = 5$, como podemos comprobar en 3.7.12. ■

§4. Un algoritmo para calcular un sistema minimal de generadores.

En la proposición 3.4.1 vimos que, para cada cúmulo $K = (C, \underline{\nu})$ con origen en P , existe un único cúmulo de Cartier \overline{K} con soporte en C tal que el ideal I_K coincide con $I_{\overline{K}}$. Para construir \overline{K} a partir de K necesitábamos conocer los enteros $\{v_\gamma(I_K)\}_{\gamma \in \Delta_C}$, con lo que el cálculo explícito de \overline{K} se dificulta. En esta sección damos un algoritmo para calcular \overline{K} a partir de K , que resulta ser una generalización para singularidades racionales de superficie del principio de descarga ([EC], libro IV, capítulo II, sección 17; [Cs1], sección 4).

Aplicando el algoritmo anterior, mostramos un nuevo algoritmo que, dado un cúmulo K con origen en P , describe un sistema minimal de generadores del ideal completo I_K . Este resultado es una generalización del algoritmo expuesto por Casas en [Cs2] para el caso no singular.

4.4.1. Proposición. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) . Sean $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ y $D = \sum b_\gamma E_\gamma$ un divisor \mathbb{Q} -Cartier de $S_{\mathcal{C}}$ (es decir, $b_\gamma \in \mathbb{Q}$ para todo γ). Entonces, entre todos los divisores D' de $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$ tales que $D' \geq D$, existe uno mínimo \overline{D} . Además, podemos calcular explícitamente \overline{D} definiendo divisores $\{D_t\}_{t=1}^r$ tales que $D \leq D_1 < D_2 < \dots < D_r = \overline{D}$ de la siguiente manera:

- (i) $D_1 = \sum b_\gamma^1 E_\gamma$ donde b_γ^1 es el menor entero tal que $b_\gamma^1 \geq b_\gamma$.
- (ii) Si $D_t \in \mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$, entonces $r = t$ y $\overline{D} = D_t$. En otro caso, tomamos un $\gamma_t \in \Delta$ tal que $D_t \cdot E_{\gamma_t} > 0$ y definimos $D_{t+1} = D_t + E_{\gamma_t}$.

DEMOSTRACIÓN: La existencia de \overline{D} es consecuencia de la proposición 3.4.1 y los isomorfismos de la proposición 3.5.2. En efecto, si K es el cúmulo asociado al divisor \mathbb{Q} -Cartier D (por el cambio de base de $\{E_\gamma\}$ a $\{E_\gamma^*\}$) y \overline{K} es el único cúmulo de Cartier tal que $I_K = I_{\overline{K}}$, entonces \overline{D} es el divisor de $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$ asociado a \overline{K} .

Por último, si probamos que, para los divisores D_t construidos por recurrencia a partir de D mediante (i) y (ii), se tiene que $D_t \leq \overline{D}$, entonces el proceso ha de ser finito y el resultado quedará probado. Para $t = 1$ es claro que $D_1 \leq \overline{D}$. Supongamos que $D_t < \overline{D}$, entonces $D_{t+1} = D_t + E_{\gamma_t}$ donde $(\overline{D} - D_t) \cdot E_{\gamma_t} < 0$, y por tanto, el divisor efectivo $\overline{D} - D_t$ contiene a E_{γ_t} , es decir, $D_{t+1} \leq \overline{D}$. ■

4.4.2. Nota. Obsérvese que el algoritmo anterior es una generalización del algoritmo de Laufer que ya aparece en [G] para calcular el ciclo fundamental ([La], proposición 4.1).

4.4.3. Corolario. Sea $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ un cúmulo con origen en P . Sean $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ y $D = \sum \nu_\gamma E_\gamma^*$ el divisor \mathbb{Q} -Cartier de $S_{\mathcal{C}}$ asociado a K , y calculemos el divisor \overline{D} de $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}^+$ tal que $\overline{D} \geq D$ y mínimo con esta propiedad. Si $\overline{D} = \sum \overline{\nu}_\gamma E_\gamma^*$, entonces $\overline{K} = (\mathcal{C}, \{\overline{\nu}_\gamma\}_\gamma)$ es el único cúmulo de Cartier con soporte en \mathcal{C} tal que $I_K = I_{\overline{K}}$.

En particular, si $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ es un \mathbb{N} -cúmulo entonces podemos calcular explícitamente una sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$ de \mathbb{N} -cúmulos con soporte en \mathcal{C} tales que $K_0 = K$, $K_r = \overline{K}$ e $I_{K_t} = I_K$ de la siguiente forma: Sea $K_0 = K$ y, una vez definido $K_t = (\mathcal{C}, \{\nu_\gamma^t\}_\gamma)$, actuamos como sigue: Si existe $\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}}$ tal que el α -defecto de K_t es negativo y $E_\alpha = E_\alpha^* - \sum_\gamma m_{\alpha\gamma} E_\gamma^*$ es la expresión de E_α en función de la base $\{E_\gamma^*\}$, entonces definimos

$K_{t+1} = (\mathcal{C}, \{\nu_\gamma^{t+1}\}_\gamma)$ donde

$$(18) \quad \begin{cases} \nu_\alpha^{t+1} = \nu_\alpha^t + 1 \\ \nu_\gamma^{t+1} = \nu_\gamma^t - m_{\alpha\gamma} \quad \text{si } \gamma \neq \alpha \end{cases}$$

Si por el contrario, todos los defectos de K_t son no negativos, entonces $r = t$ y el proceso se termina. ■

4.4.4. Nota. Si (S, P) es no singular, \mathcal{C} una constelación con origen en P y $\{E_i\}_{i=1}^m$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$, entonces $E_i = E_i^* - \sum_{j \rightarrow i} E_j^*$, y por tanto, el algoritmo anterior es una aplicación reiterativa del principio de descarga ([EC], libro IV, capítulo II, sección 17; [Cs1], sección 4).

A continuación abordaremos el problema de encontrar explícitamente un sistema minimal de generadores del ideal completo I_K a partir del cúmulo K , generalizando así el algoritmo expuesto por Casas en [Cs2]. Comencemos con el siguiente resultado:

4.4.5. Proposición. Sean K y K' dos cúmulos de Cartier con origen en P tales que el ideal $I_{K'}$ esté contenido propiamente en I_K . Entonces existe una sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$ de cúmulos de Cartier tales que $K_0 = K$, $K_r = K'$, $I_{K_{t+1}} \subset I_{K_t}$ y $\ell(I_{K_t}/I_{K_{t+1}}) = 1$ para $0 \leq t < r$.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que, dados los cúmulos de Cartier K y K' con $I_{K'} \subset I_K$ (contención propia), existe un cúmulo de Cartier K_1 de manera que $I_{K'} \subset I_{K_1} \subset I_K$ y $\ell(I_K/I_{K_1}) = 1$.

Sean $K = (\mathcal{C}, \underline{\nu})$ y $K' = (\mathcal{C}, \underline{\nu}')$, es decir, podemos suponer que el soporte de K y de K' es la misma constelación $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ (basta con añadir ceros en los pesos de K y K' si es necesario). Puesto que $I_{K'} \subset I_K$, se tiene que $\nu'_\alpha > \nu_\alpha$ para algún $\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}}$ (ya que si $\nu'_\gamma \leq \nu_\gamma$ para todo γ , entonces $D_{K'} \leq D_K$, y por tanto, $I_K = I_{K'}$). Sea $\alpha = (i, j) \in \Delta_{\mathcal{C}}$ cumpliendo lo anterior con i mínimo y tomemos un punto Q de E_α^i (por tanto, en el primer entorno infinitesimal de P_i) tal que $Q \notin \mathcal{C}$, $Q \notin E_\gamma^i$ para $\gamma \neq \alpha$ y Q es un punto no singular del transformado estricto S_i de S . Consideremos ahora la constelación $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{Q\}$ y el cúmulo $K'' = (\mathcal{C}_1, \underline{\nu}'')$ donde $\nu''_\gamma = \nu_\gamma$ para $\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}$ y $\nu''_Q = 1$ (obsérvese que el punto Q induce una única componente irreducible E_Q del divisor excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_1}$, y por tanto, $\Delta_{\mathcal{C}_1}$ está formado por $\Delta_{\mathcal{C}}$ junto con el índice correspondiente a dicha componente). Finalmente, sea $K_1 = \overline{K''}$ el único cúmulo de Cartier con soporte en \mathcal{C}_1 tal que $I_K = I_{K''}$.

Es claro que $I_{K'} \subseteq I_{K_1} \subset I_K$ por la forma en que se ha construido K_1 . A continuación probaremos que $\ell(I_K/I_{K_1}) = 1$.

Sea $I = I_K$, $I_1 = I_{K_1}$, R_Q el anillo local del transformado estricto S_i de S en el punto Q y \mathfrak{m}_Q el ideal maximal de R_Q . Consideremos el homomorfismo de anillos $\pi^* : R \rightarrow R_Q$. Si $l = 0$ es una ecuación local de E_α^i en el punto Q (donde $l \in R_Q$) y $b_\alpha = v_\alpha(I)$, entonces, para todo $h \in I$, $\varphi(h) = \pi^*(h)/l^{b_\alpha}$ es un elemento de R_Q . Sea

$$\bar{\varphi} : I/I_1 \rightarrow R_Q/\mathfrak{m}_Q$$

el morfismo de k -espacios vectoriales definido por $\bar{\varphi}(h + I_1) = \varphi(h) + \mathfrak{m}_Q$. Es claro que $\bar{\varphi}$ está bien definido y es un isomorfismo de k -espacios vectoriales. Por tanto, tendremos

$$\ell(I/I_1) = \dim_k(I/I_1) = \dim_k(R_Q/\mathfrak{m}_Q) = 1. \quad \blacksquare$$

4.4.6. Nota. La demostración del resultado anterior es constructiva. De hecho, en dicha demostración damos un algoritmo tal que, dados dos cúmulos de Cartier K y K' con origen en P e $I_{K'} \subset I_K$, calcula una sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$ de cúmulos de Cartier tales que

$$I_{K'} = I_{K_r} \subset I_{K_{r-1}} \subset \cdots \subset I_{K_1} \subset I_{K_0} = I_K$$

y $\ell(I_{K_t}/I_{K_{t+1}}) = 1$ para todo t . Observemos que la solución al problema (es decir, la sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$) no es única, sino que existen infinitas soluciones.

No conocemos una demostración equivalente de este hecho usando divisores con soporte excepcional en vez de cúmulos. Nótese que la cadena de cúmulos de Cartier que pasa de K a K' en la demostración anterior no está formada por cúmulos con soporte en la misma constelación \mathcal{C} que hace inversible a I_K y a $I_{K'}$ simultáneamente. Sin embargo, podemos traducir la construcción anterior por el diccionario expresado en capítulos precedentes al contexto de divisores con soporte excepcional definidos por ideales completos, obteniendo el siguiente corolario.

4.4.7. Corolario. Sea \mathcal{C} una constelación con origen en P y sean D y D' dos divisores de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ tales que $D < D'$. Entonces existe una constelación $\mathcal{C}' \geq \mathcal{C}$ con origen en P y una sucesión $\{D_t\}_{t=0}^r$ de divisores de $\mathbf{E}_{\mathcal{C}'}^+$, tales que D_0 (respectivamente D_r) es el transformado total del divisor D (respectivamente D') por el morfismo $S_{\mathcal{C}'}$ \rightarrow $S_{\mathcal{C}}$ y, para $0 \leq t < r$, se tiene $D_t < D_{t+1}$ y $\chi(\mathcal{O}_{D_{t+1}}) - \chi(\mathcal{O}_{D_t}) = 1$. \blacksquare

4.4.8. Teorema. Sea K un cúmulo de Cartier con origen en el punto P de la singularidad racional de superficie (S, P) y sea $I = I_K$ el ideal completo \mathfrak{m} -primario de $R = \mathcal{O}_{S, P}$ asociado a K . Consideremos el cúmulo de Cartier K' asociado al ideal $\mathfrak{m}I$ y construyamos una sucesión $\{K_t\}_{t=0}^r$ de cúmulos de Cartier tales que $K_0 = K$, $K_r = K'$, $I_{K_{t+1}} \subset I_{K_t}$ y $\ell(I_{K_t}/I_{K_{t+1}}) = 1$ para $0 \leq t < r$ de la siguiente manera:

(i) $K_0 = K$

(ii) Tomemos una constelación \mathcal{C}_t que haga inversible a I_{K_t} y a $I_{K'}$ simultáneamente y consideremos $K_t = (\mathcal{C}_t, \underline{\nu}^t)$ y $K' = (\mathcal{C}_t, \underline{\nu}')$ como cúmulos con soporte en \mathcal{C}_t . Si $K_t = K'$, sea $r = t$ y el proceso termina. Si $K_t \neq K'$, sea $\alpha = (i, j) \in \Delta_{\mathcal{C}_t}$ con i mínimo tal que $\nu'_\alpha > \nu_\alpha^t$ y tomemos un punto $Q_t \in E_\alpha^i$ tal que $Q_t \notin \mathcal{C}_t$, $Q_t \notin E_\gamma^i$ para $\gamma \neq \alpha$ y Q_t es un punto no singular del transformado estricto S_i de S . Sea $\mathcal{C}_t'' = \mathcal{C}_t \cup \{Q_t\}$ y consideremos el IN-cúmulo $K'' = (\mathcal{C}_t'', \underline{\nu}'')$, donde $\nu''_\gamma = \nu_\gamma$ para $\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}_t}$ y $\nu''_{Q_t} = 1$. Apliquemos el algoritmo 4.4.3 a K'' y sea K_{t+1} el cúmulo de Cartier (con soporte en \mathcal{C}_t'') obtenido.

Si, para $0 \leq t < r$, tomamos $h_t \in I_{K_t} - I_{K_{t+1}}$, entonces $\{h_t\}_{t=0}^{r-1}$ es un sistema minimal de generadores de I . ■

4.4.9. Nota. Siguiendo los resultados del capítulo 3, los generadores $\{h_t\}_{t=0}^{r-1}$ se pueden dar de una manera geométrica, es decir, en términos del comportamiento de las ramas de las curvas que definen dichos generadores. En efecto, para $0 \leq t < r$, fijemos la constelación \mathcal{C}_t soporte del cúmulo de Cartier K_t y calculemos los defectos $\{d_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_t}$ de K_t (recordemos que por 3.1.3 se tiene $\underline{d}^t = -M_t \Lambda_t \underline{\nu}^t$, donde M_t y Λ_t son matrices de proximidad y de intersección asociadas a \mathcal{C}_t). Para cada $\gamma \in \Delta_t$, tomemos d_γ curvas algebroides irreducibles en el cierre de Hensel $S_{\mathcal{C}_t}^h$, transversales a E_γ , que no intersequen a E_α para $\alpha \neq \gamma$ y que no pasen por el punto Q_t definido en (ii) de 4.4.8, y expresemos simbólicamente esta unión de curvas por $d_\gamma \mathcal{E}_\gamma$ (como en la demostración de 3.2.1). Sea $h : S_{\mathcal{C}_t}^h \rightarrow S_{\mathcal{C}_t}$ el morfismo definido por el cierre de Hensel y consideremos el divisor de $S_{\mathcal{C}_t}$ dado por

$$D = h_* \left(\sum_{\gamma \in \Delta_t} d_\gamma \mathcal{E}_\gamma \right) + D_{K_t}$$

donde D_{K_t} es el divisor con soporte excepcional asociado al cúmulo de Cartier K_t . Entonces, para todo $\gamma \in \Delta_t$ se tiene $D \cdot E_\gamma = d_\gamma^t - D_{K_t} \cdot E_\gamma = 0$, y por tanto, la proposición 1.6.1 garantiza la existencia de un elemento h_t de R tal que $(h_t)^* = D$. Por la forma en que se han construido las curvas algebroides \mathcal{E}_γ , se tiene que $h_t \in I_{K_t} - I_{K_{t+1}}$.

4.4.10. Ejemplo Consideremos de nuevo la singularidad racional de superficie (S, P) con singularidad D_5 definida en 2.2.7 y sea K el cúmulo de Cartier definido en 2.7.4 con soporte en la constelación minimal $\mathcal{C}_m = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ y cuyo árbol ponderado está representado en fig. 4.1. Para construir un sistema minimal de generadores del ideal I_K siguiendo el método anterior, consideremos el cúmulo de Cartier K' asociado al ideal $\mathfrak{m}I_K$ con soporte en \mathcal{C}_m y cuyo árbol ponderado está dado en fig. 4.2.

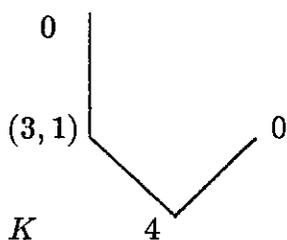


fig. 4.1.

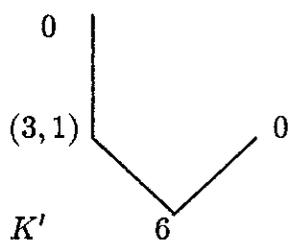


fig. 4.2.

Comencemos con la construcción del cúmulo K_1 . Observemos que $\nu'_1 = 6 > 4 = \nu_1$ y tomemos un punto Q_0 en el primer entorno infinitesimal de P_1 tal que $Q_0 \notin \mathcal{C}_m$. Sea K''_1 el \mathbb{N} -cúmulo con soporte en $\mathcal{C}_m \cup \{Q_0\}$ cuyo árbol ponderado está dado en fig. 4.3, donde representamos con una línea de trazos la línea que corresponde al punto Q_0 , es decir, la que no corresponde a ningún punto de \mathcal{C}_m . Aplicando reiteradamente el algoritmo 4.4.3 (o más concretamente la proposición 4.4.1, ya que en este caso es más cómodo trabajar con divisores), se obtiene el único cúmulo de Cartier K_1 con soporte en $\mathcal{C}_m \cup \{Q_0\}$ tal que $I_{K_1} = I_{K''_1}$. De hecho, el peso de K_1 en Q_0 es 0 y podemos considerar K_1 como un cúmulo con soporte en \mathcal{C}_m cuyo árbol ponderado está representado en fig. 4.4.

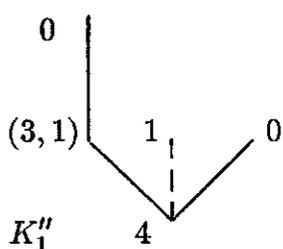


fig. 4.3.

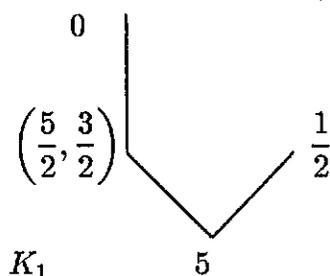


fig. 4.4.

Ahora, teniendo en cuenta que el anillo local R de S en P es el localizado de $k[x, y, z]/(x^4 + xy^2 + z^2)$ en el origen (ver 2.2.7), es claro que el elemento h_0 de R dado por $2x^3 + 2ixz + y^2$ pertenece a $I_K - I_{K_1}$.

Análogamente, para construir K_2 , observemos que $\nu'_1 = 6 > 5 = \nu_1^1$ y tomemos un punto Q_1 con las mismas propiedades que Q_0 (de hecho, puede ser $Q_1 = Q_0$). Sea K_2'' el IN-cúmulo con soporte en $\mathcal{C}_m \cup \{Q_1\}$ y cuyo árbol ponderado viene dado en fig. 4.5 (de nuevo la línea de trazos corresponde al punto Q_1) y sea K_2 el cúmulo de Cartier obtenido tras aplicar 4.4.3. De nuevo podemos tomar como soporte de K_2 la constelación \mathcal{C}_m y, de esta forma, su árbol ponderado está dado en fig. 4.6.

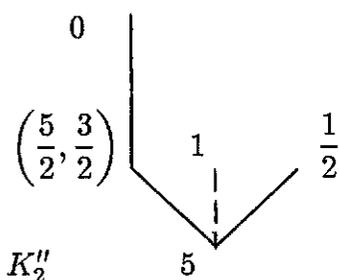


fig. 4.5.

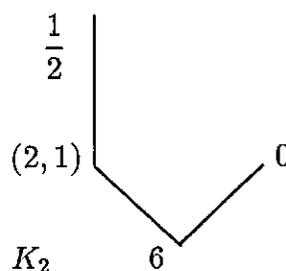


fig. 4.6.

El elemento h_1 de R dado por $y(x^2 + iz)$ pertenece a I_{K_1} y no pertenece a I_{K_2} .

Para construir K_3 a partir de K_2 , notemos que $\nu'_{21} = 3 > 2 = \nu_{21}^2$ y tomemos un punto Q_2 en el primer entorno infinitesimal de P_2 , que pertenezca a E_{21}^2 y tal que $Q_2 \notin E_\gamma^2$ para $\gamma \neq (2, 1)$ (y por tanto $Q_2 \neq P_4$). Sea K_3'' el cúmulo con soporte en $\mathcal{C}_m \cup \{Q_2\}$ cuyo árbol ponderado está representado mediante

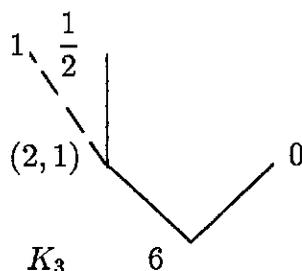


fig. 4.7.

donde la línea de trazos corresponde al punto Q_2 . Observemos que K_3'' es un cúmulo de Cartier y sea $K_3 = K_3''$. Es claro que el elemento h_2 de R dado por $x^2(x^2 + iz)$ pertenece a I_{K_2} y no pertenece a I_{K_3} .

De nuevo, para construir el cúmulo de Cartier K_4 a partir de K_3 , observamos que $\nu'_{21} = 3 > 2 = \nu_{21}^3$ y tomamos un punto Q_3 con las mismas propiedades que Q_2 pero distinto de Q_2 . Sea K_4'' el cúmulo con soporte en

$\mathcal{C}_m \cup \{Q_2, Q_3\}$ cuyo árbol ponderado está dado por

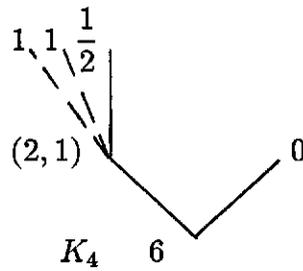


fig. 4.8.

donde las líneas de trazos corresponden a los puntos que no están en la constelación \mathcal{C}_m . Se tiene que K_4'' es un cúmulo de Cartier, por tanto, sea $K_4 = K_4''$. Observemos también que el elemento h_3 de R dado por yx^3 pertenece a I_{K_3} y no pertenece a I_{K_4} .

Finalmente, al aplicar el proceso anterior al cúmulo K_4 , obtenemos un cúmulo de Cartier K_5 que coincide con K' (vistos como cúmulos con soporte en \mathcal{C}_m). De hecho, no es necesario calcular K_5 , sino que basta con darse cuenta de que $\mu(I_K) = \nu_1 + 1 = 5$ (ver 4.3.4). El elemento h_4 de R dado por x^5 pertenece a $I_{K_4} - I_{K'}$, y por tanto, un sistema minimal de generadores de I_K es $\{2x^3 + 2ixz + y^2, y(x^2 + iz), x^2(x^2 + iz), yx^3, x^5\}$ (ver ejemplo 3.7.12). El morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$ obtenido al explotar la constelación $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m \cup \{Q_2, Q_3\}$ desingulariza las curvas definidas por cada uno de los elementos del sistema de generadores anterior y las representaciones de los divisores definidos por cada elemento h_i en el grafo dual de $\pi_{\mathcal{C}}$ son respectivamente

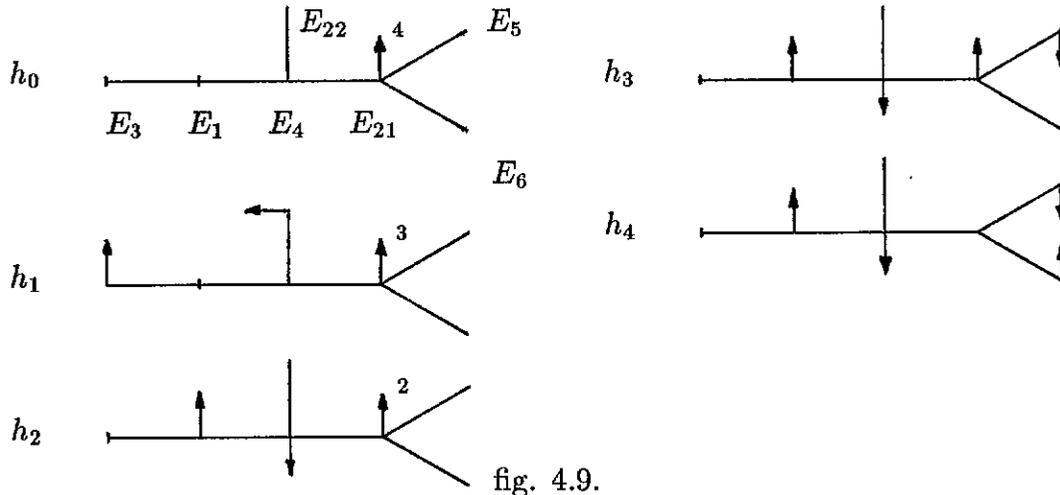


fig. 4.9.

Es decir, con la notación de 4.4.9, los transformados estrictos por $\pi_{\mathcal{C}}$ de los divisores de Cartier definidos por h_0, h_1, h_2, h_3 y h_4 son de la forma $h_*(4\mathcal{E}_{21})$, $h_*(3\mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_3)$, $h_*(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_4)$, $h_*(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5)$ y $h_*(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_5 + \mathcal{E}_6)$ respectivamente. ■

II. Grafo dual, forma de intersección y semigrupo de ideales completos de una singularidad racional de superficie.

En la sección 5 del capítulo 2 describimos los puntos dobles racionales mediante el uso de los grafos duales asociados a su desingularización minimal. También observamos que el grafo dual Γ_m asociado a la desingularización minimal de un punto doble racional contiene toda la información del grafo dual ponderado Γ_m^w , y por tanto, podemos decir que dos puntos dobles racionales son del mismo tipo si y sólo si los respectivos grafos duales ponderados asociados a sus desingularizaciones minimales son iguales. De hecho, para puntos dobles racionales definidos sobre el cuerpo \mathbb{C} , ser del mismo tipo significa que se corresponden por un isomorfismo analítico.

El objeto de este párrafo es dar algunas caracterizaciones del hecho de que dos singularidades racionales de superficie tengan el mismo grafo dual ponderado asociado a su desingularización minimal, es decir, que sean "del mismo tipo". Así, en la sección 5 expresamos el tipo de una singularidad racional de superficie en función de la forma de intersección definida en el grupo de ciclos excepcionales de la desingularización minimal, observando en particular consecuencias como el hecho conocido de que dos singularidades racionales de superficie del mismo tipo han de tener la misma multiplicidad.

A continuación, en la sección 6 expresamos el tipo de una singularidad racional de superficie en función del semigrupo E_m^+ asociado, o más concretamente, en función del cono simplicial de \mathbb{Z}^n definido por E_m^+ (donde n es el número de componentes irreducibles del lugar excepcional de la desingularización minimal π_m), obteniendo como consecuencia que, si dos singularidades racionales de superficie son del mismo tipo, entonces los respectivos semigrupos de ideales completos \mathfrak{m} -primarios asociados son isomorfos.

Finalmente, en la sección 7 establecemos la equivalencia entre el tipo de una singularidad racional de superficie (S, P) y las matrices de proximidad e intersección asociadas a su desingularización minimal. Más aún, dada una constelación \mathcal{C} con origen en P , describimos un algoritmo para calcular la matriz de proximidad $M_{\mathcal{C}}$ y la matriz de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}}$ a partir del grafo dual ponderado del morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$. El recíproco, es decir, el conocimiento del grafo dual ponderado de $\pi_{\mathcal{C}}$ a partir de las matrices $M_{\mathcal{C}}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}}$ se sigue de forma inmediata de la definición de dichas matrices (capítulo 2).

§5. Tipo de una singularidad racional en función de la forma de intersección.

4.5.1. Definición Sean (S, P) y (S', P') dos singularidades racionales de superficie. Sean $\pi_m : X \rightarrow S$ y $\pi'_m : X' \rightarrow S'$ sus respectivos morfismos de desingularización minimal (donde por desingularización minimal de un germen de superficie no singular entendemos el morfismo identidad) y Γ_m^ω y $\Gamma'_m{}^\omega$ los grafos duales ponderados asociados a π_m y π'_m respectivamente (siendo $\Gamma_m^\omega = \emptyset$ si (S, P) es no singular). Entonces diremos que (S, P) y (S', P') son del mismo tipo si y sólo si $\Gamma_m^\omega = \Gamma'_m{}^\omega$.

4.5.2. Definición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y consideremos una constelación \mathcal{C}_m minimal de (S, P) . Sea $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}$ el grupo de divisores de $S_{\mathcal{C}_m}$ con soporte excepcional. Entonces cada enumeración ω del conjunto de componentes irreducibles $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_m}$ induce un isomorfismo de grupos

$$(19) \quad \varphi_\omega : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

donde n es el cardinal del conjunto de índices Δ_m . El morfismo φ_ω está definido por la propiedad de que la base estándar de \mathbb{Z}^n es la imagen por φ_ω de la base $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ de \mathbf{E} y se conserva el orden. De esta manera, la forma de intersección definida en \mathbf{E} da lugar a una aplicación bilineal

$$(20) \quad \psi_\omega : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ahora bien, en el conjunto de formas bilineales $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ actúa el grupo de permutaciones \mathcal{S}_n reordenando los elementos de la base estándar de \mathbb{Z}^n . Es claro que la \mathcal{S}_n -órbita Ψ_ω de ψ_ω no depende de la enumeración ω de Δ_m y, puesto que dos constelaciones minimales son equivalentes (ver 2.1.2), se tiene que la órbita Ψ de ψ_ω sólo depende de la singularidad (S, P) . Llamaremos a Ψ la \mathcal{S}_n -órbita de aplicación bilineal asociada a (S, P) .

4.5.3. Lema. En las condiciones de 4.5.2, la siguiente información es equivalente:

- (i) El grafo dual ponderado Γ_m^ω asociado a la desingularización minimal de (S, P) .
- (ii) La \mathcal{S}_n -órbita Ψ de aplicación bilineal asociada a (S, P) .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que conocemos el grafo dual ponderado Γ_m^ω , entonces los pesos de Γ_m^ω son los números de intersección $E_\alpha \cdot E_\alpha$. Por otro lado, puesto que Γ_m^ω está definido por la desingularización minimal, para $\alpha \neq \beta$, $E_\alpha \cdot E_\beta$ toma el valor 1 si el vértice de Γ_m^ω correspondiente a E_α

está directamente unido al vértice correspondiente a E_β y $E_\alpha.E_\beta = 0$ en otro caso (ver proposición 1.3.3). Por tanto, del conocimiento de Γ_m^ω se deduce la \mathcal{S}_n -órbita Ψ .

Recíprocamente, supongamos que conocemos la \mathcal{S}_n -órbita Ψ y sea $\psi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ un representante de Ψ . Consideremos la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^n$ de \mathbb{Z}^n y definamos un grafo Γ de la siguiente manera: Γ está formado por n vértices, cada uno de los cuales corresponde a un elemento de la base $\{e_i\}$ y, para $i \neq j$, los vértices correspondientes a e_i y e_j están unidos si y sólo si $\psi(e_i, e_j) = 1$. Si además damos peso $\psi(e_i, e_i)$ al vértice de Γ correspondiente a e_i , entonces es claro que el grafo ponderado así definido es el grafo dual ponderado Γ_m^ω asociado a la desingularización minimal de (S, P) . ■

En estas condiciones, podemos caracterizar el tipo de las singularidades racionales de superficie en función de la \mathcal{S}_n -órbita de aplicación bilineal definida por la forma de intersección.

4.5.4. Corolario. Sean (S, P) y (S', P') dos singularidades racionales de superficie. Sean $\pi_m : X \rightarrow S$ y $\pi'_m : X' \rightarrow S'$ los respectivos morfismos de desingularización minimal y $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$, $\{E'_\gamma\}_{\gamma \in \Delta'_m}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_m y π'_m respectivamente. Entonces (S, P) y (S', P') son del mismo tipo si y sólo si Δ_m y Δ'_m tienen el mismo cardinal, es decir, podemos suponer que $\Delta_m = \Delta'_m$ y además existen enumeraciones de $\{E_\gamma\}$ y de $\{E'_\gamma\}$ de forma que $E_\alpha.E_\beta = E'_\alpha.E'_\beta$ para $\alpha, \beta \in \Delta_m$.

Como consecuencia, obtenemos el hecho conocido de que dos singularidades racionales del mismo tipo han de tener la misma multiplicidad.

4.5.5. Corolario. Sean (S, P) y (S', P') dos singularidades racionales de superficie de multiplicidades m y m' respectivamente. Si (S, P) y (S', P') son del mismo tipo, entonces $m = m'$.

DEMOSTRACIÓN: Con la notación de 4.5.4, sean $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ y $\{E'_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de las desingularizaciones minimales de (S, P) y (S', P') respectivamente y fijemos enumeraciones en $\{E_\gamma\}$ y $\{E'_\gamma\}$ de forma que $E_\alpha.E_\beta = E'_\alpha.E'_\beta$ para $\alpha, \beta \in \Delta$. En estas condiciones, es claro que, si $Z = \sum n_\alpha E_\alpha$ es el ciclo fundamental de la desingularización minimal de (S, P) , entonces $Z' = \sum n_\alpha E'_\alpha$ es el ciclo fundamental de la desingularización minimal de (S', P') , y por tanto, $m = -Z.Z = -Z'.Z' = m'$ (ver proposición 1.6.2). ■

4.5.6. Nota. Como caso particular, para $m = 1$ observamos que obviamente dos gérmenes cualesquiera de superficie no singulares son del

mismo tipo. Para $m = 2$, mediante la descripción efectuada explícitamente en la sección 5 del capítulo 2, se sabe que los posibles tipos de puntos dobles racionales son A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 y E_8 .

§6. Tipo de una singularidad racional en función del cono simplicial E_m^+ de la desingularización minimal.

En esta sección expresamos el tipo de una singularidad racional de superficie en función del cono simplicial E_m^+ asociado a la desingularización minimal, o más concretamente, en función de la S_n -órbita que este cono define.

4.6.1. Definición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y consideremos una constelación C_m minimal de (S, P) y una enumeración ω del conjunto de componentes irreducibles del lugar excepcional de π_{C_m} . Sea $E = E_{C_m}$ el grupo de divisores con soporte excepcional y $\varphi_\omega : E \rightarrow \mathbb{Z}^n$ el isomorfismo de \mathbb{Z} -espacios vectoriales definido en (19) por la enumeración ω .

El semigrupo $E^+ = E_{C_m}^+$ formado por los divisores $D \in E$, $D \neq 0$ tal que $D.E_\gamma \leq 0$ para toda componente irreducible E_γ del lugar excepcional de π_{C_m} no depende de la constelación minimal C_m (pues dos constelaciones minimales son equivalentes) y está contenido propiamente en el grupo E . De hecho, en 3.6.4 y 3.6.6 vimos que E^+ es un cono simplicial del \mathbb{Z} -módulo libre E . Por tanto, la imagen σ_ω de E por φ_ω es un cono simplicial de \mathbb{Z}^n . Además, no sólo σ_ω es un cono simplicial, sino que su cono dual σ_ω^\vee también es simplicial (ver 3.6.4).

De nuevo, en el conjunto de conos simpliciales de \mathbb{Z}^n actúa el grupo de permutaciones S_n reordenando los elementos de la base estándar de \mathbb{Z}^n . La órbita Σ_ω de σ_ω por esta acción no depende de la enumeración de Δ_m , y por tanto, la S_n -órbita Σ del cono simplicial σ_m sólo depende de la singularidad (S, P) . La llamaremos *S_n -órbita del cono simplicial asociada a (S, P)* .

4.6.2. Proposición. En las condiciones de 4.6.1, la siguiente información es equivalente:

- (i) El grafo dual ponderado Γ_m^ω asociado a la desingularización minimal de (S, P) .
- (ii) La S_n -órbita Ψ de aplicación bilineal asociada a (S, P) .
- (iii) La S_n -órbita Σ de cono simplicial asociada a (S, P) .

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia (i) \iff (ii) es el lema 4.5.3. Probemos ahora (ii) \iff (iii). Supongamos que conocemos la S_n -órbita Ψ de aplicación

bilineal asociada a (S, P) . Sea $\psi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ un representante y H la matriz $n \times n$ de números enteros definida por ψ en la base estándar de \mathbb{Z}^n . La proposición 1.4.1 afirma que H es una matriz simétrica definida negativa. Consideremos el cono σ de \mathbb{Z}^n dado por

$$(21) \quad \sigma = \{ \underline{v} \in \mathbb{Z}^n \mid H\underline{v} \leq \underline{0} \}$$

Entonces es claro que σ es un cono simplicial (teniendo en cuenta la proposición 3.6.6, ya que, módulo permutación, H es la matriz de intersección $(E_\alpha \cdot E_\beta)$) y la \mathcal{S}_n -órbita del cono σ es la órbita Σ asociada a (S, P) .

Recíprocamente, supongamos que conocemos la \mathcal{S}_n -órbita Σ de cono simplicial asociada a (S, P) y sea σ un representante. Entonces, tanto el cono σ de \mathbb{Z}^n como su cono dual σ^\vee son conos simpliciales. Consideremos σ^\vee como cono de \mathbb{Z}^n y sean $\underline{h}_i \in \mathbb{Z}^n$ ($1 \leq i \leq n$) los elementos extremales de σ^\vee (ver lema 3.6.2). Si H es la $(n \times n)$ -matriz cuyas filas son $-\underline{h}_i$ ($1 \leq i \leq n$), entonces σ está definido por (21). Sin embargo, H puede no ser una matriz simétrica, de hecho hay tantas posibles matrices H satisfaciendo (21) como permutaciones del conjunto $\{\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n\}$ (pues si H es una de tales matrices, las otras se obtienen permutando las filas de H).

Ahora bien, puesto que H está definida a partir de la \mathcal{S}_n -órbita σ asociada a (S, P) , hay una única permutación de las filas de H tal que la matriz H' así obtenida satisface que $h'_{ii} \leq 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $h'_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. Sea $\psi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación bilineal definida negativa inducida por la matriz H' (obsérvese que H' ha de ser una matriz simétrica definida negativa), entonces la \mathcal{S}_n -órbita de aplicación bilineal ψ es la órbita Ψ asociada a (S, P) . ■

4.6.3. Corolario. Sean (S, P) y (S', P') dos singularidades racionales de superficie. Sean $\pi_m : X \rightarrow S$ y $\pi'_m : X' \rightarrow S'$ los respectivos morfismos de desingularización minimal, $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m}$ y $\{E'_\gamma\}_{\gamma \in \Delta'_m}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_m y π'_m , y Γ_m^ω y Γ'^ω_m los grafos duales ponderados de π_m y π'_m respectivamente. Entonces, son condiciones equivalentes:

- (i) (S, P) y (S', P') son singularidades racionales de superficie del mismo tipo, es decir, $\Gamma_m^\omega = \Gamma'^\omega_m$.
- (ii) Δ_m y Δ'_m tienen el mismo cardinal, es decir, podemos suponer que $\Delta_m = \Delta'_m$ y además existen enumeraciones de $\{E_\gamma\}$ y de $\{E'_\gamma\}$ tales que $E_\alpha \cdot E_\beta = E'_\alpha \cdot E'_\beta$ para $\alpha, \beta \in \Delta_m$.
- (iii) Δ_m y Δ'_m tienen el mismo cardinal n y existen enumeraciones ω y ω' de $\{E_\gamma\}$ y de $\{E'_\gamma\}$ tales que el cono σ_ω coincide con $\sigma_{\omega'}$ como conos de \mathbb{Z}^n .

4.6.4. Teorema. Sean (S, P) y (S', P') dos singularidades racionales de superficie y sean \mathbf{I}^* y \mathbf{J}^* los semigrupos de ideales completos \mathfrak{m} -primarios de (S, P) y (S', P') respectivamente. Si (S, P) y (S', P') son del mismo tipo, entonces los semigrupos \mathbf{I}^* y \mathbf{J}^* son isomorfos.

DEMOSTRACIÓN: El semigrupo \mathbf{I}^* (respectivamente \mathbf{J}^*) es el límite directo de los semigrupos $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ cuando \mathcal{C} recorre el conjunto de constelaciones con origen en P (respectivamente P') (ver nota 3.5.5) y además, para \mathcal{C} fija, los semigrupos $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ y $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+$ son naturalmente isomorfos. Por tanto, fijas dos constelaciones \mathcal{C}_m y \mathcal{C}'_m minimales de (S, P) y (S', P') respectivamente, si vemos que, para cada constelación \mathcal{C} con origen en P tal que $\mathcal{C} \geq \mathcal{C}_m$, existe una constelación bien definida \mathcal{C}' con origen en P' y un morfismo de semigrupos $\xi_{\mathcal{C}} : \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{C}'}^+$, de manera que la sucesión de morfismos $\{\xi_{\mathcal{C}}\}$ es compatible con las estructuras de sistema directo, entonces quedará definido un morfismo $\xi : \mathbf{I}^* \rightarrow \mathbf{J}^*$.

El corolario anterior asegura la existencia de un isomorfismo $\xi_{\mathcal{C}_m} : \mathbf{E}_{\mathcal{C}_m}^+ \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{C}'_m}^+$. De hecho, si $\{E_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta_m}$ y $\{E'_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta'_m}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_m y π'_m , podemos suponer que $\Delta_m = \Delta'_m$ y que $E_{\alpha} \cdot E_{\beta} = E'_{\alpha} \cdot E'_{\beta}$ para $\alpha, \beta \in \Delta_m$. Definamos una correspondencia biyectiva $b : \cup_{\gamma} E_{\gamma} \rightarrow \cup_{\gamma} E'_{\gamma}$ de manera que $b(E_{\gamma}) = E'_{\gamma}$, con lo que se tendrá que $b(E_{\alpha} \cap E_{\beta}) = E'_{\alpha} \cap E'_{\beta}$. Extendamos de forma recursiva dicha correspondencia al conjunto de puntos infinitamente próximos a P que no están en \mathcal{C}_m , de la siguiente manera: Sea $r > 0$ y supongamos que hemos definido una biyección b entre el conjunto de puntos que, para $i \leq r$, pertenecen al i -ésimo entorno infinitesimal de algún punto de \mathcal{C}_m y no pertenecen a \mathcal{C}_m y el conjunto de puntos que, para $i \leq r$, pertenecen al i -ésimo entorno infinitesimal de algún punto de \mathcal{C}'_m y no pertenecen a \mathcal{C}'_m , con la propiedad que si Q es próximo a R entonces $b(Q)$ es próximo a $b(R)$. Sea Q un punto del r -ésimo entorno infinitesimal de algún punto de \mathcal{C}_m , sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m \cup \{Q_1, \dots, Q_r = Q\}$ ($\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_m \cup \{Q'_1 = b(Q_1), \dots, Q'_r = b(Q)\}$ respectivamente) la constelación minimal que contiene a \mathcal{C}_m y a Q (respectivamente a \mathcal{C}'_m y a $b(Q)$) y sean $\{F_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta_m} \cup \{F_i\}_{i=1}^r$ (respectivamente $\{F'_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta_m} \cup \{F'_i\}_{i=1}^r$) las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ (respectivamente $\pi_{\mathcal{C}'}$). Entonces, por hipótesis de recurrencia, se tiene que, para $\alpha \in \Delta_m \cup \{1, \dots, r-1\}$, $Q \in F_{\alpha}$ si y sólo si $b(Q) \in F'_{\alpha}$, y por tanto, podemos extender b mediante una correspondencia biyectiva entre F_r y F'_r de manera que si $F_{\alpha} \cap F_r \neq \emptyset$ entonces $b(F_{\alpha} \cap F_r) = F'_{\alpha} \cap F'_r$. Así pues, hemos definido una correspondencia biunívoca b entre el conjunto de puntos infinitamente próximos a P que no están en \mathcal{C}_m y el conjunto de puntos infinitamente próximos a P' que no están en \mathcal{C}'_m que respeta las relaciones de proximidad,

es decir, si Q es próximo a R entonces $b(Q)$ es próximo a $b(R)$.

Tomemos ahora una constelación $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m \cup \{P_i\}_{i=1}^r$ con origen en P y sea $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_m \cup \{b(P_i)\}_{i=1}^r$ la correspondiente constelación con origen en P' . Sean $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m} \cup \{F_i\}_{i=1}^r$ (respectivamente $\{F'_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_m} \cup \{F'_i\}_{i=1}^r$) las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$ (respectivamente $\pi_{\mathcal{C}'}$), donde F_γ (resp. F'_γ) es el transformado estricto de E_γ (resp. E'_γ) y F_i (resp. F'_i) es el transformado estricto del divisor excepcional que define la explosión en P_i (resp. en $b(P_i)$). Entonces se tiene que $F_\alpha \cdot F_\beta = F'_\alpha \cdot F'_\beta$ para $\alpha, \beta \in \Delta_m \cup \{1, \dots, r\}$. En efecto, esto se debe a la forma en que está construida la biyección b , ya que, cuando \mathcal{C} es la constelación minimal \mathcal{C}_m , la propiedad anterior se satisface y el caso general se deduce del anterior junto con el hecho de que b respeta las relaciones de proximidad. En esta situación, consideremos el morfismo de semigrupos $\xi_{\mathcal{C}} : \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^+ \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{C}'}^+$ definido por $F_\alpha \mapsto F'_\alpha$ (que es claramente un isomorfismo).

De la construcción anterior se sigue que, para dos constelaciones $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ con origen en P , la restricción de $\xi_{\mathcal{C}_2}$ a $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_1}^+$ coincide con $\xi_{\mathcal{C}_1}$ (donde por restricción de $\xi_{\mathcal{C}_2}$ a $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_1}^+$ entendemos la composición de $\xi_{\mathcal{C}_2}$ con la inclusión $\mathbf{E}_{\mathcal{C}_1}^+ \subset \mathbf{E}_{\mathcal{C}_2}^+$ definida en 3.5.5). Es decir, la sucesión de morfismos $\{\xi_{\mathcal{C}}\}$ es compatible con las estructuras de sistema directo, y por tanto, hemos definido un morfismo de semigrupos $\xi : \mathbf{I}^* \rightarrow \mathbf{J}^*$. De manera análoga se define un morfismo $\zeta : \mathbf{J}^* \rightarrow \mathbf{I}^*$ que obviamente es el inverso de ξ (ya que b es una correspondencia biyectiva), con lo cual el resultado queda probado. ■

§7. Tipo de una singularidad racional y matriz de proximidad.

En esta sección describimos cómo obtener la matriz de proximidad asociada a la constelación minimal de una singularidad racional de superficie a partir del grafo dual ponderados de su desingularización minimal. De hecho, dada una constelación \mathcal{C} con origen en el punto P de la singularidad racional (S, P) ,

si $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\Delta_{\mathcal{C}}$, entonces daremos un algoritmo para calcular las matrices de proximidad $M_{\mathcal{C}}$ y de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}}$ respecto a ω a partir de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$.

4.7.1. Lema. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ una constelación con origen en P (tal que la superficie $S_{\mathcal{C}}$ es no singular) y $\Delta = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq s_i\}$ el conjunto de

índices de las componentes irreducibles del lugar excepcional del morfismo π_C . Entonces, si Z es el ciclo fundamental de π_C , se tiene que

$$(22) \quad \begin{cases} Z.E_{ij} = 0 & \text{si } i \neq 1, 1 \leq j \leq s_i \\ Z.E_{1j} \neq 0 & \text{para } 1 \leq j \leq s_1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la singularidad racional (S, P) inmersa en un germen de variedad lisa (Y, P) mediante $\sigma : (S, P) \rightarrow (Y, P)$ y mantengamos la notación de la sección 4 del capítulo 2. El ciclo fundamental Z se expresa mediante

$$(23) \quad Z = \rho_{11}E_{11}^* + \cdots + \rho_{1s_1}E_{1s_1}^*$$

(ver igualdad (16) en 2.4.1) y, puesto que $E_{1j}^*.E_{ik} = E_{1j}^*.E_{ik}^* = 0$ para $i \neq 1$ (proposición 2.4.2), se tiene que $Z.E_{ij} = 0$ para $i \neq 1, 1 \leq j \leq s_i$.

Fijemos ahora $j \in \{1, \dots, s_1\}$ y veamos que $Z.E_{1j} \neq 0$. Sea F un elemento del ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,P}$ tal que su restricción f a $\mathcal{O}_{S,P}$ es un elemento general del ideal maximal de $\mathcal{O}_{S,P}$. Denotemos por H el divisor de (Y, P) definido por F y por C el divisor de Cartier que define f en (S, P) , es decir, $C = \sigma^*(H)$. Supongamos además que hemos elegido F de manera que el transformado estricto H_1 de H por la explosión $\pi_1 : Y_1 \rightarrow Y$ con centro P no contenga a E_{1j}^1 , ni a ningún punto de la constelación \mathcal{C} . Entonces, si por C_1 y \bar{C} denotamos los respectivos transformados estrictos mediante los morfismos $\pi_1 : S_1 \rightarrow S$ y π_C , se tiene que $\bar{C} \cap E_{1j} = C_1 \cap E_{1j}^1$ y es igual a $H_1 \cap E_{1j}^1 = (H_1 \cap \mathbb{E}_1) \cap E_{1j}^1$, que es la intersección de una hipersuperficie y una curva en el espacio proyectivo $\mathbb{E}_1^1 \cong \mathbb{P}^r$ (donde $r + 1$ es la dimensión de (Y, P)). Por tanto, $\bar{C} \cap E_{1j}$ es no vacío y $\bar{C}.E_{1j} \neq 0$. Ahora bien, puesto que f es un elemento general del ideal maximal de $\mathcal{O}_{S,P}$, se tiene que $C^* = \bar{C} + Z$, y por tanto, $Z.E_{1j} = -\bar{C}.E_{1j} \neq 0$. ■

4.7.2. Proposición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie, $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ una constelación con origen en P (tal que la superficie S_C es no singular) y $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_C . Entonces, fijo un orden θ en Δ (no necesariamente definido por una enumeración), a partir de la matriz $(E_\alpha.E_\beta)_{\alpha,\beta}$ respecto a dicho orden, se puede calcular la matriz de proximidad M y la matriz de intersección Λ respecto a θ .

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observemos que el ciclo fundamental Z del morfismo π_C es el mínimo ciclo con soporte excepcional $\sum b_\gamma E_\gamma$ tal que $(E_\alpha.E_\beta)_{\alpha,\beta} \cdot \underline{b} \leq \underline{0}$, y por tanto, los b_γ se calculan directamente a partir de la matriz $(E_\alpha.E_\beta)_{\alpha,\beta}$. Además, aplicando el lema anterior, se deducen cuáles

son las filas de $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ correspondientes a las componentes irreducibles del lugar excepcional de π_C definidas por la explosión de P (es decir, las filas correspondientes a E_{11}, \dots, E_{1s_1}). Apliquemos una permutación, si es necesario, en la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ y supongamos que los productos de intersección $\{E_{1j} \cdot E_{1k}\}_{1 \leq j, k \leq s_1}$ están en las posiciones $\{(j, k)\}_{1 \leq j, k \leq s_1}$ de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$. En esta situación, el menor de tamaño $(n - s_1) \times (n - s_1)$ obtenido al suprimir las s_1 primeras filas y columnas de $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$ define una forma bilineal definida negativa cuyo grafo dual tiene tantas componentes conexas como puntos del primer entorno infinitesimal de P hay en la constelación \mathcal{C} . Es decir, el espacio sobre el que está restringida esta forma bilineal se descompone como suma ortogonal de subespacios, de manera que los respectivos grafos duales de las restricciones a los distintos subespacios son las componentes conexas anteriores. Por tanto, aplicando de nuevo el lema anterior a las formas bilineales en cada uno de los subespacios anteriores y reiterando el proceso, se obtiene el árbol \mathcal{T}_C asociado a la constelación \mathcal{C} junto con la asignación a cada vértice v_i de \mathcal{T}_C del número s_i de componentes irreducibles del lugar excepcional de π_C que están definidas por la explosión del punto P_i de \mathcal{C} correspondiente a v_i . Además, tras este estudio, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el orden θ del conjunto de índices Δ es una enumeración ω compatible con el orden de \mathcal{C} . Es decir, podemos suponer que $\Delta = \{(i, j) / 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s_i\}$ donde, para i fijo, $\{(i, j)\}_{1 \leq j \leq s_i}$ son los índices correspondientes a P_i , y que el orden de Δ es el orden lexicográfico.

Veamos cómo obtener la matriz de proximidad $M = (m_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta}$ respecto a la enumeración ω a partir de esta información. Recordemos que el corolario 2.3.6 afirma que $M = Id - V$ donde V es una matriz $n \times n$ triangular superior formada por cajas $(V_{ij})_{1 \leq i < j \leq m}$ y con ceros en la diagonal, y cada V_{ij} es la $(s_i \times s_j)$ -matriz dada por $(m_{(i,r), (j,s)})$. Calculemos de forma recursiva los $\{V_{ij}\}_{i < j}$. En primer lugar, para describir $V_{m-1, m}$ tengamos en cuenta que, para r fijo ($1 \leq r \leq s_{m-1}$), se tiene

$$(24) \quad E_{m-1, r}^* = E_{m-1, r} - \sum_{s=1}^{s_m} m_{(m-1, r), (m, s)} E_{m, s}^*$$

y los $\{m_{(m-1, r), (m, s)}\}$ son la única solución del sistema de ecuaciones definido al imponer $E_{m-1, r}^* \cdot E_{m, s}^* = 0$. Puesto que $E_{m, s}^* = E_{m, s}$, este sistema (y por tanto, sus soluciones) queda definido a partir de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta}$.

Sea $i_0 \geq 1$, supongamos que conocemos las matrices $\{V_{ij}\}_{i_0 < i < j}$ y calculemos $\{V_{i_0 j}\}_{i_0 < j}$. De nuevo, sabemos que, para r fijo ($r \leq s_{i_0}$), se tiene

$$(25) \quad E_{i_0, r}^* = E_{i_0, r} - \sum_{\substack{i > i_0 \\ 1 \leq s \leq s_i}} m_{(i_0, r), (i, s)} E_{i, s}^*$$

y los $\{m_{(i_0,r),(i,s)}\}$ son la única solución del sistema de ecuaciones definido al imponer $E_{i_0,r}^* \cdot E_{i,s}^* = 0$ para $i > i_0$, $1 \leq s \leq s_i$. El conocimiento de $\{V_{ij}\}_{i>i_0}$ asegura que, para $i > i_0$, sabemos escribir $E_{i,s}^*$ en función de los $\{E_\gamma\}$, y por tanto, el sistema de ecuaciones anterior y sus soluciones quedan definidos a partir de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha,\beta}$. Así pues, hemos descrito la matriz de proximidad M a partir de la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha,\beta}$.

Finalmente, la matriz de intersección $\Lambda = (E_\alpha^* \cdot E_\beta^*)$ se deduce de forma inmediata del conocimiento de M y de $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha,\beta}$. De hecho, se tiene que $\Lambda = M^{-1}(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha,\beta} (M^t)^{-1}$. ■

Finalmente, de la proposición anterior deduciremos una nueva forma de expresar la información de 4.6.2. Comencemos con la siguiente definición.

4.7.3. Definición. Sea (S, P) una singularidad racional de superficie y consideremos una constelación \mathcal{C}_m minimal de (S, P) y una enumeración ω del conjunto de componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}_m}$. Sean $M_{\mathcal{C}_m\omega}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}_m\omega}$ respectivamente las matrices de proximidad y de intersección de la constelación \mathcal{C}_m respecto a la enumeración ω (definiciones 2.2.5 y 2.4.1) y consideremos el par $(M_{\mathcal{C}_m\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}_m\omega})$. En el conjunto de pares de la forma (M, Λ) (donde M y Λ son matrices $n \times n$) actúa el grupo de permutaciones \mathcal{S}_n y es claro que la \mathcal{S}_n -órbita Υ de $(M_{\mathcal{C}_m\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}_m\omega})$ sólo depende de la singularidad (S, P) .

4.7.4. Teorema. En las condiciones anteriores, la siguiente información es equivalente:

- (i) El grafo dual ponderado Γ_m^ω asociado a la desingularización minimal de (S, P) .
- (ii) La \mathcal{S}_n -órbita Υ del par $(M_{\mathcal{C}_m\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}_m\omega})$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que el conocimiento del grafo dual ponderado Γ_m^ω es equivalente al conocimiento de la \mathcal{S}_n -órbita Ψ de la aplicación bilineal asociada a (S, P) (proposición 4.6.2), de la proposición 4.7.2 se sigue que (i) implica (ii). La implicación (ii) \implies (i) es inmediata si tenemos en cuenta que, fija una constelación minimal \mathcal{C}_m y una enumeración ω , la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha,\beta}$ respecto a la enumeración ω es exactamente $M_{\mathcal{C}_m\omega} \Lambda_{\mathcal{C}_m\omega} M_{\mathcal{C}_m\omega}^t$. ■

4.7.5. Nota Como consecuencia del teorema anterior veamos que, dada una singularidad racional de superficie (S, P) inmersa en un germen de variedad lisa (Y, P) y una constelación \mathcal{C}_m minimal para (S, P) , los enteros $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}_m}}$ definidos en la sección 4 del capítulo 2 (igualdad (16)) sólo dependen del tipo de singularidad racional de (S, P) .

Consideremos la singularidad racional de superficie (S, P) inmersa en un germen de variedad lisa (Y, P) mediante $\sigma : (S, P) \rightarrow (Y, P)$. Sea $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ una constelación con origen en P y consideremos la cadena de explosiones en puntos

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{\mathcal{C}} = Y_m & \xrightarrow{\pi_m} & Y_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi_2} & Y_1 & \xrightarrow{\pi_1} & Y_0 = Y \\ \sigma_m \uparrow & & \sigma_{m-1} \uparrow & & & & \sigma_1 \uparrow & & \sigma \uparrow \\ S_{\mathcal{C}} = S_m & \xrightarrow{\pi_m} & S_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi_2} & S_1 & \xrightarrow{\pi_1} & S_0 = S \end{array}$$

definida en 2.4.1 por la constelación \mathcal{C} , donde, manteniendo la notación de dicho párrafo, σ_i es la inmersión de S_i en Y_i y π_{i+1} es la explosión de $\sigma_i(P_{i+1}) \in Y_i$. Si denotamos por \mathbb{I}_i^i el lugar excepcional de π_i , en 2.4.1 definimos enteros estrictamente positivos $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ tales que

$$(26) \quad \sigma_i^*(\mathbb{I}_i^i) = \rho_{i1} E_{i1}^i + \dots + \rho_{is_i} E_{is_i}^i$$

y además probamos que

$$(27) \quad \sigma_m^*(\mathbb{I}_i^*) = \rho_{i1} E_{i1}^* + \dots + \rho_{is_i} E_{is_i}^*$$

donde \mathbb{I}_i^* es el transformado total de \mathbb{I}_i^i en $Y_{\mathcal{C}}$.

Además, observemos que los enteros $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ no dependen de la inmersión $\sigma : (S, P) \rightarrow (Y, O)$. En efecto, manteniendo la notación anterior se tiene que $\sigma_i^*(\mathbb{I}_i^i) = \mathfrak{m}_i \mathcal{O}_{S_i}$, donde \mathfrak{m}_i es el ideal maximal del anillo local de S_i en P_{i+1} , y por tanto, $\sum_j \rho_{ij} E_{ij}^*$ es el ciclo fundamental de la desingularización $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$ de la singularidad racional (S_i, P_{i+1}) (ver corolario 3.5.3). Así pues, para i fijo, los enteros ρ_{ij} son los coeficientes del ciclo fundamental de $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$ en la base $\{E_\gamma^*\}_\gamma$ y no dependen de la inmersión σ .

De hecho, si M y Λ son las matrices de proximidad y de intersección de la constelación \mathcal{C} respecto a una enumeración ω , entonces podemos calcular los enteros $\{\rho_\gamma\}$ a partir de M y Λ . En efecto, a partir de M y de Λ se obtiene la matriz $(E_\alpha \cdot E_\beta)_{\alpha, \beta} = M \Lambda M^t$ y los enteros $\{b_\gamma\}$ tales que $Z = \sum b_\gamma E_\gamma$ es el ciclo fundamental de $\pi_{\mathcal{C}}$. Por otro lado, se tiene que $Z = \rho_{11} E_{11}^* + \dots + \rho_{1s_1} E_{1s_1}^*$, y por tanto, la expresión de Z en función de los E_γ^* (por el cambio de base definido por M) determina los enteros $\rho_{11}, \dots, \rho_{1s_1}$. Observemos ahora que, para $1 \leq i \leq m$, las matrices de proximidad M_i y de intersección Λ_i de la desingularización $S_{\mathcal{C}} \rightarrow S_i$ de (S_i, P_{i+1}) se pueden calcular de forma recursiva a partir de M y Λ , y por tanto, aplicando reiteradamente el argumento anterior, se obtienen los enteros $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$.

Por lo tanto, el argumento anterior en el caso particular de que \mathcal{C} es una constelación minimal \mathcal{C}_m , junto con el teorema 4.7.4, afirman que los enteros $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}_m}}$ son invariantes del tipo de singularidad racional de (S, P) .

III. Curvas inmersas en una singularidad racional de superficie y clase de equirresolución como curvas en el espacio.

En esta parte estudiaremos los gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie (S, P) . En la sección 8 asociamos un invariante (o más precisamente, un sistema de invariantes) $\Gamma(C)$ a cada germen de curva reducida C inmerso en (S, P) , invariante que es una generalización de la clase de equisingularidad de un germen de curva plana, es decir, si C es un germen de curva plana entonces $\Gamma(C)$ es equivalente a la clase de equisingularidad de C . En la sección 9 consideramos los gérmenes de curvas inmersos en (S, P) como gérmenes de curvas en una variedad lisa ambiental que contiene a (S, P) y deducimos que, dado un germen C de curva reducida inmerso en (S, P) , el invariante $\Gamma(C)$ determina la clase de equirresolución de C , es decir, el árbol asociado a la constelación de puntos infinitamente próximos a la curva C vista como curva alabeada, junto con las multiplicidades de los transformados estrictos de las ramas de C .

§8. Curvas inmersas en una singularidad racional de superficie.

4.8.1. Definición. Sea C un germen de curva reducida inmerso en la singularidad racional de superficie (S, P) . Una *desingularización sumergida* de C en (S, P) es una desingularización $\pi : X \rightarrow S$ de (S, P) tal que el transformado estricto \bar{C} de C por π es no singular y el transformado total C^* de C por π es un divisor de X con cruza-mientos normales, es decir, cada vez que dos componentes irreducibles (E_α y E_β o bien E_α y \bar{C}) de $\pi^{-1}(C)$ se cortan en un punto Q , las ecuaciones locales de dichas componentes irreducibles forman parte de un sistema regular de parámetros del anillo local de X en Q .

Una desingularización sumergida $\pi_0 : X_0 \rightarrow S$ de C en (S, P) es una *desingularización sumergida minimal* de C en (S, P) si, para toda desingularización sumergida $\pi : X \rightarrow S$, existe un morfismo $\rho : X \rightarrow X_0$ tal que $\pi = \pi_0 \circ \rho$. Diremos que una constelación \mathcal{C} con origen en P es una *constelación minimal para C* si la desingularización $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ es una desingularización sumergida minimal de C en (S, P) . Obsérvese que, por la propiedad universal de la desingularización minimal, dos constelaciones minimales para C han de ser equivalentes.

Consideremos una curva reducida C inmersa en (S, P) y veamos cómo obtener una constelación minimal. Tomemos una constelación \mathcal{C}_m minimal de (S, P) y sea $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}_m}$ el transformado estricto de C por $\pi_{\mathcal{C}_m}$ ($\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}_m}$ es una curva reducida de $S_{\mathcal{C}_m}$). Definamos una constelación \mathcal{C} con origen en P añadiendo a \mathcal{C}_m todos los puntos infinitamente próximos a P que, o bien son singulares para el correspondiente transformado estricto de $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}_m}$, o bien son no singulares pero sin cruzamientos normales para el transformado total de C . De esta forma, cada constelación \mathcal{C} así definida da lugar a la desingularización sumergida minimal de C en (S, P) , y por tanto, es una constelación minimal para C .

4.8.2. Definición. Sea C un germen de curva reducida inmerso en (S, P) y sea \mathcal{C} una constelación minimal para C . Entonces podemos considerar un cúmulo único K con soporte en \mathcal{C} tal que C pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales. En efecto, si $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$, se tiene

$$(28) \quad C^* = \overline{C} + \sum_{\gamma \in \Delta} \nu_\gamma E_\gamma^*$$

donde por $*$ y $-$ denotamos respectivamente transformado total y transformado estricto por $\pi_{\mathcal{C}}$ y $\{e_\gamma\}_\gamma$ son los órdenes de C en \mathcal{C} . El cúmulo K es por tanto $K = (C, \{e_\gamma\}_{\gamma \in \Delta})$. Llamaremos a K el *cúmulo con soporte en \mathcal{C} definido por C* .

Si C' es otra constelación minimal para la curva C (por tanto C' es equivalente a \mathcal{C} , ver 2.1.2) y K' es el cúmulo con soporte en C' definido por C , entonces los árboles ponderados T_K y $T_{K'}$ asociados a K y K' respectivamente coinciden. Por tanto, dicho árbol ponderado sólo depende de la curva C inmersa en (S, P) . Lo llamaremos *árbol ponderado minimal de C en (S, P)* y lo representaremos por $T(C)$.

4.8.3. Nota. Observemos que, dado un germen C de curva reducida inmerso en (S, P) , si \mathcal{C} es una constelación minimal para C y K es el cúmulo con soporte en \mathcal{C} definido por C , entonces K es un cúmulo de Weil (teorema 3.2.1). Sin embargo, puede que K no sea un cúmulo de Cartier, es decir, puede que K no sea un IN-cúmulo. De hecho, puesto que C pasa por K con órdenes efectivos iguales a los virtuales, el resultado 1.6.1 de Artin garantiza que K es un cúmulo de Cartier si y sólo si C es un divisor de Cartier.

4.8.4. A continuación asociaremos a cada germen de curva C inmerso en (S, P) un invariante $\Gamma(C)$ más fuerte que el árbol ponderado minimal $T(C)$, invariante que depende fuertemente de la inmersión de C en (S, P) .

Sea C un germen de curva reducida inmerso en (S, P) y sea \mathcal{C} una constelación minimal para C . Sea ω una enumeración del conjunto de índices $\Delta_{\mathcal{C}}$ y consideremos la información $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{\nu}_{\omega})$, donde $M_{\mathcal{C}\omega}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}\omega}$ son las matrices de proximidad y de intersección de la constelación \mathcal{C} respecto a la enumeración ω y $\underline{\nu}_{\omega}$ es el vector de los pesos $\{\nu_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ del cúmulo con soporte en \mathcal{C} definido por C con el orden dado por ω . En el conjunto de uplas $(M, \Lambda, \underline{\nu})$ (donde M y Λ son matrices $n \times n$ y $\underline{\nu}$ es un vector de n componentes) actúa el grupo de permutaciones \mathcal{S}_n , y es claro que la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$ de $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{\nu}_{\omega})$ sólo depende de la curva C inmersa en (S, P) .

4.8.5. Nota. Observemos que, dado un germen de curva C inmerso en (S, P) , una constelación \mathcal{C} minimal para C y una enumeración ω , la información $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{\nu}_{\omega})$ es equivalente a $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{d}_{\omega})$ donde \underline{d}_{ω} es el vector de defectos con el orden definido por ω . En efecto, la relación entre $\underline{\nu}$ y \underline{d} está expresada mediante $\underline{d} = -M_{\mathcal{C}\omega}\Lambda_{\mathcal{C}\omega}\underline{\nu}$ (definición 3.1.3). Por otro lado, la proposición 4.7.2 garantiza que el conocimiento de la \mathcal{S}_n -órbita de $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega})$ es equivalente al conocimiento del grafo dual ponderado $\Gamma_{\mathcal{C}}^{\omega}$ asociado al morfismo $\pi_{\mathcal{C}}$. Por tanto, la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$ es equivalente a la información obtenida al añadir al grafo dual ponderado $\Gamma_{\mathcal{C}}^{\omega}$ flechas con origen en cada uno de los vértices de $\Gamma_{\mathcal{C}}^{\omega}$ y pesos en dichas flechas, de manera que el peso de la flecha con origen en el vértice correspondiente a E_{γ} tenga peso d_{γ} (ver ejemplo 3.6.5).

Observemos también que, dada la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$, todo representante $(M, \Lambda, \underline{\nu})$ de dicha órbita tal que M sea una matriz triangular superior es de la forma $(M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{\nu}_{\omega})$ para alguna constelación \mathcal{C} minimal para C y alguna enumeración ω de $\Delta_{\mathcal{C}}$. Por lo tanto, las dos afirmaciones anteriores aseguran que a partir de la información $\Gamma(C)$ se puede conocer cómo son las ramas del germen de curva C .

Por último, observemos que para cada germen de curva reducida C inmerso en (S, P) se tienen unas "igualdades de proximidad" de manera análoga a las que se dan en el caso de curvas inmersas en una superficie no singular. En efecto, fija una constelación \mathcal{C} minimal para C y una enumeración ω de $\Delta_{\mathcal{C}}$, expresaremos por $(\lambda_{\alpha\beta})$ la matriz de números racionales $M_{\mathcal{C}\omega}\Lambda_{\mathcal{C}\omega}$, es decir, $\lambda_{\alpha,\beta} = E_{\alpha}^* \cdot E_{\beta}^*$. Entonces, si $\{d_{\gamma}\}_{\gamma}$ son los defectos del cúmulo K con soporte

en \mathcal{C} definido por C , se tiene que

$$(29) \quad \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = -d_{\alpha}$$

para todo $\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}}$. Por otro lado, sabemos que $d_{\alpha} = -D_K.E_{\alpha} = \overline{C}.E_{\alpha}$ y que \overline{C} es un germen de curva lisa de la superficie no singular $S_{\mathcal{C}}$ tal que $\overline{C} + \sum_{\beta} E_{\beta}$ es un divisor con cruzamientos normales (ya que \mathcal{C} es una constelación minimal para C). Por lo tanto, del estudio del caso no singular (notas 2.2.6, 2.3.5 y proposición 2.4.2) se sigue que las igualdades de proximidad para la curva C son las siguientes:

$$(30) \quad \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} \nu_{\beta} + \sum_{\substack{P_i \in E_{\alpha}^i \\ P_i \notin \mathcal{C}}} \text{ord}_{P_i}(\overline{C}^{i-1}) = 0$$

para todo $\alpha \in \Delta_{\mathcal{C}}$.

4.8.6. Es claro que, dado un germen de curva C inmerso en (S, P) , la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$ determina el árbol ponderado minimal $T(C)$ de C en (S, P) . Sin embargo el recíproco no es cierto, como veremos a continuación.

Sean C y C' dos gérmenes de curvas inmersos en una superficie no singular definidos por $x^2y^4 + y^9 + x^9 = 0$ y $x^3y^3 + y^8 + x^{10} = 0$ respectivamente. Si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son constelaciones minimales para C y C' , y K y K' son los cúmulos con soporte en \mathcal{C} y \mathcal{C}' definidos por C y C' respectivamente, entonces los árboles ponderados con relaciones de proximidad asociados a K y a K' son respectivamente

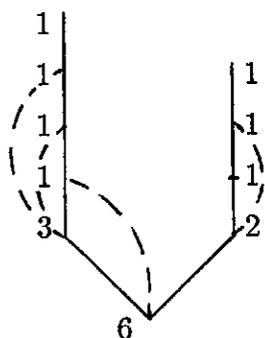


fig. 4.10.

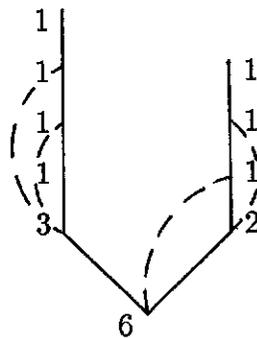


fig. 4.11.

Por tanto, el árbol ponderado minimal $T(C)$ de C en (S, P) coincide con el

árbol ponderado minimal $T(C')$ de C' en (S, P) y está representado mediante

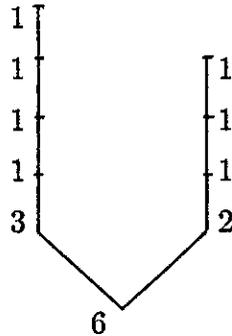


fig. 4.12.

Sin embargo, las respectivas matrices de proximidad y de intersección están definidas por los árboles ponderados con relaciones de proximidad (ya que (S, P) es no singular), y por tanto, no sólo son distintas, sino que definen S_n -órbitas diferentes, es decir, $\Gamma(C)$ y $\Gamma(C')$ no son iguales. De hecho, las respectivas representaciones de $\Gamma(C)$ y $\Gamma(C')$ en el grafo dual ponderado son las siguientes

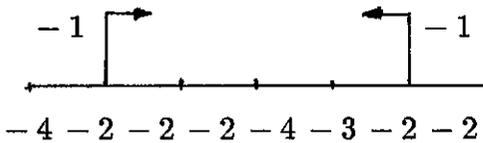


fig. 4.13.

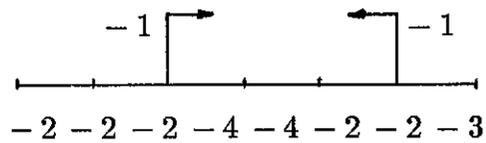


fig. 4.14.

En el ejemplo anterior y en general para cualquier germen C de curva reducida inmerso en una superficie no singular (S, P) , el “árbol ponderado minimal con relaciones de proximidad de C en (S, P) ” determina, y de hecho es equivalente, a la S_n -órbita $\Gamma(C)$. Sin embargo, en el caso general de ser (S, P) una singularidad racional de superficie cualquiera, esto no es cierto, como veremos con el siguiente ejemplo.

Sea (S, P) una singularidad racional de tipo A_3 y consideremos la constelación de puntos infinitamente próximos a P dada por $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, P_3\}$, donde $\{P_1 = P, P_2\}$ es la constelación que define la desingularización minimal de (S, P) (ver 3.8.1) y P_3 es un punto que pertenece a E_{11}^1 pero no pertenece a E_{12}^1 (siendo E_{11}^1 y E_{12}^1 las componentes irreducibles del lugar excepcional de la explosión π_1 de P_1). Sean $K = (C, \nu)$ y $K' = (C, \nu')$ los cúmulos con

soporte en \mathcal{C} cuyos pesos son

$$\begin{aligned} \nu_{11} &= \nu'_{11} = \frac{11}{4} \\ \nu_{12} &= \nu'_{12} = \frac{9}{4} \\ \nu_2 &= 1, & \nu'_2 &= 2 \\ \nu_3 &= 2, & \nu'_3 &= 1 \end{aligned}$$

Las matrices de proximidad y de intersección definidas por la constelación \mathcal{C} respecto al orden lexicográfico de $\Delta_{\mathcal{C}}$ definido anteriormente son respectivamente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & & \\ & & -2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los vectores de defectos $\underline{d} = -M\Lambda\underline{\nu}$ y $\underline{d}' = -M\Lambda\underline{\nu}'$ de los cúmulos K y K' son

$$\begin{aligned} \underline{d}^t &= (0, 1, 2, 2) \\ (\underline{d}')^t &= (0, 0, 4, 1) \end{aligned}$$

Es decir, en ambos casos, todos los defectos son enteros no negativos. Así pues, el teorema 3.2.1 asegura que existen gérmenes de curvas reducidas C y C' inmersos en (S, P) que pasan respectivamente por K y K' con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales. Más aún, teniendo en cuenta (iii) en 3.2.1, podemos suponer que el morfismo $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ es una desingularización sumergida minimal de C y C' en (S, P) , y por tanto, el árbol ponderado minimal $\mathcal{T}(C)$ de C en (S, P) coincide con el árbol ponderado minimal $\mathcal{T}(C')$ de C' en (S, P) y está representado mediante

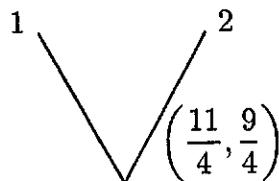


fig. 4.15.

Además, en el árbol ponderado anterior están descritas todas las relaciones de proximidad, y por tanto, los respectivos árboles ponderados minimales con

relaciones de proximidad asociados a C y a C' coinciden. Sin embargo, las S_n -órbitas $\Gamma(C)$ y $\Gamma(C')$ no son iguales, pues no existen enumeraciones ω y ω' de Δ_C de forma que $(M_{C\omega}, \Lambda_{C\omega}, \underline{\nu}_\omega)$ sea igual a $(M_{C\omega'}, \Lambda_{C\omega'}, \underline{\nu}'_{\omega'})$. En efecto, las representaciones de dichas S_n -órbitas en el grafo dual ponderado son respectivamente

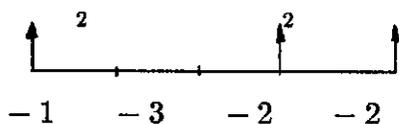


fig. 4.16.

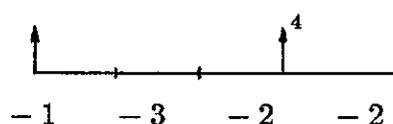


fig. 4.17. ■

§9. Relación con el concepto de equirresolución.

En esta sección consideramos gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie (S, P) y estudiamos su comportamiento como curvas inmersas en un espacio liso (de dimensión suficientemente grande). En particular, deducimos que el invariante $\Gamma(C)$ asociado al germen de curva reducida C inmerso en (S, P) determina la clase de equirresolución de C .

Comencemos reproduciendo el concepto de constelación de puntos infinitamente próximos a un punto P de una variedad V .

4.9.1. Definición. Sea P un punto de una variedad (o de un germen de variedad) V sobre un cuerpo k . Llamaremos *punto infinitamente próximo a P sobre V* a todo punto Q de cualquier variedad V_i obtenida a partir de V tras un número finito de explosiones en puntos, tal que la imagen de Q por dichas transformaciones es P .

Una *constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P sobre V* (o constelación con origen en P sobre V) es un conjunto $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ de puntos infinitamente próximos a P sobre V , donde $m \geq 1$, $P_i = P$ y, para $1 \leq i \leq m-1$, P_{i+1} es un punto de la variedad V_i obtenida a partir de V_{i-1} tras explotar el punto P_i (V_0 es la variedad inicial V).

De la misma forma que en 2.1.2, observamos que una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ de puntos infinitamente próximos a P sobre V define una cadena de explosiones de puntos

$$(31) \quad V_{\mathcal{C}} = V_m \xrightarrow{\pi_m} V_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} V_1 \xrightarrow{\pi_1} V_0 = V$$

y denotamos por $\pi_{\mathcal{C}}$ la composición $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_m$. También, de manera análoga a 2.1.2 y 2.1.5, se tienen los conceptos de constelaciones equivalentes de puntos infinitamente próximos a P sobre V , de proximidad y de árbol con relaciones de proximidad $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^P$ asociados a la constelación \mathcal{C} .

En particular, dados dos gérmenes de variedad (V_1, P) y (V_2, P) , si (V_1, P) está inmerso en (V_2, P) entonces los puntos infinitamente próximos a P sobre V_1 son exactamente los puntos infinitamente próximos a P sobre V_2 que están en el correspondiente transformado estricto de V_1 , y el primer entorno infinitesimal de P sobre V_1 es el conjunto de puntos del primer entorno infinitesimal de P sobre V_2 que están en el transformado estricto de V_1 . Por tanto, dada una constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P sobre V_1 , podemos considerar \mathcal{C} como una constelación sobre V_2 , y el árbol $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ definido por \mathcal{C} es independiente de la variedad V_i .

Sin embargo, el concepto de proximidad es diferente si consideramos los puntos sobre V_1 o sobre V_2 . Siempre se tiene que proximidad sobre V_1 implica proximidad sobre V_2 , pero el recíproco no es cierto, como veremos en el ejemplo siguiente. Por tanto, dada una constelación \mathcal{C} sobre V_1 , quedan definidos diferentes árboles con relaciones de proximidad si consideramos \mathcal{C} como constelación sobre V_1 o sobre V_2 .

4.9.2. Ejemplo. Consideremos el punto doble racional (S, P) de tipo D_5 y la constelación $\mathcal{C} = \mathcal{C}_m \cup \{P_5\}$ donde P_5 es un punto del primer entorno infinitesimal de P_1 tal que $P_1 \notin \mathcal{C}_m$. Sumerjamos (S, P) en k^3 de la misma forma que en 2.2.7, es decir, de manera que (S, P) esté definido por $x^4 + xy^2 + z^2 = 0$. Entonces, manteniendo la notación de 2.4.1, el transformado estricto \mathbb{E}_1 del divisor excepcional \mathbb{E}_1^1 en $Y_{\mathcal{C}}$ está dado por

$$\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_1^* - \mathbb{E}_2^* - \mathbb{E}_3^* - \mathbb{E}_4^* - \mathbb{E}_5^*$$

y por tanto

$$\mathbb{E}_1.S_{\mathcal{C}} = 2E_1^* - E_{21}^* - E_{22}^* - E_3^* - E_4^* - E_5^*$$

Sin embargo, el transformado estricto E_1 de E_1^1 en $S_{\mathcal{C}}$ es

$$E_1 = E_1^* - \frac{1}{2}E_{21}^* - \frac{1}{2}E_{22}^* - \frac{1}{2}E_3^* - \frac{1}{2}E_4^* - E_5^*$$

y por tanto

$$(32) \quad \mathbb{E}_1.S_C = 2E_1 + E_5$$

Esto significa que todo punto P_8 en $E_5 - E_1$ es un punto próximo a P vistos como puntos sobre la variedad ambiente, pero no es próximo a P vistos como puntos sobre (S, P) . Siempre tendremos que proximidad sobre (S, P) implica proximidad sobre la variedad ambiente, ya que $E_{j_1} \cup \dots \cup E_{j_s} \subset \mathbb{E}_j.S_C$.

4.9.3. Sea C un germen de curva reducida sobre k centrado en el punto P . Sea $A = \mathcal{O}_{C,P}$ el anillo local de C en P y $\bar{A} = \overline{\mathcal{O}_{C,P}}$ su normalización. En estas condiciones, si C es singular en P y A_1 es un anillo local del explotado de C con centro P , se tiene que $A \subset A_1 \subseteq \bar{A}$. Además, toda cadena de explosiones da lugar a una sucesión de anillos locales

$$A \subset A_1 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \subset \bar{A}$$

que ha de ser estacionaria, ya que \bar{A} es un A -módulo noetheriano y las contenciones son estrictas (ver [Ca], capítulo 1). Por lo tanto, existe una constelación \mathcal{C}_0 de puntos infinitamente próximos a P sobre C tal que el resultado $C_{\mathcal{C}_0}$ de explotar los puntos de \mathcal{C}_0 es la normalización de la curva C . Además, dos constelaciones \mathcal{C}_0 y \mathcal{C}'_0 que satisfagan la condición anterior han de ser equivalentes. Por tanto, el árbol $\mathcal{T}_0(C) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}_0}$ asociado a la constelación \mathcal{C}_0 sólo depende de la curva C .

4.9.4. Definición. En las condiciones anteriores, la *clase de equirresolución* de C es el dato combinatorio $(\mathcal{T}_0(C), \underline{e})$, donde \underline{e} consiste en una función peso \underline{e}_B para cada rama B de C . Cada función \underline{e}_B está definida en el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_0(C)$ que corresponden a puntos Q que están sobre el transformado estricto de B , de forma que el \underline{e}_B -peso del vértice correspondiente a Q es la multiplicidad en Q de la rama de C en P correspondiente a B .

Diremos que dos gérmenes C y C' de curvas reducidas en P son *equirresolubles* si sus respectivas clases de equirresolución coinciden.

4.9.5. Nota. Si el germen de curva reducida C está inmerso en un germen de variedad V centrado en P , entonces cada constelación \mathcal{C} de puntos infinitamente próximos a P sobre C se puede ver como una constelación sobre V , que seguiremos denotando por \mathcal{C} . Además, el árbol asociado a la constelación \mathcal{C} vista como constelación sobre C es el mismo que el asociado a \mathcal{C} como constelación sobre V .

En particular, si V es una variedad no singular, entonces la constelación \mathcal{C}_0 con origen en P sobre V está formada por todos los puntos infinitamente próximos a P sobre V que son singulares para el transformado estricto de C , es decir, el transformado estricto $\overline{C}_{\mathcal{C}_0}$ de C por el morfismo $\pi_{\mathcal{C}_0} : V_{\mathcal{C}_0} \rightarrow V$ es no singular y \mathcal{C}_0 es minimal en el conjunto de constelaciones con esta propiedad. Si además C consta de una sola rama (es decir, C es un germen de curva irreducible inmerso en la variedad no singular V) y, para cada $P_i \in \mathcal{C}$, denotamos por $e(P_i)$ la multiplicidad en P_i del transformado estricto de C en P_i , entonces $e(P_i)$ es el \underline{e} -peso del vértice de $\mathcal{T}_0(C)$ correspondiente a P_i y se tiene

$$(33) \quad e(P_i) = \sum_{P_j \rightarrow P_i} e(P_j)$$

donde $P_j \rightarrow P_i$ significa que el punto P_j es próximo a P_i vistos como puntos sobre V . En efecto, la igualdad anterior se sigue del hecho que la multiplicidad de una curva en un punto es el producto de intersección del transformado estricto de la curva con el divisor excepcional creado por la explosión del punto.

A partir de ahora, estudiaremos gérmenes de curvas reducidas inmersos en una singularidad racional de superficie (S, P) .

4.9.6. Ejemplos A continuación mostraremos ejemplos que prueban que, dado un germen C de curva reducida inmerso en una singularidad racional de superficie (S, P) , del árbol ponderado minimal $\mathcal{T}(C)$ no se deduce la clase de equirresolución de C .

Consideremos los gérmenes de curvas C y C' inmersos en una superficie no singular definidos por $x^2y^4 + y^9 + x^9 = 0$ y $x^3y^3 + y^8 + x^{10} = 0$ respectivamente. En 4.8.6 vimos que los árboles ponderados minimales $\mathcal{T}(C)$ y $\mathcal{T}(C')$ coinciden (ver fig. 4.12) pero la S_n -órbita $\Gamma(C)$ es distinta de $\Gamma(C')$ (figs. 4.13 y 4.14). Por otro lado, de las figuras 4.10 y 4.11 se sigue que las clases de equirresolución de C y C' son respectivamente

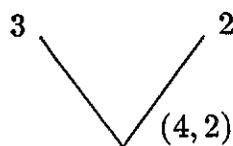


fig. 4.18.

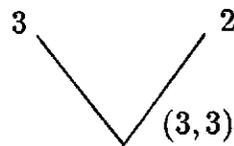


fig. 4.19.

y por tanto, C y C' no son equirresolubles.

El segundo ejemplo de 4.8.6. también nos proporciona dos curvas C y C' no equirresolubles con el mismo árbol ponderado minimal. En efecto, consideremos dos gérmenes de curvas reducidas C y C' inmersos en una singularidad racional de superficie de tipo A_3 , que pasen respectivamente por los cúmulos K y K' definidos en 4.8.6 con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales y tales que la constelación \mathcal{C} soporte de K y K' sea una constelación minimal para C y para C' . En 4.8.6 vimos que los árboles pesados minimales respectivos $T(C)$ y $T(C')$ coinciden (ver fig. 4.15), pero la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$ es distinta de $\Gamma(C')$ (figs. 4.16 y 4.17). Veamos que tampoco son equirresolubles. En efecto, teniendo en cuenta que los defectos de los cúmulos K y K' están dados por $\underline{d}^t = (0, 1, 2, 2)$ y $(\underline{d}')^t = (0, 0, 4, 1)$, se deduce que las clases de equirresolución de C y C' son respectivamente

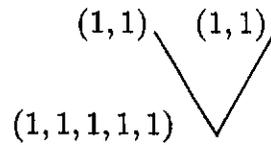


fig. 4.20.

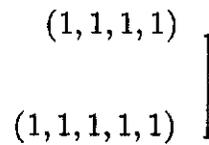


fig. 4.21.

y por tanto, C y C' no son equirresolubles. ■

4.9.7. A continuación probaremos que, dado un germen de curva reducida C inmerso en una singularidad racional de superficie (S, P) , la \mathcal{S}_n -órbita $\Gamma(C)$ determina la clase de equirresolución de C .

Consideremos la singularidad racional de superficie (S, P) inmersa en un germen de variedad lisa (Y, P) mediante $\sigma : (S, P) \rightarrow (Y, P)$. Sea C un germen de curva reducida inmerso en (S, P) y sea $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ una constelación minimal para C . Consideremos la cadena de explosiones en puntos

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y_{\mathcal{C}} = Y_m & \xrightarrow{\pi_m} & Y_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & Y_1 & \xrightarrow{\pi_1} & Y_0 = Y \\
 \sigma_m \uparrow & & \sigma_{m-1} \uparrow & & & & \sigma_1 \uparrow & & \sigma \uparrow \\
 S_{\mathcal{C}} = S_m & \xrightarrow{\pi_m} & S_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & S_1 & \xrightarrow{\pi_1} & S_0 = S
 \end{array}$$

definida por la constelación \mathcal{C} y mantengamos la notación de 2.4.1. Recordemos que en la nota 4.7.5 probamos que los enteros $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ tales que

$$(34) \quad \sigma_i^*(\mathbb{E}_i^i) = \rho_{i1} E_{i1}^i + \cdots + \rho_{is_i} E_{is_i}^i$$

pueden ser calculados a partir de las matrices de proximidad $M_{\mathcal{C}}$ y de intersección $\Lambda_{\mathcal{C}}$ de la constelación \mathcal{C} respecto a una enumeración ω .

En esta situación, estamos en condiciones de probar el siguiente lema.

4.9.8. Lema. Sea C un germen de curva irreducible inmerso en (S, P) . Sea $\mathcal{C} = \{P_1, \dots, P_m\}$ una constelación minimal para C y $K = (C, \underline{\nu})$ el cúmulo con soporte en \mathcal{C} definido por C . Entonces

$$\text{mult}_{P_i}(\overline{C}^{i-1}) = \mathbb{E}_i^* \cdot \overline{C} = \sum_{1 \leq j, k \leq s_i} \rho_{ij} \nu_{ik} (E_{ij}^* \cdot E_{ik}^*)$$

DEMOSTRACIÓN: Dada una curva inmersa en una variedad no singular, la multiplicidad de dicha curva en un punto P^i es el producto de intersección del transformado estricto de la curva con el divisor excepcional de la explosión con centro P^i . Por tanto, se tiene la primera igualdad. La segunda igualdad se sigue de que $\mathbb{E}_i^* \cdot S_C = \rho_{i1} E_{i1}^* + \dots + \rho_{is_i} E_{is_i}^*$ (igualdad (18) en 2.4.2) junto con $E_{ij}^* \cdot E_{i'j'}^* = 0$ para $i \neq i'$. ■

4.9.9. Teorema. Sea C un germen de curva reducida inmerso en una singularidad racional de superficie (S, P) . Entonces la S_n -órbita $\Gamma(C)$ determina la clase de equirresolución de C .

DEMOSTRACIÓN: Sea $(M, \Lambda, \underline{\nu})$ un representante de $\Gamma(C)$ tal que M sea una matriz triangular superior. Entonces existe una constelación \mathcal{C} minimal para C y una enumeración ω de $\Delta_{\mathcal{C}}$ de manera que $(M, \Lambda, \underline{\nu}) = (M_{\mathcal{C}\omega}, \Lambda_{\mathcal{C}\omega}, \underline{\nu}_{\omega})$ (ver nota 4.8.5). En estas condiciones, si K es el cúmulo con soporte en \mathcal{C} definido por C , entonces el vector de defectos de K está dado por $\underline{d} = -M \Lambda \underline{\nu}$ (y sólo depende de la información $(M, \Lambda, \underline{\nu})$). Esto significa que, si $\{E_{\gamma}\}_{\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}}$ son las componentes irreducibles del lugar excepcional de $\pi_{\mathcal{C}}$, entonces, para todo $\gamma \in \Delta_{\mathcal{C}}$, el transformado estricto de C por $\pi_{\mathcal{C}}$ corta a E_{γ} en d_{γ} curvas algebroides lisas transversales a E_{γ} que no cortan a ningún E_{β} para $\beta \neq \gamma$.

Por otro lado, el árbol $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ asociado a la constelación \mathcal{C} se deduce de las matrices M y Λ . En efecto, el número de vértices de \mathcal{T}^p es el número de cajas no nulas que se pueden obtener de la matriz Λ (proposición 2.4.2) y la matriz de proximidad M define la estructura del árbol (corolario 2.3.6). Por lo tanto, de la información obtenida hasta ahora deducimos el árbol con relaciones de proximidad \mathcal{T} junto con el número de ramas de C y su situación relativa a \mathcal{T} . Así pues, puesto que los \underline{e} -pesos de la clase de equirresolución de C consisten en una función peso para cada rama de C , podemos suponer sin pérdida de generalidad que C tiene una sola rama.

Con esta restricción, veamos cómo obtener la clase de equirresolución de C a partir de la información anterior. En primer lugar, calculemos los enteros $\{\rho_{\gamma}\}_{\gamma}$ a partir de M y de Λ , según describimos en 4.7.5. Aplicando ahora el lema 4.9.8 deducimos, para cada vértice v_i de \mathcal{T} , la multiplicidad

$e(v_i)$ del transformado estricto de C en el punto P_i de \mathcal{C} correspondiente a v_i . Finalmente, la clase de equirresolución de C consiste en el árbol \mathcal{T}_0 obtenido borrando los vértices v_j de \mathcal{T} para los cuales $e(v_j)$ es 0 o 1, junto con la función e restringida a \mathcal{T}_0 . ■

4.9.10. Ejemplo. El recíproco del teorema 4.9.9 no es cierto. Más aún, el ejemplo siguiente muestra dos gérmenes de curvas C y C' inmersos en una singularidad racional de superficie que son equirresolubles y cuyos árboles ponderados minimales $\mathcal{T}(C)$ y $\mathcal{T}(C')$ son distintos.

Como en el segundo ejemplo de 4.8.6, sea (S, P) una singularidad racional de tipo A_3 y consideremos la constelación $\mathcal{C}_m = \{P_1 = P, P_2\}$ con origen en P que define la desingularización minimal de (S, P) y la constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, P_3\}$, donde P_3 es un punto de E_{11}^1 que no pertenece a E_{12}^1 . Sean $K = (\mathcal{C}_m, \underline{\nu})$ y $K' = (\mathcal{C}, \underline{\nu}')$ los cúmulos con soporte en \mathcal{C}_m y \mathcal{C} respectivamente y cuyos pesos son

$$\nu_{11} = \nu_{12} = \nu_2 = \frac{1}{2}$$

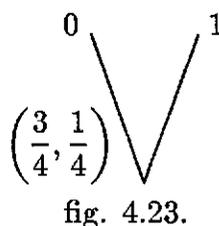
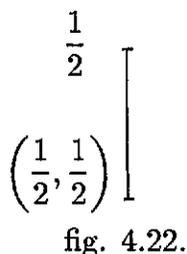
$$\nu'_{11} = \frac{3}{4}, \quad \nu'_{12} = \frac{1}{4}, \quad \nu'_2 = 0, \quad \nu'_3 = 1$$

Los vectores de defectos respecto a los correspondientes órdenes lexicográficos de $\Delta_{\mathcal{C}_m}$ y $\Delta_{\mathcal{C}}$ están dados por

$$\underline{d}^t = (0, 0, 1)$$

$$(\underline{d}')^t = (0, 0, 0, 1)$$

(ya que $\underline{d} = -M_{\mathcal{C}_m} \Lambda_{\mathcal{C}_m} \underline{\nu}$ y $\underline{d}' = -M_{\mathcal{C}} \Lambda_{\mathcal{C}} \underline{\nu}'$, donde las matrices $M_{\mathcal{C}_m}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}_m}$ están descritas en 3.8.1 y las matrices $M_{\mathcal{C}}$ y $\Lambda_{\mathcal{C}}$ en 4.8.6). Por tanto, en ambos casos los defectos son enteros no negativos y existen gérmenes de curvas reducidas C y C' inmersos en (S, P) que pasan respectivamente por K y K' con órdenes efectivos iguales a los órdenes virtuales. Además, podemos tomar las curvas C y C' de manera que los morfismos $\pi_{\mathcal{C}_m} : S_{\mathcal{C}_m} \rightarrow S$ y $\pi_{\mathcal{C}} : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S$ sean desingularizaciones sumergidas minimales de C y C' respectivamente. Entonces los árboles ponderados minimales $\mathcal{T}(C)$ y $\mathcal{T}(C')$ son respectivamente



y son distintos. En particular se deduce que las \mathcal{S}_n -órbitas $\Gamma(C)$ y $\Gamma(C')$ no son iguales. De hecho, sus respectivas representaciones son

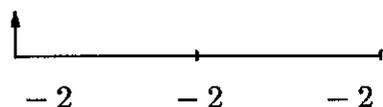


fig. 4.24.

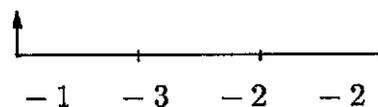


fig. 4.25.

Sin embargo, teniendo en cuenta los defectos $\underline{d}^t = (0, 0, 1)$ y $(\underline{d}')^t = (0, 0, 0, 1)$ de los cúmulos K y K' y siguiendo el proceso descrito en la demostración del teorema 4.9.9, se obtiene que las clases de equirresolución de C y C' coinciden. En efecto, tanto el árbol $\mathcal{T}_0(C)$ como $\mathcal{T}_0(C')$ están formados por un único vértice y las clases de equirresolución de C y C' consisten en dar peso 1 a dicho vértice (observamos que sólo hay una función peso, pues tanto C como C' tienen una única rama), es decir, C y C' son no singulares. ■

4.9.11. Nota. A lo largo de estas dos últimas secciones hemos hecho un estudio de las curvas inmersas en una singularidad racional de superficie (S, P) . A cada germen de curva reducida inmerso en (S, P) le hemos asociado un invariante $\Gamma(C)$ y en el teorema 4.9.9 hemos probado que, dados dos gérmenes de curvas reducidas C y C' inmersos en (S, P) , si $\Gamma(C)$ es igual a $\Gamma(C')$, entonces C y C' son curvas equirresolubles. Esta última propiedad es lo mínimo que debemos exigir a cualquier definición de equisingularidad de gérmenes de curvas inmersos en (S, P) y, por tanto, tiene sentido dar la definición siguiente: “Dos gérmenes de curvas reducidas C y C' inmersos en (S, P) son equisingulares en (S, P) si y sólo si los invariantes $\Gamma(C)$ y $\Gamma(C')$ son iguales”.

La definición anterior induce una relación de equivalencia en el conjunto de gérmenes de curvas reducidas inmersos en (S, P) . Además, se tiene que si C y C' son dos gérmenes de curvas reducidas equisingulares en (S, P) y C es un divisor de Cartier de (S, P) , entonces C' es también un divisor de Cartier. Así pues, la relación de equivalencia anterior induce también una clasificación en el conjunto de divisores de Cartier de (S, P) definidos por curvas reducidas.

Además, si a cada germen C de curva reducida inmerso en (S, P) le asociamos el semigrupo

$$(36) \quad S(C) = \{C \cdot D \mid D \text{ es divisor de Cartier de } (S, P)\}$$

se tiene que, si C y C' son dos gérmenes de curvas equisingulares en (S, P) , entonces los semigrupos $S(C)$ y $S(C')$ son iguales, ya que dichos semigrupos dependen de la forma de intersección en el conjunto de divisores con soporte excepcional para las desingularizaciones minimales de C y C' .

En el caso particular de que (S, P) sea un germen de superficie no singular y C un germen de curva irreducible inmerso en (S, P) , el semigrupo $S(C)$ es bien conocido (ver [An] y [Ca], capítulo 4, sección 3) y caracteriza la clase de equisingularidad de C . Para el caso de gérmenes de curvas reducidas no irreducibles inmersos en un germen de superficie no singular, el semigrupo $S(C)$ no equivale a la clase de equisingularidad, pero en [W] y [DI] se muestra un semigrupo más fino con esta información.

Bibliografía

- [An] ANGERMÜLLER, G.: Die Wertehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden kurve. *Math. Z.* **153**, 267-282 (1977).
- [A1] ARTIN, M.: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. *Amer. J. Math.* **84**, 485-496 (1962).
- [A2] ARTIN, M.: On isolated rational singularities of surfaces. *Amer. J. Math.* **88**, 129-136 (1966).
- [B] BOURBAKI, N.: Algèbre Commutative, chap. 5-6. *Act. Sci. et Ind., no.1308, Hermann, Paris* (1964).
- [Br] BRIESKORN, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Inv. Math.* **4**, 336-358 (1968).
- [Ca] CAMPILLO, A.: Algebroid curves in positive characteristic. *Springer-Verlag LNM* **813**, (1980).
- [CGL1] CAMPILLO, A.; GONZALEZ-SPRINBERG, G. Y LEJEUNE-JALABERT, M.: Amas, ideaux complets et chaines toriques. *C.R. Acad. Sciences de Paris.* (1992).
- [CGL2] CAMPILLO, A.; GONZALEZ-SPRINBERG, G. Y LEJEUNE-JALABERT, M.: Clusters, proximity inequaities and Zariski-Lipman complete ideal theory. *Preprint*, (1993).
- [CGL3] CAMPILLO, A.; GONZALEZ-SPRINBERG, G. Y LEJEUNE-JALABERT, M.: Finitely generated monomial complete ideals. *Preprint*, (1993).
- [Cs1] CASAS - ALVERO, E.: Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves. *Math. Ann.* **287**, 429-454 (1990).
- [Cs2] CASAS - ALVERO, E.: Conferencia en el Instituto Fourier. *Grenoble, Mayo 1993.*
- [Ch] CHEVALLEY, C.: Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leurs représentations. *C.R. Acad. Sci.* **227** 1136-1138 (1948).
- [CW] COXETER, H.S.M. EN WEYL, H.: The structure and representation of continous groups. Appendix. *Inst. for Adv. Study, notes miméographiées par N. Jacobson et R. Brauer* (1935).
- [Cu1] CUTKOVSKY, S.D.: Factorization of complete ideals. *J. Algebra* **115**, 144-149 (1988).
- [Cu2] CUTKOVSKY, S.D.: On unique and almost unique factorization of complete ideals II. *Inv. Math.* **98**, 59-74 (1989).
- [DI] DELGADO, F.: The semigroup of values of a curve singularity with several branches. *Manuscripta Math.* **59**, 347-374 (1987).

- [De] DELIGNE, P.: Intersections sur les surfaces régulières, in "Groupes de Monodromie ... (SGA 7, II)". *Springer-Verlag LNM* 340, 1-38 (1973).
- [Dm] DEMAZURE, M.: Surfaces del Pezzo. *Springer-Verlag LNM* 777, 21-69 (1980).
- [DV1] DU VAL, P.: On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction (Part I). *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 30, 453-465 (1934).
- [DV2] DU VAL, P.: On absolute and non absolute singularities of algebraic surfaces. *Istambul Univ. Fen. Fak. Mecmvasi* 9(A), 159-215 (1944).
- [EC] ENRIQUES, F. Y CHISINI, O.: Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. *Bologna. Zanichelli*, (1915).
- [F] FULTON, : Intersection theory. *Springer-Verlag EMG* 2, (1984).
- [G] GIRAUD, J.: Intersection sur les surfaces normales. *Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique*, (1979).
- [Gö] GÖHNER, H.: Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings. *J. Algebra* 34, 403-429 (1975).
- [GV] GONZALEZ-SPRINGBERG, G. Y VERDIER, J.L.: Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 16, 409-449 (1983).
- [Gn] GONZALEZ-SPRINGBERG, G.: Désingularisation des surfaces par des modifications de Nash normalisées. *Séminaire Bourbaki*. 661, (1985-86).
- [EGA I] GROTHENDIECK, A. Y DIEUDONNÉ, J.: Eléments de Géométrie Algébrique I. *Publ. Math. I.H.E.S.*, (1961).
- [EGA II] GROTHENDIECK, A. Y DIEUDONNÉ, J.: Eléments de Géométrie Algébrique II. *Publ. Math. I.H.E.S.* 8, (1961).
- [EGA III] GROTHENDIECK, A. Y DIEUDONNÉ, J.: Eléments de Géométrie Algébrique III. *Publ. Math. I.H.E.S.* 8, (1961).
- [H] HARTSHORNE, R.: Algebraic Geometry. *Springer-Verlag GTM* 52, (1977).
- [Ho] HOSKIN, M.A.: Zero-dimensional valuation ideals associated with plane curve branches. *Proc. London Math. Soc.*(3) 6, 70-99 (1956).
- [Hu] HUNEKE, C.: Complete ideals in two-dimensional regular local rings. *Commutative Algebra. Proceedings of Microprogram held. June 15 - July 2, 1987. Springer-Verlag*, 325-337 (1989).
- [HS] HUNEKE, C. Y SALLY, J.: Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals. *J. Algebra* (2) 115, 481-500 (1988).
- [La] LAUFER, H.: On rational singularities. *Amer. J. Math.* 94, 597-608 (1972).
- [LJ] LEJEUNE-JALABERT, M.: Linear systems with near base conditions and complete ideals in dimension two. *Preprint*, (1992).

- [Lch] LICHTENBAUM, S.: Curves over discrete valuation rings. *Amer. J. Math.* **90**, 380-405 (1968).
- [Li1] LIPMAN, J.: Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization. *Publ. Math. I.H.E.S.* **36**, 195-279 (1969).
- [Li2] LIPMAN, J.: On complete ideals in regular local rings. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra, vol. I, in honor of Masayoshi Nagata. Kinokuniya, Tokyo*, 203-231 (1988).
- [Li3] LIPMAN, J.: Proximity inequalities for complete ideals in two-dimensional regular local rings. *Commutative Algebra week, Mount Holyoke College, July 1992. Proceedings, to appear in Contemporary Mathematics*.
- [Li4] LIPMAN, J.: Adjoints and polars of simple complete ideals in two-dimensional regular local rings. *Algebra and Algebraic Geometry, Tenerife, June 1992, Proceedings (to appear)*.
- [Mo] MORALES, M.: Calcul de quelques invariants des singularités de surface normale. *J. London Math. Soc.* **40**, 99-107 (1965).
- [Mh] MUHLY, H.T.: On the existence of asymptotically irreducible ideals. *L'Enseignement Mathématique.* **31**, (1983).
- [MS1] MUHLY, H.T. Y SAKUMA, M.: Some multiplicative properties of complete ideals. *Trans. Amer. Soc.* **106**, 210-221 (1963).
- [MS2] MUHLY, H.T. Y SAKUMA, M.: Asymptotic factorization of ideals. *J. London Math. Soc.* **38**, 341-350 (1963).
- [M1] MUMFORD, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface. *Publ. Math. I.H.E.S.* **9**, 229-246 (1961).
- [M2] MUMFORD, D.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of effective divisor on an algebraic surface. *Ann. Math. (2nd Ser.)* **76**, 560-615 (1962).
- [P] PINKHAM, H.: Singularités rationnelles de surfaces. *Springer-Verlag LNM* **777**, 147-178 (1980).
- [R1] REES, D.: Valuations associated with ideals. *J. London Math. Soc.(2)* **31**, 221-228 (1956).
- [R2] REES, D.: Valuations associated with a local ring. *J. London Math. Soc.(2)* **31**, 228-235 (1956).
- [R3] REES, D.: Hilbert functions and pseudo-rational local rings of dimension two. *J. London Math. Soc.(2)* **24**, 467-479 (1981).
- [S] SERRE, J.P.: Sur la cohomologie de variétés algébriques. *J. Math. Pures et Appl.* **36**, (1957).
- [Sp1] SPIVAKOVSKY, M.: Valuations in function fields of surfaces. *Amer. J. Math.* **112**, 107-156 (1990).
- [Sp2] SPIVAKOVSKY, M.: Sandwiched singularities and desingularization of

surfaces by normalized Nash transformations. *Amer. J. Math.* **131**, 411-491 (1990).

[T] TITS, J.: Groupes simples et géométries associées. *Proc. Int. Congress Math., Stockholm* 197-221 (1962).

[W] WALDI, R.: Wertehalbgruppe und singularität einer algebraischen kurve. Dissertation. *Regensburg*. (1972).

[Z1] ZARISKI, O.: Polynomial ideals defined by infinitely near base points. *Amer. J. Math.* **60**, 151-204 (1937).

[Z2] ZARISKI, O.: The reduction of the singularities of an algebraic surface. *Ann. of Math.(3)* **40**, 639-689 (1939).

[Z3] ZARISKI, O.: Foundations of a general theory of birational correspondences. *Trans. Am. Math. Soc.* **53** (1943).

[Z4] ZARISKI, O.: Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi. *Ann. of Math.(3)* **55**, (1952).

[ZS] ZARISKI, O. Y SAMUEL, P : Commutative Algebra, vol. II. *Van Nostrand, Princenton*, (1960).

Indice

1. Singularidades racionales de superficie. Ideales completos.	1
§1. Preliminares.	2
§2. Superficies con singularidades racionales. Desingularización.	6
§3. Caracterización de las singularidades racionales por el género de los ciclos excepcionales.	8
§4. Caracterización de las singularidades racionales en función del ciclo fundamental.	11
§5. Finitud del grupo $Cl(\mathcal{O}_{S,P})$ para singularidades racionales. .	14
§6. Criterio de existencia de divisores de Cartier en una singularidad racional. Función de Hilbert-Samuel.	16
⇒ §7. Puntos dobles racionales.	19
§8. Ideales completos de un dominio íntegramente cerrado. Primera caracterización.	20
§9. Ideales contraídos. Segunda caracterización de los ideales completos.	25
§10. Ideales completos del anillo local de una singularidad racional de superficie.	27
2. Constelaciones, matriz de proximidad, cúmulos e ideales completos.	31
§1. Puntos infinitamente próximos y constelaciones.	32
§2. Transformado total de divisores de Weil. Matriz de proximidad.	35
§3. Órdenes de divisores de Weil respecto de valoraciones divisoriales.	39
§4. Forma y matriz de intersección.	42
§5. Constelaciones asociadas a los puntos dobles racionales. . .	45
§6. Concepto de cúmulo.	56
§7. Ideal completo asociado a un cúmulo.	61

3. Una generalización de la teoría geométrica de Enriques.	
Semigrupos de cúmulos y de ideales completos.	63
§1. Desigualdades de proximidad.	64
§2. Órdenes virtuales y órdenes exactos.	66
§3. Reformulación en términos de ideales y de divisores asociados.	70
§4. Órdenes exactos de divisores de Cartier definidos por elementos generales del ideal completo asociado a un cúmulo.	72
§5. Cuatro semigrupos equivalentes.	74
§6. Generadores del semigrupo de ideales completos visto como cono simplicial.	77
§7. Semifactorización en el semigrupo de ideales completos.	82
§8. Semigrupo asociado a puntos dobles racionales.	89
§9. Cuándo hay factorización en el semigrupo de los ideales completos.	97
4. Algunas consecuencias.	99
I. Colongitud y sistemas de generadores de un ideal completo.	100
§1. Colongitud de un ideal completo.	100
§2. Polinomio de Hilbert-Samuel de un ideal completo.	104
§3. Cardinal de un sistema minimal de generadores de un ideal com- pleto.	106
§4. Un algoritmo para calcular un sistema minimal de generadores.	108
II. Grafo dual, forma de intersección y semigrupo de ideales completos de una singularidad racional de superficie.	116
§5. Tipo de una singularidad racional en función de la forma de in- tersección.	117
§6. Tipo de una singularidad racional en función del cono simplicial E_m^+ de la desingularización minimal.	119
§7. Tipo de una singularidad racional y matriz de proximidad.	122
III. Curvas inmersas en una singularidad racional de super- ficie y clase de equirresolución como curvas en el espacio.	127
§8. Curvas inmersas en una singularidad racional de superficie.	127
§9. Relación con el concepto de equirresolución.	133
Bibliografía.	143