

# El cono de curvas asociado a una superficie racional. Poliedricidad

Tesis doctoral presentada por

**Francisco José Monserrat Delpalillo**

y dirigida por

**Antonio Campillo López y Carlos Galindo Pastor**

UNIVERSITAT JAUME I  
Escola Superior de Tecnologia i Ciències Experimentals  
Departament de Matemàtiques

Abril, 2003



*A Carmen*



# *Agradecimientos*

Quisiera dar mi más sincero agradecimiento a Carlos Galindo y a Antonio Campillo. Ha sido un placer y un privilegio trabajar bajo su dirección; además de su talla investigadora, he de destacar aquí su inmensa valía como seres humanos, sus consejos y su apoyo en los momentos difíciles.

A mis padres, por su apoyo incondicional y por el enorme esfuerzo que siempre han hecho para poder ofrecernos lo mejor, tanto a mí como a mis hermanos.

A mis hermanos, por su apoyo y su paciencia.

A todos mis amigos y amigas, por los buenos momentos pasados y por toda la inestimable ayuda que me han prestado.

A los compañeros y compañeras del IES La Sénia, por el compañerismo y la amistad demostrados, por todos los buenos momentos que he pasado junto a ellos, y por su comprensión, apoyo y paciencia durante el período en que me tocó tomar una decisión difícil.

Al Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I, por los medios y oportunidades que me ha ofrecido para llevar esta tesis a buen término.

También quisiera dar las gracias a M. Lahyane y a M. Alberich, pues las interesantes conversaciones mantenidas con ellos han contribuído a mejorar la forma final de esta memoria.

Y a Carmen, mi mujer, por su cariño, paciencia y comprensión.

*A todos, muchísimas gracias.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>Notaciones y convenios</b>	<b>13</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1. Explosiones . . . . .	15
1.2. Configuraciones sobre una variedad no singular . . . . .	21
1.3. Clústers y haces de ideales con soporte finito . . . . .	28
<b>2. Conos convexos asociados a variedades y morfismos</b>	<b>37</b>
2.1. Factorizaciones de un morfismo proyectivo . . . . .	39
2.2. Conos asociados a una variedad proyectiva . . . . .	45
2.3. Conos asociados a un morfismo proyectivo . . . . .	52
2.4. Ideales completos y conos característicos en el caso local . . . . .	65
2.5. El cono de curvas asociado a una superficie regular . . . . .	74
<b>3. El cono de curvas asociado a una superficie racional regular</b>	<b>91</b>
3.1. Superficies racionales relativamente minimales . . . . .	93
3.2. Divisores sobre una superficie de Hirzebruch . . . . .	94
3.3. Divisores sobre superficies racionales no singulares . . . . .	97
3.4. Condiciones proyectivas de poliedricidad . . . . .	98
3.5. Condiciones infinitesimales de poliedricidad . . . . .	116
3.6. Conos de curvas asociados a superficies sobre $\mathbb{P}^2$ . . . . .	146
<b>A. Análisis convexo</b>	<b>173</b>
A.1. Primeras definiciones y propiedades . . . . .	173
A.2. Convergencia de una sucesión de rayos . . . . .	182
A.3. Caras y células de un cono . . . . .	183





# Introducción

Siguiendo a Kleiman, consideramos dos espacios vectoriales duales asociados a un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  de esquemas algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ : uno de ellos, denotado por  $A^1(X/Y)$ , está generado por las clases de equivalencia numérica relativas a  $f$  de los divisores de Cartier de  $X$ , y el otro, denotado por  $A_1(X/Y)$ , está generado por las clases de equivalencia numérica de los 1-ciclos de  $X$  contraídos por  $f$ . En estos espacios vectoriales definimos tres conos convexos asociados al morfismo  $f$ : *el cono de curvas*,  $NE(X/Y)$ , que es el cono de  $A_1(X/Y)$  generado por las clases de equivalencia numérica de los 1-ciclos efectivos de  $X$ , *el cono semiample*  $P(X/Y)$ , dual del anterior, y *el cono característico*  $\tilde{P}(X/Y)$ , generado por las clases de los divisores de Cartier asociados a haces invertibles de  $X$  generados por secciones globales que dan lugar a morfismos factorizando a  $f$ . La introducción y primer estudio de los conos característicos se debe a Hironaka [39], pero es Kleiman en [45] el que obtiene la propiedad de los mismos que nos va a interesar en esta memoria: las células topológicas del cono característico  $\tilde{P}(X/Y)$  están en correspondencia biyectiva con las factorizaciones  $X \xrightarrow{h} W \xrightarrow{g} Y$  del morfismo  $f$  tales que  $g$  es proyectivo y  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W$ . A una terna  $(h, W, g)$  de este tipo se le llama *factor de Stein de  $f$* , y queda determinada por las curvas de  $X$  contraídas por  $h$  (corolario 2.1.16).

Estos conos son una buena herramienta en el estudio de problemas que se suscitan en diferentes ámbitos. Por una parte, tras el desarrollo por Zariski de una teoría de ideales completos (como traducción aritmética de la teoría geométrica de puntos infinitamente próximos desarrollada por los geómetras italianos de principios del siglo  $XX$ ), donde se concluye la existencia de factorización única de ideales completos en anillos locales regulares de dimensión dos [74], resulta que los conos característicos se han revelado como una buena herramienta para el estudio de los nuevos fenómenos de factorización que aparecen en dimensiones superiores a dos ([16] y [10]).

Por otra parte, en virtud del resultado probado por Kleiman, los conos característicos pueden usarse también para estudiar, dado un morfismo pro-

yectivo  $f : X \rightarrow Y$ , los factores de Stein de  $f$ . En este sentido, la finitud del número de células topológicas del cono característico implicará la existencia de un número finito de tales factores. Aquí entra en juego de una manera notable el cono de curvas  $NE(X/Y)$ , ya que si éste es poliédrico entonces el cono característico posee un número finito de células, existiendo, por tanto, un número finito de factores de Stein (véase el corolario 2.3.25). Si  $X$  es una variedad proyectiva sobre  $k$  y el morfismo  $f$  coincide con el morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ , la poliedricidad del cono de curvas (denotado en este caso simplemente por  $NE(X)$ ) implicará la finitud del número de contracciones de  $X$ , entendiendo por contracción un morfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $Y$  es una variedad proyectiva y  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ .

Existen varios trabajos relacionados con la caracterización, e incluso clasificación, de las superficies proyectivas regulares pertenecientes a una cierta clase que poseen un número finito de contracciones a otra variedad proyectiva, o con la poliedricidad del cono de curvas.

Harbourne, en [34], considera una superficie racional regular  $X$  obtenida mediante explosiones centradas en puntos propios o infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  (es decir, tales que existe un morfismo birracional propio  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ ) y se plantea el problema consistente en caracterizar aquellas superficies  $X$  de este tipo tales que existe un número finito de contracciones  $g : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  (identificando aquellas que difieren en una transformación lineal de  $\mathbb{P}^2$ ), asumiendo que la clase anticanónica de  $X$  posee una sección reducida e irreducible. Define unas ciertas clases de divisores de  $\text{Pic}(X)$ , a las que denomina *raíces nodales*, y considera el submódulo de  $\text{Pic}(X)$  generado por dichas clases. Demuestra que  $X$  posee un número finito de contracciones a  $\mathbb{P}^2$  si, y sólo si, existe un número finito de raíces nodales y generan un submódulo de  $\text{Pic}(X)$  de rango maximal. Si embargo, no proporciona un criterio general para decidir si  $X$  posee un número finito de raíces nodales o no. Finalmente, proporciona otra caracterización en términos del grupo de automorfismos de  $X$ , independiente de las raíces nodales.

En [55], Miranda y Persson estudian el caso particular en que  $X$  es una superficie racional elíptica y jacobiana (estas superficies también pueden caracterizarse como las obtenidas al explotar los nueve puntos base de un haz de cúbicas en  $\mathbb{P}^2$ ). Proporcionan una clasificación de las superficies de este tipo que poseen un número finito de contracciones a  $\mathbb{P}^2$ .

Si consideramos el caso de las superficies proyectivas racionales regulares  $X$  con clase canónica de auto-intersección nula (es decir, aquellas superficies obtenidas al explotar 9 puntos propios o infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  u 8 puntos propios o infinitamente próximos a una superficie de Hirzebruch) en relación con la infinitud o finitud del conjunto de sus  $(-1)$ -curvas (es decir, las curvas racionales regulares de auto-intersección  $-1$ ), se tiene que la fi-

nitud de este conjunto equivale a la poliedricidad del cono de curvas de  $X$ . Denominando *superficie racional extremal* a aquella superficie proyectiva racional con un número finito de  $(-1)$ -curvas, en [48] Lahyane prueba que si  $X$  posee un divisor anticanónico que no es numéricamente efectivo, entonces  $X$  es extremal (lo que equivale a la poliedricidad de  $NE(X)$ ). Este hecho también se prueba en esta memoria, aunque con técnicas distintas. Se puede dar también (véase [49]) una caracterización de las superficies racionales extremales  $X$ , bajo la hipótesis de la existencia de un divisor anticanónico numéricamente efectivo, en términos de las  $(-2)$ -curvas de  $X$  (curvas racionales regulares con auto-intersección  $-2$ ). Finalmente, asumiendo que  $X$  es extremal y con clase anticanónica numéricamente efectiva, se puede proporcionar una cota del número de  $(-1)$ -curvas de  $X$  (véase [50]). El estudio de las  $(-1)$ -curvas está relacionado con la bien conocida conjetura de Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz. Esta conjetura dice que si el sistema lineal de curvas planas de un grado fijado pasando por un conjunto de puntos situados en posición general con multiplicidades asignadas no posee la dimensión esperada, dada por el teorema de Riemann-Roch, entonces dicho sistema lineal debe contener al doble de una  $(-1)$ -curva en su parte fija. Fué formulada primero por Segre en [71] y ha sido reformulada posteriormente por varios autores (véase [36], [25], [40], [15], [54] y [68]).

Campillo y González-Sprinberg consideran, en [10], morfismos proyectivos entre variedades normales  $\pi : X \rightarrow Y$ , siendo  $Y$  el espectro de un anillo local, y estudian las variedades sandwich de  $\pi$ , es decir, aquellas variedades normales  $W$  tales que existe una factorización  $X \rightarrow W \rightarrow Y$  de  $\pi$ . Puesto que  $X$  e  $Y$  son normales, dichas factorizaciones se corresponden con los factores de Stein de  $\pi$ . Este estudio se realiza por medio del cono característico  $\tilde{P}(X/Y)$ , ya que las variedades sandwich se corresponden con sus células. Se observa que, en el caso en que  $Y$  sea el espectro de un anillo local regular de dimensión tres, el cono de curvas  $NE(X/Y)$  puede expresarse como la suma convexa de los conos de curvas asociados a los transformados estrictos de los divisores excepcionales, que son superficies racionales regulares. Por tanto, la poliedricidad de los conos de curvas asociados a estas superficies implicaría la finitud del número de células de  $\tilde{P}(X/Y)$  y, como consecuencia, la finitud del conjunto de las variedades sandwich. De aquí se desprende que el estudio del cono de curvas en el caso bidimensional ofrece información sobre el caso tridimensional. Más concretamente, la detección de condiciones suficientes para la poliedricidad del cono de curvas de una superficie racional regular proporciona familias de morfismos  $X \rightarrow Y$  entre variedades de dimensión 3, con un número finito de variedades sandwich.

Dos trabajos recientes dedicados al estudio de los conos de curvas y característico en casos particulares son [11] y [12], en los que Campillo, Piltant

y Reguera consideran la superficie obtenida al eliminar los puntos base de un haz de curvas planas “en el infinito”. Cuando la curva genérica del haz sólo posee una rama en la recta del infinito, se prueba que el cono de curvas es, no sólo poliédrico, sino regular. En el caso general, el cono de curvas es poliédrico exactamente cuando una de las fibras del haz es un divisor tal que las componentes de su soporte tienen una única rama en la recta del infinito. Resultados similares precisos se pueden obtener respecto del cono característico.

Continuando con el interés que suscita el estudio de los conos introducidos anteriormente resulta que, tras estudiar la clase de las superficies proyectivas regulares con cono de curvas poliédrico, Nikulin en [62] indica que dichos conos pueden ser considerados como los análogos en geometría algebraica de los grupos aritméticos generados por reflexiones en espacios hiperbólicos. También sugiere que la cohomología cuántica de variedades fibradas por superficies  $Z$  con cono de curvas poliédrico puede tener interesantes aplicaciones, puesto que el conjunto de las curvas de  $Z$  con auto-intersección negativa (que generan los rayos extremales del cono de curvas) puede ser considerado como el análogo de un sistema de raíces reales simples.

Finalmente, no hay que olvidar que el cono de curvas es el ingrediente principal de la teoría de Mori [58], ya que son algunos de sus rayos extremales (concretamente los que tienen intersección estrictamente negativa con la clase de divisores canónica) los que determinan las contracciones utilizadas en dicha teoría. Pero, además, la teoría de Mori ha de precisar un complemento (de difícil estudio) para abordar las contracciones de rayos con intersección no negativa con la clase canónica. Los resultados de esta memoria están relacionados con este planteamiento.

El objetivo general de esta memoria es el estudio del cono de curvas asociado a una superficie proyectiva racional regular y, de manera más concreta, el establecimiento de condiciones suficientes, de naturaleza aritmética, para que dicho cono sea poliédrico. De este modo, mediante técnicas y puntos de vista diferentes a los utilizados por los autores antes mencionados, obtendremos una clase amplia de superficies proyectivas racionales regulares para las cuales el cono de curvas es poliédrico, implicando este hecho la existencia de un número finito de contracciones y la existencia de un número finito de  $(-1)$ -curvas. Respecto a este último aspecto cabe decir que las únicas superficies proyectivas regulares que pueden tener un cantidad infinita de  $(-1)$ -curvas son precisamente las racionales (véase [69]). Puesto que estas superficies se obtienen explotando sucesivamente una secuencia de puntos, propios o infinitamente próximos, sobre una superficie racional relativamente minimal, para realizar este estudio usaremos el lenguaje de configuraciones de puntos infinitamente próximos, precisado por Casas en [13] y por Campi-

llo, González-Sprinberg y Lejeune-Jalabert en [9].

El primer capítulo de esta memoria es preliminar. En él, recopilamos algunos conceptos y resultados conocidos sobre explosiones y resumimos el lenguaje de configuraciones y clústers de puntos infinitamente próximos, y en cuyos términos se expresarán algunos de los resultados importantes del capítulo 3.

En el capítulo segundo se establece el contexto general en el que debe situarse nuestro estudio. Se definen los diversos conos convexos asociados a una variedad proyectiva y a un morfismo proyectivo, precisando sus propiedades generales, la utilidad de su estudio y el papel que el cono de curvas desempeña él. Finalmente, se particulariza al caso bidimensional y se establecen las propiedades generales del cono de curvas asociado a una superficie proyectiva regular.

En la primera sección precisamos los conceptos de *factor* y *factor de Stein* de un morfismo proyectivo, estableciendo un concepto de isomorfía entre ellos y la relación de dominación, que es de orden si la restringimos al conjunto de las clases de isomorfía de los factores de Stein. Deducimos que las contracciones que factorizan al morfismo y que están determinadas por las curvas contraídas son justamente las correspondientes a los factores de Stein.

En la sección segunda se definen el cono de curvas, el cono semiamplio y el cono característico asociados a una variedad proyectiva estableciéndose, además, las principales propiedades relativas a sus estructuras; entre ellas figura el celebrado teorema del cono, debido, en su primera versión, a Mori [58], y estudiado en general por Kawamata [43], y que prueba que el cono de curvas es localmente poliédrico en uno de los dos semi-espacios determinados por el subespacio ortogonal a la clase de equivalencia numérica de la clase de divisores canónica.

La sección tercera se dedica a generalizar las definiciones dadas en la sección anterior, considerando las versiones relativas de los conos de curvas, semiamplio y característico, asociándolos ahora a morfismos proyectivos, en lugar de a variedades. En ella, se estudian las relaciones entre los diferentes conos y se enuncia el resultado de Kleiman [45] que establece la biyección entre las células del cono característico y los factores de Stein, dejando patente la interrelación existente entre la estructura celular del cono característico y la relación de dominación entre los factores de Stein de un morfismo proyectivo. Finalmente se observa que, como consecuencia de esta correspondencia, la poliedricidad del cono de curvas implica la finitud del número de factores de Stein.

El cono característico, tal y como se muestra en la sección cuarta, permite dar una descripción de los fenómenos de carácter local relativos a las pro-

propiedades de factorización en el semigrupo de ideales completos de un anillo local regular. En dimensión dos existe factorización única de ideales completos (tal y como demostró Zariski), no siendo así en dimensión superior. Si  $R$  es un anillo local regular, el estudio de los conos característicos relativos a los morfismos  $X \rightarrow \text{Spec}(R)$  que son composición de explosiones centradas en puntos cerrados, permite describir los nuevos fenómenos de factorización que aparecen en dimensión superior a 2. Un problema que cabe plantearse, también relacionado con una situación local, es el de dar condiciones para la existencia de un número finito de variedades sandwich para un morfismo de este tipo. El cono de curvas  $NE(X/\text{Spec}(R))$  puede expresarse como la suma convexa de los conos de curvas asociados a los transformados estrictos de los divisores excepcionales de las explosiones. La poliedricidad de éstos supondrá la finitud del número de células de  $\tilde{P}(X/\text{Spec}(R))$  y, por tanto, la finitud del número de variedades sandwich. Si la dimensión de  $R$  es igual a 3, los transformados estrictos de los divisores excepcionales son superficies racionales regulares, con lo cual las condiciones de poliedricidad que se deducirán en el capítulo tres podrán aplicarse a este caso.

En la sección quinta se considera una superficie proyectiva regular  $X$  y se estudian las propiedades generales de su cono de curvas. Se prueban condiciones que deben satisfacer sus rayos extremales y los de su clausura. Cabe destacar que los generadores de todos ellos han de tener auto-intersección no positiva (si  $\dim(A_1(X))$  es mayor que 1) y que el rayo generado por la clase en  $A_1(X)$  de cualquier curva con auto-intersección negativa es extremal. Además, se obtiene, como consecuencia del teorema del cono, que si  $\dim(A_1(X)) \geq 3$ , entonces los rayos extremales de  $NE(X)$  con intersección negativa con la clase canónica son exactamente los generados por las clases de las  $(-1)$ -curvas de  $X$ . Se considera también el conjunto  $\mathcal{R}(A_1(X))$  formado por los rayos de  $A_1(X) \cong \mathbb{R}^m$ , y el subconjunto  $\mathcal{T}(X)$  de  $\mathcal{R}(A_1(X))$  constituido por los rayos extremales de la clausura de  $NE(X)$ . Se dota a  $\mathcal{R}(A_1(X))$  de una topología (la inducida por la topología usual de la esfera  $(m-1)$ -dimensional en  $\mathbb{R}^m$ ) y, como herramienta novedosa y clave en esta memoria, consideramos los puntos de acumulación de  $\mathcal{T}(X)$  en el espacio topológico  $\mathcal{R}(A_1(X))$ , denominados aquí *rayos límite de  $\mathcal{T}(X)$* . Se prueba que la no poliedricidad de la clausura del cono de curvas equivale a la existencia de tales rayos límite. Además, si la dimensión de  $A_1(X)$  es mayor o igual que 3, entonces la poliedricidad de  $NE(X)$  equivale a la poliedricidad de su clausura. Todo esto indica la conveniencia de delimitar la situación en  $A_1(X)$  de los rayos límite de  $\mathcal{T}(X)$ . A este respecto, obtenemos tres propiedades que deben satisfacer dichos rayos: sus generadores deben tener auto-intersección nula, intersección no negativa con la clase canónica y, además, deben tener también intersección no negativa con la clase de cualquier divisor efectivo de

$X$ . Finalmente, a partir de estas propiedades deducimos el conocido hecho de que las superficies proyectivas regulares con un divisor anticanónico amplio poseen un cono de curvas poliédrico.

El estudio de la estructura del cono de curvas asociado a una superficie proyectiva racional regular  $Z$  se aborda en el capítulo 3, teniéndose como objetivo principal el establecimiento de condiciones bajo las cuales dicho cono es poliédrico. Estas condiciones serán de dos tipos: proyectivas e infinitesimales. Entenderemos por condición proyectiva aquella que involucra la efectividad de ciertos divisores, y por condición infinitesimal aquella que depende únicamente de la naturaleza de un morfismo birracional de la superficie estudiada a una relativamente minimal  $X$  (dicho de otra forma, de la “situación” de los centros de las explosiones necesarias para obtener  $Z$  a partir de  $X$ ).

En la primera sección de este capítulo 3 se recopilan una serie de conceptos y resultados relacionados con superficies proyectivas relativamente minimales. Es sabido que las racionales son  $\mathbb{P}^2$  y las superficies de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  con  $\delta \neq 1$ . Como consecuencia, cualquier superficie proyectiva racional regular puede obtenerse mediante explosiones sucesivas en puntos propios o infinitamente próximos al plano proyectivo o a una de las superficies de Hirzebruch.

En las secciones segunda y tercera se establecen una serie de propiedades y resultados relativos a divisores en superficies racionales, que nos serán de utilidad en el desarrollo del resto del capítulo.

La herramienta fundamental para obtener condiciones suficientes de poliédricidad del cono de curvas asociado a una superficie racional regular  $Z$  es el concepto de rayo límite del conjunto  $\mathcal{T}(Z)$ . Puesto que la poliédricidad del cono equivale a la no existencia de tales rayos límite, la estrategia utilizada consistirá en delimitar la situación de esos rayos, encontrando un subconjunto de  $A_1(Z)$  que los contenga, e imponer luego condiciones que impliquen que dicho conjunto sea vacío.

En la sección cuarta se deducen condiciones de tipo proyectivo que implican la poliédricidad del cono de curvas. Fijamos una superficie racional regular  $Z$  y un morfismo birracional  $\pi : Z \rightarrow X$ , donde  $X$  es el plano proyectivo o una de las superficies de Hirzebruch; este morfismo será la composición de las explosiones centradas en los puntos de una cierta configuración  $\mathcal{C}$  de puntos propios o infinitamente próximos a  $X$ .

Probamos que si la auto-intersección de la clase canónica  $K_Z$  de  $Z$  es estrictamente positiva, entonces  $NE(Z)$  es siempre poliédrico. Esta situación corresponde al caso en que la configuración  $\mathcal{C}$  tenga menos de 9 puntos si  $X = \mathbb{P}^2$ , y menos de 8 si  $X$  es una superficie de Hirzebruch. Estudiamos también el caso  $K_Z^2 = 0$ , en el que la configuración  $\mathcal{C}$  tiene 9 puntos si  $X$  es  $\mathbb{P}^2$ , y 8 puntos si es una superficie de Hirzebruch. Probamos que, en esta

situación, el rayo de  $A_1(Z)$  generado por la clase anticanónica es el único rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$  posible; además, si la clase anticanónica no es numéricamente efectiva, entonces el cono de curvas es poliédrico.

Proporcionamos un ejemplo de una cadena de 9 puntos sobre  $\mathbb{P}^2$  (es decir, una configuración de puntos propios o infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  que satisface que cada punto no propio pertenece al divisor excepcional creado en la explosión precedente) tal que el cono de curvas asociado a su cielo posee infinitos rayos extremales y su cono característico no es cerrado.

A continuación, buscamos divisores efectivos cuya existencia implique la poliedricidad del cono de curvas. En este sentido, imponemos la condición de que, siendo  $X = \mathbb{P}^2$ , el sistema lineal de rectas proyectivas pasando por la configuración  $\mathcal{C}$  sea no vacío, resultando, entonces, que tanto  $NE(Z)$  como el cono característico  $\tilde{P}(Z)$  son regulares. Imponiendo la condición de que el sistema lineal de cónicas pasando por  $\mathcal{C}$  sea no vacío se llega a la conclusión que  $NE(Z)$  es también poliédrico y  $\tilde{P}(Z)$  es un cono cerrado. Una condición de naturaleza similar se deduce también para el caso en que  $X$  sea una superficie de Hirzebruch.

En la sección 5 consideramos un nuevo cono de  $A_1(Z)$ , al que denominamos *cono de proximidad*, cuya definición involucra únicamente las relaciones de proximidad entre los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ ; más concretamente, es el cono formado por aquellos elementos de  $A_1(Z)$  cuya intersección con las clases de los transformados estrictos de los divisores excepcionales es no negativa. Probamos que este cono debe contener a cualquier rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ . Este hecho, junto con las propiedades de estos rayos límite deducidas en las secciones precedentes, permite definir un conjunto más restringido  $\Omega(Z)$  al cual todo rayo límite debe pertenecer. Este conjunto depende únicamente de la superficie relativamente minimal  $X$  y de la posición de los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ . Se trata ahora de encontrar una condición adecuada sobre la configuración  $\mathcal{C}$  que asegure que el conjunto  $\Omega(Z)$  sea vacío. Esta condición es la *P-suficiencia*, concepto que definimos a continuación.

Consideremos una configuración  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  de puntos propios o infinitamente próximos a  $X$  y sea  $Z$  la superficie obtenida mediante la secuencia de explosiones centradas en los puntos de  $\mathcal{C}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  denotemos por  $D(p_i)$  al divisor  $Z$  tal que  $\mathcal{O}_Z(D(p_i))$  es el haz de ideales completos asociado al punto  $p_i$  (véase la sección 1.3). Consideremos la matriz real cuadrada y simétrica  $G_{\mathcal{C}} := (g_{ij})$  definida de la siguiente manera:

$$g_{ij} = -\gamma D(p_i) \cdot D(p_j) - (K_Z \cdot D(p_i))(K_Z \cdot D(p_j)),$$

donde  $\gamma$  es igual a 9 si  $X$  es  $\mathbb{P}^2$  y es igual 8 si es una superficie de Hirzebruch. Diremos que  $\mathcal{C}$  es una configuración *P-suficiente* si, y sólo si, la matriz  $G_{\mathcal{C}}$



verifica la siguiente condición:

$$\bar{x} G_{\mathcal{C}} \bar{x}^t > 0$$

para cualquier  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $x_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Obsérvese que la propiedad que debe verificar la matriz  $G_{\mathcal{C}}$  es una condición similar, pero más débil, que la de ser definida positiva. Gaddum, en [22], la llamó ser *condicionalmente definida positiva*.

Obsérvese que la condición de P-suficiencia depende únicamente de las relaciones de proximidad entre los puntos de  $\mathcal{C}$ . En los teoremas 3.5.10 y 3.5.11 probamos que la P-suficiencia de  $\mathcal{C}$  implica (equivale, en el caso en que  $X$  sea igual a  $\mathbb{P}^2$ ) que el conjunto  $\Omega(Z)$  es vacío y, por tanto,  $NE(Z)$  es poliédrico. Este resultado puede verse también en [23] y [24]. Gaddum obtuvo en [22] una condición equivalente a ella que tiene la ventaja de ser computable. Ello nos permite establecer un algoritmo para decidir, a partir de la matriz de proximidad de la configuración  $\mathcal{C}$ , si se satisface o no la condición de P-suficiencia.

En el caso en que la clase canónica de  $Z$  tenga auto-intersección no negativa, probamos que la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente si  $K_Z^2 > 0$ , o bien si  $K_Z = 0$  y existe algún punto satélite en  $\mathcal{C}$ . Como consecuencia se tiene que si  $Z$  posee un divisor anticanónico amplio, entonces la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente.

Si la auto-intersección de la clase canónica es no positiva,  $Z$  ya no posee un divisor anticanónico amplio; en este caso, la condición de P-suficiencia proporciona una nueva clase de superficies racionales con cono de curvas poliédrico, ampliando el espectro existente.

Cabe observar que la condición de P-suficiencia depende de lo especiales que sean las relaciones de proximidad entre los puntos de la configuración, de manera que, si fijamos un número de puntos arbitrario  $n$  y elegimos  $n$  puntos (propios o infinitamente próximos a  $X$ ) tales que las relaciones de proximidad entre ellos sean las adecuadas (es decir, de modo que su posición sea lo suficientemente “singular”) entonces podemos conseguir que el cono de curvas de la superficie obtenida al explotar los puntos de  $\mathcal{C}$  sea poliédrico. Por tanto, podemos decir que la “singularidad” de la configuración es esencial en nuestro criterio. Así, si elegimos un punto singular de una curva y un conjunto de puntos en los sucesivos entornos infinitesimales por los que pasen los transformados estrictos de dicha curva, resulta que si la singularidad es la adecuada, el cono de curvas asociado a la superficie obtenida será poliédrico. Este hecho aproxima nuestro trabajo a los trabajos de Greuel, Lossen y Shustin ([27], [28], [29], [30], [31] y [32]), en los que se estudia la existencia de curvas con singularidades prescritas. Una posible dirección de trabajo futuro será materializar esta relación.

En la última sección del capítulo consideramos dos amplias clases de configuraciones sobre el plano proyectivo: las configuraciones tóricas y las configuraciones de puntos base de haces de curvas planas. En el caso de las configuraciones tóricas es bien conocido que el cono de curvas de cualquier superficie obtenida a partir de ellas es poliédrico; mas aún, se puede describir explícitamente, según [9]. Puesto que la condición de P-suficiencia implica la poliedricidad del cono de curvas, cabe preguntarse cuáles de las configuraciones tóricas son P-suficientes. Proporcionamos esta caracterización y, como consecuencia principal, hacemos notar que cualquier configuración de  $\mathbb{P}^2$  con las mismas relaciones de proximidad que las de una configuración tórica P-suficiente, es también P-suficiente.

En el caso de una configuración de puntos base de un haz de curvas planas, probamos que si las curvas genéricas del haz son íntegras, la P-suficiencia de dicha configuración implica la racionalidad de las curvas genéricas. Vemos que el recíproco se da en el caso de los haces con una única rama en el infinito, y caracterizamos en términos diversos los haces con una única rama en el infinito con configuración de puntos base P-suficiente.

A lo largo de la memoria hemos necesitado diversos resultados de análisis convexo. Muchos de ellos son muy intuitivos, pero no hemos encontrado en la literatura demostraciones de los mismos. Es por ello que para finalizar la memoria hemos introducido un apéndice que agrupa y prueba dichos resultados.

## NOTACIONES Y CONVENIOS

A lo largo de esta memoria  $k$  será un cuerpo algebraicamente cerrado.

Denominaremos *variedad* a un esquema reducido e irreducible de tipo finito sobre  $k$ . Un punto de una variedad se considerará cerrado, mientras no se especifique lo contrario.

$\mathbb{P}^n$  denotará el espacio proyectivo sobre  $k$  de dimensión  $n$ .

Por simplicidad, denotaremos de la misma manera a los divisores de Cartier de una variedad, a sus clases en el grupo de Picard de la variedad y, en el caso en que tales divisores sean efectivos, a sus esquemas soporte. Especificaremos a qué tipo de objeto nos referimos sólo en el caso en que pueda haber confusión.

Una *curva íntegra* de una variedad  $X$  será una subvariedad cerrada de  $X$  de dimensión uno. Un 1-ciclo de  $X$  será una suma formal  $\sum_{i=1}^m n_i C_i$ , donde  $C_1, \dots, C_m$  son curvas íntegras de  $X$  y  $n_1, \dots, n_m$  son números enteros. Un 1-ciclo no nulo  $D = \sum_{i=1}^m n_i C_i$  será una *curva* de  $X$  si es efectivo, es decir, si  $n_i > 0$  para todo  $i = 1 \dots, m$ ;  $C_1, \dots, C_m$  son las *componentes íntegras* de  $D$ . En el caso en que  $X$  sea una superficie no singular, la noción de curva se identifica con la de divisor efectivo.

Si  $D$  es un divisor de Cartier de una variedad  $X$ ,  $H^i(D)$  (o  $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ ) representará el  $i$ -ésimo grupo de cohomología del haz  $\mathcal{O}_X(D)$ , y  $h^i(D)$  (o  $h^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ ) será su dimensión como espacio vectorial, donde  $\mathcal{O}_X(D)$  es el haz asociado a  $D$ .

$|D|$  será el sistema lineal completo determinado por el divisor  $D$ , es decir, el espacio proyectivo correspondiente a  $H^0(D)$ .

$K_X$  denotará la clase en  $\text{Pic}(X)$  de un divisor canónico de  $X$ .

$\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{Q}_+$  y  $\mathbb{Z}_+$  denotarán, respectivamente, los conjuntos de los números reales, racionales y enteros estrictamente positivos.

Si  $A$  es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial real  $V$ ,  $\text{con}(A)$  denota

el menor cono convexo de  $V$  que contiene a  $A$ , es decir:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i \mid n \in \mathbb{Z}_+, \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \text{ y } \bar{v}_i \in A \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Si  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio normado,  $\bar{x} \in V$  y  $\epsilon$  es un número real positivo, denotaremos por  $B_\epsilon(\bar{x})$  a la bola de centro  $\bar{x}$  y radio  $\epsilon$ , es decir:  $B_\epsilon(\bar{x}) := \{\bar{y} \in V \mid \|\bar{y} - \bar{x}\| < \epsilon\}$ .

En ocasiones, para definir una determinada aplicación  $f$ , utilizaremos los símbolos  $x \mapsto y$  para indicar que  $y$  es la imagen de  $x$  por  $f$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo preliminar recopilaremos algunos conceptos y resultados bien conocidos sobre explosiones, configuraciones, clústers y haces de ideales con soporte finito. Usaremos las notaciones del libro de Hartshorne [37] y daremos referencias de los resultados recopilados. Estos objetos serán el soporte matemático y las herramientas que necesitaremos para el estudio de los conos de curvas, objeto de esta memoria.

### 1.1. Explosiones

Una superficie proyectiva racional regular puede ser siempre obtenida mediante sucesivas explosiones puntuales a partir de un modelo relativamente minimal. Puesto que queremos estudiar los conos de curvas asociados a este tipo de superficies (se definirán en el capítulo 2) empezamos resumiendo algunos de los aspectos de la teoría de explosiones que nos van a interesar. Necesitaremos utilizar conos relativos y esto nos lleva, en la primera parte de esta memoria, a trabajar sobre variedades más generales. Solamente estamos interesados en explosiones puntuales; sin embargo nuestros primeros resultados son para casos más generales, pues no añade dificultad esta visión más general.

**Definición 1.1.1.** Sea  $X$  un esquema noetheriano y sea  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$  definido por un haz de ideales coherente  $\mathcal{I}$ . Denotemos por  $\mathrm{Bl}_Y(X)$  al cono proyectivo sobre  $X$  del haz de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$ , i.e.  $\mathrm{Bl}_Y(X) = \mathbf{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n)$ . Llamaremos *explosión de  $X$  con centro en  $Y$*  al morfismo proyección  $\pi : \mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  tal que, para todo abierto afín  $\mathcal{U} \subseteq X$ ,  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathbf{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}(\mathcal{U})^n)$ .

Si  $p$  es un punto de  $X$  e  $Y$  es el subesquema cerrado de  $X$  dado por la imagen de la inmersión natural  $\mathrm{Spec}(k_p) \hookrightarrow X$  (siendo  $k_p$  el cuerpo residual

de  $X$  en el punto  $p$ ), entonces el esquema  $\text{Bl}_Y(X)$  se denotará por  $\text{Bl}_p(X)$  y la correspondiente explosión  $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$  se denominará *explosión (puntual) de  $X$  con centro en  $p$* .

**Proposición 1.1.2.** [37, Chap. II, Prop. 7.13] *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$  y  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión de  $X$  con centro en  $Y$ . Entonces:*

- (a) *El esquema imagen inversa  $\pi^{-1}(Y) \cong \text{Bl}_Y(X) \times_X Y$  es un subesquema cerrado de  $\text{Bl}_Y(X)$  localmente principal cuyo haz de ideales asociado es igual a  $\mathcal{O}_{\text{Bl}_Y(X)}(1)$ .*
- (b) *Si  $\mathcal{U} = X \setminus Y$  entonces  $\pi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$  es un isomorfismo.*

**Definición 1.1.3.** El divisor de Cartier efectivo  $E$  de  $\text{Bl}_Y(X)$  determinado por el subesquema cerrado localmente principal  $\pi^{-1}(Y)$  (véase [37, Chap. II, Rem. 6.17.1]) se denomina *divisor excepcional* de la explosión  $\pi$ . Por abuso de notación, a menudo identificaremos el divisor  $E$  con su esquema soporte  $\pi^{-1}(Y)$ .

**Proposición 1.1.4.** (Propiedad universal de las explosiones, [37, Chap. II, Prop. 7.14]) *Sea  $X$  un esquema noetheriano e  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$ . Si  $f : Z \rightarrow X$  es un morfismo tal que el esquema imagen inversa  $f^{-1}(Y)$  es un subesquema cerrado de  $Z$  localmente principal, entonces existe un único morfismo  $g : Z \rightarrow \text{Bl}_Y(X)$  factorizando  $f$ :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & \text{Bl}_Y(X) \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

**Nota 1.1.5.** Como consecuencia de esta proposición, el único endomorfismo de  $\text{Bl}_Y(X)$  como  $X$ -esquema es el morfismo identidad.

La propiedad universal dada en la proposición anterior caracteriza, salvo isomorfismo, a las explosiones. Esto queda patente en el siguiente corolario, de demostración trivial.

**Corolario 1.1.6.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$  y  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión de  $X$  con centro en  $Y$ . Sea  $\phi : W \rightarrow X$  un morfismo de esquemas verificando la siguiente propiedad: para todo morfismo  $f : Z \rightarrow X$  tal que  $f^{-1}(Y)$  es un subesquema cerrado de  $Z$  localmente principal, existe un único morfismo  $g : Z \rightarrow W$  tal que  $f = \phi \circ g$ . Entonces existe un isomorfismo  $h : W \rightarrow \text{Bl}_Y(X)$  tal que  $\phi = \pi \circ h$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{h} & \text{Bl}_Y(X) \\
 \uparrow g & \searrow \phi & \downarrow \pi \\
 Z & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

**Proposición 1.1.7.** [37, Chap. II, Prop. 7.16] Sea  $X$  una variedad,  $Y$  una subvariedad cerrada propia de  $X$  y  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión de  $X$  con centro en  $Y$ . Entonces:

- (a)  $\text{Bl}_Y(X)$  es una variedad.
- (b)  $\pi$  es un morfismo birracional, propio y suprayectivo.
- (c) Si  $X$  es una variedad casi-proyectiva (resp., proyectiva) sobre  $k$  entonces  $\text{Bl}_Y(X)$  también lo es, y  $\pi$  es un morfismo proyectivo.

**Definición 1.1.8.** Sea  $Y$  un subesquema cerrado de un esquema noetheriano  $X$  y  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la correspondiente explosión con centro en  $Y$ . Si  $Z$  es cualquier subesquema cerrado de  $X$  definimos el *transformado estricto* (resp., *transformado total*) de  $Z$  respecto de la explosión  $\pi$  como el subesquema cerrado de  $\text{Bl}_Y(X)$  constituido por la clausura de  $\pi^{-1}(Z \setminus (Z \cap Y))$  en  $\text{Bl}_Y(X)$  (resp., el esquema imagen inversa  $\pi^{-1}(Z) \cong \text{Bl}_Y(X) \times_X Z$ ).

Si  $X$  es un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$  e  $\mathcal{I}$  es el haz de ideales coherente asociado a un cierto subesquema cerrado  $Z$  de  $X$ , entonces el transformado total de  $Z$  respecto de  $\pi$  es el esquema definido por el haz de ideales imagen inversa de  $\mathcal{I}$ ,  $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\text{Bl}_Y(X)}$ . Como consecuencia, si  $Z$  es un esquema localmente principal, su transformado total también lo será. Por otra parte, existe una correspondencia biyectiva entre divisores de Cartier efectivos y subesquemas cerrados localmente principales (véase [37, Chap. II, Rem. 6.17.1]). Esta observación da lugar al concepto de *transformado total de un divisor de Cartier efectivo*:

**Definición 1.1.9.** Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado de  $X$  y  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión de  $X$  con centro en  $Y$ . Para cualquier divisor de Cartier efectivo  $D$  de  $X$ , el haz de ideales  $\mathcal{O}_X(-D)$  define un subesquema cerrado localmente principal  $Z_D$  de  $X$ . Su transformado total  $\pi^{-1}(Z_D)$  es un subesquema cerrado localmente principal de  $\text{Bl}_Y(X)$ ; si  $\mathcal{I}_{\pi^{-1}(Z_D)}$  es su haz de ideales asociado, existe un único divisor de Cartier efectivo de  $\text{Bl}_Y(X)$ , que denotaremos por  $D^*$ , tal que  $\mathcal{I}_{\pi^{-1}(Z_D)} = \mathcal{O}_{\text{Bl}_Y(X)}(-D^*)$ . Llamaremos *transformado total* de  $D$  respecto de la explosión  $\pi$  al divisor  $D^*$ .

**Nota 1.1.10.** En las condiciones de la definición anterior, si  $D_1$  y  $D_2$  son divisores de  $X$  linealmente equivalentes, entonces sus transformados totales  $D_1^*$  y  $D_2^*$  también son linealmente equivalentes (véase por ejemplo [42, Prop. 2.15]). De hecho, la clase en el grupo de Picard de  $\mathrm{Bl}_Y(X)$  del transformado total de un divisor de Cartier efectivo  $D$  de  $X$  coincide con  $\pi^*D$ , el pull-back de la clase de  $D$  en  $\mathrm{Pic}(X)$  por el morfismo  $\pi$ .

**Proposición 1.1.11.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado propio de  $X$  y  $\pi : \mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión con centro en  $Y$ . Si  $Z \neq Y$  es un subesquema cerrado localmente principal de  $X$  entonces el transformado estricto de  $Z$  en  $\mathrm{Bl}_Y(X)$  es un subesquema localmente principal de  $\mathrm{Bl}_Y(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A)$  un abierto afín de  $X$  tal que  $\mathcal{U} \cap Z \neq \emptyset$ . Sea  $I := x_1A + x_2A + \dots + x_rA$  el ideal de  $A$  correspondiente al punto genérico de  $Y$ . Se tiene que  $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \mathbf{Proj}(S)$ , donde  $S = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ , y  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  puede recubrirse por los abiertos  $D_+(x_i) = \{P \in \mathbf{Proj}(S) \mid x_i \notin P\} \cong \mathrm{Spec}R_i$ , siendo  $R_i = A[x_1, \dots, x_r]_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si  $f \in A$  es tal que  $fA$  es el ideal de  $A$  que define a  $Z$  en  $\mathcal{U}$ , entonces  $\pi^{-1}(Z) \cap D_+(x_i)$  vendrá definido por  $fR_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . El ideal de  $R_i$  que define a  $\pi^{-1}(Y) \cap D_+(x_i)$  es  $IR_i = x_iR_i$ . Si  $\nu$  es el menor entero tal que  $f \in I^\nu$  se tendrá  $f = x_i^\nu g_i$  en  $R_i$ , con  $g_i \notin x_iR_i$ . Por tanto, si representamos por  $V(g_i)$  al subesquema cerrado de  $D_+(x_i)$  determinado por el ideal  $g_iR_i$ , se cumple la igualdad de espacios topológicos:  $\pi^{-1}(Z) \cap D_+(x_i) = (\pi^{-1}(Y) \cap D_+(x_i)) \cup V(g_i)$ , con  $V(g_i) \not\subseteq \pi^{-1}(Y) \cap D_+(x_i)$ . Por tanto, es claro que  $V(g_i)$  es la clausura de  $\pi^{-1}(Z \setminus Y) \cap D_+(x_i)$  en el abierto  $D_+(x_i)$ . Luego  $g_i$  constituye una ecuación local de la clausura  $G$  de  $\pi^{-1}(Z \setminus Y)$  en  $D_+(x_i)$ , probándose así que  $G$  es localmente principal.  $\square$

En las condiciones de la proposición anterior podemos, por tanto, definir el concepto de *transformado estricto de un divisor efectivo de  $X$*  respecto de la explosión  $\pi$  de la siguiente forma:

**Definición 1.1.12.** Sean  $X$  un esquema noetheriano,  $Y$  un subesquema cerrado propio de  $X$  y  $\pi : \mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  la explosión con centro en  $Y$ . Si  $D$  es un divisor de Cartier efectivo de  $X$ , entonces el haz de ideales  $\mathcal{O}_X(-D)$  determinará un subesquema cerrado localmente principal  $Z_D$  de  $X$ . El transformado estricto de  $Z_D$  respecto de la explosión  $\pi$ ,  $\bar{Z}_D$ , es un subesquema cerrado de  $\mathrm{Bl}_Y(X)$  localmente principal; si  $\mathcal{I}_{\bar{Z}_D}$  es su haz de ideales asociado, llamaremos *transformado estricto de  $D$*  respecto de  $\pi$  al único divisor de Cartier efectivo  $\bar{D}$  de  $\mathrm{Bl}_Y(X)$  tal que  $\mathcal{I}_{\bar{Z}_D} = \mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_Y(X)}(-\bar{D})$ .

**Proposición 1.1.13.** [42, §7.10.e] *Sea  $X$  una variedad,  $Z$  una subvariedad cerrada de  $X$  e  $Y$  una subvariedad cerrada propia de  $Z$ . Si  $\pi : \mathrm{Bl}_Y(X) \rightarrow X$*



es la explosión de  $X$  con centro en  $Y$  y  $W$  es el transformado estricto de  $Z$  respecto de  $\pi$ , entonces existe un isomorfismo  $h : \text{Bl}_Y(Z) \rightarrow W$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{i} & \text{Bl}_Y(X) & \xrightarrow{\pi} & X \\ h \uparrow & & & & \uparrow j \\ \text{Bl}_Y(Z) & \xrightarrow{\pi'} & & & Z \end{array}$$

donde  $i$  y  $j$  son las correspondientes inclusiones y  $\pi'$  es la explosión de  $Z$  con centro en  $Y$ .

**Nota 1.1.14.** En las condiciones de la proposición anterior, el transformado estricto de  $Z$  por la explosión  $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  es isomorfo a  $\text{Bl}_Y(Z)$ . Por tanto, por la proposición 1.1.7, será una subvariedad cerrada de  $\text{Bl}_Y(X)$ .

**Teorema 1.1.15.** [37, Chap. II, Th. 8.24] Sea  $X$  una variedad no singular e  $Y \subseteq X$  una subvariedad cerrada no singular definida por un haz de ideales coherente  $\mathcal{I}$ . Entonces:

- (a)  $\text{Bl}_Y(X)$  es no singular.
- (b) El esquema imagen inversa  $\pi^{-1}(Y)$  es isomorfo al espacio fibrado proyectivo asociado al haz localmente libre  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  en  $Y$ :

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \mathbf{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \right)$$

y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(Y) & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & & Y \end{array}$$

siendo  $h$  el isomorfismo y  $p$  y  $q$  las correspondientes proyecciones.

- (c) Bajo el isomorfismo  $h$ , el haz normal  $\mathcal{N}_{\pi^{-1}(Y)/\text{Bl}_Y(X)}$  se corresponde con  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)}(-1)$ .

En esta memoria utilizaremos únicamente explosiones puntuales sobre variedades no singulares. Así pues, de aquí al final de la sección, restringiremos nuestro ámbito a este tipo de explosiones.

**Proposición 1.1.16.** [42, Prop. 7.19] Si  $p$  es un punto no singular de una variedad  $X$  de dimensión  $d \geq 2$  y  $E$  es el divisor excepcional asociado a la explosión  $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$ , entonces  $E \cong \mathbb{P}_k^{d-1}$  y  $\mathcal{O}(-E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-1}}(1)$ .

De la demostración de la proposición 1.1.11 se deduce fácilmente el siguiente resultado, que nos da una relación entre los transformados total y estricto de un divisor efectivo, en el caso de una explosión puntual:

**Proposición 1.1.17.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $p$  un punto de  $X$ ,  $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$  la explosión con centro en  $p$ ,  $E$  el divisor excepcional de dicha explosión y  $D$  un divisor de Cartier efectivo de  $X$ . Entonces:*

$$D^* = \bar{D} + m_p(D)E,$$

siendo  $m_p(D)$  la multiplicidad de  $D$  en  $p$ .

A continuación estudiaremos la relación existente entre el grupo de Picard de una variedad y el de la variedad obtenida mediante una explosión puntual. También veremos la relación entre sus clases de divisores canónicas. Para ello utilizaremos el siguiente resultado, en el que  $\text{Cl}(X)$  indica el grupo de divisores de Weyl módulo equivalencia lineal y cuya prueba puede verse en [37, Chap. II, Prop. 6.5]:

**Proposición 1.1.18.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano, íntegro, separado y regular en codimensión uno, sea  $Z$  un cerrado propio de  $X$  y sea  $\mathcal{U} = X \setminus Z$ . Entonces:*

- (a) *existe un homomorfismo suprayectivo  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{U})$  definido por  $D = \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$ , donde la suma recorre aquellos  $Y_i \cap \mathcal{U}$  que no son iguales al conjunto vacío;*
- (b) *si  $\text{codim}(Z, X) \geq 2$  entonces  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{U})$  es un isomorfismo;*
- (c) *si  $Z$  es un subconjunto irreducible de codimensión 1, entonces existe una sucesión exacta*

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{U}) \rightarrow 0$$

donde el primer homomorfismo está definido por  $1 \mapsto 1 \cdot Z$ .

Recuérdese que los grupos  $\text{Cl}(X)$  y  $\text{Pic}(X)$  son isomorfos, si  $X$  es un esquema noetheriano, íntegro, separado y localmente factorial [37, Chap. II, Coro. 6.16].

**Proposición 1.1.19.** *Sea  $X$  una variedad no singular de dimensión  $d \geq 2$ ,  $p$  un punto de  $X$ ,  $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$  la explosión de  $X$  con centro en  $p$  y  $E$  su correspondiente divisor excepcional. Entonces:*

- (a) *Existe un isomorfismo  $\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cong \text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$ .*

- (b) En  $\text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$  se verifica la igualdad  $K_{\text{Bl}_p(X)} = \pi^*K_X + (d-1)E$ , siendo  $K_{\text{Bl}_p(X)}$  y  $K_X$  las clases de los divisores canónicos de  $\text{Bl}_p(X)$  y  $X$ , respectivamente.

*Demostración.* Del apartado (b) de la proposición 1.1.18 (tomando  $\mathcal{U} = X \setminus \{p\}$ ) y del isomorfismo existente entre  $\text{Bl}_p(X) \setminus E$  y  $X \setminus \{p\}$  obtenemos  $\text{Pic}(X) \cong \text{Pic}(X \setminus \{p\}) \cong \text{Pic}(\text{Bl}_p(X) \setminus E)$ . Aplicando el apartado (c) de la proposición 1.1.18 (ahora con  $\mathcal{U} = \text{Bl}_p(X) \setminus E$ ) tenemos la existencia de la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\text{Bl}_p(X)) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0$$

donde el homomorfismo  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$  viene dado por  $1 \mapsto 1 \cdot E$ . Nótese que es inyectivo, ya que  $\mathcal{O}_{\text{Bl}_p(X)}(nE) |_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-1}}(-n)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  (por la proposición 1.1.16).

El homomorfismo  $\pi^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$  escinde a esta sucesión exacta, con lo cual obtenemos un isomorfismo  $\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$  dado por  $D + m \mapsto \pi^*D + mE$ .

Para probar (b), fijémonos en que, debido al isomorfismo entre  $\text{Bl}_p(X) \setminus E$  y  $X \setminus \{p\}$ , es claro que  $K_{\text{Bl}_p(X)} = \pi^*K_X + rE$  para algún  $r \in \mathbb{Z}$ . Aplicando la fórmula de adjunción (véase por ejemplo [42, Th. 5.4]) obtenemos:

$$\mathcal{O}_E(K_E) \cong \mathcal{O}_{\text{Bl}_p(X)}(K_{\text{Bl}_p(X)} + E) |_E \cong \mathcal{O}_{\text{Bl}_p(X)}(\pi^*K_X + (r+1)E) |_E.$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{O}_{\text{Bl}_p(X)}(\pi^*K_X) |_E = \mathcal{O}_E$  y aplicando la proposición 1.1.16:

$$\mathcal{O}_E(K_E) \cong \mathcal{O}_{\text{Bl}_p(X)}((r+1)E) |_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-1}}(-r-1).$$

Al ser  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-1}}(-d)$  el haz canónico de  $\mathbb{P}_k^{d-1}$  concluimos que  $r = d - 1$ .  $\square$

## 1.2. Configuraciones sobre una variedad no singular

A lo largo de toda esta sección,  $X$  será una variedad no singular de dimensión  $d$  mayor o igual que 2.

**Definición 1.2.1.** Si  $p$  es un punto de  $X$ , llamaremos *primer entorno infinitesimal de  $p$*  al soporte del divisor excepcional asociado a la explosión de  $X$  con centro en  $p$ . Si  $i > 1$  definimos inductivamente el  *$i$ -ésimo entorno infinitesimal de  $p$*  como el primer entorno infinitesimal de algún punto del  $(i-1)$ -ésimo entorno infinitesimal de  $p$ . Los puntos pertenecientes a los

sucesivos entornos infinitesimales de  $p$  se denominan *puntos infinitamente próximos a  $p$* . Los puntos que son infinitamente próximos a algún punto de la variedad  $X$  se denominan *puntos infinitamente próximos a  $X$* . Para distinguir los puntos de  $X$  de los que son infinitamente próximos a  $X$ , a los primeros se les aplicará, cuando haya peligro de confusión, el calificativo de *propios*.

**Nota 1.2.2.** En virtud de la proposición 1.1.2, dos puntos  $p$  y  $q$  propios o infinitamente próximos a  $X$  serán identificados si existen dos entornos abiertos  $\mathcal{U}_p$  de  $p$  y  $\mathcal{U}_q$  de  $q$  en las variedades (obtenidas por sucesivas explosiones puntuales) a las que pertenecen  $p$  y  $q$  y un  $X$ -isomorfismo  $\phi : \mathcal{U}_p \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_q$  tal que  $\phi(p) = q$ .

Dados dos puntos  $p$  y  $q$ , propios o infinitamente próximos a  $X$ , diremos que  $p$  *precede a  $q$* , y lo denotaremos  $p < q$ , si  $q$  es un punto infinitamente próximo a  $p$  (es decir, pertenece a alguno de los sucesivos entornos infinitesimales de  $p$ ). Escribiremos  $p \leq q$  para denotar que  $p$  es igual o precede a  $q$ .

Si  $p$  es un punto propio o infinitamente próximo a  $X$ , llamaremos *nivel de  $p$* , y lo denotaremos por  $\ell(p)$ , al número de puntos (propios o infinitamente próximos a  $X$ ) que preceden a  $p$ . Los puntos propios de  $X$  son los puntos de nivel cero.

**Definición 1.2.3.** Una *configuración sobre  $X$*  es un conjunto finito  $\mathcal{C}$  de puntos propios o infinitamente próximos a  $X$  tal que, para todo  $q \in \mathcal{C}$ , todos los puntos infinitamente próximos a  $X$  que preceden a  $q$  pertenecen a  $\mathcal{C}$ . Los puntos de  $\mathcal{C}$  de nivel cero se denominan *orígenes de  $\mathcal{C}$* . En caso de existir un único origen  $q$ , diremos que  $\mathcal{C}$  es una *configuración con origen en  $q$* .

La relación  $\leq$  es una relación de orden parcial entre los elementos de una configuración  $\mathcal{C}$ , que se denominará *orden natural*. Una relación de orden total  $\preceq$  en  $\mathcal{C}$  se denominará *admisibile* si es un refinamiento del orden natural (es decir, si se verifica la implicación  $p \leq q \Rightarrow p \preceq q$  para cualquier par de puntos  $p, q \in \mathcal{C}$ ). Si el orden natural es una relación de orden total en  $\mathcal{C}$ , diremos que  $\mathcal{C}$  es una *cadena*.

Denominaremos *puntos maximales de  $\mathcal{C}$*  a aquellos que son maximales respecto al orden natural en  $\mathcal{C}$ .

Dada una configuración  $\mathcal{C}$ , podemos considerar cualquier ordenación de sus puntos siguiendo un orden total admisible:  $p_1 \preceq p_2 \preceq \dots \preceq p_n$ . Realizando las pertinentes identificaciones entre puntos de  $\mathcal{C}$  (nota 1.2.2) podemos asociar al par  $(\mathcal{C}, \preceq)$  una única sucesión de explosiones puntuales:

$$X_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} X_n \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 = X$$

de manera que

- (1)  $p_i \in X_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ;
- (2)  $X_i = \text{Bl}_{p_{i-1}}(X_{i-1})$  para  $i = 2, \dots, n + 1$ .

Denotaremos  $\pi_{\mathcal{C}, \preceq}$  al morfismo composición  $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ .

La variedad  $X_{n+1}$  obtenida mediante la explosión con centro en el punto maximal respecto del orden  $\preceq$  se denomina *cielo* de la configuración  $\mathcal{C}$  respecto al orden admisible  $\preceq$ . De la siguiente proposición se desprende que los cielos asociados a una misma configuración respecto a distintos ordenes admisibles son  $X$ -isomorfos.

**Proposición 1.2.4.** *Si  $\preceq$  y  $\preceq'$  son dos relaciones de orden total admisibles de la misma configuración  $\mathcal{C}$  y  $\pi_{\mathcal{C}, \preceq} : X_{n+1} \rightarrow X$  y  $\pi_{\mathcal{C}, \preceq'} : X'_{n+1} \rightarrow X$  son los dos morfismos asociados, entonces existe un isomorfismo  $\phi : X_{n+1} \rightarrow X'_{n+1}$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{\phi} & X'_{n+1} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{C}, \preceq} & \swarrow \pi_{\mathcal{C}, \preceq'} \\ & X & \end{array}$$

*Demostración.* En los apartados 4.3.1 y 4.3.2 de [14] se demuestra este resultado en el caso bidimensional, pero la misma prueba es válida para  $\dim(X)$  arbitraria.  $\square$

Puesto que la construcción del cielo de una configuración es esencialmente única (ya que su clase de isomorfía como  $X$ -esquema es independiente del orden total admisible elegido en la secuencia de explosiones), siempre que consideremos una configuración  $\mathcal{C}$ , la supondremos ya dotada de un orden total admisible cualquiera  $\preceq$  y denotaremos simplemente por  $\pi_{\mathcal{C}}$  al morfismo  $\pi_{\mathcal{C}, \preceq}$  y por  $X(\mathcal{C})$  al cielo de la configuración.

Sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  una configuración sobre  $X$ . Consideremos la correspondiente sucesión de explosiones:

$$X(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi_n} X_n \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 = X.$$

Generalizamos, a continuación, los conceptos de transformado total y estricto de un divisor efectivo adaptándolos, de manera obvia, al caso de una sucesión de explosiones sucesivas.

**Definición 1.2.5.** Si  $D$  es un divisor efectivo de  $X$ , definimos  $\bar{D}(1) := D$  y  $D(1)^* := D$ . Inductivamente, para  $i \geq 2$  definimos el *transformado estricto de  $D$  en  $X_i$* , que será denotado por  $\bar{D}(i)$ , como el transformado estricto de  $\bar{D}(i-1)$  por la explosión  $\pi_{i-1}$ ; asimismo, definimos el *transformado total de  $D$  en  $X_i$* , y lo denotamos por  $D(i)^*$ , como el transformado total de  $D(i-1)^*$  por la explosión  $\pi_{i-1}$ . Llamaremos *transformado estricto* (resp., *total*) de  $D$  respecto de la configuración  $\mathcal{C}$  al transformado estricto (resp., total) de  $D$  en  $X(\mathcal{C})$ . Lo denotaremos por  $\bar{D}$  (resp.,  $D^*$ ).

Dado un punto  $p_i \in \mathcal{C}$ , denotemos por  $E_i$  al divisor excepcional de la explosión  $\pi_i$  con centro en  $p_i$ . Podemos considerar el *transformado estricto*  $\bar{E}_i$  y el *transformado total*  $E_i^*$  de  $E_i$  respecto de la configuración de  $X_{i+1}$  dada por  $\{p_{i+1}, \dots, p_n\}$ . Éstos son divisores de  $X(\mathcal{C})$ . Por abuso de notación, usualmente denotaremos el transformado estricto  $\bar{E}_i$  simplemente como  $E_i$ , siempre que ello no dé lugar a confusión. Si  $i \neq j$ ,  $E_i$  y  $E_j$  tienen intersección vacía o tienen cruzamientos normales. Además, según la proposición 1.1.16,  $E_i$  es isomorfo a  $\mathbb{P}^{d-1}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Nota 1.2.6.** Obsérvese que, dado un divisor efectivo  $D$ , la clase en  $\text{Pic}(X(\mathcal{C}))$  de su transformado total  $D^*$  coincide con  $\pi_{\mathcal{C}}^*D$ , el pull-back de la clase de  $D$  en  $\text{Pic}(X)$  respecto del morfismo  $\pi_{\mathcal{C}}$ .

**Definición 1.2.7.** Si  $D$  es un divisor efectivo de  $X$  y  $p_i \in \mathcal{C}$ , llamaremos *multiplicidad de  $D$  en el punto  $p_i$*  a la multiplicidad en  $p_i$  del transformado estricto de  $D$  en  $X_i$ .

Definamos ahora la relación de proximidad entre los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.2.8.** Dados  $p_i, p_j \in \mathcal{C}$ , con  $i < j$ , diremos que  $p_j$  es *próximo a  $p_i$*  (y lo denotaremos por  $p_j \rightarrow p_i$  o simplemente por  $j \rightarrow i$ ) si  $p_j$  pertenece al transformado estricto del divisor excepcional  $E_i$  en la variedad  $X_j$ .

**Proposición 1.2.9.** *La relación de proximidad  $\rightarrow$  entre los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$  satisface las siguientes propiedades:*

- (a) Si  $q \rightarrow p$  entonces  $q > p$ .
- (b) Si  $q \geq p$  y  $\ell(q) = \ell(p) + 1$  entonces  $q \rightarrow p$ .
- (c) Si  $r \geq q > p$  y  $r \rightarrow p$  entonces  $q \rightarrow p$ .

*Demostración.* Véase, por ejemplo, [9, Th. 1.6].  $\square$

**Nota 1.2.10.** Obsérvese que, al ser los divisores  $E_i$  disjuntos o de cruzamientos normales, cada punto de  $\mathcal{C}$  puede ser próximo, a lo sumo, a  $d$  puntos de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.2.11.** Si  $d = 2$ , los puntos de  $\mathcal{C}$  que son próximos a otros dos puntos de  $\mathcal{C}$  se denominan *puntos satélite*. Los restantes se denominan *puntos libres*.

La configuración  $\mathcal{C}$ , equipada con la relación de proximidad entre sus puntos, tiene una estructura combinatoria abstracta que puede describirse mediante un grafo que definiremos a continuación y al que llamaremos *grafo de proximidad*.

**Definición 1.2.12.** Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico. Un *árbol con raíz* es un árbol uno de cuyos vértices, denominado *raíz*, es considerado distinguido del resto.

Si  $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$  son los orígenes de la configuración  $\mathcal{C}$ , ésta puede descomponerse de manera única en una unión disjunta

$$\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^r \mathcal{C}_j,$$

donde cada  $\mathcal{C}_j$  es una configuración que tiene a  $p_{i_j}$  como único origen. Para todo  $j = 1, \dots, r$ , consideramos el árbol con raíz  $\mathcal{T}_j$  cuyos vértices están en correspondencia biyectiva con los puntos de  $\mathcal{C}_j$ , siendo la raíz el vértice correspondiente a  $p_{i_j}$ , y cuyas aristas (denotadas por líneas continuas) unen aquellos vértices correspondientes a puntos  $q, q'$  de  $\mathcal{C}_j$  tales que  $\ell(q') = \ell(q) + 1$  y  $q' > q$ .

**Definición 1.2.13.** Denominamos *grafo de proximidad* de  $\mathcal{C}$ , y lo denotamos por  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ , al grafo etiquetado que resulta de considerar la unión disjunta de los árboles  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$  y añadir nuevas aristas uniendo mediante una línea discontinua aquellos vértices correspondientes a puntos  $q, q' \in \mathcal{C}$  tales que  $q' \rightarrow q$  y  $\ell(q') > \ell(q) + 1$ . Las líneas continua y discontinua se corresponden con las dos etiquetas que admiten las aristas del grafo.

Si  $p, q \in \mathcal{C}$ ,  $p$  es el máximo punto de la cadena  $\{r \in \mathcal{C} \mid r \geq q\}$  (respecto a la relación de orden  $\leq$ ) que es próximo a  $q$  y  $\ell(p) > \ell(q) + 1$ , entonces cualquier otro punto  $r$  tal que  $q < r < p$  será también próximo a  $q$  (por la proposición 1.2.9). Sin embargo, en el grafo de proximidad  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  uniremos con una línea discontinua los vértices correspondientes a los puntos  $p$  y  $q$ , pero convendremos en omitir las líneas discontinuas intermedias, por deducirse de la primera.

Para mayor claridad, en los grafos de proximidad que aparecerán en los ejemplos de esta memoria etiquetaremos cada vértice con el símbolo del punto al que corresponde. Sin embargo, los grafos de proximidad deben considerarse sin estas etiquetas.

**Ejemplo 1.2.14.** La figura 1.1 muestra el grafo de proximidad de una configuración  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^{12}$  con dos orígenes ( $p_1$  y  $p_{11}$ ) en la cual se tienen las siguientes relaciones de proximidad:

$$p_2, p_3 \rightarrow p_1$$

$$p_3 \rightarrow p_2$$

$$p_4 \rightarrow p_3$$

$$p_5, p_9 \rightarrow p_4$$

$$p_6, p_7, p_8 \rightarrow p_5$$

$$p_7 \rightarrow p_6$$

$$p_8 \rightarrow p_7$$

$$p_{10} \rightarrow p_9$$

$$p_{12} \rightarrow p_{11}$$

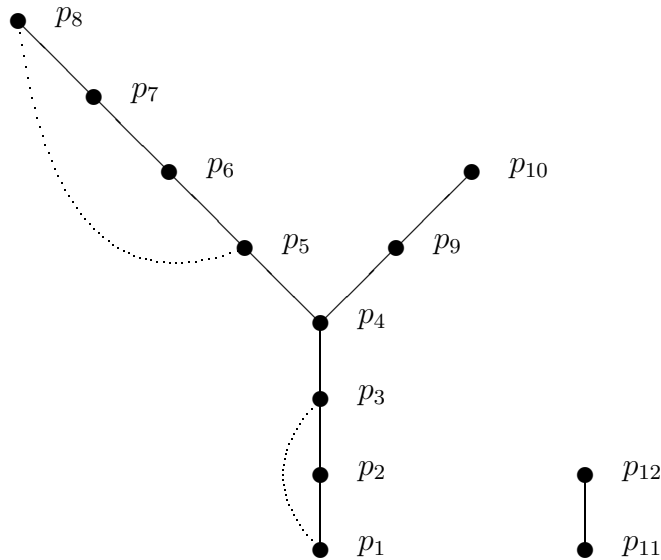


Figura 1.1: Grafo de proximidad del ejemplo 1.2.14

Teniendo en cuenta las proposiciones 1.1.17 y 1.1.19, por inducción sobre el número de puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ ,  $n$ , se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.15.** *Con las notaciones anteriores,*

(a) *si  $D$  es un divisor efectivo de  $X$ , se verifica la igualdad:*

$$D^* = \bar{D} + \sum_{i=1}^n e_i(D) E_i^*,$$



donde  $e_i(D)$  denota la multiplicidad de  $D$  en  $p_i$ .

(b) El homomorfismo canónico  $\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Pic}(X(\mathcal{C}))$  definido por

$$D + (m_1, \dots, m_n) \mapsto \pi_{\mathcal{C}}^* D + \sum_{i=1}^n m_i E_i^*$$

es un isomorfismo.

(c) En  $\text{Pic}(X(\mathcal{C}))$  se verifica la igualdad:  $K_{X(\mathcal{C})} = \pi_{\mathcal{C}}^* K_X + (d-1) \sum_{i=1}^n E_i^*$ .

Aplicando el apartado (a) de la proposición 1.2.15 al divisor  $E_i$  de  $X_i$  se obtiene la expresión de su transformado estricto en  $X(\mathcal{C})$  (que denotamos también por  $E_i$ ) en función de los transformados totales de los divisores excepcionales:

$$E_i = E_i^* - \sum_{j \rightarrow i} E_j^*.$$

Como consecuencia, el conjunto  $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$  es una  $\mathbb{Z}$ -base del grupo abeliano libre  $\mathbb{E} := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}E_i^*$  de los divisores de  $X(\mathcal{C})$  con soporte excepcional. La matriz  $\mathbf{P}_{\mathcal{C}} = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  dada por  $p_{ii} = 1$ ,  $p_{ij} = -1$  si  $i \rightarrow j$  y  $p_{ij} = 0$  en otro caso, se denomina *matriz de proximidad de  $\mathcal{C}$*  y es la matriz por columnas del cambio de base de  $\{E_i\}_{i=1}^n$  a  $\{E_i^*\}_{i=1}^n$ .

**Proposición 1.2.16.** [3, Prop. 1.1.26] Si  $\dim(X) = 2$  se verifican las siguientes propiedades:

(a) si  $C$  y  $D$  son dos divisores de  $X$  entonces se tienen, en  $\text{Pic}(X(\mathcal{C}))$ , las igualdades:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{C}}^* C \cdot \pi_{\mathcal{C}}^* D &= C \cdot D, \\ \pi_{\mathcal{C}}^* C \cdot E_i^* &= 0, \\ \pi_{\mathcal{C}}^* C \cdot E_i &= 0, \end{aligned}$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

(b) Para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} -r_i - 1 & \text{si } i = j, \text{ siendo } r_i \text{ el número de puntos de } \mathcal{C} \\ & \text{proximos a } p_i, \\ 1 & \text{si } i \neq j \text{ y } E_i \cap E_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c) Para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$E_i^* \cdot E_j^* = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(d) Para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$E_i \cdot E_j^* = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } p_j \rightarrow p_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(e) Si  $C$  es un divisor de  $X$  y  $D$  es un divisor de  $X(\mathcal{C})$ , entonces:

$$\pi_{\mathcal{C}}^* C \cdot D = C \cdot \pi_{\mathcal{C}*} D.$$

### 1.3. Clústers y haces de ideales con soporte finito

En esta sección recopilaremos algunos resultados relativos a clústers y haces de ideales con soporte finito, que serán utilizados fundamentalmente en el capítulo 2 para describir el cono característico relativo en una situación local.

Al igual que en la sección anterior,  $X$  será una variedad no singular de dimensión mayor o igual que dos.

**Definición 1.3.1.** Denominamos *clúster* sobre  $X$  a un par  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$ , donde  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  es una configuración de  $X$  y  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  es un vector de  $\mathbb{N}^n$ , que denominaremos *vector de multiplicidades virtuales de  $\mathcal{K}$* . El entero  $m_i$  se denomina *multiplicidad virtual de  $p_i$  en  $\mathcal{K}$* .

Dado un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  sobre  $X$ , con  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$ , podemos asociarle un divisor con soporte excepcional  $D(\mathcal{K})$  en el cielo de la configuración  $\mathcal{C}$ :

$$D_{\mathcal{K}} := - \sum_{i=1}^n m_i E_i^*.$$

**Definición 1.3.2.** Sea  $C$  un divisor efectivo de  $X$  y  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  un clúster de  $X$ . Llamaremos *transformado virtual de  $C$  relativo a  $\mathcal{K}$*  al divisor de  $X(\mathcal{C})$  dado por:

$$\check{C} := C^* + D_{\mathcal{K}}.$$

Diremos que  $C$  *pasa por  $\mathcal{K}$*  si  $\check{C}$  es un divisor efectivo. Si  $\check{C}$  coincide con el transformado estricto  $\bar{C}$  respecto de  $\mathcal{C}$ , diremos que  $C$  *pasa efectivamente por  $\mathcal{K}$* .

**Nota 1.3.3.** Un divisor efectivo  $C$  pasa efectivamente por un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  si y sólo si para cada  $p \in \mathcal{C}$  la multiplicidad de  $C$  en  $p$  coincide con la multiplicidad virtual del clúster  $\mathcal{K}$  en  $p$  (véase [9, Prop. 3.4]).

**Definición 1.3.4.** Sea  $\mathcal{I}$  un haz de ideales de  $\mathcal{O}_X$  y sea  $q$  un punto propio o infinitamente próximo a  $X$ . Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  la única cadena tal que  $p_n = q$ . Se define por inducción sobre  $n$  el *transformado débil*  $\mathcal{I}_q$  de  $\mathcal{I}$  en  $q$  de la siguiente forma:

- (i) Si  $n = 1$ ,  $q$  es un punto propio de  $X$  e  $\mathcal{I}_q$  es la fibra del haz de ideales  $\mathcal{I}$  en  $q$ ,
- (ii) Si  $n > 1$ ,  $\mathcal{I}_q$  es el ideal de  $\mathcal{O}_{X_q, q}$  dado por

$$\mathcal{I}_q := (x)^{-\text{ord}_{p_{n-1}}(\mathcal{I}_{p_{n-1}})} \mathcal{I}_{p_{n-1}} \mathcal{O}_{X_q, q},$$

donde, para cada punto  $p$  propio o infinitamente próximo a  $X$ ,  $\text{ord}_p(\mathcal{I}_p) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_p \subseteq M_p^n\}$  es el *orden de  $\mathcal{I}$  en  $p$* ,  $(\mathcal{O}_{X_p, p}, M_p)$  es el anillo local en  $p$  de la variedad  $X_p$  a la que pertenece  $p$  y  $x$  es un generador del ideal principal  $M_{p_{n-1}} \mathcal{O}_{X_q, q}$ . Obsérvese que  $x$  es una ecuación local en  $q$  del divisor excepcional de la explosión con centro en  $p_{n-1}$  (véase la demostración de la proposición 1.1.11).

**Definición 1.3.5.** Dado un haz de ideales  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ , se dice que un punto  $q$ , propio o infinitamente próximo a  $X$ , es un *punto base de  $\mathcal{I}$*  si  $\mathcal{I}_q \neq \mathcal{O}_{X_q, q}$  (con la misma notación de la definición anterior). Diremos que el haz de ideales  $\mathcal{I}$  es *de soporte finito* si posee solamente una cantidad finita de puntos base. En este caso, el conjunto de puntos base de  $\mathcal{I}$  constituye una configuración sobre  $X$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ , denominada *configuración de puntos base de  $\mathcal{I}$* . El clúster  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}} := (\mathcal{C}_{\mathcal{I}}, (\text{ord}_p(\mathcal{I}_p))_{p \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}})$  se denomina *clúster de puntos base de  $\mathcal{I}$* .

Los haces de ideales con soporte finito  $\mathcal{I}$  también pueden caracterizarse como aquellos que verifican las condiciones:

- $\mathcal{I}$  posee un número finito de puntos base propios de  $X$ ,
- $\mathcal{I}_p$  es un ideal de  $\mathcal{O}_{X_p, p}$   $M_p$ -primario para cada uno de estos puntos, y
- existe una configuración  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}$  es un haz invertible.

Además, la configuración con el menor número de elementos verificando la última condición es  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .

**Definición 1.3.6.** Sea  $\mathcal{I}$  un haz de ideales de  $X$ . Definimos la *clausura íntegra de  $\mathcal{I}$*  como el haz de ideales  $\overline{\mathcal{I}}$  de  $X$  tal que  $\overline{\mathcal{I}}(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{I}(\mathcal{U})}$  para todo abierto  $\mathcal{U}$  de  $X$ , con funciones restricción obvias ( $\overline{\mathcal{I}(\mathcal{U})}$  denota la clausura íntegra del ideal  $\mathcal{I}(\mathcal{U})$  en  $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ ). Aquellos haces de ideales que coincidan con su clausura íntegra se denominarán *completos*.

Si  $\mathcal{I}$  es un haz de ideales con soporte finito, su clausura íntegra  $\overline{\mathcal{I}}$  también lo es y además  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}} = \mathcal{K}_{\overline{\mathcal{I}}}$  (véase [52, Prop. 1.10]).

**Definición 1.3.7.** Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  una configuración de  $X$ . Decimos que un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  es *idealístico* si existe un haz de ideales de  $X$  con soporte finito  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}})$  (esto implica que  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{C}$ , y que  $m_i$  coincide con la multiplicidad virtual de  $p_i$  en  $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$  si  $p_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ , y es igual a 0 en caso contrario). Denominamos *galaxia de  $\mathcal{C}$*  al conjunto  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$  formado por aquellos clusters idealísticos cuya configuración es  $\mathcal{C}$ .

De la sección 1 de [9] se siguen las siguientes propiedades:

- (1) Si  $\mathcal{I}$  es un haz de ideales con soporte finito, entonces el haz  $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_{\mathcal{I}})}$  coincide con  $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_{\mathcal{I}})}(D_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}})$ .
- (2) Sea  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  es un clúster idealístico,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} := \pi_{\mathcal{C}*}(\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}}))$  es el único haz de ideales de  $X$  completo con soporte finito  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}})$ .
- (3) Un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  es idealístico si, y sólo si,  $\mathbf{m} \neq 0$  y  $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}})$  está generado por sus secciones globales en un entorno de la fibra excepcional de  $\pi_{\mathcal{C}}$ .
- (4) Sea  $\mathcal{C}$  una configuración de  $X$ . Dados dos clusters  $\mathcal{K}_1 = (\mathcal{C}, \mathbf{m}_1)$  y  $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{C}, \mathbf{m}_2)$ , definimos su *suma* como el clúster  $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 := (\mathcal{C}, \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)$ . Con esta operación, la galaxia de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ , es un semigrupo conmutativo.

Consideremos ahora una situación local: sea  $p$  un punto de  $X$  y sea  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$ . Tomemos una configuración  $\mathcal{C}$  de  $S$  y denotemos por  $S(\mathcal{C})$  al cielo de  $\mathcal{C}$  (obsérvese que  $\mathcal{C}$  puede identificarse con una configuración en  $X$  con un único origen en  $p$ ). Definimos los conceptos de configuración y clúster de puntos base de un ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_{X,p}$  (denotados por  $\mathcal{C}_I$  y  $\mathcal{K}_I$ ) como los correspondientes al haz de ideales  $\tilde{I}$  de  $S$  (véase [37, Chap. II, Sect. 5]). Asimismo, diremos que un ideal  $I$  de  $\mathcal{O}_{X,p}$  es un ideal *con soporte finito* si lo es  $\tilde{I}$ .

En esta situación, si  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  es un clúster de  $S$ , entonces el ideal completo  $I_{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{O}_{X,p}$  dado por la fibra en  $p$  de  $\pi_{\mathcal{C}*}(\mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}}))$  puede caracterizarse de la siguiente manera:

$$I_{\mathcal{K}} = \{0\} \cup \{h \in \mathcal{O}_{X,p} \setminus \{0\} \mid \text{el divisor de } S \text{ dado por } (h) \text{ pasa por } \mathcal{K}\}.$$

En efecto, dado un elemento  $h$  del anillo local  $\mathcal{O}_{X,p}$ , su divisor de  $S$  asociado  $(h)$  pasa por  $\mathcal{K}$  si, y sólo si, su transformado virtual relativo a  $\mathcal{K}$ ,  $(\check{h}) = (h)^* + D_{\mathcal{K}}$ , es un divisor efectivo, es decir, si, y sólo si,  $(h)^* \geq -D_{\mathcal{K}}$ , o equivalentemente, si  $h$  es una sección global de  $\pi_{\mathcal{C}*}(\mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}}))$ .

Por otra parte, si  $I = (h_1, \dots, h_r)$  es un ideal de  $\mathcal{O}_{X,p}$  con soporte finito, es claro que los elementos de un cierto abierto de Zariski del espacio proyectivo  $\{\lambda_1(h_1) + \dots + \lambda_r(h_r) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r \setminus \{0\}\} \cong \mathbb{P}^{r-1}$  pasan efectivamente por el clúster de puntos base de  $I$ . De ello se sigue la siguiente equivalencia: *un clúster  $\mathcal{K}$  de  $S$  es idealístico si y sólo si existe un elemento  $h$  de  $\mathcal{O}_{X,p}$  tal que  $(h)$  pasa efectivamente por  $\mathcal{K}$* . Por tanto, los clusters idealísticos de  $S$  son aquellos que definen condiciones de paso efectivo de hipersuperficies de  $S$ .

Si  $\dim(X) = 2$ , existe un divisor efectivo de  $S$  pasando por un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n, \mathbf{m})$  de  $S$  si y sólo si el clúster  $\mathcal{K}$  es *consistente*, es decir, si y sólo si sus multiplicidades virtuales verifican las llamadas *desigualdades de proximidad*:

$$m_i \geq \sum_{j \rightarrow i} m_j \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n,$$

siendo  $\sum_{j \rightarrow i} m_j = 0$  si no existe ningún punto de  $\mathcal{C}$  próximo a  $p_i$  (véase [14, Sect. 4.2]). Por tanto, en este caso, los clusters idealísticos coinciden con los consistentes. De las igualdades

$$D_{\mathcal{K}} \cdot E_i = m_i - \sum_{j \rightarrow i} m_j \quad i = 1, \dots, n$$

se sigue que  $\mathcal{K}$  es consistente (o idealístico) si y sólo si  $D_{\mathcal{K}} \cdot E_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$  o, equivalentemente,  $D_{\mathcal{K}} \cdot C \geq 0$  para toda curva con soporte excepcional  $C$  de  $S(\mathcal{C})$ .

**Definición 1.3.8.** Si  $\mathcal{C}$  es una configuración de  $S$ , diremos que un divisor  $D$  de  $S(\mathcal{C})$  es *semiamplio relativo a  $\pi_{\mathcal{C}}$*  si  $D \cdot C \geq 0$  para toda curva con soporte excepcional  $C$  de  $S(\mathcal{C})$ .

Por tanto, si  $\dim(X) = 2$ , un clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \mathbf{m})$  de  $S$  es idealístico si, y sólo si, su divisor asociado  $D_{\mathcal{K}}$  es semiamplio relativo a  $\pi_{\mathcal{C}}$ .

Si  $\dim(X)$  es superior a 2, el divisor asociado a un clúster idealístico de  $S$  es siempre semiamplio relativo a  $\pi_{\mathcal{C}}$  (véase [9, Prop. 1.22]). Sin embargo, la implicación contraria no siempre es cierta, como muestra el siguiente ejemplo, tomado de [9]:

**Ejemplo 1.3.9.** Sea  $X$  una variedad no singular de dimensión 3 y sea  $p_1$  un punto de  $X$ . Consideremos una configuración  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_{10}\}$  de  $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,p_1})$  tal que  $p_2, \dots, p_{10}$  son 9 puntos propios de  $\text{Bl}_{p_1}(S)$  sobre el divisor excepcional  $E_1 \cong \mathbb{P}^2$  asociado a la explosión de  $S$  con centro en  $p_1$ , y situados en posición general sobre una cúbica no singular  $C_0$  (es decir,  $C_0$  es la única cúbica en  $E_1$  que pasa por  $p_2, \dots, p_{10}$ ). Consideramos el clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$ . El divisor de  $S(\mathcal{C})$  dado por  $D_{\mathcal{K}}$  es semiamplio relativo a  $\pi_{\mathcal{C}}$  pero  $\mathcal{K}$  no es idealístico, pues  $\mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D_{\mathcal{K}})$  no está generado por secciones globales.

Consideremos una configuración  $\mathcal{C}$  de  $S$  y sea  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  el conjunto formado por los ideales completos  $I$  con soporte finito de  $\mathcal{O}_{X,p}$  tales que  $\mathcal{C}_I \subseteq \mathcal{C}$ . Introducimos en  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  la siguiente operación: dados  $I, J \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ , definimos el ideal completo  $I * J$  como la clausura íntegra en  $\mathcal{O}_{X,p}$  de  $IJ$ .  $I * J$  es un ideal completo con soporte finito, siendo  $\mathcal{K}_{I * J} = \mathcal{K}_I + \mathcal{K}_J$ .

Si denotamos por  $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\sharp}$  al semigrupo de los divisores  $D$  de  $S(\mathcal{C})$  tales que  $D \neq 0$  y  $\mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D)$  está generado por secciones globales, la asignación

$$\mathcal{K} \mapsto D_{\mathcal{K}}$$

constituye un isomorfismo de semigrupos entre  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$  y  $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\sharp}$ , cuyo isomorfismo inverso viene dado por

$$D \mapsto \mathcal{K}_{\pi_* \mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D)_p}.$$

Asimismo, la asignación

$$\mathcal{K} \mapsto I_{\mathcal{K}}$$

es también un isomorfismo de semigrupos entre  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$  y  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  cuyo inverso está definido por

$$I \mapsto D_{\mathcal{K}_I}$$

(véanse [8] y [9]).

**Definición 1.3.10.** Siguiendo a Lipman [52], decimos que un ideal  $I \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  es *\*-simple* si no se puede factorizar de la forma  $I = I_1 * I_2$ , con  $I_1, I_2$  ideales distintos de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ . Si  $\dim(X) = 2$ , el producto de ideales completos es un ideal completo y, por tanto, la operación  $*$  coincide con el producto usual de ideales; en este caso, los ideales *\*-simples* se denominan simplemente ideales *simples*.

En [52], Lipman asocia a cada punto  $q$  de la configuración  $\mathcal{C}$  el único ideal completo *\*-simple* de  $\mathcal{O}_{X,p}$ , que denotaremos por  $P_q$ , cuyo clúster de puntos base  $\mathcal{K}_{P_q} = (\mathcal{C}_{P_q}, \mathbf{m})$  verifica las siguientes condiciones:

$$- \mathcal{C}_{P_q} = \{r \in \mathcal{C} \mid q \geq r\}.$$

- $m_q = 1$ .
- La secuencia de multiplicidades  $\mathbf{m}$  es minimal para el orden lexicográfico inverso, con respecto al orden natural  $\leq$  en  $\mathcal{C}_{P_q}$ .

Denotemos por  $D(p_i)$  al divisor  $D_{\mathcal{K}_{P_{p_i}}}$  de  $S(\mathcal{C})$  asociado al clúster de puntos base del ideal  $P_{p_i}$ ; es el divisor de  $S(\mathcal{C})$  tal que  $P_{p_i}\mathcal{O}_{S(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{S(\mathcal{C})}(D(p_i))$ . Tenemos

$$D(p_i) = - \sum_{p_j \leq p_i} m_{ji} E_j^*,$$

donde  $m_{ji}$  es la multiplicidad virtual del punto  $p_j$  del clúster  $\mathcal{K}_{P_{p_i}}$ , si  $p_j \leq p_i$ , y es igual a 0 en caso contrario. Obsérvese que  $m_{ii} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . La matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}$  dada por  $(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  es, por tanto, triangular superior y de determinante 1. Su  $i$ -ésima columna corresponde a los opuestos de los coeficientes de los divisores  $E_j^*$  en la expresión de  $D(p_i)$ .

**Proposición 1.3.11.** (*[52, Th. 2.5] y [9, Coro. 1.28]*) Si  $I \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ , podemos expresar (formalmente) el ideal  $I$  como  $*$ -producto de los ideales  $*$ -simples asociados a los puntos de  $\mathcal{C}$ :

$$I = \prod_{1 \leq i \leq n}^* P_{p_i}^{r_i},$$

siendo  $r_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Además, el vector  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^t$  puede calcularse de la siguiente manera:

$$\mathbf{r} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}}^{-1} \mathbf{m}$$

donde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)^t$ , siendo  $m_i$  la multiplicidad virtual del punto  $p_i$  del clúster de puntos base de  $I$ , si  $p_i \in \mathcal{C}_I$ , y 0 en caso contrario.

**Nota 1.3.12.** La expresión

$$I = \prod_{1 \leq i \leq n}^* P_{p_i}^{r_i}$$

con los exponentes  $r_i$  enteros (permitiendo exponentes negativos) significa que existe un  $*$ -producto de  $I$  por ideales  $*$ -simples  $P_{p_i}$ , igual a un producto de ideales  $*$ -simples  $P_{p_i}$ , con factores distintos en cada miembro de la igualdad.

La descomposición de un ideal  $I$  dada en la proposición 1.3.11 es la única descomposición de  $I$  como  $*$ -producto de los ideales completos  $*$ -simples asociados a los puntos de  $\mathcal{C}$ . Sin embargo, si  $\dim(X) > 2$  no es cierto que

ésta sea la única descomposición de  $I$  como  $*$ -producto de ideales  $*$ -simples, como mostraremos posteriormente en esta memoria.

Si  $\dim(X) = 2$ , la situación se simplifica bastante ya que, según la teoría de ideales completos de Zariski (véase [74] y [75]), en este caso existe factorización única de cualquier ideal completo con soporte finito como producto de ideales completos simples. Además, los exponentes  $r_i$  son no negativos. Lipman, en [53], proporciona una presentación moderna de los resultados de Zariski. La matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}$  es, en este caso, fácilmente computable (luego también lo son los divisores  $D(p_i)$ ) y coincide con  $(\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^{-1})^t$ , siendo  $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}$  la matriz de proximidad de la configuración  $\mathcal{C}$  (véase [53, Sect. 3]). Puesto que los divisores  $D(p_i)$  serán utilizados más adelante en esta memoria, resulta muy conveniente indicar el cálculo explícito de la matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}} = (\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^t)^{-1}$ . Con este fin probamos el siguiente lema:

**Lema 1.3.13.** *Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con coeficientes enteros satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1.  $a_{ij} = 0$  si  $j < i$ .
2.  $a_{ii} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .
3.  $a_{ij} \in \{-1, 0\}$  si  $j > i$ .

Entonces, los coeficientes de la matriz inversa  $A^{-1} = (s_{ij})$  vienen definidos de la siguiente forma:

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ 1 & \text{si } j = i \\ \sum_{k:j \rightsquigarrow k} s_{ik} = \sum_{l:l \rightsquigarrow i} s_{lj} & \text{si } j > i, \end{cases}$$

donde  $\rightsquigarrow$  es la relación binaria definida en el conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$j \rightsquigarrow i \Leftrightarrow a_{ij} = -1.$$

*Demostración.* Como  $A$  es una matriz triangular superior, su inversa también lo será y, por tanto,  $s_{ij} = 0$  si  $j < i$ . Además, puesto que  $A^{-1} \cdot A = I_n$  (siendo  $I_n$  la matriz identidad de orden  $n$ ), se verifican las siguientes igualdades:

$$\sum_{k=1}^n s_{ik} a_{ki} = 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

$$\sum_{k=1}^n s_{ik} a_{kj} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (1.2)$$



De la ecuación (1.1) se obtiene:

$$1 = s_{ii}a_{ii} + \sum_{k \neq i} s_{ik}a_{ki} = s_{ii} + \sum_{k: i \rightsquigarrow k} s_{ik}a_{ki} = s_{ii}$$

puesto que  $a_{ii} = 1$ ,  $a_{ki} = 0$  si  $i \neq k$  e  $i \not\rightsquigarrow k$ , y  $s_{ik} = 0$  si  $i > k$  (al ser  $A^{-1}$  triangular superior). Si  $i < j$ , de la ecuación (1.2) se obtiene:

$$0 = s_{ij}a_{jj} + \sum_{k \neq j} s_{ik}a_{kj} = s_{ij} + \sum_{k: j \rightsquigarrow k} s_{ik}a_{kj} = s_{ij} - \sum_{k: j \rightsquigarrow k} s_{ik}$$

ya que  $a_{jj} = 1$ ,  $a_{kj} = 0$  si  $j \neq k$  y  $j \not\rightsquigarrow k$ , y  $a_{kj} = -1$  si  $j \rightsquigarrow k$ .

Procediendo de la misma manera a partir de la igualdad  $A \cdot A^{-1} = I_n$  se deduce también la fórmula:

$$s_{ij} - \sum_{l: l \rightsquigarrow i} s_{lj} = 0 \quad \text{si } j > i. \quad \square$$

Es claro que la matriz  $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^t$  cumple las condiciones del lema anterior, coincidiendo la relación  $\rightsquigarrow$  con la relación de proximidad  $\rightarrow$ . Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.14.** *Si  $\dim(X) = 2$  los coeficientes de la matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}} = (m_{ij})$  pueden calcularse de forma recurrente de la siguiente manera:*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \\ \sum_{k: j \rightarrow k} m_{ik} = \sum_{l: l \rightarrow i} m_{lj} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

**Nota 1.3.15.** Dada una variedad no singular  $X$  y una configuración  $\mathcal{C}$  sobre  $X$ , podemos expresar  $\mathcal{C}$ , de manera única, como una unión disjunta:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^r \mathcal{C}_k,$$

donde  $\mathcal{C}_k$  es una configuración con  $p_{i_k}$  como único origen, siendo  $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$  los orígenes de  $\mathcal{C}$ . Cada una de las configuraciones  $\mathcal{C}_k$ , al tener un único origen, puede ser considerada como una configuración sobre el espectro del anillo local  $\mathcal{O}_{X, p_{i_k}}$ .

Podemos definir, al igual que en el caso local, la matriz

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}} = (\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^{-1})^t$$

y los divisores

$$D(p_j) = \sum_{p_j \geq p_i} m_{ij} E_i^*,$$

con idénticas propiedades de cálculo.

Además, si un punto  $p_j$  pertenece a  $\mathcal{C}_k$ , las expresiones de los divisores  $D(p_j)$  respecto a la configuración  $\mathcal{C}$  y respecto a la configuración  $\mathcal{C}_k$  (considerada sobre  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,p_{i_k}})$ ) coinciden.

## Capítulo 2

# Conos convexos asociados a variedades y morfismos

En este capítulo se pretende precisar un marco y unas herramientas para el estudio de las contracciones de una variedad proyectiva  $X$  (es decir, morfismos de esquemas  $h : X \rightarrow W$  tales que  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W$ ) y, más generalmente, de los *factores de Stein* de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  (es decir, factorizaciones del tipo  $X \xrightarrow{h} W \xrightarrow{g} Y$  tales que  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W$  y  $g$  es proyectivo). Como luego indicaremos, siempre existe una factorización, llamada también de Stein, de este tipo, en la que  $g$  es un morfismo finito. En el caso en que  $X$  e  $Y$  sean variedades normales, los factores de Stein están en correspondencia biyectiva con las variedades intermedias  $W$  normales.

En la primera sección del capítulo revisamos los conceptos de factor y factor de Stein de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , establecemos la relación de dominación entre factores (que es de orden si la restringimos al conjunto de las clases de isomorfía de factores de Stein), estudiamos algunas de sus propiedades, y deducimos que las contracciones  $h : X \rightarrow W$  factorizando a  $f$  que están determinadas por sus curvas contraídas son justamente las correspondientes a los factores de Stein de  $f$ .

En la sección 2 consideramos, para cada variedad proyectiva  $X$ , dos  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales duales,  $A^1(X)$  y  $A_1(X)$ , que son, respectivamente, los espacios generados por las clases de equivalencia numérica de divisores de Cartier y de 1-ciclos. Introducimos a continuación, en  $A_1(X)$ , el cono generado por las clases de las curvas íntegras de  $X$  (el concepto de cono está precisado en el apéndice). Este cono se denomina *cono de curvas* asociado a  $X$ , es denotado por  $NE(X)$  y constituye el ingrediente principal de la teoría de modelos minimales de Mori. A partir del cono de curvas se construye un cono de  $A^1(X)$  denominado *cono semiamplio* y denotado por  $P(X)$ . El cono semiam-

plio es el dual de  $NE(X)$  y los puntos reticulares de su interior topológico se corresponden con las clases de equivalencia numérica de los divisores amplios de  $X$ . Finalmente definiremos un subcono del cono semiamplio denominado cono característico, y denotado por  $\tilde{P}(X)$ , que es el generado por las clases de divisores cuyos haces invertibles asociados están generados por secciones globales.

En la sección 3 generalizamos las definiciones de la sección 2 y definimos, asociados a un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , dos  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales,  $A^1(X/Y; f)$  y  $A_1(X/Y; f)$ , el cono  $NE(X/Y; f)$  de  $A_1(X/Y; f)$  generado por las clases de equivalencia numérica de las curvas contraídas por  $f$ , denominado cono de curvas relativo a  $f$ , el cono semiamplio relativo a  $f$ ,  $P(X/Y; f)$ , y el cono característico relativo a  $f$ ,  $\tilde{P}(X/Y; f)$ .  $P(X/Y; f)$  es el cono dual de  $NE(X/Y; f)$  y fue estudiado por Kleiman en los años 60 del siglo XX [45].  $\tilde{P}(X/Y; f)$  es el cono de  $A^1(X/Y; f)$  generado por las clases de los divisores de Cartier  $D$  de  $X$  tales que la sucesión  $f^*f_*\mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$  es exacta. El cono característico fue estudiado por Hironaka [39], siendo este objeto el que permite estudiar los factores de Stein de  $f$ , debido a una biyección entre éstos y las células de  $\tilde{P}(X/Y; f)$ . Finalmente observamos que si el cono de curvas  $NE(X/Y; f)$  es poliédrico, entonces el cono característico tiene un número finito de células y, como consecuencia,  $f$  poseerá un número finito de factores de Stein.

Dedicamos la sección 4 a mostrar cómo el estudio del cono característico puede utilizarse para describir propiedades de factorización en el semigrupo de ideales completos de un anillo local regular. En el caso bidimensional existe factorización única, tal y como demostró Zariski; en dimensión superior no existe, en general, factorización única, produciéndose nuevos fenómenos que pueden ser estudiados por medio de los conos característicos. Asimismo indicamos cómo los resultados desarrollados en el capítulo 3 de esta memoria proporcionan una clase de morfismos  $\pi : Z \rightarrow \text{Spec}(R)$  con un número finito de variedades intermedias, siendo  $R$  un anillo local regular de dimensión 3.

En la última sección, sección 5, se estudian las propiedades del cono de curvas asociado a una superficie regular cualquiera  $X$ . Se establecen condiciones que deben satisfacer sus rayos extremales y los de su clausura, y se establece un primer criterio de poliedricidad del cono de curvas:  $NE(X)$  es poliédrico si y sólo si el conjunto de los rayos extremales de su clausura no posee puntos de acumulación (aquí llamados rayos límite). Finalmente, delimitamos la situación de estos rayos límite, obteniendo una región de  $A_1(X)$  que los contiene.

## 2.1. Factorizaciones de un morfismo proyectivo

A lo largo de toda esta sección,  $X$  e  $Y$  se supondrán dos esquemas algebraicos noetherianos sobre  $k$ .

**Definición 2.1.1.** Denominaremos *factor* de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  a toda terna  $(h, W, g)$ , donde  $W$  es un esquema algebraico,  $h : X \rightarrow W$  es un morfismo suprayectivo,  $g : W \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo, y se verifica la igualdad  $f = g \circ h$ .

**Nota 2.1.2.** Si  $(h, W, g)$  es un factor de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , el esquema intermedio  $W$  es claramente noetheriano y, además, el morfismo  $h$  es también proyectivo al ser  $g$  separado (véanse los ejercicios 4.8 y 4.9 de [37, Chap. II]).

**Definición 2.1.3.** Diremos que dos factores  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  son *isomorfos* si existe un isomorfismo  $e : W_1 \rightarrow W_2$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & W_1 & \\
 h_1 \nearrow & \downarrow e & \searrow g_1 \\
 X & & Y \\
 h_2 \searrow & & \nearrow g_2 \\
 & W_2 &
 \end{array}$$

Denotaremos por  $\text{Fact}(f)$  al conjunto de las clases de isomorfía de los factores de  $f$ . Dado un factor  $(h, W, g)$ , por abuso de notación denotaremos también por  $(h, W, g)$  a su clase de isomorfía en  $\text{Fact}(f)$ .

Para que dos factores  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  sean isomorfos, no es suficiente con que las variedades intermedias  $W_1$  y  $W_2$  sean isomorfas, como demuestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.1.4.** [3, Example 2.1.8] Supongamos que  $k$  es el cuerpo de los números complejos y consideremos la transformación de Cremona plana  $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  definida por

$$(X, Y, Z) \mapsto (F(X, Y, Z), G(X, Y, Z), H(X, Y, Z))$$

siendo

$$F(X, Y, Z) = YZ(X - Z)(X - 2Y),$$

$$G(X, Y, Z) = XZ(Y - Z)(X - 2Y),$$

$$H(X, Y, Z) = YX(Y - Z)(X - Z).$$

La red homaloidal asociada a  $\Phi$  es el sistema lineal de curvas planas dado por:  $\langle F(X, Y, Z), G(X, Y, Z), H(X, Y, Z) \rangle \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))$ , y su configuración de puntos base consta de 6 puntos propios de  $\mathbb{P}^2$ . Denotemos por  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  a la composición de la sucesión de explosiones en los puntos base.

La configuración de puntos base de la red homaloidal asociada a la transformación de Cremona inversa  $\Phi^{-1}$  consta de 3 puntos propios de  $\mathbb{P}^2$  y 3 puntos más pertenecientes a sus respectivos primeros entornos infinitesimales. Si denotamos por  $\pi' : Y \rightarrow \mathbb{P}^2$  a la composición de la sucesión de explosiones en estos puntos base, existe un isomorfismo  $t : X \rightarrow Y$  (véase [3, Coro. 1.3.8]) que da lugar a dos factorizaciones del morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ :

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xrightarrow{\pi' \circ t} \end{array} \mathbb{P}^2 \longrightarrow \text{Spec}(k)$$

Estos dos factores no son isomorfos, ya que la unión de las curvas excepcionales de  $X$  asociadas a  $\pi$  consta de 6 componentes conexas, mientras que la unión de las asociadas a  $\pi' \circ t$  consta sólo de 3.

**Definición 2.1.5.** Dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , diremos que un factor  $(h_1, W_1, g_1)$  *domina* a otro factor  $(h_2, W_2, g_2)$  (y lo denotaremos por  $(h_1, W_1, g_1) \geq (h_2, W_2, g_2)$ ) si existe un morfismo  $e : W_1 \rightarrow W_2$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & W_1 & \\ h_1 \nearrow & \downarrow e & \searrow g_1 \\ X & & Y \\ h_2 \searrow & & \nearrow g_2 \\ & W_2 & \end{array}$$

El morfismo  $e$  se denomina *morfismo de dominación*. Si  $(h_1, W_1, g_1)$  domina a  $(h_2, W_2, g_2)$ , diremos que  $(h_1, W_1, g_1)$  *domina estrictamente* a  $(h_2, W_2, g_2)$  (y lo denotaremos  $(h_1, W_1, g_1) > (h_2, W_2, g_2)$ ) si el morfismo de dominación no es finito. En caso contrario, diremos que  $(h_1, W_1, g_1)$  *domina débilmente* a  $(h_2, W_2, g_2)$ .

**Definición 2.1.6.** Un factor  $(h, W, g)$  de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  es *de Stein* si  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W$ .

**Nota 2.1.7.** Si  $(h, W, g)$  es un factor de Stein de un morfismo proyectivo, las fibras del morfismo  $h$  son conexas (véase [37, Chap. III, Coro. 11.3]).

**Nota 2.1.8.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo entre variedades normales, como consecuencia del teorema principal de Zariski [37, Chap. III, Coro. 11.4] se tiene que un factor  $(h, W, g)$  de  $f$  es de Stein si y sólo si la variedad intermedia  $W$  es normal.

Es claro que cualquier factor isomorfo a uno de Stein es también de Stein. Denotaremos por  $\text{Stein}(f)$  al subconjunto de  $\text{Fact}(f)$  formado por las clases de isomorfía de los factores de Stein de  $f$ .

**Proposición 2.1.9.** *Para cualquier morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , La relación de dominación induce en  $\text{Stein}(f)$  una relación binaria de orden.*

*Demostración.* Es claro que si  $(h_1, W_1, g_1) \geq (h_2, W_2, g_2)$  y se tienen dos factores,  $(h'_1, W'_1, g'_1)$  y  $(h'_2, W'_2, g'_2)$ , isomorfos, respectivamente, a  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$ , entonces  $(h'_1, W'_1, g'_1) \geq (h'_2, W'_2, g'_2)$ . Por tanto, la relación de dominación puede considerarse definida en  $\text{Fact}(f)$  y, por tanto, en  $\text{Stein}(f)$ . Siendo trivial la verificación de las propiedades reflexiva y transitiva, veamos que  $\geq$  cumple, en  $\text{Stein}(f)$ , la propiedad antisimétrica. Para ello, supongamos que  $\{(h_i, W_i, g_i)\}_{i=1,2}$  son factores de Stein de  $f$  verificando  $(h_1, W_1, g_1) \geq (h_2, W_2, g_2) \geq (h_1, W_1, g_1)$ , y sean  $e_1 : W_1 \rightarrow W_2$  y  $e_2 : W_2 \rightarrow W_1$  los correspondientes morfismos de dominación. De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & W_1 & \\
 h_1 \nearrow & \uparrow & \searrow g_1 \\
 X & \begin{array}{c} e_2 \\ \updownarrow \\ e_1 \end{array} & Y \\
 h_2 \searrow & \downarrow & \nearrow g_2 \\
 & W_2 & 
 \end{array}$$

se deducen las igualdades

$$(e_1 \circ e_2) \circ h_2 = e_1 \circ (e_2 \circ h_2) = e_1 \circ h_1 = h_2$$

$$(e_2 \circ e_1) \circ h_1 = e_2 \circ (e_1 \circ h_1) = e_2 \circ h_2 = h_1.$$

Como  $h_1$  y  $h_2$  son suprayectivos se verifica  $e_1 \circ e_2 = id_{W_2}$  y  $e_2 \circ e_1 = id_{W_1}$  (como aplicaciones entre conjuntos, no como morfismos). Por tanto,  $e_1 \circ e_2$  y  $e_2 \circ e_1$  son morfismos finitos (véase [42, Th. 2.27] y nota posterior), luego también son afines. Además se verifican las igualdades

$$(e_1 \circ e_2)_* \mathcal{O}_{W_2} = (e_1 \circ e_2 \circ h_2)_* \mathcal{O}_X = (e_1 \circ h_1)_* \mathcal{O}_X = h_{2*} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{W_2}$$

$$(e_2 \circ e_1)_* \mathcal{O}_{W_1} = (e_2 \circ e_1 \circ h_1)_* \mathcal{O}_X = (e_2 \circ h_2)_* \mathcal{O}_X = h_{1*} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{W_2}.$$

Deducimos, por tanto, que  $e_1 \circ e_2$  y  $e_2 \circ e_1$  son isomorfismos de esquemas [37, Chap. II, Exercise 5.17.d], coincidiendo con los respectivos morfismos identidad. Así pues,  $e_1$  y  $e_2$  son isomorfismos inversos, siendo los factores  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  isomorfos.  $\square$

**Proposición 2.1.10.** [37, Chap. III, Coro. 11.5] *Para cualquier morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  existe un factor de Stein  $(\bar{h}, \bar{W}, \bar{g})$  de  $f$  de manera que  $\bar{g}$  es un morfismo finito.*

**Nota 2.1.11.** La variedad  $\bar{W}$  de la proposición anterior es  $\text{Spec}(f_* \mathcal{O}_X)$  y  $\bar{h}$  y  $\bar{g}$  son los morfismos naturales

$$X \xrightarrow{\bar{h}} \text{Spec}(f_* \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\bar{g}} Y.$$

Esta factorización se denomina *factorización de Stein* del morfismo  $f$ .

A un factor cualquiera  $(h, W, g)$  de  $f$  podemos asociarle un factor de Stein  $(S(h), S(W), S(g))$ , de manera que  $S(g) := g \circ \gamma$ , siendo  $(S(h), S(W), \gamma)$  el factor dado por la factorización de Stein del morfismo  $h : X \rightarrow W$ . Se tiene, por tanto, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & S(W) & \\ S(h) \nearrow & \downarrow \gamma & \searrow S(g) \\ X & & Y \\ h \searrow & & \nearrow g \\ & W & \end{array}$$

Al ser  $\gamma$  un morfismo finito, es claro que  $(S(h), S(W), S(g))$  domina débilmente a  $(h, W, g)$ . Además, por construcción, si  $(h, W, g)$  es un factor de Stein de  $f$ , entonces  $(S(h), S(W), S(g))$  y  $(h, W, g)$  son isomorfos.

En [45] puede verse la prueba del siguiente resultado:

**Proposición 2.1.12.** *Sea  $(h, W, g)$  un factor cualquiera de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ .*

- (a) *La clase de isomorfía de  $(S(h), S(W), S(g))$  es el máximo elemento de  $\text{Stein}(f)$  dominando débilmente a la clase de isomorfía de  $(h, W, g)$ .*
- (b) *Si  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  son dos factores de  $f$  tales que  $(h_1, W_1, g_1) > (h_2, W_2, g_2)$ , entonces  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1)) > (S(h_2), S(W_2), S(g_2))$ .*



(c) Si  $(h_1, W_1, g_1)$  domina débilmente a  $(h_2, W_2, g_2)$ , entonces los factores  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1))$  y  $(S(h_2), S(W_2), S(g_2))$  son isomorfos.

**Corolario 2.1.13.** Si  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  son dos factores de Stein de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $(h_1, W_1, g_1)$  domina débilmente a  $(h_2, W_2, g_2)$  entonces los dos factores son isomorfos.  $\square$

**Definición 2.1.14.** Dada una curva  $C$  de  $X$ , diremos que es *contraída* por un morfismo  $\pi : X \rightarrow Y$  (o que  $\pi$  *contrae* a  $C$ ) si  $\pi(D)$  es un punto (cerrado) de  $Y$  para toda componente íntegra  $D$  de  $C$ .

**Proposición 2.1.15.** Sean  $h : X \rightarrow W$  y  $t : X \rightarrow Y$  dos morfismos proyectivos de manera que  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W$ . Entonces,  $t$  factoriza a través de  $h$  si y sólo si cualquier curva de  $X$  contraída por  $h$  lo es también por  $t$ . Además, en este caso, si la factorización es  $X \xrightarrow{h} W \xrightarrow{g} Y$  y el morfismo  $g$  es finito,  $t$  y  $h$  contraen exactamente las mismas curvas de  $X$ . En particular,  $S(h)$  contrae las mismas curvas que  $h$ .

*Demostración.* Si  $t$  factoriza a través de  $h$ , es claro que toda curva contraída por  $h$  es también contraída por  $t$ . Recíprocamente, supongamos que  $t$  contrae las curvas contraídas por  $h$ . Consideremos el morfismo

$$q : X \xrightarrow{(h,t)} W \times Y .$$

Sea  $Z$  la imagen del morfismo  $q$  y sean  $p_1 : Z \rightarrow W$  y  $p_2 : Z \rightarrow Y$  las dos proyecciones. Si  $y_0 \in W$ ,  $p_1^{-1}(y_0) = q(q^{-1}(p_1^{-1}(y_0)))$  es un punto (cerrado) de  $X$ , puesto que  $q^{-1}(p_1^{-1}(y_0)) = h^{-1}(y_0)$  es contraído por  $t$  (por hipótesis). Por tanto,  $p_1$  es un morfismo finito [42, Th. 2.27], luego afín. Además, se verifica la siguiente cadena de inclusiones de haces:

$$\mathcal{O}_W \subseteq p_{1*}\mathcal{O}_Z \subseteq p_{1*}(q_*\mathcal{O}_X) = (p_1 \circ q)_*\mathcal{O}_X = h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_W .$$

Concluimos, por tanto, que  $p_{1*}\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_W$ . Luego  $p_1$  es un isomorfismo [37, Chap. II, Exercise 5.17.d]. Como consecuencia,  $t = (p_2 \circ p_1^{-1}) \circ h$  y, así,  $t$  factoriza a través de  $h$ .

Finalizamos la prueba considerando  $t = g \circ h$ , con  $g$  finito, y aplicando reducción al absurdo. Si existiera una curva íntegra  $C$  de  $X$  que fuera contraída por  $t$  pero no por  $h$ , el morfismo  $g$  tendría una fibra infinita, lo cual es contradictorio.  $\square$

Cabe ahora hacerse la siguiente pregunta: ¿cuáles son los factores de un morfismo proyectivo  $X \rightarrow Y$  que están determinados por las curvas que contraen? De forma más precisa: dada una variedad  $X$ , ¿qué clases de isomorfía

de los factores de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  están caracterizadas por las curvas contraídas? El siguiente corolario nos muestra cual es la respuesta: las clases de isomorfía de los factores de Stein, es decir,  $\text{Stein}(f)$ .

**Corolario 2.1.16.** *Dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , dos factores de Stein  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  de  $f$  son isomorfos si y sólo si  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas de  $X$ .*

*Demostración.* Es evidente que si los dos factores son isomorfos, los correspondientes morfismos contraen las mismas curvas. Supongamos, por tanto, que  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  son factores de Stein tales que  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas. Según la proposición 2.1.15, existen dos morfismos  $k_1$  y  $k_2$  tales que

$$h_1 = k_2 \circ h_2$$

$$h_2 = k_1 \circ h_1.$$

A partir de la suprayectividad de  $h_1$  y  $h_2$  y de las factorizaciones  $f = g_i \circ h_i$  (para  $i = 1, 2$ ) se siguen las siguientes igualdades entre aplicaciones (no entre morfismos de esquemas):

$$g_1 = g_2 \circ k_1 \text{ y } g_2 = g_1 \circ k_2. \quad (2.1)$$

Teniendo en cuenta que  $h_{1*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{W_1}$  y  $h_{2*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{W_2}$  tenemos:

$$(g_2 \circ k_1)_*\mathcal{O}_{W_1} = g_{2*}\mathcal{O}_{W_2} = g_{2*}(h_{2*}\mathcal{O}_X) = f_*\mathcal{O}_X = (g_1 \circ h_1)_*\mathcal{O}_X = g_{1*}\mathcal{O}_{W_1}.$$

De forma análoga deducimos

$$(g_1 \circ k_2)_*\mathcal{O}_{W_2} = g_{1*}\mathcal{O}_{W_1}$$

y es sencillo ver que las igualdades (2.1) lo son también entre morfismos de esquemas. Por tanto,  $(h_1, W_1) \geq (h_2, W_2)$  y  $(h_2, W_2) \geq (h_1, W_1)$ , luego  $(h_1, W_1)$  y  $(h_2, W_2)$  son factores isomorfos (por la proposición 2.1.9).  $\square$

**Corolario 2.1.17.** *Consideremos un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  y sean  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  dos factores de  $f$ . Entonces,  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas de  $X$  si y sólo si los factores  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1))$  y  $(S(h_2), S(W_2), S(g_2))$  son isomorfos.*

*Demostración.* Si  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1))$  y  $(S(h_2), S(W_2), S(g_2))$  son isomorfos,  $S(h_1)$  y  $S(h_2)$  contraen las mismas curvas, luego, por la proposición 2.1.15,  $h_1$  y  $h_2$  también.

Recíprocamente, si  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas, nuevamente la proposición 2.1.15 prueba que  $S(h_1)$  y  $S(h_2)$  también contraen las mismas curvas, y al ser  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1))$  y  $(S(h_2), S(W_2), S(g_2))$  factores de Stein, son isomorfos (corolario 2.1.16).  $\square$

## 2.2. Conos asociados a una variedad proyectiva

A lo largo de toda esta sección  $X$  será una variedad proyectiva sobre  $k$  y denotaremos por  $F_1(X)$  al grupo de los 1-ciclos de  $X$ , y por  $\text{Div}(X)$  al grupo de los divisores de Cartier de  $X$ . A lo largo de esta memoria utilizaremos frecuentemente la forma bilineal

$$\text{Div}(X) \times F_1(X) \rightarrow \mathbf{Z}$$

dada por  $(D, C) \mapsto D \cdot C$  que proporciona la teoría de la intersección de la geometría algebraica (véanse los capítulos 1 y 2 de [21]).

**Definición 2.2.1.** Si  $D$  es un divisor de Cartier de  $X$ , diremos que es *numéricamente efectivo* (o también *semiample*) si  $D \cdot C \geq 0$  para todo 1-ciclo  $C$  de  $X$  y diremos que es *numéricamente equivalente a cero* (y lo denotaremos  $D \equiv 0$ ) si  $D \cdot C = 0$  para todo  $C \in F_1(X)$ . Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos divisores de Cartier de  $X$ , diremos que son *numéricamente equivalentes* (y lo denotaremos  $D_1 \equiv D_2$ ) si  $D_1 - D_2 \equiv 0$ .

Es claro que la equivalencia lineal de dos divisores implica su equivalencia numérica. Por tanto, podemos definir también, de manera obvia, el concepto de equivalencia numérica entre los elementos del grupo de Picard de la variedad  $X$ ,  $\text{Pic}(X)$ .

En la sección 4 del capítulo I de [45] se demuestran las propiedades dadas en la siguiente

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $f : X' \rightarrow X$  un morfismo entre variedades proyectivas y sea  $D$  un divisor de Cartier de  $X$ .*

1. *Si  $D$  es numéricamente efectivo, entonces  $f^*D$  es numéricamente efectivo.*
2. *Si  $f$  es suprayectivo y  $f^*D$  es numéricamente efectivo, entonces  $D$  es numéricamente efectivo.*
3. *Si  $D \equiv 0$ , entonces  $f^*D \equiv 0$ .*
4. *Si  $f$  es suprayectivo y  $f^*D \equiv 0$ , entonces  $D \equiv 0$ .*

Recordemos el concepto de equivalencia algebraica de divisores. Dos divisores de Cartier de  $X$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , son *algebraicamente equivalentes* si y sólo si existe un esquema algebraico conexo sobre  $k$ ,  $Z$ , un haz invertible  $\mathcal{L}$  de  $X \times Z$

y dos puntos  $x_1, x_2 \in Z$  tales que  $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{L}_{x_1}$  y  $\mathcal{O}_X(D_2) \cong \mathcal{L}_{x_2}$ , donde  $\mathcal{L}_{x_i}$  es el haz inducido por  $\mathcal{L}$  en la fibra de  $x_i$  por la proyección  $X \times Z \rightarrow Z$ .

Puesto que la equivalencia lineal de divisores implica su equivalencia algebraica, podemos considerar el  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $\text{Pic}(X)$  formado por las clases de divisores algebraicamente equivalentes a cero. Lo denotaremos por  $\text{Pic}^0(X)$ .  $NS(X) := \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$  es el llamado *grupo de Néron-Severi* de  $X$ .

El conjunto de los elementos de  $\text{Pic}(X)$  numéricamente equivalentes a cero forman un  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $\text{Pic}(X)$ , que denotaremos por  $\text{Pic}^\tau(X)$ . Denotaremos por  $N^1(X)$  al módulo cociente  $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^\tau(X)$ , formado por las clases de elementos de  $\text{Pic}(X)$  módulo equivalencia numérica. En [45, Chap. I, Sect. 4, Rem. 2] se prueba la inclusión

$$\text{Pic}^0(X) \subseteq \text{Pic}^\tau(X)$$

con lo cual se tiene el isomorfismo

$$N^1(X) \cong \frac{NS(X)}{\text{Pic}^\tau(X)/\text{Pic}^0(X)}.$$

Denotamos por  $A^1(X)$  al espacio vectorial real  $N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Es sabido que  $\text{Pic}^\tau(X)/\text{Pic}^0(X)$  es un grupo abeliano finito, con lo cual  $A^1(X)$  será un espacio vectorial de dimensión finita si y sólo si  $NS(X)$  es finitamente generado.  $A^1(X)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita para cualquier variedad (véase [45, Chap. IV, Sect. 1, Prop. 4]) y consecuentemente  $N^1(X)$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre de rango finito (puesto que es finitamente generado y libre de torsión). En el caso en que  $X$  sea una variedad no singular, este hecho es el conocido teorema de Néron-Severi [47]. Denominaremos *número de Picard* de  $X$  (y lo denotaremos por  $\rho(X)$ ) al rango de  $N^1(X)$ , que coincidirá con la dimensión de  $A^1(X)$ .

**Definición 2.2.3.** Diremos que un 1-ciclo  $C \in F_1(X)$  es *numéricamente equivalente a cero* (y lo denotaremos  $C \equiv 0$ ) si  $D \cdot C = 0$  para todo divisor de Cartier  $D$  de  $X$ . Dados dos 1-ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , diremos que son *numéricamente equivalentes* si  $C_1 - C_2 \equiv 0$ .

Es claro que el conjunto de los 1-ciclos de  $X$  numéricamente equivalentes a cero, que denotaremos por  $F_1^\tau(X)$ , forman un  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $F_1(X)$ . Denotaremos por  $N_1(X)$  al módulo cociente  $F_1(X)/F_1^\tau(X)$ , es decir, al  $\mathbb{Z}$ -módulo formado por las clases de equivalencia numérica de los 1-ciclos de  $X$ .

Las aplicaciones

$$N^1(X) \rightarrow A^1(X)$$

$$N_1(X) \rightarrow A_1(X)$$

definidas mediante la asignación  $a \mapsto a \otimes 1$  constituyen sendos monomorfismos de  $\mathbb{Z}$ -módulos. De aquí en adelante identificaremos  $N^1(X)$  y  $N_1(X)$  con sus imágenes en  $A^1(X)$  y  $A_1(X)$  mediante los monomorfismos anteriores, con lo que supondremos las inclusiones  $N^1(X) \subseteq A^1(X)$  y  $N_1(X) \subseteq A_1(X)$ .

Tomando clases módulo equivalencia lineal y numérica, podemos definir, de manera obvia, los siguientes morfismos:

$$\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow N^1(X) \subseteq A^1(X)$$

$$F_1(X) \rightarrow N_1(X) \subseteq A_1(X).$$

Si  $D$  pertenece a  $\text{Div}(X)$  (o a  $\text{Pic}(X)$ ) y  $C \in F_1(X)$ , denotaremos por  $[D]$  y  $[C]$  a sus respectivas imágenes en  $N^1(X)$  (o  $A^1(X)$ ) y  $N_1(X)$  (o  $A_1(X)$ ) vía los morfismos anteriores.

Para denotar elementos arbitrarios de los espacios vectoriales  $A^1(X)$  y  $A_1(X)$  utilizaremos letras latinas minúsculas con una barra en su parte superior.

La teoría de la intersección antes citada proporciona una forma  $\mathbb{Z}$ -bilineal

$$N^1(X) \times N_1(X) \rightarrow \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

definida por  $([D], [C]) \mapsto D \cdot C$ . Esta forma bilineal induce, de manera obvia, una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$A^1(X) \times A_1(X) \rightarrow \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

Denotaremos también por  $\bar{d} \cdot \bar{c}$  a la imagen de un par  $(\bar{d}, \bar{c})$  por esta forma bilineal. Utilizaremos  $\bar{x}^2$  para denotar  $\bar{x} \cdot \bar{x}$ .

**Proposición 2.2.4.**  $N_1(X)$  y  $N^1(X)$  son  $\mathbb{Z}$ -módulos duales.

*Demostración.* Para todo 1-ciclo  $C$  de  $X$  consideramos el homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\xi_{[C]}^1 : N^1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definido por  $\xi_{[C]}^1([D]) = D \cdot C$ , donde  $[D]$  denota la clase de un divisor de Cartier  $D$ . Es claro que la aplicación

$$\xi^1 : N_1(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^1(X), \mathbb{Z})$$

definida por  $\xi^1([C]) = \xi_{[C]}^1$  es un monomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Por tanto, el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N_1(X)$  tiene rango finito menor o igual que el rango de  $N^1(X)$ , al ser isomorfo a un submódulo de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^1(X), \mathbb{Z})$ .

De manera análoga podemos definir un monomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\xi^2 : N^1(X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_1(X), \mathbb{Z})$$

que determina la desigualdad

$$\text{rk}(N_1(X)) = \text{rk}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_1(X), \mathbb{Z})) \geq \text{rk}(N^1(X)) = \rho(X),$$

teniéndose la igualdad  $\text{rk}(N_1(X)) = \text{rk}(N^1(X))$ . Por tanto,  $\xi^1$  y  $\xi^2$  son isomorfismos.  $\square$

**Nota 2.2.5.** Como consecuencia de la proposición 2.2.4,  $A_1(X)$  y  $A^1(X)$  son espacios vectoriales duales. Las formas bilineales (2.2) y (2.3) inducidas por la intersección se corresponden con los pares bilineales canónicos (A.1) y (A.2) definidos en la primera sección del apéndice. Ello permite aplicar toda la teoría sobre conos convexos desarrollada en dicho apéndice en el ámbito de los espacios vectoriales duales  $A_1(X)$  y  $A^1(X)$ .

**Definición 2.2.6.** Denominaremos *cono de curvas* asociado a  $X$  (y será denotado por  $NE(X)$ ) al cono de  $A_1(X)$  generado por las imágenes en  $A_1(X)$  de las curvas íntegras de  $X$ .

Denotaremos por  $\overline{NE}(X)$  a la clausura topológica de  $NE(X)$  en  $A_1(X)$ .

**Nota 2.2.7.** La dimensión de  $NE(X)$  es  $\rho(X)$  (recordemos que  $\rho(X) = \text{rk}(N^1(X)) = \text{rk}(N_1(X))$ ). En efecto, en caso contrario  $NE(X)$  estaría contenido en un hiperplano de  $A_1(X)$ , existiendo un elemento no nulo  $\bar{q}$  de  $A^1(X)$  tal que  $\bar{q} \cdot [C] = 0$  para toda curva  $C$  de  $X$ ; como las clases de las curvas de  $X$  generan  $A_1(X)$  se tendría que  $\bar{q} \cdot \bar{x} = 0$  para todo  $\bar{x} \in A_1(X)$ , siendo esto una contradicción.

Al ser  $X$  un esquema proyectivo, existe un divisor amplio de  $X$ . Como consecuencia de este hecho y del criterio de amplitud de Kleiman [45], que enunciamos a continuación, la clausura topológica  $\overline{NE}(X)$  del cono de curvas es un cono *fuertemente convexo* (véanse la definición A.1.27 y la proposición A.1.29 para la definición de cono fuertemente convexo y sus caracterizaciones).

**Teorema 2.2.8.** (*Criterio de amplitud de Kleiman*) *Un divisor de Cartier  $H$  de  $X$  es amplio si y sólo si*

$$[H] \cdot \bar{c} > 0 \text{ para todo } \bar{c} \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\}.$$

De aquí al final de esta memoria fijaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\bar{z}_{>0} &:= \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{z} \cdot \bar{x} > 0\}, \\ \bar{z}_{\geq 0} &:= \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{z} \cdot \bar{x} \geq 0\} \\ \bar{z}_{<0} &:= \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{z} \cdot \bar{x} < 0\}, \\ \bar{z}_{\leq 0} &:= \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{z} \cdot \bar{x} \leq 0\}, \\ \bar{z}_{=1} &:= \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{z} \cdot \bar{x} = 1\}, \\ NE(X)_A &:= NE(X) \cap A, \\ \overline{NE}(X)_A &:= \overline{NE}(X) \cap A,\end{aligned}$$

donde  $\bar{z}$  y  $A$  son un elemento y un subconjunto de  $A^1(X)$  y  $A_1(X)$  respectivamente.

Siguiendo la notación de la sección A.2 del apéndice,  $\phi_{\bar{z}} : \bar{z}_{>0} \rightarrow \bar{z}_{=1}$  será la aplicación definida por:

$$\bar{x} \mapsto (\bar{z} \cdot \bar{x})^{-1} \bar{x},$$

que a cada punto  $\bar{x}$  de la región  $\bar{z}_{>0}$  le asigna el punto de intersección entre el rayo generado por  $\bar{x}$  y el hiperplano  $\bar{z}_{=1}$ .

El siguiente teorema, debido a S. Mori, nos muestra cual es la estructura de una parte de la clausura topológica del cono de curvas asociado a una variedad proyectiva no singular  $X$ ; más exactamente, de su intersección con el semiespacio  $[K_X]_{<0}$ . Los rayos extremales contenidos en  $[K_X]_{<0}$  son clases de ciertas curvas racionales de la variedad y constituyen un conjunto discreto (considerando en el conjunto de los rayos de  $A_1(X)$  la topología determinada en la sección A.2 del apéndice).

**Teorema 2.2.9.** *Teorema del cono, [46, Th. 1.24] Si  $X$  es una variedad proyectiva no singular, entonces:*

- (a) *Existe un conjunto numerable  $\Gamma$  de curvas racionales de  $X$  tal que  $0 < -(C \cdot K_X) \leq \dim(X) + 1$  para toda curva  $C \in \Gamma$ , y*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{[K_X]_{\geq 0}} + \text{con}(\{[C] \mid C \in \Gamma\}).$$

- (b) *Para todo  $\epsilon > 0$  y para cualquier divisor amplio  $H$  de  $X$ ,*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{[K_X] + \epsilon[H]_{\geq 0}} + \text{con}(\{[C] \mid C \in \Gamma'\}),$$

*donde  $\Gamma'$  es un subconjunto finito de  $\Gamma$ .*

**Nota 2.2.10.** Aunque la versión del teorema del cono que enunciamos en esta memoria es aplicable únicamente a una variedad proyectiva no singular, existe un enunciado más general, admitiendo variedades con cierto tipo de singularidades, llamadas log-terminales (véase [46, Th. 3.7]). Este teorema constituye uno de los pilares básicos de la teoría de modelos minimales de Mori.

**Nota 2.2.11.** Si  $X$  es una variedad no singular, es evidente a partir del teorema del cono que los rayos extremales de los conos  $NE(X)$  y  $\overline{NE}(X)$  contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  coinciden.

Tal y como se detalla en la sección A.2 del apéndice, el conjunto  $\mathcal{R}(A_1(X))$  formado por los rayos de  $A_1(X)$  puede dotarse de una topología que lo hace homeomorfo a la esfera unidad  $S^{\rho(X)-1}$  de  $A_1(X)$ . Esta topología es la menos fina que hace continua la biyección  $\Theta : \mathcal{R}(A_1(X)) \rightarrow S^{\rho(X)-1}$  definida por

$$\mathbb{R}_+ \bar{r} \rightarrow \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}.$$

**Corolario 2.2.12.** Si  $X$  una variedad proyectiva no singular, entonces el conjunto de los rayos extremales de  $NE(X)$  contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  es discreto.

*Demostración.* Sea  $H$  un divisor amplio de  $X$  y sea  $R$  un rayo extremal de  $NE(X)$  contenido en la región  $[K_X]_{<0}$ . Existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $R \subseteq NE(X)_{[K_X] + \epsilon[H]_{<0}}$ . Si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}(A_1(X))$  denota el conjunto formado por los rayos de  $A_1(X)$  contenidos en el semiespacio  $[K_X] + \epsilon[H]_{<0} \subseteq [K_X]_{<0}$ , es claro que  $\mathcal{U}$  es un entorno abierto de  $R$  en  $\mathcal{R}(A_1(X))$ . Además, por el apartado (b) del teorema del cono, existe sólo un número finito de rayos extremales de  $NE(X)$  contenidos en  $\mathcal{U}$ . Esto demuestra que el conjunto de los rayos extremales de  $NE(X)$  es discreto en  $[K_X]_{<0}$ .  $\square$

**Definición 2.2.13.** Definimos el *cono semiamplio* asociado a  $X$ , y lo denotamos por  $P(X)$ , como el cono de  $A^1(X)$  dual de  $NE(X)$ , es decir, el formado por todos los elementos  $\bar{d}$  de  $A^1(X)$  tales que  $\bar{d} \cdot \bar{c} \geq 0$  para todo  $\bar{c} \in NE(X)$  (véase la definición A.1.21).

Utilizando la notación del apéndice (véase la definición A.1.6) denotaremos por  $P(X)^\circ$  al interior topológico de  $P(X)$  como subespacio topológico de  $A^1(X)$ , y por  $\text{int}(P(X))$  a su interior relativo.

De la sección 2 del capítulo IV de [45] se deduce el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.14.**  $P(X)^\circ \cup \{0\}$  es el cono generado por las imágenes en  $A^1(X)$  de los divisores amplios de  $X$ .



Al ser  $X$  una variedad proyectiva, admite divisores amplios y, por tanto,  $P(X)^\circ \neq \emptyset$ . Esto implica que la dimensión de  $P(X)$  es  $\rho(X)$  y que  $\text{int}(P(X)) = P(X)^\circ$ . Además,  $P(X)$  es un cono fuertemente convexo por la proposición A.1.30.

Como consecuencia de la proposición 2.2.14 y del criterio de amplitud de Kleiman, los divisores de Cartier de  $X$  cuya clase módulo equivalencia numérica pertenece al interior topológico de  $P(X)$  son exactamente los divisores amplios de  $X$ . Esto viene reflejado en el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.15.** *Sea  $D$  un divisor de Cartier de  $X$ . Entonces,  $D$  es amplio si y sólo si  $[D] \in P(X)^\circ$ .*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor amplio, entonces  $[D]$  pertenece a  $P(X)^\circ$  por la proposición 2.2.14. Recíprocamente, si  $D$  es un divisor tal que  $[D] \in P(X)^\circ$  entonces, también por la proposición 2.2.14,  $D = \sum_{i=1}^q \alpha_i [D_i]$ , siendo  $\alpha_i > 0$  y  $D_i$  un divisor amplio para todo  $i$ . Si  $\bar{x}$  es un elemento cualquiera de  $\overline{NE(X)} \setminus \{0\}$ , aplicando el teorema 2.2.8 tenemos:

$$[D] \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^q \alpha_i [D_i] \cdot \bar{x} > 0,$$

luego  $D$  es un divisor amplio.  $\square$

**Nota 2.2.16.** Otra manera de expresar el enunciado de este corolario es diciendo que los elementos reticulares no nulos del cono  $P(X)^\circ \cup \{0\}$  son exactamente las imágenes en  $A^1(X)$  de los divisores amplios de  $X$ .

**Definición 2.2.17.** Definimos el *cono característico* asociado a  $X$ , y lo denotamos por  $\tilde{P}(X)$ , como el cono de  $A^1(X)$  generado por las imágenes de los divisores de Cartier  $D$  de  $X$  cuyo sistema lineal completo asociado  $|D|$  no posee puntos base (o, equivalentemente, por aquellos divisores de Cartier  $D$  de  $X$  tales que  $\mathcal{O}_X(D)$  está generado por secciones globales).

Es claro que todo divisor de Cartier  $D$  de  $X$  cuyo sistema lineal completo asociado no posee puntos base es numéricamente efectivo, con lo cual el cono característico  $\tilde{P}(X)$  es un subcono del cono semiamplio  $P(X)$ . Además, los interiores topológicos de ambos conos coinciden, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.18.** *Se satisface la igualdad  $P(X)^\circ = \tilde{P}(X)^\circ$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior, será suficiente verificar que  $P(X)^\circ \subseteq \tilde{P}(X)$ . Puesto que  $P(X)^\circ \cup \{0\}$  es el cono

generado por las imágenes en  $A^1(X)$  de los divisores amplios de  $X$  (proposición 2.2.14), bastará ver que cualquiera de estos divisores admite un múltiplo cuya imagen en  $A^1(X)$  pertenece al cono característico. Pero esto es claro, ya que para cualquier divisor amplio  $D$  de  $X$ , existe un número entero positivo  $m$  tal que  $mD$  es un divisor muy amplio y, por tanto,  $\mathcal{O}_X(mD)$  está generado por secciones globales, siendo  $[mD] \in \tilde{P}(X)$ .  $\square$

Todo divisor  $D$  de  $X$  tal que  $\mathcal{O}_X(D)$  está generado por secciones globales da lugar, previa elección de una base del espacio de secciones globales del haz  $\mathcal{O}_X(D)$ , a un morfismo  $h : X \rightarrow Y$  (véase [37, Chap. II, Th. 7.1]). En la sección siguiente se verá, aunque en un contexto más amplio, que la estructura celular del cono característico  $\tilde{P}(X)$  describe los morfismos (contracciones)  $h : X \rightarrow Y$  tales que  $h_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ , es decir, las factorizaciones de Stein del morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ .

### 2.3. Conos asociados a un morfismo proyectivo

En esta sección definiremos una serie de conos de naturaleza similar a los definidos en la sección anterior, pero asociados, no ya a una variedad proyectiva, sino a un morfismo proyectivo entre variedades. Trataremos tres conos relativos: el de curvas, el semiamplio y el característico. Veremos que existe un isomorfismo (de conjuntos ordenados) entre el conjunto de las clases de isomorfía de los factores de Stein del morfismo y las células de su cono característico asociado. Utilizando el cono semiamplio como nexo entre el cono de curvas y el característico, nuestro principal resultado será que la poliedricidad del cono de curvas implica la existencia de un número finito de factores de Stein del morfismo. A lo largo de toda la sección,  $X$  e  $Y$  serán dos variedades.

Consideremos un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$  y denotemos por  $F_1(X/Y; f)$  al  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $F_1(X)$  generado por las curvas íntegras  $C$  de  $X$  contraídas por  $f$ , y por  $N_1(X/Y; f)$  al  $\mathbb{Z}$ -módulo cociente

$$\frac{F_1(X/Y; f)}{F_1(X/Y; f) \cap F_1^r(X)}.$$

Si  $C$  es cualquier curva de  $X$  contraída por  $f$ ,  $[C]_f$  será su clase en  $N_1(X/Y; f)$ .

**Definición 2.3.1.** Dado un divisor de Cartier  $D$  de  $X$ , diremos que es *f-numéricamente equivalente a cero* si  $D \cdot C = 0$  para todo 1-ciclo  $C$  de  $X$  perteneciente a  $F_1(X/Y)$ . Dos divisores de Cartier  $D_1$  y  $D_2$  de  $X$  diremos que

son  $f$ -numéricamente equivalentes si  $D_1 - D_2$  es  $f$ -numéricamente equivalente a cero.

Denotaremos por  $\text{Pic}^\tau(X/Y; f)$  al  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $\text{Pic}(X)$  formado por las clases de los divisores de Cartier de  $X$  que son  $f$ -numéricamente equivalentes a cero, y por  $N^1(X/Y; f)$  al  $\mathbb{Z}$ -módulo cociente  $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^\tau(X/Y; f)$ . Dado un elemento  $D$  de  $\text{Div}(X)$  o de  $\text{Pic}(X)$  denotaremos también por  $[D]_f$  a su imagen natural en  $N^1(X/Y; f)$ .

Tensorizando con  $\mathbb{R}$ , definimos los  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales siguientes:

$$A_1(X/Y; f) := N_1(X/Y; f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$

$$A^1(X/Y; f) := N^1(X/Y; f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Al igual que en la sección anterior, identificaremos el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N^1(X/Y; f)$  (resp.,  $N_1(X/Y; f)$ ) con su correspondiente imagen en el espacio vectorial  $A^1(X/Y; f)$  (resp.,  $A_1(X/Y; f)$ ).

La teoría de la intersección proporciona una forma  $\mathbb{Z}$ -bilineal

$$N^1(X/Y; f) \times N_1(X/Y; f) \rightarrow \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

dada por  $([D]_f, [C]_f) \mapsto D \cdot C$ . Esta forma bilineal se extiende, de manera obvia, a una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$A^1(X/Y; f) \times A_1(X/Y; f) \rightarrow \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Según [45, Chap. IV, Sect. 4, Prop. 3], el espacio vectorial  $A^1(X/Y; f)$  tiene dimensión finita (denotada por  $\rho(X/Y; f)$ ). Esto implica que  $N^1(X/Y; f)$  es finitamente generado y, por tanto, es libre de rango finito igual a  $\rho(X/Y; f)$  (pues es también libre de torsión). Mediante un procedimiento totalmente análogo al utilizado en la sección anterior para probar que  $N_1(X)$  y  $N^1(X)$  son  $\mathbb{Z}$ -módulos duales, puede verse que  $N_1(X/Y; f)$  y  $N^1(X/Y; f)$  también lo son. Por tanto,  $A^1(X/Y; f)$  y  $A_1(X/Y; f)$  son espacios vectoriales duales. Además, las formas bilineales (2.4) y (2.5) dadas por la intersección, se corresponden con los pares canónicos (A.1) y (A.2) del apéndice. Esto permite considerar la teoría de conos convexos desarrollada en dicho apéndice aplicada a los espacios vectoriales  $A^1(X/Y; f)$  y  $A_1(X/Y; f)$ .

**Definición 2.3.2.** Dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , definimos el *cono de curvas relativo a  $f$*  como el cono de  $A_1(X/Y; f)$  generado por las imágenes en  $A_1(X/Y; f)$  de las curvas íntegras de  $X$  pertenecientes a  $F_1(X/Y; f)$ . Lo denotaremos por  $NE(X/Y; f)$ .

Un razonamiento totalmente análogo al utilizado en la nota 2.2.7 nos lleva a deducir que la dimensión de  $NE(X/Y; f)$  coincide con  $\rho(X/Y; f)$ .

**Definición 2.3.3.** Dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , diremos que un haz invertible  $\mathcal{L}$  sobre  $X$  es *muy amplio relativo a  $f$*  si existe una inmersión  $i : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ , para algún número entero positivo  $n$ , tal que  $\mathcal{L} \cong i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^n}(1)$  y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

siendo  $p$  la proyección asociada al espacio  $\mathbb{P}_Y^n$ .

Diremos que  $\mathcal{L}$  es *amplio relativo a  $f$*  si para todo haz coherente  $\mathcal{F}$  de  $X$ , el morfismo canónico  $f^*(f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$  es suprayectivo para todo  $m$  suficientemente elevado.

Diremos que un divisor de Cartier  $D$  de  $X$  es *muy amplio relativo a  $f$*  (resp., *amplio relativo a  $f$* ) si lo es su haz invertible asociado  $\mathcal{O}_X(D)$ .

La clausura topológica del cono de curvas relativo a  $f$ , que denotaremos por  $\overline{NE}(X/Y; f)$ , es un cono *fuertemente convexo* (al igual que ocurría con el cono de curvas asociado a una variedad). Este hecho es consecuencia de una versión relativa del criterio de amplitud de Kleiman (véase [46, Th. 1.44]), que enunciaremos a continuación y que caracteriza los divisores amplios relativos a  $f$  como aquellos cuya intersección con los elementos de  $\overline{NE}(X/Y; f) \setminus \{0\}$  es estrictamente positiva. Obsérvese que  $X$  posee divisores de Cartier amplios relativos a  $f$ , al ser  $f$  un morfismo proyectivo.

**Teorema 2.3.4.** (*Versión relativa del criterio de amplitud de Kleiman*) *Un divisor de Cartier  $D$  de  $X$  es amplio relativo a  $f$  si y sólo si*

$$[D]_f \cdot \bar{z} > 0 \text{ para todo } \bar{z} \in \overline{NE}(X/Y; f) \setminus \{0\}.$$

El siguiente resultado proporciona un criterio numérico para las curvas contraídas por un factor de  $f$ .

**Corolario 2.3.5.** *Sea  $(h, W, g)$  un factor de  $f$  y sea  $C$  una curva de  $X$ . Entonces,  $C$  es contraída por  $h$  si, y sólo si,  $[h_*C]_g = 0$ .*

*Demostración.* La implicación directa es evidente. Supongamos, por tanto, que  $[h_*C]_g = 0$ . Esto implica que  $D \cdot h_*C = 0$  para cualquier divisor de Cartier  $D$  de  $Y$  y, en particular, para los divisores amplios relativos a  $g$  (que existen, puesto que  $g$  es un morfismo proyectivo). Como consecuencia del teorema 2.2.8,  $h_*C = 0$  y, así,  $C$  es una curva contraída por  $h$ .  $\square$

**Nota 2.3.6.** Existe una versión relativa del teorema del cono que, bajo ciertas hipótesis, da una idea de la estructura de  $\overline{NE}(X/Y; f)$  (véase [43]). Concretamente, de él se deduce que, al igual que en el caso no relativo, los rayos extremales de  $NE(X/Y; f)$  en la región  $[K_X]_{<0}$  están generados por las clases de ciertas curvas racionales y forman un conjunto discreto.

Si  $(h, w, g)$  es un factor del morfismo  $f$ , entonces el homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$N_1(X/Y; f) \rightarrow N_1(W/Y; g)$$

dado por  $[C]_f \mapsto [h_*C]_g$ , donde  $C$  es una curva de  $X$  contraída por  $f$ , induce un homomorfismo de espacios vectoriales

$$h_* : A_1(X/Y; f) \rightarrow A_1(W/Y; g).$$

Por otra parte, la aplicación

$$N_1(X/W; h) \rightarrow N_1(X/Y; f)$$

definida por  $[C]_h \mapsto [C]_f$  es un monomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos que induce un monomorfismo de espacios vectoriales

$$\nu_h^f : A_1(X/W; h) \rightarrow A_1(X/Y; f),$$

siendo clara la inclusión

$$\nu_h^f(NE(X/W; h)) \subseteq NE(X/Y; f).$$

**Proposición 2.3.7.** Si  $(h, W, g)$  es un factor de  $f$ , el cono  $\nu_h^f(NE(X/W; h))$  es una célula del cono  $NE(X/Y; f)$ .

*Demostración.* Para aplicar la caracterización de célula dada en la proposición A.3.11, consideremos dos elementos  $\bar{x}, \bar{y}$  pertenecientes a  $NE(X/Y; f)$  tales que su suma  $\bar{x} + \bar{y}$  pertenece a  $\nu_h^f(NE(X/W; h))$ . Supongamos que  $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \beta_i [C_i]_f$  e  $\bar{y} = \sum_{i=k+1}^s \beta_i [C_i]_f$ , siendo  $C_i$  curvas íntegras de  $X$  contraídas por  $f$  y  $\beta_1, \dots, \beta_s$  números reales estrictamente positivos. Al ser  $\bar{x} + \bar{y} \in \nu_h^f(NE(X/W; h))$ , existirán números reales positivos  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  y curvas íntegras de  $X$  contraídas por  $h$ ,  $C'_1, \dots, C'_t$ , tales que

$$\bar{x} + \bar{y} = \nu_h \left( \sum_{i=1}^t \alpha_i [C'_i]_h \right) = \sum_{i=1}^t \alpha_i [C'_i]_f.$$

Se tiene, por tanto, la igualdad

$$\sum_{i=1}^k \beta_i [C_i]_f + \sum_{i=k+1}^s \beta_i [C_i]_f = \sum_{i=1}^t \alpha_i [C'_i]_f.$$

Tomando imágenes por el homomorfismo  $h_*$  definido anteriormente:

$$\sum_{i=1}^k \beta_i[h_*C_i]_g + \sum_{i=k+1}^s \beta_i[h_*C_i]_g = \sum_{i=1}^t \alpha_i[h_*C'_i]_g.$$

Teniendo en cuenta que  $C'_i$  son curvas contraídas por  $h$  obtenemos:

$$\sum_{i=1}^k \beta_i[h_*C_i]_g + \sum_{i=k+1}^s \beta_i[h_*C_i]_g = 0,$$

siendo, por tanto,  $[h_*C_i]_g = 0$  para todo  $i = 1, \dots, s$ . Luego, por el corolario 2.3.5, las curvas  $C_i$  también son contraídas por  $h$ , siendo  $\bar{x}, \bar{y}$  elementos de  $\nu_h^f(NE(X/W; h))$ .  $\square$

Hemos probado, pues, que para cualquier factor  $(h, W, g)$  de  $f$ , el cono de  $A_1(X/Y; f)$  definido por  $\nu_h^f(NE(X/W; h))$  es una célula de  $NE(X/Y; f)$ , de manera que  $h$  contrae exactamente a aquellas curvas de  $X$  cuyas imágenes en  $A_1(X/Y; f)$  pertenecen a dicha célula. Además, dos factores de  $f$ ,  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$ , dan lugar a la misma célula de  $NE(X/Y; f)$  si y sólo si  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas de  $X$ , es decir, si y sólo si los factores  $(S(h_1), S(W_1), S(g_1))$  y  $(S(h_2), S(W_2), S(g_2))$  dados por las correspondientes factorizaciones de Stein son isomorfos (según el corolario 2.1.17). Por lo tanto, podemos definir una aplicación inyectiva

$$(h, W, g) \mapsto \nu_h^f(NE(X/W; h))$$

entre el conjunto de las clases de isomorfía de los factores de Stein del morfismo  $f$ ,  $\text{Stein}(f)$ , y el conjunto de las células del cono  $NE(X/Y; f)$ .

Además, como consecuencia directa de la proposición 2.1.15 se tiene el siguiente

**Lema 2.3.8.** *Si existe una relación de dominación  $(h_1, W_1, g_1) \geq (h_2, W_2, g_2)$  entre dos factores del morfismo  $f$ , entonces:*

$$(a) \nu_{h_1}^f(NE(X/W_1; h_1)) \subseteq \nu_{h_2}^f(NE(X/W_2; h_2)).$$

$$(b) \nu_{h_1}^f(NE(X/W_1; h_1)) = \nu_{h_2}^f(NE(X/W_2; h_2)) \text{ si y sólo si el morfismo de dominación es finito.}$$

Todo esto puede resumirse en el siguiente

**Teorema 2.3.9.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo proyectivo entre variedades y denotemos por  $\Delta(NE(X/Y; f))$  al conjunto de las células de  $NE(X/Y; f)$ . Entonces, existe una aplicación inyectiva*

$$\nu^f : \text{Stein}(f) \rightarrow \Delta(NE(X/Y; f))$$

tal que  $F_1 \geq F_2 \Leftrightarrow \nu^f(F_1) \subseteq \nu^f(F_2)$  para cualesquiera  $F_1, F_2 \in \text{Stein}(f)$ .

**Definición 2.3.10.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo entre variedades, una célula  $F$  de  $NE(X/Y; f)$  diremos que es *contráctil* si existe un factor de Stein  $(h, W, g)$  de  $f$  tal que  $\nu^f(h, W, g) = F$ ; según el teorema 2.3.9 existe, salvo isomorfismo, un único factor de Stein con esta condición. El morfismo  $h : X \rightarrow W$  se denomina *contracción de  $F$* . Si  $R$  es un rayo extremal de  $NE(X/Y; f)$ , diremos que es *contráctil* si lo es la célula  $R \cup \{0\}$ . Una *contracción de  $R$*  será una contracción de dicha célula.

En general, no todas las células del cono de curvas  $NE(X/Y; f)$  son contráctiles por  $f$ . En el capítulo 3 se verán casos concretos (ejemplo 3.4.6) de este tipo de situaciones. Visto esto, cabe plantearse el problema de determinar cuáles son las células de  $NE(X/Y; f)$  contráctiles por  $f$ . Como veremos a continuación, será el *cono característico* relativo a  $f$ , que es un subcono del cono dual de  $NE(X/Y; f)$ , el que determinará las células contráctiles.

**Definición 2.3.11.** Denominamos *cono semiamplio relativo a  $f$* , y lo denotaremos por  $P(X/Y; f)$ , al cono de  $A^1(X/Y; f)$  dado por  $NE(X/Y; f)^\vee$ .

En [45] se demuestra que el cono  $P(X/Y; f)^\circ \cup \{0\}$  está generado por las imágenes en  $A^1(X/Y; f)$  de los divisores de  $X$  amplios relativos a  $f$ , con lo cual  $P(X/Y; f)^\circ \neq \emptyset$  y  $\dim(P(X/Y; f))$  es igual al rango del  $\mathbb{Z}$ -módulo  $N^1(X/Y; f)$ , que denotamos por  $\rho(X/Y; f)$ . Además, por la proposición A.1.30,  $P(X/Y; f)$  es un cono fuertemente convexo.

**Nota 2.3.12.** Si  $Y = \text{Spec}(k)$ , entonces  $f$  es el morfismo estructural de  $X$  como variedad sobre  $k$ . En este caso, los conos  $NE(X/Y; f)$  y  $P(X/Y; f)$  coinciden con los conos  $NE(X)$  y  $P(X)$  definidos en la sección anterior.

A partir de ahora, por simplicidad de notación, denotaremos los conjuntos  $NE(X/Y; f)$ ,  $\overline{NE}(X/Y; f)$ ,  $P(X/Y; f)$ ,  $A^1(X/Y; f)$ ,  $A_1(X/Y; f)$ ,  $N^1(X/Y; f)$ ,  $N_1(X/Y; f)$ , y también  $\rho(X/Y; f)$ , omitiendo, siempre y cuando no haya confusión posible, o bien la expresión  $X/Y$ , o bien la expresión  $f$  (por ejemplo,  $NE(X/Y; f)$  podrá ser denotado también por  $NE(X/Y)$  o  $NE(f)$ ).

**Proposición 2.3.13.** [45, Chap. IV, Sect. 4, Prop. 1] *Todo diagrama conmutativo de la forma*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ Y' & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

donde  $X, X', Y, Y'$  son variedades y  $\pi, \pi'$  son morfismos proyectivos, da lugar a una transformación lineal

$$(h | t)^* : A^1(X/Y) \rightarrow A^1(X'/Y')$$

tal que  $(h | t)^*([D]_\pi) = [h^*D]_{\pi'}$  para todo  $D \in A^1(X/Y)$ . Además,  $(h | t)^*$  es inyectiva si, para cualquier curva íntegra  $C$  de  $X$  contraída por  $\pi$ , existe una curva íntegra  $C'$  de  $X'$  contraída por  $\pi'$  y tal que  $h(C') = C$ .

La siguiente proposición relaciona el cono semiamplio relativo a un morfismo  $f$  y los conos semiamplios relativos a los morfismos  $h$  y  $g$ , siendo  $(h, W, g)$  un factor de  $f$ .

**Proposición 2.3.14.** [45, Chap. IV, Sect. 5, Prop. 1] *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo proyectivo y  $(h, W, g)$  un factor de  $f$ . Consideremos la siguiente sucesión de morfismos, definidos en virtud de la proposición 2.3.13:*

$$A^1(W/Y) \xrightarrow{(h|id)^*} A^1(X/Y) \xrightarrow{(id|g)^*} A^1(X/W).$$

Entonces:

(a)  $(h | id)^*$  es inyectiva,  $(id | g)^* \circ (h | id)^* = 0$  y  $(id | g)^*$  es suprayectiva.

(b)  $(h | id)^*(P(W/Y)) = P(X/Y) \cap (h | id)^*(A^1(W/Y))$ .

(c) Si  $h$  no es un morfismo finito, entonces

$$(h | id)^*(P(W/Y)) = [P(X/Y) \setminus P(X/Y)^\circ] \cap (h | id)^*(A^1(W/Y)).$$

(d) Si  $h$  es finito, entonces

$$(h | id)^*(P(W/Y)^\circ) = P(X/Y)^\circ \cap (h | id)^*(A^1(W/Y)).$$

(e)  $(id | g)^*(P(X/Y)^\circ) = P(X/W)^\circ$ .



Si  $W$  es una variedad proyectiva sobre  $Y$ , en virtud de la existencia de una inmersión  $W \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ ,  $W$  puede considerarse como un espacio fibrado proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  sobre  $Y$  para una cierta  $\mathcal{O}_Y$ -álgebra coherente  $\mathcal{E}$ . Dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , dar una factorización  $X \xrightarrow{h} W = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{g} Y$  de  $f$  es equivalente a dar un haz invertible  $\mathcal{L}$  sobre  $X$  y un morfismo suprayectivo de haces  $f^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ . El haz  $\mathcal{L}$  es isomorfo a  $h^*\mathcal{F}$ , siendo  $\mathcal{F}$  algún haz invertible muy amplio relativo a  $g$ . Además, fijado el haz  $\mathcal{L}$ , diferentes elecciones del morfismo suprayectivo  $f^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$  dan lugar a factores de  $f$  isomorfos (véase [37, Chap. II, Prop. 7.12] para una explicación más detallada).

Todo esto da pie a la siguiente definición:

**Definición 2.3.15.** Si  $(h, W, g)$  es un factor de un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , denominaremos *divisor asociado al factor  $(h, W, g)$*  a todo divisor de Cartier  $D$  de  $X$  tal que  $\mathcal{O}_X(D) \cong h^*\mathcal{F}$  para cierto haz invertible  $\mathcal{F}$  muy amplio relativo a  $g$ .

Es sabido que, dado un morfismo proyectivo  $f : X \rightarrow Y$ , un divisor de Cartier  $D$  de  $X$  es un divisor asociado a algún factor  $(h, W, g)$  de  $f$  si y sólo si la sucesión

$$f^*f_*\mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$$

es exacta.

Como muestra la siguiente proposición, las curvas contraídas por un factor de un morfismo pueden caracterizarse numéricamente como aquellas cuya intersección con cualquier divisor asociado es nula.

**Proposición 2.3.16.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo proyectivo,  $(h, W, g)$  un factor de  $f$ ,  $D$  un divisor asociado a él y  $C$  una curva de  $X$  contraída por  $f$ . Entonces,  $C$  es contraída por  $h$  si y sólo si  $D \cdot C = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $E$  un divisor de  $W$  muy amplio relativo a  $g$  tal que  $D = h^*E$ . Según la fórmula de la proyección, se tiene la igualdad

$$D \cdot C = h^*E \cdot C = E \cdot h_*C$$

y al ser  $E$  un divisor amplio relativo a  $g$ , por el teorema 2.3.4 se verifica que la intersección de  $E$  con cualquier curva de  $X$  contraída por  $f$  es estrictamente positiva. A partir de este dato es clara la equivalencia del enunciado.  $\square$

**Nota 2.3.17.** Como clara consecuencia de la proposición anterior, si  $(h, W, g)$  es un factor de  $f$  tal que  $h$  contrae a una curva  $C$  de  $X$ , entonces  $h$  contrae a todas las curvas pertenecientes a la clase de equivalencia numérica de  $C$ . Es más, contrae a todas las curvas de  $X$  cuyas imágenes en  $NE(X/Y)$  pertenecen al rayo generado por  $[C]_f$ .

**Definición 2.3.18.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo, denominamos *cono característico relativo a  $f$*  al cono de  $A^1(X/Y)$  generado por las imágenes de los divisores de Cartier  $D$  de  $X$  tales que la sucesión

$$f^*f_*\mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$$

es exacta (es decir,  $D$  es un divisor asociado a algún factor de  $f$ ). Lo denotaremos por  $\tilde{P}(X/Y; f)$  aunque eliminaremos la expresión  $X/Y$  o la expresión  $f$  cuando no haya posibilidad de confusión.

Obsérvese que si  $Y = \text{Spec}(k)$ , la sucesión  $f^*f_*\mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si el sistema lineal  $|D|$  no posee puntos base. Por tanto, en este caso,  $\tilde{P}(f)$  coincide con el cono característico  $\tilde{P}(X)$  asociado a la variedad  $X$  definido en la sección anterior.

Si  $D$  es un divisor de Cartier de  $X$  asociado a algún factor de  $f$ , entonces  $\mathcal{O}_X(D)$  está generado por secciones globales, y esto implica que  $D$  es numéricamente efectivo. Por tanto, es clara la inclusión

$$\tilde{P}(X/Y) \subseteq P(X/Y).$$

**Proposición 2.3.19.** *Se verifica la igualdad  $P(X/Y)^\circ = \tilde{P}(X/Y)^\circ$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta la inclusión anterior, será suficiente demostrar que  $P(X/Y)^\circ \subseteq \tilde{P}(X/Y)$ . Como  $P(X/Y)^\circ \cup \{0\}$  es el cono generado por las imágenes de los divisores amplios relativos a  $f$ , bastará ver que cualquiera de estos divisores admite un múltiplo cuya imagen en  $A^1(X/Y)$  pertenece a  $\tilde{P}(X/Y)$ . Si  $D$  es uno de ellos,  $mD$  será un divisor muy amplio relativo a  $f$  para algún número natural  $m$ , con lo cual será un divisor asociado al factor de  $f$  dado por  $(id, X, f)$  (siendo  $id : X \rightarrow X$  el morfismo identidad). Por tanto,  $[mD]_f$  pertenece al cono  $\tilde{P}(X/Y)$ .  $\square$

El siguiente teorema, cuya prueba puede verse en [45, Chap. IV, Sect. 5], muestra claramente cómo la estructura celular del cono característico  $\tilde{P}(X/Y)$  describe las diferentes factorizaciones del morfismo  $f$ . De hecho, existe una biyección entre las clases de isomorfía de los factores de Stein de  $f$  y las células de dicho cono.

**Teorema 2.3.20.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo proyectivo. Entonces:*

- (a)  $\tilde{P}(X/Y) = \bigcup (h \mid id)^*(P(g)^\circ) \cup \{0\}$ , donde la unión se toma sobre el conjunto de todos los factores  $(h, W, g)$  de  $f$ .

- (b) Si  $\Delta(\tilde{P}(X/Y))$  denota el conjunto de las células del cono  $\tilde{P}(X/Y)$ , la aplicación  $\mu^f : \text{Stein}(f) \rightarrow \Delta(\tilde{P}(X/Y))$  definida por

$$(h, W, g) \mapsto (h \mid id)^*(\tilde{P}(g))$$

es un isomorfismo de conjuntos ordenados ( $\text{Stein}(f)$  se supone ordenado por dominación y  $\Delta(\tilde{P}(X/Y))$  por inclusión).

- (c)  $\dim(h \mid id)^*(\tilde{P}(g)) = \rho(g)$ , para todo factor  $(h, W, g)$  de  $f$ .

**Nota 2.3.21.** Las siguientes observaciones ayudarán a entender mejor cuál es la interrelación entre los diferentes factores del morfismo  $f$  y la estructura celular del cono  $\tilde{P}(X/Y)$ :

- (1) Si un factor  $(h_1, W_1, g_1)$  domina a otro factor  $(h_2, W_2, g_2)$ , es claro que cualquier factorización del morfismo  $g_2$  da lugar, mediante composición con el morfismo de dominación, a una factorización de  $g_1$ . De este hecho se desprende la inclusión:

$$(h_2 \mid id)^*\tilde{P}(g_2) \subseteq (h_1 \mid id)^*\tilde{P}(g_1).$$

- (2) Si  $(h, W, g)$  es un factor de  $f$ , según la observación anterior, el cono  $(h \mid id)^*(\tilde{P}(g))$  está contenido en la célula de  $\tilde{P}(X/Y)$  correspondiente a su factorización de Stein  $(S(h), S(W), S(g))$ :  $\mu^f(S(h), S(W), S(g)) = (S(h) \mid id)^*(\tilde{P}(S(g)))$ . Además, como consecuencia del apartado (c) del teorema 2.3.20, se tiene la siguiente igualdad:

$$\dim(h \mid id)^*(\tilde{P}(g)) = \dim(S(h) \mid id)^*(\tilde{P}(S(g))).$$

Por tanto,  $(S(h) \mid id)^*(\tilde{P}(S(g)))$  es la célula de  $\tilde{P}(X/Y)$  de dimensión mínima que contiene a  $(h \mid id)^*(\tilde{P}(g))$ .

- (3) Sea  $(h, W, g)$  un factor cualquiera de  $f$  y sea  $D$  un divisor asociado a este factor. El haz invertible  $\mathcal{O}_X(D)$  determina, salvo isomorfismo, el factor  $(h, W, g)$  [37, Chap. II, Prop. 7.12] y, según la proposición 2.3.16, las curvas  $C$  de  $X$  que son contraídas por  $h$  serán aquellas cuya intersección con  $D$  es nula, es decir, aquellas curvas cuyas imágenes en  $NE(X/Y)$  pertenecen a  $\{[D]_f\}^\perp \cap NE(X/Y)$ . Dicho de otro modo, se verifica la igualdad:

$$\nu_h^f(NE(h)) = \{[D]_f\}^\perp \cap NE(X/Y).$$

- (4) Sea  $(h, W, g)$  un factor de  $f$ ,  $D$  un divisor de Cartier de  $X$  asociado a él y  $F = (S(h) | id)^*(\tilde{P}(S(g)))$  la cara de  $\tilde{P}(X/Y)$  correspondiente a su factorización de Stein  $(S(h), S(W), S(g))$ .  $D$  será linealmente equivalente a  $h^*E$ , siendo  $E$  un divisor de  $W$  muy amplio relativo a  $g$ . Para cualquier curva  $C$  de  $W$  contraída por  $g$  se tiene:  $E \cdot C > 0$ , por el teorema 2.3.4. Por tanto,  $[E]_g \in P(g)^\circ = \tilde{P}(g)^\circ$ . Luego  $[D]_f \in \text{int}((h | id)^*(\tilde{P}(g)))$ . Teniendo en cuenta que  $F$  y  $(h | id)^*(\tilde{P}(g))$  son de la misma dimensión (por la observación (2)), concluimos que  $[D]_f \in \text{int}(F)$ . Por tanto, la imagen en  $\tilde{P}(X/Y)$  de un divisor  $D$  asociado a un factor  $(h, W, g)$  pertenece al interior relativo de la célula correspondiente a su factorización de Stein.

Puesto que todo elemento de  $\tilde{P}(X/Y)$  puede pertenecer al interior relativo de una única célula, podemos concluir lo siguiente: *para todo factor  $(h, W, g)$  de  $f$ , la imagen en  $\tilde{P}(X/Y)$  de un divisor asociado a él pertenece al interior relativo de una célula  $F$  de  $\tilde{P}(X/Y)$  si y sólo si  $(S(h), S(W), S(g))$  pertenece a la clase de isomorfía de factores de Stein correspondiente a la célula  $F$ ; dicho de otro modo, si y sólo si todo elemento de dicha clase de isomorfía domina débilmente a  $(h, W, g)$ .*

- (5) Si  $(h_1, W_1, g_1) > (h_2, W_2, g_2) > \dots > (h_s, W_s, g_s)$  es una sucesión de dominaciones estrictas de factores de  $f$ , entonces  $s \leq \rho(X/Y)$ .

**Teorema 2.3.22.** *Utilizando la notación del teorema 2.3.20 y denotando por  $\Delta_{\text{cont}}(NE(X/Y))$  al conjunto de las células contráctiles de  $NE(X/Y)$ , la aplicación  $\delta_f : \Delta_{\text{cont}}(NE(X/Y)) \rightarrow \Delta(\tilde{P}(X/Y))$  definida por*

$$F \mapsto F^\perp \cap \tilde{P}(X/Y)$$

*es una biyección con inversa  $\delta_f^{-1} : \Delta(\tilde{P}(X/Y)) \rightarrow \Delta_{\text{cont}}(NE(X/Y))$  definida por*

$$G \mapsto G^\perp \cap NE(X/Y).$$

*Además, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Stein}(f) & \\ \nu^f \swarrow & & \searrow \mu^f \\ \Delta_{\text{cont}}(NE(X/Y)) & \xrightarrow{\delta_f} & \Delta(\tilde{P}(X/Y)) \end{array}$$

*Demostración.* Probemos primeramente la conmutatividad del diagrama del enunciado. Sea  $F \in \Delta_{\text{cont}}(NE(X/Y))$  y sea  $(h, W, g) \in \text{Stein}(f)$  la anti-imagen de  $F$  por  $\nu^f$ . Veamos primero que se verifica la igualdad

$$\delta_f(F) = \mu^f(h, W, g). \quad (2.6)$$

La inclusión  $\mu^f(h, W, g) \subseteq \delta_f(F)$  es clara, puesto que  $F$  es la cara de  $NE(X/Y)$  generada por las imágenes de las curvas contraídas por  $h$ . Veamos, por tanto, que se verifica la inclusión  $\delta_f(F) \subseteq \mu^f(h, W, g)$ . Sea  $\bar{q} \in \delta_f(F) = F^\perp \cap \tilde{P}(X/Y)$ . Al ser  $\bar{q}$  un elemento de  $\tilde{P}(X/Y)$ , podrá expresarse de la forma

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^k \alpha_i [D_i]_f,$$

donde  $\alpha_i$  es un número real estrictamente positivo y  $D_i$  es un divisor de Cartier de  $X$  asociado a un cierto factor  $(h_i, W, g_i)$  de  $f$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Cada morfismo  $h_i$  contrae las curvas cuyas imágenes en  $NE(X/Y)$  pertenecen a  $F$  (es decir, contrae todas las curvas que contrae  $h$ ). En efecto, si  $C$  es una de estas curvas, se tendrá:

$$0 = \bar{q} \cdot [C]_f = \sum_{i=1}^k \alpha_i [D_i]_f \cdot [C]_f,$$

con lo cual  $D_i \cdot F = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$  y, según la proposición 2.3.16, todos los morfismos  $h_i$  contraen la curva  $C$ .

Se verificará, por tanto, la inclusión:

$$\nu^f(NE(h)) \subseteq \nu^f(NE(h_i)) = \nu^f(NE(S(h_i)))$$

para todo  $i$  y, según el teorema 2.3.9, el factor  $(h, W, g)$  domina a todos los factores  $(S(h_i), S(W_i), S(g_i))$ . El teorema 2.3.20 muestra que  $\mu^f$  es un isomorfismo de conjuntos ordenados entre  $\text{Stein}(f)$  y el conjunto de las caras de  $\tilde{P}(X/Y)$ ; por tanto:

$$\mu^f(S(h_i), S(W_i), S(g_i)) \subseteq \mu^f(h, W, g) \text{ para todo } i = 1, \dots, k.$$

Pero, según la observación (4) de la nota 2.3.21, cada  $[D_i]_f$  pertenece a  $\mu^f(S(h_i), S(W_i), S(g_i))$ . Luego concluimos que  $\bar{q} \in \mu^f(h, W, g)$ , verificándose la igualdad (2.6) y quedando probada la conmutatividad del diagrama del enunciado.

La biyectividad de la aplicación  $\delta_f$  se sigue de la conmutatividad del diagrama y de la biyectividad de  $\nu^f$  y  $\mu^f$ .

Sea  $G$  es una célula de  $\tilde{P}(X/Y)$  correspondiente a un cierto factor de Stein  $(h, W, g)$  vía  $\mu^f$ . Sea  $D$  un divisor de Cartier de  $X$  asociado a este factor. Según la observación (4) de la nota 2.3.21,  $[D]_f$  es un punto del interior de  $G$ , con lo cual, por la proposición A.3.20, se tiene la igualdad:

$$G^\perp \cap NE(X/Y) = \{[D]_f\}^\perp \cap NE(X/Y).$$

Por otra parte, según la observación (3), tenemos que  $\{[D]_f\}^\perp \cap NE(X/Y) = \nu^f(h, W, g)$ , con lo cual:

$$G^\perp \cap NE(X/Y) = \nu^f(h, W, g) = \delta_f^{-1}(G),$$

quedando, así, probado el teorema.  $\square$

**Corolario 2.3.23.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo, entonces:*

- (a) *Toda célula contráctil de  $NE(X/Y)$  es una cara de  $NE(X/Y)$ .*
- (b) *Todas las células del cono  $\tilde{P}(X/Y)$  son caras.*

*Demostración.* (a) Sea  $F$  una célula contráctil de  $NE(X/Y)$  y sea  $(h, W, g)$  la anti-imagen de  $F$  vía  $\nu^f$ . Del teorema 2.3.22 se deduce que  $F$  ha de coincidir con  $\delta_f^{-1}(\mu^f(h, W, g)) = \mu^f(h, W, g)^\perp \cap NE(X/Y)$ . Teniendo en cuenta la proposición A.3.20,  $F$  es una cara de  $NE(X/Y)$ .

(b) Sea  $G$  una célula de  $\tilde{P}(X/Y)$  y sea  $(h, W, g)$  un factor de Stein tal que  $\mu^f(h, W, g) = G$ . Según el teorema 2.3.22, se tiene la igualdad:

$$G = \nu^f(h, W, g)^\perp \cap \tilde{P}(X/Y) = \nu_h^f(NE(h))^\perp \cap \tilde{P}(X/Y).$$

Teniendo en cuenta la proposición A.3.20,  $G$  es una cara de  $\tilde{P}(X/Y)$ .  $\square$

**Proposición 2.3.24.** *Si  $F$  es una célula de  $\tilde{P}(X/Y)$ , existe una única célula  $F'$  de  $P(X/Y)$  tal que  $\text{int}(F) \subseteq \text{int}(F')$ . Además, la aplicación  $F \mapsto F'$  entre el conjunto de las células de  $\tilde{P}(X/Y)$  y el de las de  $P(X/Y)$  es inyectiva.*

*Demostración.* La primera parte del enunciado es consecuencia del corolario A.3.14. Solo queda probar la inyectividad de la aplicación  $F \mapsto F'$ . Para ello, supongamos que  $\text{int}(F_1) \cup \text{int}(F_2) \subseteq \text{int}(F')$ , siendo  $F_1$  y  $F_2$  dos células de  $\tilde{P}(X/Y)$  (correspondientes a sendos factores de Stein  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$ ) y  $F'$  una célula de  $P(X/Y)$ . Aplicando la proposición A.3.20 tenemos:

$$\{[D_{h_1}]_f\}^\perp \cap NE(X/Y) = \{[D_{h_2}]_f\}^\perp \cap NE(X/Y) = F'^\perp \cap NE(X/Y).$$

Esto quiere decir que los morfismos  $h_1$  y  $h_2$  contraen las mismas curvas, con lo cual los factores  $(h_1, W_1, g_1)$  y  $(h_2, W_2, g_2)$  deben ser isomorfos (corolario 2.1.16), y las células  $F_1$  y  $F_2$  iguales.  $\square$

Una consecuencia directa de la proposición 2.3.24 es el siguiente

**Corolario 2.3.25.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo proyectivo y el cono  $NE(X/Y)$  posee un número finito de células, entonces  $f$  tiene un número finito de factores de Stein. En particular, el conjunto de los factores de Stein de  $f$  es finito si  $NE(X/Y)$  es un cono poliédrico.*

**Proposición 2.3.26.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo proyectivo. Si  $\tilde{P}(X/Y)$  es un cono poliédrico entonces  $NE(X/Y)$  también es poliédrico.*

*Demostración.* Supongamos que  $\tilde{P}(X/Y)$  es un cono poliédrico. Si  $f$  no contrae a ninguna curva de  $X$ , el resultado es trivial, ya que  $NE(X/Y) = \{0\}$ . Por tanto, podemos suponer que existe al menos una curva contraída por  $f$ . Luego  $\dim(NE(X/Y)) \geq 1$  y  $P(X/Y) \neq A^1(X/Y)$ . Bastará probar la igualdad  $NE(X/Y) = \overline{NE}(X/Y)$  ya que, al ser  $\tilde{P}(X/Y)$  un cono cerrado, se tiene la igualdad  $\tilde{P}(X/Y) = P(X/Y)$  y  $\overline{NE}(X/Y)$  es poliédrico, al ser el dual de  $\tilde{P}(X/Y)$ .

Como  $\overline{NE}(X/Y)$  es un cono cerrado fuertemente convexo de dimensión estrictamente positiva, estará generado por sus rayos extremales (proposición A.1.34). Sea  $R$  uno de estos rayos extremales. Según el apartado (g) de la proposición A.3.2, como  $P(X/Y)$  es el cono dual de  $\overline{NE}(X/Y)$ , la aplicación  $F \mapsto F^\perp \cap P(X/Y)$  es una biyección entre los conjuntos de las caras de  $\overline{NE}(X/Y)$  y de  $P(X/Y)$ , siendo  $G := R^\perp \cap P(X/Y)$  una cara de  $P(X/Y)$  de codimensión 1 y  $R \cup \{0\} = G^\perp \cap \overline{NE}(X/Y)$ . Como  $\tilde{P}(X/Y) = P(X/Y)$ , en virtud del teorema 2.3.20,  $G$  es la cara del cono característico relativo a  $f$  correspondiente a un cierto factor de Stein  $(h, W, g)$  de  $f$ . Además, puesto que  $G$  es una cara propia, existirá alguna curva de  $X$  contraída por  $h$ , con lo cual  $\dim(G^\perp \cap NE(X/Y)) \geq 1$ . Se tiene, por tanto, la igualdad  $G^\perp \cap NE(X/Y) = R \cup \{0\}$ . Luego el rayo extremal  $R$  está contenido en el cono  $NE(X/Y)$ . Como este razonamiento es válido para cualquier rayo extremal  $R$  de  $\overline{NE}(X/Y)$  se tiene la igualdad  $NE(X/Y) = \overline{NE}(X/Y)$ , obteniéndose el resultado.  $\square$

## 2.4. Ideales completos y conos característicos en el caso local

Zariski inició la teoría de ideales completos [74] como una traducción aritmética del concepto de sistema lineal completo en geometría proyectiva. Probó que todo ideal completo de un anillo local regular  $R$  de dimensión dos factoriza de forma única como producto de ideales completos simples, entendiendo por ideal completo simple aquel que no puede factorizarse como producto de dos o más ideales completos distintos. En este ámbito, el producto de ideales completos es, a su vez, completo, con lo cual el conjunto de tales ideales adquiere estructura de *semigrupo factorial* (i.e. semigrupo con factorización única).

Además, en un dominio local completo  $(R, M)$  de dimensión dos se cumple que, si el semigrupo  $m(R)$  de los ideales completos  $M$ -primarios de  $R$  es factorial, entonces  $R$  es un dominio de factorización única (véase [17]);

Lipman demostró en [52] que el recíproco es cierto si el cuerpo  $R/M$  es algebraicamente cerrado. Göhner y Cutkosky ([26] y [17]) probaron que si  $R$  es un dominio local completo de dimensión dos, el grupo de clases de divisores  $Cl(R)$  es de torsión si y sólo si  $m(R)$  es un semigrupo semifactorial (véase la definición 2.4.3). Éste último concepto es una condición más débil que el de semigrupo factorial, y fue introducido por Göhner en [26]. Una consecuencia de este último resultado es la siguiente: si el cuerpo  $R/M$  es algebraicamente cerrado y de característica cero, entonces  $m(R)$  es semifactorial si y sólo si el anillo local  $R$  tiene una singularidad racional.

Los resultados en dimensión dos no se extienden directamente a dimensión superior aunque, como ya se indicó en la proposición 1.3.11, Lipman demuestra la existencia, en un anillo local regular de cualquier dimensión, de una factorización única de los ideales completos con soporte finito como  $*$ -producto de ideales  $*$ -simples asociados a puntos de configuraciones, permitiendo exponentes negativos en los factores [52]. Las técnicas relativas al estudio de los conos característicos (que, esencialmente, son las usadas por Lipman en [51] para manipular casos de dimensión dos) proporcionan un marco adecuado para determinar las propiedades de factorización de los ideales completos en dimensión superior a dos, reduciendo el estudio de los nuevos fenómenos que aparecen al aumentar la dimensión al estudio de los diferentes tipos de conos característicos asociados a los morfismos proyectivos  $Z \rightarrow \text{Spec}(R)$ .

Consideremos una variedad algebraica proyectiva no singular  $X$  de dimensión mayor o igual que 2, un punto  $p \in X$  y el esquema dado por  $S = \text{Spec}(R)$ , siendo  $R = \mathcal{O}_{X,p}$ . Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  una configuración de  $S$  y sea  $Z = S(\mathcal{C})$  el cielo de  $\mathcal{C}$ . Denotemos por  $\pi := \pi_{\mathcal{C}} : Z \rightarrow S$  al morfismo correspondiente a esta configuración. El cono característico relativo a  $\pi$ ,  $\tilde{P}(Z/S)$ , está generado por aquellos divisores  $D$  de  $Z$  tales que la sucesión  $\pi^* \pi_* \mathcal{O}_Z(D) \rightarrow \mathcal{O}_Z(D) \rightarrow 0$  es exacta, o equivalentemente  $\mathcal{O}_Z(D)$  está generado por secciones globales (es decir,  $D \in \mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\sharp}$ , con la notación de la sección 1.3). Por tanto,  $\tilde{P}(Z/S)$  no es más que la envoltura convexa de la imagen de  $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\sharp}$  en  $A^1(Z/S)$ .

De los resultados de la sección 1.3 se sigue la existencia de un isomorfismo de semigrupos entre  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  (el semigrupo de los ideales completos de  $R$  con soporte finito cuya configuración de puntos base está contenida en  $\mathcal{C}$ ) y  $\mathbf{E}_{\mathcal{C}}^{\sharp}$ , que asigna a cada ideal  $I$  de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  el divisor de  $Z$  dado por  $D_{\mathcal{K}_I}$  (es decir, el divisor asociado al clúster de puntos base de  $I$ ; éste el divisor de  $Z$  tal que  $I\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Z(D_{\mathcal{K}_I})$ ). Para simplificar la notación, denotaremos a partir de ahora por  $D_I$  al divisor  $D_{\mathcal{K}_I}$ . Por tanto, el cono característico  $\tilde{P}(Z/S)$  está generado por los elementos de la forma  $[D_I]_{\pi}$ , con  $I \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ .



**Lema 2.4.1.** Si  $[\sum_{i=1}^n a_i E_i]_\pi = [\sum_{i=1}^n b_i E_i]_\pi$  con  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ , entonces  $a_i = b_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Será suficiente demostrar que si el divisor  $\sum_{i=1}^n a_i E_i$  es  $\pi$ -numéricamente equivalente a cero, entonces  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $d = \dim(X)$ .

Si  $d = 2$  se verifica la siguiente relación:

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) \cdot E_j^* = -a_j + \sum_{i \rightarrow j} a_i \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n.$$

La primera igualdad es consecuencia de que el divisor  $\sum_{i=1}^n a_i E_i$  es numéricamente equivalente a cero y  $E_i^*$  es una curva de  $Z$  contraída por  $\pi$ ; la segunda igualdad se sigue del apartado (d) de la proposición 1.2.16. Por tanto, el vector  $(a_1, \dots, a_n)$  es la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es  $-\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^t$  (que es una matriz regular); luego  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Si  $d > 2$ , consideremos un haz muy amplio  $\mathcal{L}$  de  $Z$  y sean  $T_1, \dots, T_{d-2}$  los lugares geométricos de los ceros de  $d - 2$  secciones globales generales independientes de  $\mathcal{L}$ . Sea  $W = T_1 \cdots T_{d-2}$ ;  $W$  es no singular de dimensión 2 y  $C_i := E_i \cdot W$ ,  $1 \leq i \leq n$  es una curva íntegra por el teorema de Bertini (además, es contraída por  $\pi$ ). Como  $\sum_{i=1}^n a_i E_i$  es  $\pi$ -numéricamente equivalente a cero, se tiene que  $(\sum_{i=1}^n a_i E_i) \cdot C_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Además, es claro que  $E_i \cdot C_j = 0$  si  $i \neq j$  y  $E_i \cdot C_i \neq 0$ . Luego

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) \cdot C_j = a_j (E_j \cdot C_j)$$

para todo  $j = 1, \dots, n$  y, por tanto,  $a_j = 0$  para todo  $j$ .  $\square$

**Lema 2.4.2.** Los sistemas  $\{[E_1]_\pi, \dots, [E_n]_\pi\}$  y  $\{[E_1^*]_\pi, \dots, [E_n^*]_\pi\}$  constituyen dos bases del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N^1(Z/S)$ .

*Demostración.* Del apartado (b) de la proposición 1.2.15 se deduce que el sistema  $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\text{Pic}(Z)$  (puesto que  $\text{Pic}(S) = 0$ , al ser  $S$  un esquema afín). El sistema  $\{E_1, \dots, E_n\}$  es también una base de  $\text{Pic}(Z)$ , puesto que ambos sistemas están relacionados mediante la matriz de proximidad (véase la sección 1.2), cuyo determinante es igual a 1. Por tanto, es claro que los sistemas  $\{[E_1]_\pi, \dots, [E_n]_\pi\}$  y  $\{[E_1^*]_\pi, \dots, [E_n^*]_\pi\}$  son generadores de  $N^1(Z/S)$ . Del lema 2.4.1 se sigue que  $[E_1]_\pi, \dots, [E_n]_\pi$  son independientes, con lo cual constituyen una base del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N^1(Z/S)$ . Finalmente,

$\{[E_1^*]_\pi, \dots, [E_n^*]_\pi\}$  es también una base, al obtenerse a partir del anterior mediante la matriz de proximidad.  $\square$

Si  $\dim(X) = 2$ , los ideales de  $\mathcal{J}_C$  pueden expresarse de forma única como producto de los ideales completos simples de  $\mathcal{J}_C$ , que son los ideales  $P_{p_1}, \dots, P_{p_n}$  descritos en la definición 1.3.10. Por tanto, debido al isomorfismo entre  $\mathcal{J}_C$  y  $\mathbf{E}_C^\sharp$ , todo elemento del semigrupo  $\mathbf{E}_C^\sharp$  se expresa de forma única como combinación positiva de los divisores  $D_{P_{p_1}}, \dots, D_{P_{p_n}}$ . Puesto que el vector de coordenadas de  $[D_{P_{p_i}}]_\pi \in A^1(Z/X)$  respecto de la base  $\{[E_1^*]_\pi, \dots, [E_n^*]_\pi\}$  es el  $i$ -ésimo vector columna de la matriz  $\mathbf{M}_C$  (que es una matriz con determinante igual a 1), se tiene que  $\{[D_{P_{p_1}}]_\pi, \dots, [D_{P_{p_n}}]_\pi\}$  es una  $\mathbb{Z}$ -base del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N^1(Z/X)$ . Pero es claro que dicha  $\mathbb{Z}$ -base es un sistema de generadores del cono  $\tilde{P}(Z/X)$ . Concluimos, por tanto, que en el caso bidimensional la factorización única de ideales completos se traduce en la siguiente propiedad del cono característico:  $\tilde{P}(Z/X)$  es un cono regular.

En [26], Göhner introdujo el concepto de semifactorización en un semigrupo:

**Definición 2.4.3.** Sea  $(G, +)$  un semigrupo conmutativo con ley de cancelación. Un elemento  $g \in G$  con  $g \neq 0$  se denomina *extremal* si  $g$  no posee elemento inverso en  $G$ , y toda expresión  $ng = a + b$  (con  $n \in \mathbb{N}$  y  $a, b \in G$ ) implica que  $sa = qg$  y  $tb = pg$  para enteros  $s, t, p, q$  adecuados. Dos elementos extremales  $x, y \in G$  diremos que son *equivalentes*, y lo denotaremos  $x \sim y$ , si existen dos números naturales  $n, m$  tales que  $nx = my$ .

$G$  se denomina *semifactorial* si, para cada  $g$  de  $G$  no nulo y sin inverso, existe un entero  $n > 0$  tal que  $ng$  se puede expresar como suma de elementos extremales de  $G$ , siendo ésta única en el siguiente sentido: si  $ng = a_1 + \dots + a_s$  (con  $a_i$  extremal y  $a_i \not\sim a_j$  si  $i \neq j$ ) y  $mg = b_1 + \dots + b_r$  (con  $b_i$  extremal y  $b_i \not\sim b_j$  si  $i \neq j$ ), entonces  $r = s$  y  $a_i \sim b_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$  (reordenando los elementos, si es necesario).

Como veremos a continuación, la semifactorialidad de  $\mathcal{J}_C$  permite expresarse en términos del cono característico  $\tilde{P}(Z/S)$ .

**Lema 2.4.4.** Un ideal  $I \in \mathcal{J}_C$  es extremal en  $\mathcal{J}_C$  si y sólo si  $[D_I]_\pi$  genera un rayo extremal del cono  $\tilde{P}(Z/S)$ .

*Demostración.* Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que  $I$  es un elemento extremal de  $\mathcal{J}_C$ , pero  $[D_I]_\pi$  no genera un rayo extremal del cono  $\tilde{P}(Z/S)$ . Como los generadores de  $\tilde{P}(Z/S)$  son aquellos elementos de la

forma  $[D_P]_\pi$ , con  $P \in \mathcal{J}_C$ ,  $[D_I]_\pi$  podrá expresarse como combinación positiva de estos generadores:

$$[D_I]_\pi = \sum_{i=1}^r \alpha_i [D_{P_i}]_\pi, \quad (2.7)$$

siendo  $\alpha_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $\mathbb{R}_+[D_{P_i}]_\pi \neq \mathbb{R}_+[D_{P_j}]_\pi$  si  $i \neq j$  y  $r \geq 2$ . Si  $(w_{i1}, \dots, w_{in})$  son las coordenadas de  $[D_{P_i}]_\pi$  ( $1 \leq i \leq r$ ) respecto de la base  $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ , y  $(t_1, \dots, t_n)$  son las de  $[D_I]_\pi$ , se tiene que el vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es una solución del sistema de ecuaciones dado por:

$$\sum_{j=1}^r w_{ij} x_j = t_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como los coeficientes y los términos independientes de este sistema de ecuaciones son números enteros, es claro que existe un número real  $\delta > 0$  tal que cualquier bola de  $\mathbb{R}^n$  con centro en  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y radio menor que  $\delta$  contiene una solución del sistema con coordenadas racionales. Podemos suponer, por tanto, que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Q}_+)^n$ . Multiplicando la ecuación (2.7) por un número natural  $m$  adecuado, obtenemos:

$$m[D_I]_\pi = \sum_{i=1}^r n_i [D_{P_i}]_\pi,$$

donde  $m, n_1, \dots, n_r$  son números naturales positivos. Y esto implica que:

$$\overline{I^m} = \prod_{1 \leq i \leq r}^* P_i^{n_i}$$

y al ser  $I$  extremal, todos los ideales  $P_i$  han de ser equivalentes a  $I$ . Luego  $D_{P_i}$  es equivalente a  $D_I$  en  $\mathbf{E}_C^\sharp$  para todo  $i = 1, \dots, r$ , y esto implica que los rayos  $\mathbb{R}_+[D_{P_i}]_\pi$  son todos iguales, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $[D_I]_\pi$  genera un rayo extremal del cono  $\tilde{P}(Z/S)$  y consideremos una factorización  $\overline{I^n} = J_1 * J_2$ , siendo  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}_C$ . Ello implica que  $n[D_I]_\pi = [D_{J_1}]_\pi + [D_{J_2}]_\pi$ . Al generar  $[D_I]_\pi$  un rayo extremal, existen dos números reales positivos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tales que  $[D_{J_1}]_\pi = \alpha_1 [D_I]_\pi$  y  $[D_{J_2}]_\pi = \alpha_2 [D_I]_\pi$ . Como las coordenadas de  $[D_I]_\pi$ ,  $[D_{J_1}]_\pi$  y  $[D_{J_2}]_\pi$  respecto de la base  $\{[E_1^*]_\pi, \dots, [E_n^*]_\pi\}$  son enteras, se tiene que  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ , y esto implica que existen números naturales positivos  $a, b, c$  y  $d$  tales que  $[aD_{J_1}]_\pi = [bD_I]_\pi$  y  $[cD_{J_2}]_\pi = [dD_I]_\pi$ . Del lema 2.4.1 se siguen las igualdades  $aD_{J_1} = bD_I$  y  $cD_{J_2} = dD_I$ . Por tanto,  $\overline{J_1^a} = \overline{I^b}$  y  $\overline{J_2^c} = \overline{I^d}$ , concluyéndose que  $I$  es un elemento extremal de  $\mathcal{J}_C$ .  $\square$

**Proposición 2.4.5.** *El semigrupo  $\mathcal{J}_C$  es semifactorial si y sólo si  $\tilde{P}(Z/S)$  es un cono simplicial.*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{J}_C$  es semifactorial. Sea  $I_1, \dots, I_r$  conjunto cualquiera de elementos extremales de  $\mathcal{J}_C$ , y veamos que el sistema de elementos de  $A^1(Z/S)$  dado por  $\{[D_{I_1}]_\pi, \dots, [D_{I_r}]_\pi\}$  ha de ser necesariamente linealmente independiente.

Para ello, procedamos por reducción al absurdo y supongamos que es linealmente dependiente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer la existencia de números reales  $\alpha_2, \dots, \alpha_r$  tales que:

$$[D_{I_1}]_\pi = \sum_{i=2}^r \alpha_i [D_{I_i}]_\pi.$$

Mediante un razonamiento similar al utilizado en la demostración del lema 2.4.4 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha_i \in \mathbb{Q}$  para todo  $i$ . Multiplicando la igualdad anterior por un número natural  $m$  adecuado se obtiene:

$$m[D_{I_1}]_\pi = \sum_{i=2}^r s_i [D_{I_i}]_\pi,$$

con  $s_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i$ . Sea  $s$  un número natural tal que

$$s \geq \max\{|s_2|, \dots, |s_r|\},$$

donde  $|s_i|$  indica el valor absoluto de los números  $s_i$ . Sumando la expresión  $\sum_{i=2}^r s [D_{I_i}]_\pi$  a los dos miembros de la última igualdad obtenemos:

$$m[D_{I_1}]_\pi + \sum_{i=2}^r s [D_{I_i}]_\pi = \sum_{i=2}^r (s_i + s) [D_{I_i}]_\pi$$

y por el lema 2.4.1, los divisores  $mD_{I_1} + \sum_{i=2}^r sD_{I_i}$  y  $\sum_{i=2}^r (s_i + s)D_{I_i}$  deben coincidir. De aquí se sigue la igualdad

$$I_1^m * \prod_{2 \leq i \leq r}^* I_i^s = \prod_{2 \leq i \leq r}^* I_i^{s_i + s},$$

que entra en contradicción con la semifactorialidad de  $\mathcal{J}_C$ . Por tanto, concluimos que el sistema  $\{[D_{I_1}]_\pi, \dots, [D_{I_r}]_\pi\}$  es linealmente independiente en  $A^1(Z/S)$ .

Luego el conjunto de los elementos extremales de  $\mathcal{J}_C$  tiene cardinal menor o igual que  $n = \dim(A^1(Z/S))$ , y sus correspondientes elementos en  $A^1(Z/S)$

son linealmente independientes. Por otra parte, por el lema 2.4.4 sabemos que los elementos extremales de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  se corresponden con los rayos extremales del cono  $\tilde{P}(Z/S)$ , que es un cono  $n$ -dimensional (y, por tanto, el número de sus rayos extremales no puede ser inferior a  $n$ ). En suma,  $\tilde{P}(Z/S)$  está generado por  $n$  elementos linealmente independientes, siendo un cono simplicial.

Recíprocamente, supongamos que  $\tilde{P}(Z/S)$  es un cono simplicial. Como cualquier conjunto de generadores de un cono contiene un sistema de generadores de sus rayos extremales, existirán  $n$  ideales  $I_1, \dots, I_n$  de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  tales que  $[D_{I_1}]_{\pi}, \dots, [D_{I_n}]_{\pi}$  generan los rayos extremales de  $\tilde{P}(Z/S)$ . Por el lema 2.4.4 los ideales  $I_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) son los elementos extremales de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ .

Veamos que todo ideal de  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  es expresable como  $*$ -producto de los ideales extremales. Sea  $I \in \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ .  $[D_I]_{\pi}$  se podrá expresar como combinación positiva de los rayos extremales de  $\tilde{P}(Z/S)$ . Por tanto:

$$[D_I]_{\pi} = \sum_{i=1}^n \beta_i [D_{I_i}]_{\pi}.$$

Mediante un razonamiento totalmente análogo al utilizado en la demostración del lema 2.4.4, puede suponerse que  $\beta_i \in \mathbb{Q}_+$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Luego existen números naturales  $s, t_1, \dots, t_n$  tales que:

$$s[D_I]_{\pi} = \sum_{i=1}^n t_i [D_{I_i}]_{\pi},$$

y esta igualdad da lugar a la factorización de una potencia de  $I$  como  $*$ -producto de ideales extremales:

$$\overline{I^s} = \prod_{1 \leq i \leq n} I_i^{t_i}.$$

La unicidad de la factorización (en el sentido de la definición 2.4.3) se sigue del hecho de que el sistema  $[D_{I_1}]_{\pi}, \dots, [D_{I_n}]_{\pi}$  es una base de  $A^1(Z/S)$ .  $\square$

Como consecuencia de este resultado, el semigrupo  $m(R)$  será semifactorial si y sólo si  $\tilde{P}(S(\mathcal{C})/S)$  es un cono simplicial para toda configuración  $\mathcal{C}$  de  $S$ .

Supongamos ahora que  $\dim(X) = 3$ . Fijemos un índice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sea  $X_i$  la variedad a la que pertenece  $p_i$  y llamemos  $B_i$  al divisor excepcional de la explosión de  $X_i$  en  $p_i$ , que es canónicamente isomorfo a  $\mathbb{P}^2$ . Sea  $\mathcal{C}^i = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$  la configuración formada por los puntos de  $\mathcal{C}$  que son próximos a  $p_i$  (se supondrán ordenados según la restricción a  $\mathcal{C}^i$  del orden total admisible

de  $\mathcal{C}$ ). Para cada  $j = 1, \dots, k$  se tiene que  $E_i$  interseca transversalmente con  $E_{i_j}$  y  $E_i \cap E_{i_j} \neq \emptyset$  [9, Lem. 1.7]. Además, por aplicación reiterada de la proposición 1.1.13 se tiene que  $\pi(i) := \pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_{n+1} |_{E_i}: E_i \rightarrow B_i \cong \mathbb{P}^2$  puede considerarse como la composición de las sucesivas explosiones en los puntos de  $\mathcal{C}^i$ , siendo  $E_{i,i_j} := E_i \cap E_{i_j}$  (resp.,  $E_{i,i_j}^* := E_i \cap E_{i_j}^*$ ) el transformado estricto (resp., total) en  $E_i$  del divisor excepcional de la explosión en  $p_{i_j}$ . Por tanto,  $\mathcal{C}^i$  puede verse como una configuración de  $B_i \cong \mathbb{P}^2$ . El producto de intersección  $-B_i \cdot B_i$  es la clase de un hiperplano  $H_i$  en  $\text{Pic}(B_i)$ . Sea  $H_i^* := \pi(i)^* H_i$ . Nótese que aplicando el apartado (b) de la proposición 1.2.15 a la configuración  $\mathcal{C}^i$  se tiene el isomorfismo  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^k \rightarrow \text{Pic}(E_i)$  dado por:

$$m + (m_1, \dots, m_k) \mapsto mH_i^* + \sum_{j=1}^k m_j E_{i,i_j}^*$$

y también que el homomorfismo canónico  $\text{Pic}(Z/S) \rightarrow \text{Pic}(E_i)$  asigna, a cada clase  $D = \sum_{l=1}^n m_l E_l^* \in \text{Pic}(Z/S)$ , la clase en  $\text{Pic}(E_i)$  dada por

$$D \cdot E_i = -m_i H_i^* + \sum_{j=1}^k m_{i_j} E_{i,i_j}^*$$

(véase [9, Prop. 1.9]). Curkosky, en [16], ha determinado, para ciertas configuraciones tridimensionales, cuándo el cono característico asociado a sus cielos es simplicial. Para ello probó primero el siguiente

**Lema 2.4.6.** *Supongamos que  $R$  es la localización en  $(x, y, z)$  del anillo de polinomios  $k[x, y, z]$ . Sea  $\mathcal{C}_n = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  la configuración de  $S = \text{Spec}(R)$  donde  $p_0$  es su punto cerrado y  $p_1, \dots, p_n$  son  $n$  puntos cerrados en posición general pertenecientes al divisor excepcional  $B_0$  de  $\text{Bl}_{p_0}(S)$ .*

*Si  $E_0$  es el transformado estricto de  $B_0$  en  $S(\mathcal{C}_n)$ , se verifica que el homomorfismo canónico  $\text{Pic}(S(\mathcal{C}_n)/S) \rightarrow \text{Pic}(E_0)$  induce un isomorfismo  $\tilde{P}(S(\mathcal{C}_n)/S) \rightarrow \tilde{P}(E_0)$ .*

**Proposición 2.4.7.** *En las condiciones del lema 2.4.6, el cono característico  $\tilde{P}(S(\mathcal{C}_n)/S)$  es simplicial (es decir,  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_n}$  es semifactorial) si y sólo si  $n \leq 2$ .*

En general, el aspecto del cono característico  $\tilde{P}(Z/S)$  puede ser muy diverso, como demuestran los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 2.4.8.**  $\tilde{P}(Z/S)$  puede ser poliédrico pero no simplicial [10, Example 1]. Sea  $R$  la localización del anillo de polinomios  $k[x, y, z]$  en  $(x, y, z)$ . Consideremos la cadena  $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, \dots, p_5\}$  donde  $p_0$  es el punto cerrado de  $S = \text{Spec}(R)$  y  $p_1, \dots, p_5$  son cinco puntos consecutivos en una cónica  $G$

contenida en el divisor excepcional  $B_0$  de la explosión de  $S$  con centro en  $p_0$ . Esto quiere decir que  $p_1 \in G$  y  $p_{i+1}$  es un punto del primer entorno infinitesimal de  $p_i$  perteneciente al transformado estricto de  $G$  en la variedad obtenida mediante la explosión con centro en  $p_i$  ( $2 \leq i \leq 5$ ). En [10] se prueba que  $\tilde{P}(S(\mathcal{C})/S)$  es un cono poliédrico, pero no es simplicial, ya que posee 9 rayos extremales.

**Ejemplo 2.4.9.**  $\tilde{P}(Z/S)$  puede ser un cono regular, pero no existir factorización única en  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  (con exponentes positivos) [10, Example 2]. Sea  $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, \dots, p_9\}$  una configuración de  $S = \text{Spec}(R)$  (siendo  $R$  la localización del  $k[x, y, z]$  en  $(x, y, z)$ ) tal que  $p_0$  es el punto cerrado de  $S$  y  $p_1, \dots, p_9$  son puntos consecutivos (en el sentido precisado en el ejemplo anterior) sobre una cúbica racional  $C$  contenida en el divisor excepcional  $B_0 \cong \mathbb{P}^2$  asociado a la explosión de  $S$  con centro en  $p_0$ , siendo  $p_1$  un punto de inflexión de  $C$ . En [10] se prueba que el cono característico  $\tilde{P}(S(\mathcal{C})/S)$  es un cono regular y por tanto,  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  es un semigrupo semifactorial; sin embargo se demuestra que  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  no es factorial.

**Ejemplo 2.4.10.** En general,  $\tilde{P}(Z/S)$  no posee un número finito de rayos extremales [16, Example 1]. Supongamos que  $R$  es la localización del anillo de polinomios  $k[x, y, z]$  en  $(x, y, z)$ . Sea  $f : Z \rightarrow S$  el morfismo obtenido mediante la explosión  $\pi_0$  de  $S$  con centro en el punto cerrado de  $S = \text{Spec}(R)$  y las explosiones posteriores de los nueve puntos de intersección de dos cúbicas generales sobre el divisor excepcional  $B_0 \cong \mathbb{P}^2$  de la primera explosión. En este caso la superficie  $E_0$  posee un número infinito de curvas racionales de auto-intersección  $-1$  (véase [60]); cada una de estas curvas  $C$  puede ser contraída por un morfismo  $g : Z_1 \rightarrow E_0$ , que se extiende a un morfismo  $Z \xrightarrow{g'} Z_1 \xrightarrow{g} E_0$ , por el lema 2.4.6. Como  $(g', Z_1, \pi_0 \circ g)$  es un factor de Stein (puesto que  $Z_1$  es normal) minimal no trivial de  $f$ , por el teorema 2.3.20 se corresponde con una célula distinta de  $\{0\}$  minimal del cono  $\tilde{P}(Z/S)$  y, por tanto, con un rayo extremal. Puesto que existen infinitas de estas curvas,  $\tilde{P}(Z/S)$  posee infinitos rayos extremales.

**Ejemplo 2.4.11.** En general,  $\tilde{P}(Z/S)$  no es un cono cerrado [16, Example 3]. Un teorema de Nagata [61] prueba que, en las condiciones del lema 2.4.6 con  $n = 16$ , la intersección de  $\tilde{P}(E_0)$  con un cierto hiperplano de  $A^1(E_0)$  no es cerrado. Por tanto,  $\tilde{P}(S(\mathcal{C}_{16})/S)$  no es un cono cerrado.

**Ejemplo 2.4.12.** Sea  $\mathcal{C} = \{p_0, p_1, \dots, p_9\}$  una configuración de  $S = \text{Spec}(R)$  (siendo  $R$  la localización del  $k[x, y, z]$  en  $(x, y, z)$ ) tal que  $p_0$  es el punto cerrado de  $S$  y  $p_1, \dots, p_9$  son puntos consecutivos sobre una cúbica racional  $C$  contenida en el divisor excepcional  $B_0 \cong \mathbb{P}^2$  asociado a la explosión con

centro en  $p_0$ , de manera que  $p_1$  es un punto regular que no es de inflexión. En [10, Example 3] se demuestra que el cono semiamplio relativo a  $\pi_C P(S(\mathcal{C})/\mathcal{S})$  no es poliédrico y, además,  $\tilde{P}(S(\mathcal{C})/\mathcal{S})$  no es un cono cerrado, no siendo  $\mathbf{E}_C^\sharp$  un semigrupo finitamente generado.

Según el teorema 2.3.20, existe una biyección entre las células del cono característico  $\tilde{P}(Z/S)$  y las factorizaciones  $Z \rightarrow W \rightarrow S$  del morfismo  $\pi : Z \rightarrow S$  donde la variedad intermedia  $W$  es normal (recuérdese la nota 2.1.8). Existe una pregunta natural en este contexto cuya solución constituye un problema abierto, y que consideramos en esta memoria. Consiste en determinar **bajo qué condiciones existe un número finito de variedades intermedias normales para el morfismo  $\pi$** . Tal y como describiremos a continuación, los resultados obtenidos en esta memoria permiten dar una respuesta parcial a esta pregunta.

Es claro que este homomorfismo canónico  $\text{Pic}(Z/S) \rightarrow \text{Pic}(E_i)$  es supra-yectivo, induciendo, por tanto, un monomorfismo de espacios vectoriales

$$A_1(E_i) \rightarrow A_1(Z/S).$$

Además, la imagen del cono de curvas  $NE(E_i)$  está contenida en  $NE(Z/S)$ , y es claro que  $NE(Z/S)$  es la suma convexa de las imágenes de los conos  $NE(E_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) en  $A_1(Z/S)$ . De aquí se deduce que el cono  $NE(Z/S)$  es poliédrico si y sólo si lo es  $NE(E_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Este hecho, combinado con el corolario 2.3.25, permite deducir el siguiente resultado:

**Proposición 2.4.13.** *Si el cono  $NE(E_i)$  es poliédrico para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces el número de factores de Stein del morfismo  $\pi : Z \rightarrow S$  es finito.*

En el capítulo 3, deduciremos condiciones bajo las cuales el cono de curvas asociado a una superficie racional no singular es poliédrico. Estas condiciones pueden aplicarse a las superficies  $E_i$ , obteniéndose así una clase de morfismos  $\pi : Z \rightarrow S$  que poseen un número finito de variedades intermedias normales.

## 2.5. El cono de curvas asociado a una superficie regular

A lo largo de esta sección,  $X$  será una superficie (es decir, una variedad de dimensión 2) proyectiva regular, y nuestro objetivo será dar una idea de los aspectos generales de la estructura de su cono de curvas asociado  $NE(X)$ . Describiremos algunas propiedades de sus rayos extremales y enunciaremos el teorema de contracción. Éste, junto con el teorema del cono, nos servirán

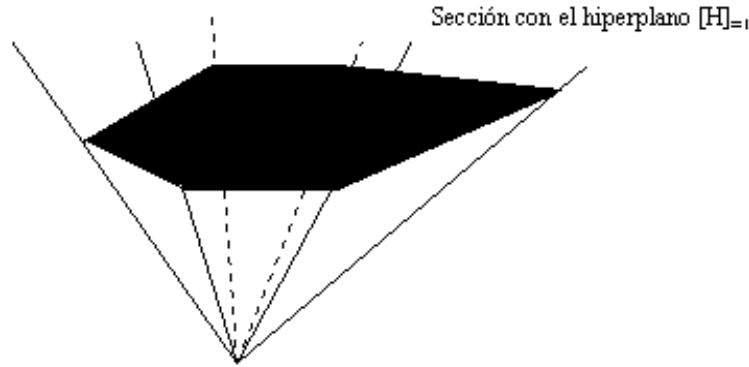


para caracterizar, en el caso  $\rho(X) \geq 3$ , las clases de  $(-1)$ -curvas como las generadoras de los rayos extremales del cono de curvas contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$ .

Finalmente, demostraremos un primer criterio de poliedricidad del cono de curvas, haciendo uso del concepto de rayo límite definido en el apéndice.

En la situación que nos ocupa, el conjunto de los divisores de Cartier de  $X$  y el de los 1-ciclos de  $X$  (divisores de Weil, en este caso) pueden identificarse, obteniéndose las igualdades  $N_1(X) = N^1(X)$  y  $A_1(X) = A^1(X)$ . Así pues, los conos  $NE(X)$  y  $P(X)$  pueden considerarse inmersos en el mismo espacio  $A_1(X)$ .

Según se ha visto en la sección 2.2, el cono  $NE(X)$  tiene dimensión igual a  $\rho(X)$  y su clausura  $\overline{NE}(X)$  es un cono fuertemente convexo. Si  $H$  es un divisor amplio de  $X$ , según el criterio de amplitud de Kleiman, se tiene la inclusión  $\overline{NE} \setminus \{0\} \subseteq [H]_{>0}$  y, teniendo en cuenta el lema A.1.33, la intersección del cono  $\overline{NE}(X)$  con el hiperplano  $[H]_{=1}$  es un conjunto convexo compacto.



**Proposición 2.5.1.** *Se satisface la inclusión:  $P(X)^o \subseteq NE(X)$ .*

*Demostración.* Como se vio en la sección 2.2, el cono  $P(X)^o \cup \{0\}$  está generado por las imágenes en  $A_1(X)$  de los divisores amplios de  $X$ , y la inclusión se sigue del hecho de que todo divisor amplio tiene un múltiplo efectivo.  $\square$

**Lema 2.5.2.** *(Teorema del índice de Hodge, [37, Chap. V, Th. 1.9]) Sea  $H$  un divisor amplio de  $X$  y supongamos que  $D$  es un divisor tal que  $D \neq 0$  y  $H \cdot D = 0$ . Entonces  $D^2 < 0$ .*

**Lema 2.5.3.** *Si  $D$  es un divisor de  $X$  tal que  $D^2 > 0$ , entonces  $|nD| \neq \emptyset$  o  $| -nD| \neq \emptyset$  para  $n \gg 0$ .*

*Demostración.* Aplicando el teorema de Riemann-Roch:

$$h^0(nD) + h^0(K_X - nD) \geq \frac{n^2}{2}D^2 - \frac{n}{2}(K_X \cdot D) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Por tanto, o bien  $h^0(nD)$  o bien  $h^0(K_X - nD)$  tiende a infinito cuando  $n$  tiende a infinito.

Utilizando el mismo argumento con  $D$  en lugar de  $-D$ , se concluye también que, o bien  $h^0(-nD)$  o bien  $h^0(K_X + nD)$  tiende a infinito cuando  $n$  tiende a infinito.

Pero los términos  $h^0(K_X - nD)$  y  $h^0(K_X + nD)$  no pueden diverger simultáneamente. En efecto, si  $h^0(K_X - nD) \neq 0$  mediante multiplicación por una sección no nula  $s \in H^0(K_X - nD)$  se obtiene una aplicación inyectiva  $H^0(K_X + nD) \rightarrow H^0(2K_X)$ , con lo cual  $h^0(K_X + nD)$  no puede tender a infinito.

Por tanto, podemos concluir que alguno de los términos  $h^0(nD)$  y  $h^0(-nD)$  diverge, quedando demostrado el resultado.  $\square$

**Proposición 2.5.4.** *Sea  $H$  un divisor amplio de  $X$ . El conjunto  $Q := \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{x}^2 > 0\}$  tiene dos componentes conexas*

$$Q^+ := \{\bar{x} \in Q \mid [H] \cdot \bar{x} > 0\} \text{ y } Q^- := \{\bar{x} \in Q \mid [H] \cdot \bar{x} < 0\}$$

*separadas por hiperplano  $[H]_{=0}$ , verificándose la siguiente inclusión:*

$$Q^+ \subseteq NE(X).$$

*Demostración.* La forma bilineal simétrica  $A_1(X) \times A_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$  inducida por la intersección de divisores puede diagonalizarse, de manera que existe una base ordenada de  $A_1(X)$  respecto a la cual la matriz asociada es diagonal, con  $+1, -1$  o  $0$  en la diagonal. Además, como primer elemento de la base puede tomarse  $|\bar{x}^2|^{-1/2} \bar{x}$  para cualquier elemento fijado  $\bar{x}$  de  $A_1(X)$  con  $\bar{x}^2 \neq 0$ , en particular puede tomarse  $(H^2)^{-1/2}[H]$  (véase, por ejemplo, [41, Sect. 10.2]). Así pues, las coordenadas de  $[H]$  respecto a esta base serán  $((H^2)^{1/2}, 0, \dots, 0)$ . Como consecuencia del lema 2.5.2, el primer elemento de la diagonal de la matriz debe ser  $1$  y el resto  $-1$  (puesto que la forma bilineal es de rango  $\rho(X)$ ).

Si para cada elemento  $\bar{x}$  de  $A_1(X)$  denotamos por  $(x_1, \dots, x_{\rho(X)})$  a sus coordenadas en la nueva base, tendremos lo siguiente:

$$Q = \left\{ \bar{x} \in A_1(X) \mid x_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho(X)} x_i^2 > 0 \right\},$$

satisfaciéndose, por tanto, las siguientes igualdades:

$$Q^+ = \left\{ \bar{x} \in A_1(X) \mid x_1 > \sqrt{\sum_{i=2}^{\rho(X)} x_i^2} \right\},$$

$$Q^- = \left\{ \bar{x} \in A_1(X) \mid x_1 < -\sqrt{\sum_{i=2}^{\rho(X)} x_i^2} \right\}.$$

Como, respecto a las nuevas coordenadas, el hiperplano  $[H]_{=0}$  viene definido por la ecuación  $x_1 = 0$ , es claro que  $Q^+$  y  $Q^-$  están separados por dicho hiperplano.

Vamos a probar ahora la inclusión  $Q^+ \subseteq NE(X)$ . Primero consideremos el conjunto  $Q_{\mathbb{Q}}^+ := Q^+ \cap (N_1(X) \otimes \mathbb{Q})$  y veamos que está contenido en  $NE(X)$ . Consideremos un punto  $\bar{x}$  perteneciente a  $Q_{\mathbb{Q}}^+$ . Existirá un número entero positivo  $m$  tal que  $m\bar{x}$  es un elemento reticular de  $A_1(X)$ , siendo por tanto la imagen de un cierto divisor  $D$  de  $X$ . Como  $\bar{x}^2 > 0$  al pertenecer  $\bar{x}$  a  $Q$ , podemos aplicar el lema 2.5.3 y obtenemos que, o bien  $nD$  es efectivo, o bien lo es  $-nD$  para  $n$  suficientemente grande. Como  $[H] \cdot [-nD] = -(nm)[H] \cdot \bar{x} < 0$ , el divisor  $-nD$  no puede ser nunca efectivo (por el criterio de amplitud de Kleiman). Luego  $nD$  es efectivo para un  $n$  suficientemente grande siendo, por tanto,  $(nm)\bar{x} = [nD]$  la imagen en  $A_1(X)$  de una curva de  $X$ . Luego  $\bar{x} \in NE(X)$  y se tiene la inclusión  $Q_{\mathbb{Q}}^+ \subseteq NE(X)$ . Considerando las clausuras topológicas y teniendo en cuenta la densidad de  $N_1(X) \otimes \mathbb{Q}$  en  $A_1(X)$  se tiene:  $\overline{Q^+} \subseteq \overline{NE(X)}$ , y tomando interiores:  $Q^+ \subseteq NE(X)^\circ \subseteq NE(X)$  (aplicando la proposición A.3.8).  $\square$

**Corolario 2.5.5.** *Si  $\rho(X) > 1$  y  $\bar{x} \in \overline{NE(X)}$  genera un rayo extremal de  $\overline{NE(X)}$  o de  $NE(X)$ , entonces  $\bar{x}^2 \leq 0$ .*

*Demostración.* Si fijamos un divisor amplio  $H$  de  $X$ , empleando la misma notación que en la proposición 2.5.4 tenemos:

$$Q^+ \subseteq NE(X).$$

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos la existencia de un rayo extremal de  $NE(X)$  (resp.,  $\overline{NE(X)}$ ) generado por un elemento  $\bar{x} \in A_1(X)$  tal que  $\bar{x}^2 > 0$ . En este caso,  $\bar{x}$  pertenece a  $Q^+$ , que es un abierto, y por tanto al interior del cono  $NE(X)$  (resp.,  $\overline{NE(X)}$ ). Esto es una contradicción puesto que  $\dim(NE(X)) = \dim(\overline{NE(X)}) = \rho(X) > 1$  y, por tanto, cualquier rayo extremal del cono  $NE(X)$  (resp.,  $\overline{NE(X)}$ ) ha de estar contenido necesariamente en su frontera.  $\square$

La siguiente proposición se deduce de manera inmediata del hecho de que si  $C$  y  $D$  son dos divisores efectivos de  $X$  sin componentes comunes, entonces  $C \cdot D \geq 0$ .

**Proposición 2.5.6.** *Sea  $D$  un divisor efectivo de  $X$ . Entonces, las curvas íntegras  $C$  de  $X$  cuyas imágenes en  $A_1(X)$  pertenecen a la región  $[D]_{<0}$  son componentes de la parte fija de  $|D|$ . Existe, por tanto, un número finito de ellas.*

**Corolario 2.5.7.** *Sea  $C$  una curva íntegra de  $X$  tal que  $C^2 < 0$ . Entonces,  $C$  es la única curva íntegra de  $X$  cuya imagen en  $A_1(X)$  genera el rayo  $\mathbb{R}_+[C]$ .*

*Demostración.* Sea una curva íntegra  $D$  distinta de  $C$  tal que  $\mathbb{R}_+[D] = \mathbb{R}_+[C]$ . Entonces, existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tal que  $[D] = \alpha[C]$ . Luego  $D \cdot C = \alpha(C \cdot C) < 0$  y esto implica, por la proposición 2.5.6, que  $D$  es una componente de la parte fija del sistema lineal dado por  $|C|$ . Al ser  $D$  irreducible, es claro que  $D = C$ .  $\square$

**Corolario 2.5.8.** *Si  $C$  es una curva íntegra de  $X$  tal que  $C^2 < 0$ , entonces  $\mathbb{R}_+[C]$  es un rayo extremal de  $NE(X)$  y de  $\overline{NE}(X)$ .*

*Demostración.* Si  $\mathbb{R}_+[C]$  fuera un rayo extremal de  $\overline{NE}(X)$ , teniendo en cuenta el corolario A.3.18,  $\mathbb{R}_+[C] \cup \{0\}$  sería una célula de  $\overline{NE}(X)$ , luego también lo sería de  $NE(X)$  (según el corolario A.3.17), siendo así  $\mathbb{R}_+[C]$  también un rayo extremal del cono  $NE(X)$ . Por consiguiente, será suficiente demostrar que  $\mathbb{R}_+[C]$  es un rayo extremal de  $\overline{NE}(X)$ .

Obsérvese primero que el cono  $\overline{NE}(X)$  está generado por  $[C]$  y por  $\overline{NE}(X)_{[C] \geq 0}$ , ya que la imagen en  $A_1(X)$  de cualquier curva íntegra de  $X$  distinta de  $C$  pertenece a  $\overline{NE}(X)_{[C] \geq 0}$ .

Sean  $\bar{x}, \bar{y}$  son dos elementos no nulos de  $\overline{NE}(X)$  tales que  $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{R}_+[C]$ . Como  $\overline{NE}(X) = \text{con}([C] \cup \overline{NE}(X)_{[C] \geq 0})$ , existirán dos números reales  $\alpha, \beta \geq 0$  y dos elementos  $\bar{x}', \bar{y}' \in \overline{NE}(X)_{[C] \geq 0}$  tales que:

$$\bar{x} = \alpha[C] + \bar{x}'$$

$$\bar{y} = \beta[C] + \bar{y}'.$$

Luego:

$$\bar{x} + \bar{y} = (\alpha + \beta)[C] + (\bar{x}' + \bar{y}') \in \mathbb{R}_+[C].$$

Por tanto,  $\bar{x}' + \bar{y}' = \gamma[C]$  para un cierto número real  $\gamma$ . Pero  $\gamma$  ha de ser no negativo ya que, en caso contrario,  $\overline{NE}(X)$  contendría toda la recta determinada por  $[C]$ , lo cual contradice el hecho de que  $\overline{NE}(X)$  es un cono fuertemente convexo (véase la proposición A.1.29).

Si  $\gamma$  fuese estrictamente positivo, tendríamos  $\bar{x}' + \bar{y}' \in \mathbb{R}_+[C] \cap \overline{NE}(X)_{[C] \geq 0}$ , lo cual es una contradicción puesto que  $\mathbb{R}_+[C] \cap \overline{NE}(X)_{[C] \geq 0} = \emptyset$ , al ser  $C^2 < 0$ .

Por tanto, concluimos que  $\gamma = 0$  y, por tanto,  $\bar{x}' = -\bar{y}'$ . Esto implica que  $\bar{x}' = \bar{y}' = 0$  pues en caso contrario el cono  $\overline{NE}(X)$  contendría a una recta, contradiciendo su convexidad fuerte. Luego  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_+[C]$ , concluyéndose la prueba.  $\square$

**Proposición 2.5.9.** *Si  $C$  es una curva íntegra de  $X$  tal que  $C^2 \leq 0$ , entonces  $[C]$  pertenece a la frontera de  $NE(X)$ .*

*Demostración.* Si  $C^2 < 0$ , el resultado es trivial, puesto que  $\mathbb{R}_+[C]$  es un rayo extremal (corolario 2.5.8) y por tanto  $\mathbb{R}_+[C] \cup \{0\}$  es una célula de  $NE(X)$  (corolario A.3.18). Podemos suponer, pues,  $C^2 = 0$ . Podemos también suponer que  $C$  no es numéricamente equivalente a cero, ya que en caso contrario el resultado es trivial. Consideremos la función lineal

$$\phi : A_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $\bar{x} \mapsto [C] \cdot \bar{x}$ .  $\phi$  es no negativa en  $NE(X)$ , puesto que cualquier curva íntegra de  $X$  distinta de  $C$  tiene intersección no negativa con  $C$ . Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que  $[C]$  no pertenece a la frontera de  $NE(X)$ ; existirá, entonces, un entorno abierto  $V$  de  $\bar{x}$  tal que  $V \subseteq NE(X)$ . Como  $\phi(\bar{y}) \geq 0$  para todo  $\bar{y} \in V$  y  $\phi([C]) = 0$ , la función lineal  $\phi$  posee un mínimo relativo en  $[C]$ , con lo cual  $\phi$  ha de ser la función nula. Por tanto,  $C \equiv 0$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 2.5.10.** *Si  $\bar{x}$  genera un rayo extremal de  $\overline{NE}(X)$  y  $\bar{x}^2 < 0$ , entonces  $\mathbb{R}_+\bar{x}$  está generado por la imagen en  $A_1(X)$  de una curva íntegra de  $X$ .*

*Demostración.* Consideremos una sucesión de divisores efectivos  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  tales que la sucesión de rayos  $\{\mathbb{R}_+[D_n]\}_{n=1}^\infty$  converja a  $\mathbb{R}_+\bar{x}$ . Al pertenecer  $\bar{x}$  al abierto  $\{\bar{y} \in A_1(X) \mid \bar{y} \cdot \bar{x} < 0\}$ , existe un entero positivo  $n_0$  tal que  $D_n \cdot \bar{x} < 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Existirá, por tanto, una curva íntegra  $C$  tal que  $\bar{x} \cdot [C] < 0$ . Podemos escribir

$$[D_n] = \alpha_n[C] + [D'_n]$$

para todo  $n \geq n_0$ , de manera que  $\alpha_n \geq 0$  y  $D'_n$  es un divisor efectivo tal que  $D'_n \cdot C \geq 0$ . Dividiendo la expresión anterior entre la norma del vector  $[D_n]$ ,  $\|[D_n]\|$ , obtenemos:

$$\frac{1}{\|[D_n]\|} [D_n] = \beta_n[C] + \bar{x}'_n,$$

siendo  $\beta_n = \frac{\alpha_n}{\|[D_n]\|}$  y  $\bar{x}'_n = \frac{1}{\|[D_n]\|} [D'_n]$ . Si  $H$  es un divisor amplio de  $X$  tenemos:

$$\frac{1}{\|[D_n]\|} ([H] \cdot [D_n]) = \beta_n([H] \cdot [C]) + [H] \cdot \bar{x}'_n.$$

Teniendo en cuenta que todos los términos de esta igualdad son positivos y que el primer miembro converge a  $\frac{1}{\|\bar{x}\|}([H] \cdot \bar{x})$ , es claro que la sucesión  $\{\beta_n\}_{n \geq n_0}$  está acotada superiormente y, por tanto, tendrá una subsucesión convergente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\{\beta_n\}_{n \geq n_0}$  es convergente (pues en caso de no serlo, consideraríamos sólo los términos de esta subsucesión); sea  $\beta$  su límite. La sucesión  $\{\bar{x}'_n = \frac{1}{\|D_n\|}[D_n] - \beta_n[C]\}_{n \geq n_0}$  converge, por tanto, a  $\bar{x}' := \frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x} - \beta[C]$ . De las desigualdades

$$0 \leq \bar{x}' \cdot [C] = \frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x} \cdot [C] - \beta[C]^2 < -\beta[C]^2$$

se deduce que  $\beta$  es estrictamente positivo y  $C^2$  es negativo. Como  $\mathbb{R}_+\bar{x}$  es un rayo extremal y  $\frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x} = \beta[C] + \bar{x}'$ , se tiene que  $\bar{x}$  ha de ser necesariamente un múltiplo de  $[C]$ .  $\square$

**Nota 2.5.11.** Como consecuencia del corolario 2.5.8 y de la proposición 2.5.10 se concluye que los rayos extremales de  $NE(X)$  y  $\overline{NE}(X)$  contenidos en la región  $\{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{x}^2 < 0\}$  coinciden y son aquellos generados por las imágenes en  $A_1(X)$  de las curvas íntegras de  $X$  de autointersección estrictamente negativa.

**Proposición 2.5.12.** *Si existe una curva íntegra  $C$  de  $X$  tal que  $\mathbb{R}_+[C]$  es un rayo extremal de  $NE(X)$ ,  $C^2 = 0$  y  $K_X \cdot C < 0$ , entonces  $X$  es una superficie reglada sobre una curva lisa, siendo  $C$  una de las fibras.*

*Demostración.* Aplicando la fórmula de la adjunción se tiene:

$$1 + \frac{1}{2}(C^2 + K_X \cdot C) = 1 + \frac{1}{2}K_X \cdot C \geq 0.$$

De esto se deduce que  $K_X \cdot C = -2$  y  $p_a(C) = 0$ , con lo cual  $C$  es una curva racional lisa.

Sea  $H$  un divisor amplio y  $m$  cualquier número natural estrictamente mayor que el número  $q := \max\{\frac{K_X \cdot H}{H \cdot C}, 1\}$ . Es claro que el divisor  $K_X - mC$  tiene intersección negativa con  $H$  y, así, no puede ser numéricamente equivalente un divisor efectivo. Por tanto,  $H^0(K_X - mC) = 0$  y, por la dualidad de Serre,  $H^2(mC) = 0$ . Teniendo esto en cuenta y aplicando el teorema de Riemann-Roch, obtenemos:

$$h^0(mC) \geq \frac{1}{2}(C^2 - K_X \cdot C) + \chi(X) = m + \chi(X) \geq 2. \quad (2.8)$$

Si el sistema lineal  $|mC|$  tuviera parte fija para todo número natural  $m > q$ , es claro que ésta debería de ser un múltiplo de  $C$ ; pero, en este caso, se

tendría que  $h^0((m-1)C) = h^0(mC)$  para todo  $m > q$ , con lo cual las dimensiones  $h^0(mC)$  serían todas iguales, en contradicción con la desigualdad 2.8. Por tanto, existe  $m > q$  para el cual el sistema lineal  $|mC|$  no tiene parte fija; además, si  $D_1, D_2$  son dos curvas pertenecientes a este sistema lineal, entonces  $D_1 \cdot D_2 = C^2 = 0$ , con lo cual  $D_1$  y  $D_2$  no intersectan. Esto quiere decir que el sistema lineal  $V$  generado por  $D_1$  y  $D_2$  (incluido en  $|mC|$ ) no tiene puntos base. Por tanto, determinará un morfismo  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  cuyas fibras son las curvas de  $V$ . Sea  $X \xrightarrow{h} W \xrightarrow{g} \text{Spec}(k)$  el factor de Stein correspondiente a la factorización del morfismo estructural de  $X$  dada por  $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \longrightarrow \text{Spec}(k)$ ; es claro que  $W$  es una curva no singular. Sea  $(p, T, q)$  un representante de la clase de isomorfía de factores de Stein del morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  tal que las curvas contraídas por  $p$  son exactamente aquellas cuyas imágenes en  $A_1(X)$  pertenecen al rayo  $\mathbb{R}_+[C]$ . Cualquier curva con imagen en el rayo  $\mathbb{R}_+[C]$  es contraída por  $h$ , ya que su intersección con el divisor  $mC$  es nula. Por tanto, se tiene una relación de dominación  $(h, W, g) \geq (p, T, q)$ . Sea  $e : W \rightarrow T$  el morfismo de dominación. Al ser  $e$  suprayectivo, es claro que  $\dim(T) = 1$  y, por tanto,  $T$  es una curva. Luego  $e$  es un morfismo finito [37, Chap. II, Prop. 6.8] y, en consecuencia, los factores  $(h, W, g)$  y  $(p, T, q)$  han de ser isomorfos. Concluimos, por tanto, que  $h$  contrae aquellas curvas cuyas imágenes en  $A_1(X)$  pertenecen a  $\mathbb{R}_+[C]$ .

Veamos que las fibras de  $h$  son irreducibles. Si existe una fibra de  $h$  reducible, podrá expresarse de la forma  $D_1 + D_2$ , siendo  $D_1$  y  $D_2$  dos curvas de  $X$  sin componentes íntegras comunes. Entonces  $[D_1] + [D_2] \in \mathbb{R}_+[C]$ , al ser  $D_1 + D_2$  una curva contraída por  $h$ . Como  $\mathbb{R}_+[C]$  es un rayo extremal de  $NE(X)$ , se tiene que los elementos  $[D_1]$  y  $[D_2]$  son ambos múltiplos reales de  $[C]$ . Luego  $D_1 \cdot D_2 = 0$  y, por tanto,  $D_1 + D_2$  no es una curva conexa. Esto es absurdo, puesto que  $h$  posee fibras conexas.

Al ser las fibras de  $h$  irreducibles, es claro que  $C$  es una de ellas. Además, todas las fibras están parametrizadas por la curva  $W$  siendo, por tanto, algebraicamente equivalentes. Luego serán numéricamente equivalentes a  $C$  y, por consiguiente, curvas racionales lisas.

Todo esto demuestra que  $X$  es una superficie reglada sobre la curva  $W$ .  $\square$

**Proposición 2.5.13.** *Si  $\rho(X) \geq 3$  y  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico, entonces  $\bar{x}^2 < 0$  para cualquier generador  $\bar{x}$  de un rayo extremal de  $\overline{NE}(X)$ .*

*Demostración.* Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que existe un rayo extremal de  $\overline{NE}(X)$  generado por un elemento  $\bar{y} \in A_1(X)$  tal que  $\bar{y}^2 = 0$ . Sea  $H$  un divisor amplio de  $X$ . Como consecuencia del lema A.1.33,  $T := \overline{NE}(X) \cap [H]_{=1}$  es un conjunto poliédrico compacto de dimensión  $\rho(X) - 1$ , siendo  $\bar{z} := \frac{1}{[H] \cdot \bar{y}} \bar{y} \in T$  un punto extremo de  $T$ .

Utilizando la misma notación de la demostración de la proposición 2.5.4,  $T$  contiene al conjunto  $L := \overline{Q^+} \cap [H]_{=1}$  y  $\bar{z}$  pertenece a la frontera de  $L$ . Si consideramos el cambio de coordenadas presente en la mencionada demostración,  $L$  es el conjunto definido por las ecuaciones

$$x_1 = (H^2)^{1/2}$$

$$\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq H^2,$$

que son las de una bola euclídea de dimensión  $\rho(X) - 1 \geq 2$  contenida en  $[H]_{=1}$ . Por tanto, existirá un único  $\bar{u} \in \overline{NE}(X)^\vee = P(X)$  tal que  $\bar{z} \in \{\bar{u}\}^\perp \cap T$ . Pero esto es contradictorio ya que, al ser  $T$  poliédrico y  $\bar{z}$  un punto extremo de  $T$ ,  $\bar{z}$  es la intersección de los hiperplanos frontera que lo contienen (véase la definición A.1.12 y [72, Th. 2.4.7]).  $\square$

**Proposición 2.5.14.** *Supongamos que  $\rho(X) \geq 3$ . Entonces  $NE(X)$  es poliédrico si y sólo si  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico.*

*Demostración.* Si  $NE(X)$  es poliédrico, entonces coincide con su clausura, al ser cerrado. Recíprocamente, si  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico entonces, por la proposición A.1.34,  $\overline{NE}(X) = \text{con}(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\})$ , siendo  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$  un sistema de generadores de sus rayos extremales. Para todo  $i = 1, \dots, s$  se tiene que, según la proposición 2.5.13,  $\bar{x}_i^2 < 0$ , y según la proposición 2.5.10, el rayo  $\mathbb{R}_+ \bar{x}_i$  está generado por la imagen en  $A_1(X)$  de una curva íntegra de  $X$ ; luego  $\bar{x}_i \in NE(X)$ . Por tanto, se tiene la igualdad  $NE(X) = \overline{NE}(X)$ , siendo  $NE(X)$  poliédrico.  $\square$

**Ejemplo 2.5.15.** Si  $X$  es una superficie tal que  $\rho(X) = 1$ , el cono de curvas tiene dos células: el propio cono  $NE(X)$  y  $\{0\}$ . Ambas son contráctiles (definición 2.3.10), correspondiendo la primera de ellas al morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  y al morfismo identidad la segunda.

En general el cono de curvas, incluso bajo una estructura similar, puede, o no, ser poliédrico; incluso puede, o no, ser cerrado, como prueba el siguiente

**Ejemplo 2.5.16.** Sea  $\pi : X \rightarrow C$  una superficie reglada sobre una curva lisa  $C$  de género  $g$ . Es posible considerar  $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{E}$  es un haz localmente libre en  $C$  tal que  $H^0(C, \mathcal{E}) \neq 0$  pero para todos los haces invertibles  $\mathcal{L}$  en  $C$  con  $\text{deg } \mathcal{L} < 0$  se tiene  $H^0(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$ . En esta situación, el entero  $e = -\text{deg } \mathcal{E}$  es un invariante de  $X$  que es mayor o igual que  $-g$  y existe una sección  $C_0$  del fibrado  $\pi$  tal que  $\mathcal{O}_X(C_0) \cong \mathcal{O}_X(1)$  y  $e = -C_0^2$ . El  $\mathbb{Z}$ -módulo  $N_1(X)$  tiene rango 2 y está generado por  $[F]$  y  $[C_0]$ , donde  $F$  es una fibra de



$\pi$ . Además se cumplen las relaciones:  $F^2 = 0$  y  $F \cdot C_0 = 1$  (véase [37, Chap. V, Sect. 2] para más detalles).  $\mathbb{R}_+[F] \cup \{0\}$  es una cara del cono de curvas  $NE(X)$ , ya que es el subcono generado por las imágenes en  $NE(X)$  de las curvas contraídas por el morfismo  $\pi$ . Por tanto,  $[F]$  genera un rayo extremal contráctil de  $NE(X)$ .

Supongamos que  $e \geq 0$ . Según [37, Chap. V, Prop. 2.20], la clase de equivalencia numérica de cualquier curva íntegra  $Y$  de  $X$  distinta de  $C_0$  y de  $F$  es de la forma  $a[C_0] + b[F]$ , siendo  $a > 0$  y  $b \geq ae$ . Por tanto, se tiene la igualdad:

$$NE(X) = \text{con}([C_0], [F])$$

y  $NE(X)$  es un cono poliédrico con dos rayos extremales generados por  $[C_0]$  y  $[F]$  respectivamente.

Si  $e < 0$  y  $k = \mathbb{C}$ , la clase de equivalencia numérica de cualquier curva íntegra  $Y$  de  $X$  distinta de  $C_0$  y de  $F$  es de la forma  $a[C_0] + b[F]$ , siendo  $a = 1, b \geq 0$  o  $a \geq 2, b \geq \frac{1}{2}ae$  [37, Chap. V, Prop. 2.21]. Por tanto:

$$[Y] = \frac{a}{2}[2C_0 + eF] + (b - \frac{ae}{2})[F] \in \text{con}([2C_0 + eF], [F]).$$

Además, cualquier divisor  $D$  con clase en el interior topológico de  $\text{con}([2C_0 + eF], [F])$  es de la forma  $a[C_0] + b[F]$  con  $a > 0$  y  $b > \frac{1}{2}ae$ , luego es un divisor amplio (también por [37, Chap. V, Prop. 2.21]); por tanto  $[D] \in NE(X)$  por la proposición 2.5.1. Concluimos, pues, que los conos  $NE(X)$  y  $\text{con}([2C_0 + eF], [F])$  tienen el mismo interior topológico y, como consecuencia, se verifica la igualdad:

$$\overline{NE}(X) = \text{con}([2C_0 + eF], [F]).$$

Si  $g = 1$  el único valor posible para  $e$  es  $-1$ . En este caso existe una curva de  $X$  numéricamente equivalente a  $2C_0 + eF$  [69] y se verifica, por tanto, la igualdad:

$$NE(X) = \text{con}([2C_0 + eF], [F])$$

y el cono  $NE(X)$  es cerrado.

Para  $k = \mathbb{C}$ , existen casos de superficies regladas sobre  $C$  con  $e < 0$  y  $g \geq 2$  tales que  $[2C_0 + eF] \notin NE(X)$  (véase [69]). En estos casos, el cono de curvas no es cerrado:

$$NE(X) = \text{con}([2C_0 + eF], [F]) \setminus \mathbb{R}_+[2C_0 + eF].$$

Concluimos esta serie de ejemplos sobre el cono de curvas dando un caso donde  $NE(X)$  no es cerrado y además posee un número infinito de rayos extremales.

**Ejemplo 2.5.17.** Si  $X$  es una superficie abeliana el cono de curvas de  $X$  coincide con el cono semiamplio, puesto que las clases de equivalencia numérica de los divisores numéricamente efectivos coinciden con las de los divisores efectivos [5, Lem. 1.1]. Por tanto, todas las curvas de  $X$  tienen auto-intersección no negativa, con lo cual  $NE(X)$  estará contenido en  $\overline{Q^+} = \{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{x}^2 \geq 0\}$ , con la notación de la proposición 2.5.4. Pero, según esta proposición,  $Q^+ \subseteq NE(X)$ . Por tanto, se verifica la igualdad

$$\overline{NE}(X) = \overline{Q^+}.$$

Recordando también la demostración de la proposición 2.5.4, tras un cambio de base en  $A_1(X)$  el cono  $\overline{NE}(X)$  tiene la apariencia de un “semi-cono de luz”. Tiene infinitos rayos extremales, ya que cada punto de su frontera genera un rayo extremal. Además, el cono  $NE(X)$  no es cerrado ya que existen rayos extremales de su clausura que no poseen puntos reticulares y, por tanto, no pueden ser generados por la clase de una curva de  $X$ .

El siguiente teorema, llamado de contracción, que podemos encontrar en [46, Th. 1.28], muestra cómo todos los rayos extremales del cono  $NE(X)$  contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  son contráctiles, determinando los posibles tipos de contracciones.

**Teorema 2.5.18.** *Todo rayo extremal  $R$  de  $NE(X)$  contenido en la región  $[K_X]_{<0}$  es contráctil. Además, si  $h : X \rightarrow W$  es la contracción de  $R$  (única salvo composición con un isomorfismo), sólo puede ser de uno de los siguientes tipos:*

- (1)  $W$  es una superficie lisa y  $h$  es la explosión de  $W$  en un punto cerrado; en este caso,  $\rho(W) = \rho(X) - 1$ .
- (2)  $W$  es una curva lisa y  $X$  es una superficie reglada minimal sobre  $W$ ; en este caso  $\rho(X) = 2$ .
- (3)  $W \cong \text{Spec}(k)$  y  $X \cong \mathbb{P}^2$ .

**Nota 2.5.19.** Existe una versión relativa del teorema de contracción (véase, por ejemplo, [46, Th. 3.25 (3)]) aplicable a variedades de dimensión arbitraria y en el que se permiten, además, cierto tipo de singularidades.

Los rayos extremales de  $NE(X)$  contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  son, según el teorema del cono, las clases de ciertas curvas racionales de  $X$ . Además, son curvas contraídas por algún morfismo (según el teorema de contracción). Nuestro objetivo es, ahora, determinar cuales son estas curvas racionales.

**Definición 2.5.20.** Una curva  $C$  de  $X$  es una  $(-1)$ -curva si es no singular, racional y  $C^2 = -1$ .

Las  $(-1)$ -curvas también suelen denominarse *curvas excepcionales de primera especie*.

**Proposición 2.5.21.** Si  $C$  es una curva de  $X$ , son equivalentes:

- (a)  $C$  es una  $(-1)$ -curva.
- (b)  $C$  es íntegra,  $C^2 = -1$  y  $K_X \cdot C = -1$ .
- (c)  $C$  es íntegra,  $C^2 < 0$  y  $K_X \cdot C < 0$ .

*Demostración.* La equivalencia entre (a) y (b) es clara consecuencia de la fórmula de adjunción, y el hecho de que (b) implica (c) es evidente. Por tanto, sólo queda demostrar (b) se deduce de (c). Supongamos, pues, que  $C$  cumple las condiciones de (c). Como  $C$  es íntegra, su género aritmético será no negativo. Por otra parte, según la fórmula de adjunción,  $p_a(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + K_X \cdot C) < 1$ , ya que  $C^2 < 0$  y  $K_X \cdot C < 0$ . Por tanto,  $p_a(C) = 0$ . Como, además,  $C$  es una curva íntegra, es racional y no singular. La fórmula de adjunción equivale ahora a  $C^2 + K_X \cdot C = -2$ , siendo  $C^2 = -1$  y  $K_X \cdot C = -1$  la única posibilidad.  $\square$

El siguiente teorema es el llamado criterio de contractibilidad de Castelnuovo y puede encontrarse en [37, Chap. V, Th. 5.7]. Nos muestra cómo cualquier  $(-1)$ -curva es la curva excepcional correspondiente a una explosión de una superficie regular en un punto. Por otra parte, al tener auto-intersección estrictamente negativa, la imagen de cualquier  $(-1)$ -curva en  $A_1(X)$  genera un rayo extremal del cono de curvas  $NE(X)$ , que es contráctil.

**Teorema 2.5.22.** Si  $E$  es una  $(-1)$ -curva de  $X$ , entonces existe un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  a una superficie regular  $Y$ , un punto  $p \in Y$  y un isomorfismo  $g : X \rightarrow \text{Bl}_p(Y)$  tales que  $g(E)$  es la curva excepcional y  $f = \pi \circ g$ , siendo  $\pi : \text{Bl}_p(Y) \rightarrow Y$  la explosión de  $Y$  con centro en  $p$ .

Veremos a continuación que, si el número de Picard de  $X$  no es inferior a 3, los rayos extremales de  $NE(X)$  que están contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  son exactamente los generados por clases de  $(-1)$ -curvas.

**Proposición 2.5.23.** Supongamos que  $\rho(X) \geq 3$  y sea  $R$  es un rayo extremal de  $NE(X)$ . Entonces,  $R$  está contenido en la región  $[K_X]_{<0}$  si y sólo si existe una  $(-1)$ -curva  $C$  de  $X$  tal que  $R = \mathbb{R}_+[C]$ .

*Demostración.* Es claro que la imagen en  $A_1(X)$  de toda  $(-1)$ -curva genera un rayo extremal de  $NE(X)$  contenido en la región  $[K_X]_{<0}$ . Recíprocamente, si  $R$  es un rayo extremal de  $NE(X)$  contenido en  $[K_X]_{<0}$ , por el teorema del cono estará generado por la imagen en  $A_1(X)$  de una cierta curva íntegra racional  $C$  de  $X$ . La fórmula de adjunción implica que el valor  $\frac{1}{2}(C^2 + K_X \cdot C) + 1$  es un entero no negativo. Como además  $K_X \cdot C < 0$ , las únicas posibilidades para el valor  $C^2$  son  $-1$  y  $0$ . Pero, si  $C^2 = 0$ , según la proposición 2.5.12,  $X$  sería una superficie reglada, con lo cual  $\rho(X) = 2$ , contradiciendo las hipótesis. Por tanto,  $C$  es una curva íntegra y tal que  $C^2 = -1$  y  $K_X \cdot C < 0$ . Aplicando la proposición 2.5.21 deducimos que  $C$  es una  $(-1)$ -curva.  $\square$

A partir de ahora, denotaremos por  $\mathcal{T}(X)$  al subconjunto del espacio topológico  $\mathcal{R}(A_1(X))$  (con la topología definida en la sección A.2 del apéndice) formado por los rayos extremales del cono  $\overline{NE}(X)$ . A los puntos de acumulación de  $\mathcal{T}(X)$  como subconjunto de  $\mathcal{R}(A_1(X))$  se les llamará *rayos límite* de  $\mathcal{T}(X)$ . El siguiente resultado constituye un criterio para la poliedricidad del cono de curvas  $\overline{NE}(X)$ , haciéndola depender de la existencia de rayos límite de  $\mathcal{T}(X)$ .

**Teorema 2.5.24.** *El cono  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico si y sólo si  $\mathcal{T}(X)$  no tiene rayos límite.*

*Demostración.* Es claro si  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico,  $\mathcal{T}(X)$  es finito y, por tanto, no posee rayos límite. Supongamos, por tanto, que el conjunto  $\mathcal{T}(X)$  no tiene rayos límite y veamos que esta condición implica que el cono  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico. Consideremos un divisor amplio  $H$  de  $X$ . Como  $[H] \cdot \bar{z} > 0$  para todo elemento  $\bar{z}$  de  $\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$  (según el criterio de amplitud de Kleiman), podemos considerar la restricción a  $\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$  de la función  $\phi_{[H]}$  definida en la sección A.2 del apéndice:

$$\phi_{[H]} : \overline{NE}(X) \setminus \{0\} \longrightarrow [H]_{=1},$$

que asigna a cada elemento de su dominio el punto de intersección del rayo de  $A_1(X)$  que genera con el hiperplano  $[H]_{=1}$ . Aplicando el lema A.1.33,  $\overline{NE}(X) \cap [H]_{=1}$  es un conjunto compacto, al ser  $\overline{NE}(X)$  un cono fuertemente convexo. Esto implica que el subconjunto de  $[H]_{=1}$  dado por la imagen por  $\phi_{[H]}$  de la unión de los rayos de  $\mathcal{T}(X)$  está acotado. Además, por la proposición A.2.1, no posee puntos de acumulación y, por tanto, debe ser finito. Como  $\phi_{[H]}$  induce una función inyectiva entre los rayos contenidos en  $\overline{NE}(X)$  y los puntos de  $\overline{NE}(X) \cap [H]_{=1}$ , se concluye que  $\mathcal{T}(X)$  debe ser finito y  $\overline{NE}(X)$  poliédrico.  $\square$

Si el número de Picard de  $X$  es mayor o igual que 3, según la proposición 2.5.14 la poliedricidad de  $NE(X)$  equivale a la de su clausura. Por tanto, se deduce el siguiente

**Corolario 2.5.25.** *Supongamos que  $\rho(X) \geq 3$ . El cono  $NE(X)$  es poliédrico si y sólo si  $\mathcal{T}(X)$  no tiene rayos límite.*

Como consecuencia de este resultado, la existencia de rayos límite de  $\mathcal{T}(X)$  permite decidir, en el caso en que el número de Picard de  $X$  sea superior a dos, si el cono de curvas es poliédrico o no lo es. Probaremos a continuación unas condiciones que deben de satisfacer los generadores de estos rayos límite, delimitando, por tanto, su localización.

**Proposición 2.5.26.** *Si  $R = \mathbb{R}_+\bar{r}$  es un rayo límite de  $\mathcal{T}(X)$ , entonces  $\bar{r}^2 = 0$  y  $[K_X] \cdot \bar{r} \geq 0$ .*

*Demostración.* Según el corolario 2.2.12, el conjunto

$$\{S \in \mathcal{T}(X) \mid S \subseteq [K_X]_{<0}\}$$

es discreto, con lo cual se debe cumplir la desigualdad  $[K_X] \cdot \bar{r} \geq 0$ .

Al ser  $R$  un rayo límite de  $\mathcal{T}(X)$ , existirá una sucesión  $\{R_k = \mathbb{R}_+\bar{r}_k\}_{k=1}^{\infty}$  de rayos extremales distintos de  $\overline{NE}(X)$  que converge a  $R$ . Según el corolario 2.5.5,  $\bar{r}_k^2 \leq 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Luego es evidente la desigualdad

$$\bar{r}^2 \leq 0.$$

Distinguimos dos casos:

1. No existe ninguna subsucesión de  $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$  cuyos términos son rayos contenidos en la región  $\{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{x}^2 < 0\}$ . En este caso, existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $\bar{r}_k^2 = 0$  para todo  $k \geq N$ , con lo cual  $\bar{r}^2 = 0$ .
2. Existe una subsucesión de  $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$  cuyos términos son rayos contenidos en la región  $\{\bar{x} \in A_1(X) \mid \bar{x}^2 < 0\}$ . Según la proposición 2.5.10 los términos de esta subsucesión deben de estar generados por imágenes en  $A_1(X)$  de curvas íntegras de  $X$ . Denotemos por  $\{\mathbb{R}_+[C_k]\}_{k=1}^{\infty}$  a esta subsucesión, siendo  $C_k$  una curva íntegra para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Por la proposición A.2.2 podemos suponer que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|[C_k]\| = \infty$ . Aplicando la fórmula de adjunción a las curvas  $C_k$  obtenemos:

$$1 + \frac{1}{2} ([C_k]^2 + [K_X] \cdot [C_k]) \geq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Dividiendo la expresión anterior entre  $\|[C_k]\|^2$ :

$$\frac{1}{\|[C_k]\|^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{[C_k]^2}{\|[C_k]\|^2} + \frac{[K_X] \cdot \frac{[C_k]}{\|[C_k]\|}}{\|[C_k]\|} \right) \geq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{r}^2}{\|\bar{r}\|^2} \geq 0.$$

Luego  $\bar{r}^2 \geq 0$  y, por tanto, se da la igualdad  $\bar{r}^2 = 0$ .  $\square$

Este resultado puede interpretarse geoméricamente diciendo que el conjunto de los rayos extremales de  $NE(Z)$  en el complementario del “semi-cono de luz”  $\{\bar{z} \in A(Z) \mid H \cdot \bar{z} \geq 0 \text{ y } \bar{z}^2 \geq 0\}$  es discreto.

**Proposición 2.5.27.** *Si  $D$  es un divisor efectivo de  $X$ , entonces el conjunto formado por los rayos de  $\mathcal{T}(X)$  contenidos en  $[D]_{<0}$  es finito y cualquiera de sus elementos está generado por la imagen en  $A_1(X)$  de una curva íntegra de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $\Lambda$  el conjunto de curvas íntegras de  $X$  cuyas imágenes en  $A_1(X)$  pertenecen a  $[D]_{<0}$  y consideremos el siguiente subconjunto de  $A_1(X)$ :

$$\Lambda' := \bigcup_{C \in \Lambda} \mathbb{R}_+[C].$$

Por la proposición 2.5.6 sabemos que  $\Lambda$  es un conjunto finito. Si  $H$  es un divisor amplio de  $X$ , se tiene que  $(\Lambda' \cup \overline{NE}(X)_{[D]_{\geq 0}}) \cap [H]_{=1}$  es un conjunto compacto. Por tanto el cono  $\text{con}(\Lambda' \cup \overline{NE}(X)_{[D]_{\geq 0}}) = \text{con}((\Lambda' \cup \overline{NE}(X)_{[D]_{\geq 0}}) \cap [H]_{=1})$  es cerrado (véase el corolario A.1.39) y contiene a  $NE(X)$  (pues contiene las imágenes en  $A_1(X)$  de todas las curvas íntegras de  $X$ ). Como consecuencia se tiene la igualdad:

$$\overline{NE}(X) = \text{con}(\Lambda' \cup \overline{NE}(X)_{[D]_{\geq 0}}).$$

Según la proposición A.1.35, el conjunto de los rayos generados por los elementos de  $\Lambda' \cup \overline{NE}(X)_{[D]_{\geq 0}}$  debe contener al conjunto de los rayos extremales de  $\overline{NE}(X)$ . Por tanto, los rayos extremales de  $\overline{NE}(X)$  contenidos en  $[D]_{<0}$  deben estar generados por imágenes en  $A_1(X)$  de curvas de  $\Lambda$ , obteniéndose el resultado.  $\square$

**Corolario 2.5.28.** *Los rayos límite de  $\mathcal{T}(X)$  deben estar contenidos en  $P(X)$ .*

*Demostración.* Si existe  $\bar{x} \in A_1(X) \setminus P(X)$  generando un rayo límite de  $\mathcal{T}(X)$  entonces existe un divisor efectivo  $D$  de  $X$  tal que  $D \cdot \bar{x} < 0$ . Esto implica la existencia de infinitos rayos de  $\mathcal{T}(X)$  contenidos en  $[D]_{<0}$ , entrando en contradicción con la proposición 2.5.27.  $\square$

Para finalizar el capítulo probaremos que el cono de curvas asociado a una superficie regular con divisor anticanónico amplio es poliédrico.

**Proposición 2.5.29.** *Si  $-K_X$  es amplio, entonces  $NE(X)$  es un cono poliédrico.*

*Demostración.* Como consecuencia del criterio de amplitud de Kleiman, se tiene la siguiente inclusión:

$$\overline{NE}(X) \subseteq [K_X]_{<0},$$

y puesto que los rayos extremales de los conos  $NE(X)$  y  $\overline{NE}(X)$  contenidos en la región  $[K_X]_{<0}$  coinciden (véase la nota 2.2.11),  $NE(X)$  es un cono cerrado.

Bastará probar, por tanto, que  $\overline{NE}(X)$  es poliédrico. Procedamos, para ello, por reducción al absurdo. En caso contrario existiría un rayo límite  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  de  $\mathcal{T}(X)$  (por el teorema 2.5.24); pero, en este caso,  $[K_X] \cdot \bar{r} \geq 0$ , como consecuencia de la proposición 2.5.26, y esto contradice la amplitud de  $-K_X$  (por el criterio de amplitud de Kleiman).  $\square$





## Capítulo 3

# El cono de curvas asociado a una superficie racional regular

El objetivo de este capítulo es el estudio de la estructura del cono de curvas asociado a una superficie proyectiva racional no singular y el establecimiento de unas condiciones bajo las cuales dicho cono de curvas es poliédrico. Daremos dos tipos de condiciones: proyectivas e infinitesimales. Por condición proyectiva entenderemos aquella que involucra la efectividad de ciertos divisores. Condiciones infinitesimales serán aquellas que dependen únicamente de las propiedades de un morfismo birracional entre la superficie estudiada y una relativamente minimal, dicho de otra manera, de la situación de los puntos de una cierta configuración sobre una superficie relativamente minimal, cuya cadena de explosiones puntuales asociada permita obtener la superficie estudiada.

En la primera sección recordamos algunos conceptos y resultados relacionados con las superficies relativamente minimales. Un teorema clásico, probado para cualquier característica por Zariski, establece que toda superficie regular es birracional a una superficie relativamente minimal. Si dicha superficie no es racional ni reglada, entonces es birracional a un único modelo relativamente minimal. Las superficies racionales relativamente minimales son  $\mathbb{P}^2$  y las superficies de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta))$  con  $\delta \geq 0$  y  $\delta \neq 1$ . Por tanto, cualquier superficie racional regular puede obtenerse a partir de una relativamente minimal mediante una cadena de explosiones puntuales, luego puede verse como el cielo de una configuración de puntos infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  o a una de las superficies de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta$  con  $\delta \neq 1$  (obsérvese que esta obtención no es, en general, única).

En las secciones dos y tres recopilamos algunos resultados básicos y bien conocidos sobre divisores en superficies racionales que nos serán de utilidad en el desarrollo del resto del capítulo.

La idea básica para obtener condiciones suficientes de poliedricidad del cono de curvas asociado a una superficie proyectiva racional regular  $Z$  consiste en delimitar la situación de los rayos límite del conjunto de los rayos extremales de  $\overline{NE}(Z)$  encontrando un subconjunto de  $A_1(Z)$  que los contenga, e imponer luego condiciones que aseguren que este conjunto sea vacío.

En la sección cuarta, las condiciones impuestas son de tipo proyectivo, es decir, expresadas en términos de la efectividad de ciertos divisores. Por ejemplo, probamos que si el divisor anticanónico de  $Z$  tiene auto-intersección nula y no es numéricamente efectivo, entonces el cono de curvas  $NE(Z)$  es poliédrico. También probamos que si  $\mathcal{C}$  es una configuración de puntos infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  tal que existe una recta pasando por  $\mathcal{C}$ , entonces el cono de curvas asociado a la superficie racional obtenida es regular; además, en este caso, el cono característico es también regular y damos el cálculo explícito de sus rayos extremales. Si existe una cónica pasando por  $\mathcal{C}$ , demostramos que el cono de curvas asociado al cielo de  $\mathcal{C}$  es poliédrico y su cono característico es cerrado; además, si  $\mathcal{C}$  es una cadena y el número de puntos de explosión no es superior a 4, ambos conos son regulares. Mostramos también algunos ejemplos en los que describimos el cono de curvas y el cono característico de superficies racionales regulares, que nos proporcionan una muestra de la variedad de fenómenos posibles en cuanto a la estructura de dichos conos se refiere.

En la sección quinta, fijada una superficie proyectiva racional  $Z$  obtenida como el cielo de una configuración  $\mathcal{C}$  sobre una superficie racional relativamente minimal, definimos el cono de proximidad asociado a  $Z$  como el cono de  $A_1(Z)$  formado por todos los elementos con intersección no negativa con las clases de equivalencia numérica de los transformados estrictos de los divisores excepcionales. Probamos que cualquier rayo límite del conjunto de los rayos extremales de  $NE(Z)$  debe pertenecer a este cono y, utilizando este hecho y las propiedades de los rayos límite deducidas en la sección 3.4 y el capítulo 2, se deduce una condición, dependiente únicamente de la estructura combinatoria del grafo de proximidad de la configuración  $\mathcal{C}$ , cuya verificación implica la poliedricidad del cono de curvas  $NE(Z)$ . Esta condición consiste en que una cierta matriz, fácilmente computable a partir del grafo de proximidad de  $\mathcal{C}$ , debe ser condicionalmente definida positiva (una propiedad similar pero más débil que la de ser definida positiva). En el caso en que  $\mathcal{C}$  es una cadena, esta condición adquiere una forma mucho más simple: equivale al hecho de que el último coeficiente de la matriz sea estrictamente positivo.

Para finalizar la sección, damos un algoritmo que permite decidir si una cierta configuración verifica nuestra condición. Este algoritmo utiliza una formulación equivalente de la condición “ser condicionalmente definida positiva”, obtenida por Gaddum en [22], y que tiene la ventaja de ser computable.

En la última sección del capítulo tratamos el caso de las superficies obtenidas como cielos de dos tipos de configuraciones particulares sobre  $\mathbb{P}^2$ : las configuraciones tóricas y las configuraciones de puntos base de haces de curvas planas. Puesto que es sabido que el cono de curvas asociado al cielo de una configuración tórica es poliédrico, es natural preguntarse cuáles de estas configuraciones son P-suficientes. Lo mismo pasa para el caso de configuraciones de puntos base de haces de curvas planas con una única rama en el infinito. En ambos casos caracterizaremos cuáles son exactamente las configuraciones P-suficientes. Además, veremos que si la configuración de puntos base de un haz de curvas planas con curvas genéricas íntegras es P-suficiente, tales curvas genéricas son racionales.

A lo largo de este capítulo, todas las superficies consideradas serán proyectivas.

### 3.1. Superficies racionales relativamente minimales

Para cualquier superficie no singular  $S$ , denotaremos por  $B(S)$  al conjunto de las clases de isomorfía de las superficies no singulares birracionalmente equivalentes a  $S$ .

**Definición 3.1.1.** Una superficie regular  $S$  es *relativamente minimal* si su clase en  $B(S)$  es minimal en el siguiente sentido: cualquier morfismo birracional  $S \rightarrow S'$  (con  $S' \in B(S)$ ) es un isomorfismo.

**Proposición 3.1.2.** *Cualquier superficie no singular domina a una superficie regular relativamente minimal.*

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie no singular. Si  $S$  no es relativamente minimal, existe un morfismo birracional  $S \rightarrow S_1$  que no es isomorfismo. Por tanto, se podrá expresar como composición de  $n \geq 1$  explosiones puntuales y un isomorfismo (véase [6, Th. II.11]). Como consecuencia,  $\text{Pic}(S) \cong \text{Pic}(S_1) \oplus \mathbb{Z}^n$ , de lo que deducimos  $\text{rk}(\text{Pic}(S)) > \text{rk}(\text{Pic}(S_1))$ . Si  $S_1$  no es relativamente minimal, existe un morfismo birracional  $S_1 \rightarrow S_2$  que no es isomorfismo. Tendríamos, en este caso,  $\text{rk}(\text{Pic}(S)) > \text{rk}(\text{Pic}(S_1)) > \text{rk}(\text{Pic}(S_2))$ . Podemos continuar con este proceso hasta obtener una superficie relativamente minimal que es dominada por  $S$ .  $\square$

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización alternativa de las superficies regulares relativamente minimales.

**Proposición 3.1.3.** *Una superficie regular  $S$  es relativamente minimal si y sólo si no contiene  $(-1)$ -curvas.*

Este resultado es consecuencia del teorema 2.5.22 y del hecho de que cualquier morfismo birracional puede expresarse como composición de explosiones puntuales y un isomorfismo.

**Definición 3.1.4.** Se denomina *superficie racional* a toda superficie que es birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}^2$ .

**Definición 3.1.5.** Dado un número natural  $\delta \geq 0$  denominaremos  $\delta$ -ésima *superficie de Hirzebruch* al espacio fibrado proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta))$ . La denotaremos por  $\mathbb{F}_\delta$ .

**Nota 3.1.6.** Las superficies de Hirzebruch son superficies regladas sobre  $\mathbf{P}_k^1$  mediante el morfismo proyección  $p : \mathbb{F}_\delta \rightarrow \mathbb{P}^1$  y recíprocamente, toda superficie reglada sobre  $\mathbb{P}^1$  es isomorfa a una de las superficies de Hirzebruch [6, Prop. III.15]. Se trata, por tanto, de superficies no singulares birracionalmente equivalentes a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  y, así, también a  $\mathbb{P}^2$ . Luego son racionales.

Es sabido que las superficies racionales relativamente minimales son  $\mathbb{P}^2$  y las superficies de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta$  con  $\delta \neq 1$  (véase [6, Prop. IV.1.iii] y [6, Th. V.10]). Como consecuencia de ello, dada una superficie racional regular  $S$ , existe una superficie racional relativamente minimal  $T$ , que puede ser el plano proyectivo o una  $\delta$ -ésima superficie de Hirzebruch (con  $\delta \neq 1$ ), y una configuración  $\mathcal{C}$  de puntos infinitamente próximos a  $T$  tales que  $S$  es isomorfa al cielo de  $\mathcal{C}$ . Por tanto, toda clase de isomorfía de superficies racionales regulares queda determinada por un par  $(T, \mathcal{C})$ , donde  $T$  es  $\mathbb{P}^2$  o  $\mathbb{F}_\delta$  (con  $\delta \neq 1$ ), y  $\mathcal{C}$  es una configuración de  $T$ .

## 3.2. Divisores sobre una superficie de Hirzebruch

Siguiendo fundamentalmente [6] y [37], recopilaremos a continuación una serie de resultados bien conocidos sobre las superficies de Hirzebruch que nos muestran la estructura de su grupo de Picard y la forma intersección definida en él.

Consideremos un número natural  $\delta \geq 0$  y  $p : \mathbb{F}_\delta \rightarrow \mathbb{P}^1$  el morfismo proyección asociado al espacio fibrado proyectivo  $\mathbb{F}_\delta$ . Fijemos dos secciones globales no triviales de los haces inversibles  $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  y  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\delta}(1)$  y denotemos por  $F$  y  $M$  a sus respectivos divisores de ceros en la superficie  $\mathbb{F}_\delta$ . Consideremos también la sección  $s$  de la proyección  $p$  correspondiente al fibrado cociente  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  (es decir, tal que  $s^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\delta}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ ) y sea  $B = s(\mathbb{P}^1)$ .

**Proposición 3.2.1.** [6, Th. IV.1]

- (a)  $\text{Pic}(\mathbb{F}_\delta) = \mathbb{Z} F \oplus \mathbb{Z} M$  con  $F^2 = 0$ ,  $F \cdot M = 1$  y  $M^2 = \delta$ .
- (b) El divisor  $B$  es linealmente equivalente a  $M - \delta F$  y, si  $\delta > 0$ ,  $B$  es la única curva íntegra de  $\mathbb{F}_\delta$  con auto-intersección negativa.
- (c) Si  $\delta_1 \neq \delta_2$ ,  $\mathbb{F}_{\delta_1}$  y  $\mathbb{F}_{\delta_2}$  no son superficies isomorfas.
- (d)  $\mathbb{F}_1$  es una superficie isomorfa a  $\text{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$  para todo punto  $p$  de  $\mathbb{P}^2$ .

**Nota 3.2.2.** La proposición anterior nos proporciona dos bases del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $\text{Pic}(\mathbb{F}_\delta)$ : los sistemas  $\{F, M\}$  y  $\{F, B\}$ . Nótese que ambos sistemas coinciden si  $\delta = 0$ .

Por otra parte obsérvese que  $\mathbb{F}_0$  es isomorfo a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Proposición 3.2.3.** Si  $D$  es un divisor de  $\mathbb{F}_\delta$ , entonces  $D$  es numéricamente equivalente a cero si y sólo si es linealmente equivalente a cero.

*Demostración.* Según la proposición 3.2.1,  $D$  es linealmente equivalente a un divisor de la forma  $\alpha F + \beta M$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Si suponemos que  $D$  es numéricamente equivalente a cero entonces:

$$(\alpha F + \beta M) \cdot F = \beta = 0$$

$$(\alpha F + \beta M) \cdot M = \alpha + \delta\beta = 0$$

Luego  $\alpha = \beta = 0$  y así,  $D$  es linealmente equivalente a cero. Esto prueba el resultado, puesto que la equivalencia lineal de divisores implica equivalencia numérica.  $\square$

**Nota 3.2.4.** Es bien conocido que la equivalencia lineal de divisores implica la equivalencia algebraica y esta, a su vez, implica la equivalencia numérica. Por lo tanto, de la proposición anterior se deduce que en una superficie de Hirzebruch, al igual que ocurre en el plano proyectivo, las tres nociones de equivalencia entre divisores coinciden. En conclusión:

$$N_1(\mathbb{F}_\delta) = \text{Pic}(\mathbb{F}_\delta) = NS(\mathbb{F}_\delta) = \mathbb{Z} [F] \oplus \mathbb{Z} [M] = \mathbb{Z} [F] \oplus \mathbb{Z} [B].$$

La siguiente proposición muestra cuáles son las *clases efectivas* de divisores en el grupo de Picard de una superficie de Hirzebruch, entendiéndose por *clase efectiva* aquella que admite como representante a algún divisor efectivo.

**Proposición 3.2.5.** El semigrupo de las clases efectivas de divisores en  $\text{Pic}(\mathbb{F}_\delta)$  es  $\{\alpha F + \beta B \mid \alpha, \beta \geq 0\} = \{\alpha F + \beta M \mid \alpha \geq -\delta\beta \text{ y } \beta \geq 0\}$ .

*Demostración.* La igualdad entre los dos conjuntos del enunciado es clara. Además, también es evidente que cualquier clase en el conjunto del enunciado admite como representante a algún divisor efectivo. Sea  $D$  un divisor efectivo de  $\mathbb{F}_\delta$ .  $D$  podrá expresarse de la forma  $D = n_0B + \sum_{i=1}^k n_i D_i$ , con  $n_i$  un entero no negativo y  $D_i$  la clase de una curva íntegra distinta de  $B$  para cada  $i = 1, \dots, k$ . Según la nota 3.2.2, el par  $\{F, B\}$  es una base de  $\text{Pic}(\mathbb{F}_a)$ , luego  $D_i$  es linealmente equivalente a  $\alpha_i F + \beta_i B$ , con  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Es claro que  $D_i \cdot F = \beta_i \geq 0$ , al ser  $D_i$  una curva íntegra y  $F^2 = 0$ . Al ser  $D_i$  una curva íntegra distinta de  $B$  tenemos  $D_i \cdot B = \alpha_i + \beta_i B^2 \geq 0$ , lo cual implica que  $\alpha_i \geq 0$  (puesto que  $B^2 \leq 0$  y  $\beta_i \geq 0$ ). El resultado se sigue por aditividad.  $\square$

El siguiente resultado, que será de especial utilidad e interés en argumentaciones posteriores, nos muestra cuales son las clases de los divisores amplios y muy amplios, y las que tienen como representante a una curva irreducible.

**Proposición 3.2.6.** [37, Chapter V, Coro. 2.18] *Si  $D$  es un divisor de  $\mathbb{F}_\delta$  linealmente equivalente a  $\alpha F + \beta M$ , entonces:*

- (a)  $D$  es muy amplio  $\Leftrightarrow D$  es amplio  $\Leftrightarrow \alpha > 0$  y  $\beta > 0$ ;
- (b) El sistema lineal completo  $|D|$  contiene una curva íntegra no singular si, y sólo si, contiene una curva íntegra, y esto ocurre si, y sólo si, se satisface una de las siguientes condiciones:
  - (b.1)  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ ,
  - (b.2)  $\alpha = -\delta$  y  $\beta = 1$ ,
  - (b.3)  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ ,
  - (b.4)  $\delta > 0$ ,  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ .

Veamos ahora cual es la clase canónica de una superficie de Hirzebruch.

**Proposición 3.2.7.** *La clase en  $\text{Pic}(\mathbb{F}_\delta)$  de un divisor canónico de la superficie de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta$  es la del divisor  $(\delta - 2)F - 2M$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $K$  a la clase canónica de  $\mathbb{F}_\delta$ . Sea  $K = \alpha F + \beta M$  la expresión de  $K$  respecto de la base  $\{F, M\}$ . Como las fibras de  $p$  son isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ , tienen género nulo. Aplicando la fórmula de adjunción obtenemos:  $-2 = F \cdot (K + F)$ , lo cual implica  $K \cdot F = -2$ . Como  $B$  es una curva racional y además es no singular (proposición 3.2.6), tendrá género aritmético nulo. Aplicando de nuevo la fórmula de adjunción:  $-2 = B \cdot (K + B)$ , lo cual implica que  $K \cdot M = -\delta - 2$ . Por otra parte:

$$-2 = K \cdot F = \beta$$

$$-\delta - 2 = K \cdot M = \alpha + \beta\delta$$

de lo que se deduce  $\alpha = \delta - 2$  y  $\beta = -2$ .  $\square$

### 3.3. Divisores sobre superficies racionales no singulares

En esta sección recopilamos algunos resultados referentes a divisores en superficies racionales no singulares, que nos serán de utilidad en las restantes secciones del capítulo.

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $X$  una superficie racional no singular y sea  $D$  un divisor de  $X$ .*

$$(a) \quad h^0(D) - h^1(D) + h^2(D) = (D^2 - K_X \cdot D)/2 + 1.$$

$$(b) \quad \text{Si } D \text{ es efectivo, entonces } h^2(D) = 0.$$

*Demostración.* El apartado (a) es la fórmula de Riemann-Roch aplicada a una superficie racional. Demostremos el apartado (b). Como  $D$  es un divisor efectivo, existe un monomorfismo de haces  $\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \omega_X$ , donde  $\omega_X$  es el haz canónico de  $X$ . Existe, pues, una inyección entre los espacios de secciones globales. Por el teorema de dualidad de Serre  $H^0(X, \omega_X) \cong H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  (pues  $X$  es racional). Luego  $\omega_X$  no posee secciones globales no triviales. Por tanto,  $\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D)$  tampoco tiene secciones globales no triviales. Aplicando de nuevo el teorema de dualidad de Serre,  $h^2(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.3.2.** [35, Prop. 4] *Sea  $D$  un divisor numéricamente efectivo en una superficie racional no singular  $X$ . Entonces,  $h^2(D) = 0$  y  $D^2 \geq 0$ .*

**Definición 3.3.3.** Una superficie se dice que es *anticanónica* si admite un divisor anticanónico efectivo.

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se obtiene el siguiente

**Corolario 3.3.4.** *Si  $D$  es un divisor numéricamente efectivo de una superficie racional no singular  $X$  tal que  $K \cdot D \leq 0$ , entonces  $D$  es linealmente equivalente a un divisor efectivo. En particular, si  $X$  es anticanónica, entonces las clases en  $\text{Pic}(X)$  de todos los divisores numéricamente efectivos son efectivas.*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor numéricamente efectivo de  $X$ , entonces

$$h^0(D) - h^1(D) = (D^2 - K_X \cdot D)/2 + 1 \geq 1$$

ya que, por las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2,  $h^2(D) = 0$  y  $D^2 \geq 0$ . Luego  $h^0(D) > 0$  y, así,  $D$  es linealmente equivalente a un divisor efectivo. La segunda afirmación del enunciado se obtiene observando que si la clase de  $-K_X$  es efectiva, entonces  $K_X \cdot D \leq 0$  para cualquier divisor  $D$  numéricamente efectivo.  $\square$

**Nota 3.3.5.** Este corolario implica que, en una superficie  $X$  racional, no singular y anticanónica, se verifica la siguiente inclusión:

$$P(X) \subseteq NE(X).$$

El siguiente resultado es parte de un teorema debido a B. Harbourne que determina el comportamiento (dimensión y puntos base) de los sistemas lineales completos asociados a divisores numéricamente efectivos sobre una superficie racional no singular anticanónica [33, Th. III.1]. Nos será de utilidad para determinar ciertas propiedades del cono característico en alguno de los ejemplos posteriores.

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $X$  una superficie racional, no singular y anticanónica,  $C$  un divisor de  $X$  numéricamente efectivo y  $D$  un divisor efectivo linealmente equivalente a  $-K_X$ .*

- (a) *Si  $-K_X \cdot C \geq 2$ , entonces  $h^1(C) = 0$  y, además,  $|C|$  no tiene puntos base.*
- (b) *Si  $-K_X \cdot C = 1$ , entonces  $h^1(C) = 0$ . Además, si el sistema lineal  $|C|$  no tiene parte fija, entonces tiene un único punto base, que pertenece al soporte de  $D$ .*

### 3.4. Condiciones proyectivas de poliedricidad

Consideremos la superficie racional regular  $Z$  obtenida mediante  $n$  explosiones puntuales a partir de una superficie  $X$ , que puede ser  $\mathbb{P}^2$  o una superficie de Hirzebruch:

$$Z = X_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 = X$$



Obsérvese que estamos admitiendo también el caso  $X = \mathbb{F}_1$ , aunque no sea una superficie relativamente minimal.

Si  $\rho(Z) \leq 2$ , entonces  $-K_Z$  es amplio, siendo, por tanto,  $NE(Z)$  poliédrico (por la proposición 2.5.29). Luego el corolario 2.5.25 puede enunciarse, en este caso particular, sin la hipótesis  $\rho(Z) \geq 3$ , teniéndose el siguiente resultado:

**Proposición 3.4.1.** *El cono de curvas  $NE(Z)$  es poliédrico si, y sólo si,  $\mathcal{T}(Z)$  no posee rayos límite.*

Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  la configuración de los centros de explosión, ordenados según el orden admisible determinado por la cadena de morfismos  $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ . Denotemos por  $\pi$  al morfismo  $\pi_{\mathcal{C}} = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ .

Si  $L$  es una recta del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  se tiene que  $N_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[L^*]$  y que el sistema  $\mathcal{B} := \{[L^*], [E_1^*], \dots, [E_n^*]\}$  será una  $\mathbb{Z}$ -base del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $N_1(Z)$  y una base del espacio vectorial real  $A_1(Z)$  (aplíquese la proposición 1.2.15 y téngase en cuenta que las equivalencias lineal y numérica coinciden).

Si  $X = \mathbb{F}_\delta$  ( $\delta \geq 0$ ) y  $F$  y  $M$  son los divisores de  $\mathbb{F}_\delta$  dados en la sección 3.2, el sistema  $\mathcal{B}_\delta := \{[F], [M], [E_1^*], \dots, [E_n^*]\}$  es una  $\mathbb{Z}$ -base de  $N_1(Z)$  y una base del espacio vectorial  $A_1(Z)$ .

Podemos ya indicar una propiedad referente al signo de la intersección de los rayos límite del conjunto de los rayos extremales de  $\overline{NE}(Z)$  y divisores construídos con los no excepcionales de las bases anteriores.

**Lema 3.4.2.** *Si  $\bar{r} \in A_1(Z)$  genera un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$  entonces*

- (a)  $[L^*] \cdot \bar{r} > 0$ , si  $X = \mathbb{P}^2$ ;
- (b)  $[F^*] \cdot \bar{r} > 0$  y  $[M^* - \delta F^*] \cdot \bar{r} \geq 0$ , si  $X = \mathbb{F}_\delta$ .

*Demostración.* Recuérdese que, según la proposición 2.5.26, si  $\bar{r}$  genera un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ , entonces  $\bar{r}^2 = 0$  y  $[K_Z] \cdot \bar{r} \geq 0$ .

(a) Si  $\bar{r} = \alpha[L^*] + \sum_{i=1}^n \gamma_i[E_i^*]$  es la expresión de  $\bar{r}$  como combinación lineal respecto de la base  $\mathcal{B}$  y  $[L^*] \cdot \bar{r} = 0$ , entonces  $\bar{r} = \sum_{i=1}^n \gamma_i[E_i^*]$ , con lo cual  $0 = \bar{r}^2 = -\sum_{i=1}^n \gamma_i^2$ . Esto es contradictorio, pues  $\bar{r} \neq 0$ .

Por otra parte, puesto que  $[L^*] \cdot \bar{z} \geq 0$  para todo  $\bar{z} \in NE(Z)$ , es clara la desigualdad  $[L^*] \cdot \bar{r} > 0$ , puesto que  $\bar{r} \in \overline{NE}(Z)$ .

(b) Sea  $\bar{r} = \alpha[F^*] + \beta[M^*] + \sum_{i=1}^n \gamma_i[E_i^*]$  la expresión de  $\bar{r}$  como combinación lineal respecto de la base  $\mathcal{B}_\delta$ . Obsérvese que  $[M^* - \delta F^*] \cdot \bar{r} = \alpha$ . Aplicando la proposición 3.2.6 tenemos que, si  $\delta = 0$  no existe ninguna curva íntegra de  $Z$  perteneciente al abierto  $[M^* - \delta F^*]_{<0}$ , y si  $\delta \neq 0$  la única curva íntegra de  $Z$  cuya imagen en  $A_1(Z)$  pertenece a  $[M^* - \delta F^*]_{<0}$  es  $\bar{B}$ . Por tanto,  $\text{con}(\overline{NE}(Z))_{[M^* - \delta F^*]_{\geq 0}} \cup \{[\bar{B}]\}$  es un cono cerrado que contiene a  $NE(Z)$  y

está contenido en  $\overline{NE}(Z)$ . Luego coincide con  $\overline{NE}(Z)$ . Por tanto, los rayos de  $\mathcal{T}(Z)$  están generados por elementos de  $[M^* - \delta F^*]_{\geq 0} \cup \{[\bar{B}]\}$ . Así pues,  $\mathcal{T}(Z)$  no puede tener rayos límite en la región  $[M^* - \delta F^*]_{< 0}$ .

Si  $[F^*] \cdot \bar{r} = 0$ , entonces  $\bar{r} = \alpha[F^*] + \sum_{i=1}^n \gamma_i[E_i^*]$  y  $0 = \bar{r}^2 = -\sum_{i=1}^n \gamma_i^2$ . Esto es contradictorio, puesto que  $\bar{r} \neq 0$  y  $[K_Z] \cdot \bar{r} \geq 0$ . Como además  $[F^*] \cdot \bar{z} \geq 0$  para todo  $\bar{z} \in NE(Z)$  (proposición 3.2.6), se tiene la desigualdad  $[F^*] \cdot \bar{r} > 0$ .  $\square$

Veremos a continuación que el cono de curvas  $NE(Z)$  es poliédrico para los siguientes valores de  $n$ :

- (a)  $n \leq 8$ , si  $X = \mathbb{P}^2$ ,
- (b)  $n \leq 7$ , si  $X = \mathbb{F}_\delta$ .

Si  $X = \mathbb{P}^2$ ,  $K_Z^2 = 9 - n$ , y si  $X = \mathbb{F}_\delta$ ,  $K_Z^2 = 8 - n$ . Por tanto, las dos condiciones anteriores se unifican en la condición  $K_Z^2 > 0$ .

**Teorema 3.4.3.** (a) Si  $K_Z^2 > 0$  entonces el cono  $NE(Z)$  es poliédrico.

(b) Si  $K_Z^2 = 0$ , entonces  $NE(Z)$  es poliédrico o  $\mathcal{T}(Z)$  posee un único rayo límite, generado por  $[-K_Z]$ .

(c) Si  $K_Z^2 = 0$  y  $K_Z \cdot D > 0$  para algún divisor efectivo  $D$  de  $Z$  entonces  $NE(Z)$  es poliédrico.

*Demostración.* Para la prueba de los apartados (a) y (b) distinguiremos dos casos, correspondientes a cada una de las dos posibilidades para la superficie  $X$ .

*Caso I:*  $X = \mathbb{P}^2$ .

Nuestro primer objetivo será demostrar que los rayos límite de  $\mathcal{T}(Z)$  sólo pueden situarse en la región  $[K_Z]_{< 0}$ . Esto implicará, en virtud de la proposición 2.5.26, que no existen tales rayos límite. Aplicando la proposición 3.4.1,  $NE(Z)$  será poliédrico.

Si  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  es un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ ,  $\bar{r}$  ha de pertenecer a la región  $[L^*]_{> 0}$ , en virtud del lema 3.4.2. Además,  $\bar{r} \in Q_0 := \{\bar{x} \in A_1(Z) \mid \bar{x}^2 = 0\}$ .

Definimos la función  $t_1 := h_1 \circ \phi_{[L^*]}$ , siendo

$$\phi_{[L^*]} : [L^*]_{> 0} \longrightarrow [L^*]_{=1}$$

la función dada en la sección A.2 del apéndice (que a cada elemento de  $[L^*]_{>0}$  le asigna el punto de intersección del rayo que genera con el hiperplano  $[L^*]_{=1}$ ), y

$$h_1 : [L^*]_{=1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

la aplicación definida por  $(1, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$ , denotando por  $(1, x_1, \dots, x_n)$  a las coordenadas de un elemento de  $[L^*]_{=1} \subseteq A_1(Z)$  respecto a la base  $\mathcal{B}$ .

Es clara la igualdad

$$t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0}) = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 \right\}.$$

Además, si  $\bar{x}$  es cualquier elemento de  $[L^*]_{>0}$  y  $W_1$  es el semiespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  definido por  $\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n y_i < 3\}$ , se tiene la equivalencia:

$$[K_Z] \cdot \bar{x} < 0 \iff t_1(\bar{x}) \in W_1.$$

Por tanto, demostrando la inclusión  $t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0}) \subseteq W_1$  obtendremos la poliedricidad del cono  $NE(Z)$ . Probemos, pues, dicha inclusión.

Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i$ . La inclusión anterior quedaría probada si demostramos que los valores de la función restricción  $f|_{t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})}$  están acotados superiormente por un número real estrictamente menor que 3. En vistas a ello, consideremos el problema de extremos condicionados consistente en maximizar la función  $f(y_1, \dots, y_n)$  en el conjunto  $t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$ . Según el teorema de los multiplicadores de Lagrange, si  $f$  alcanza un extremo relativo en un punto  $\bar{a} \in t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$ , existe un número real  $\lambda$  tal que  $\bar{a}$  es un punto crítico de la función

$$\psi(y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^n y_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - 1 \right).$$

Las ecuaciones que debe de verificar un punto crítico de  $\psi$  en  $t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n) &= 1 + 2\lambda y_i = 0 & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n y_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se satisfacen para:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{n}}{2} \quad y \quad \bar{a}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{n}}{2} \quad y \quad \bar{a}_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Al ser  $t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$  un conjunto compacto,  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absolutos en  $t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$ . Éstos deben alcanzarse, necesariamente, en los puntos  $\bar{a}_1$  y  $\bar{a}_2$ . Como  $f(\bar{a}_1) = \sqrt{n}$  y  $f(\bar{a}_2) = -\sqrt{n}$  concluimos que  $f|_{t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})}$  posee un máximo absoluto estricto en  $\bar{a}_1$ , siendo  $\sqrt{n}$  este valor máximo. Si  $K_Z^2 > 0$ , entonces  $n \leq 8$  y se tiene que  $f(\bar{a}_1) < 3$ , quedando así demostrado el apartado (a).

Si  $K_Z^2 = 0$ , entonces  $n = 9$ , con lo cual  $f|_{t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})}$  alcanza un máximo absoluto estricto en el punto  $\bar{a}_1 = (\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}) \in t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0})$ , y su valor máximo es 3. Luego  $f(\bar{y}) < 3$  para todo  $\bar{y} \in t_1(Q_0 \cap [L^*]_{>0}) \setminus \{a_1\}$ . Por lo tanto, el único rayo  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  de  $A_1(Z)$  que cumple las condiciones  $[K_Z] \cdot \bar{r} \geq 0$  y  $\bar{r}^2 = 0$  es aquel que verifica  $t_1(\bar{r}) = \bar{a}_1$ . Luego  $R = \mathbb{R}_+[-K_Z]$ . Teniendo en cuenta la proposición 2.5.26 y la proposición 3.4.1, si  $NE(Z)$  no es poliédrico,  $\mathcal{T}(Z)$  ha de tener a  $R = \mathbb{R}_+[-K_Z]$  como rayo límite, quedando así probado el apartado (b).

*Caso II.*  $X = \mathbb{F}_\delta$ .

Si  $\mathbb{R}_+ \bar{r}$  es un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ , según el lema 3.4.2,  $\bar{r}$  pertenece a la región  $[F^*]_{>0}$ . Además, por la proposición 2.5.26,  $\bar{r} \in Q_0 := \{\bar{x} \in A_1(Z) \mid \bar{x}^2 = 0\}$ .

Definimos la función  $t_2 := h_2 \circ \phi_{[F^*]}$ , siendo

$$\phi_{[F^*]} : [F^*]_{>0} \longrightarrow [F^*]_{=1}$$

la función dada en la sección A.2 del apéndice (que asigna a cada elemento de  $[F^*]_{>0}$  el punto de intersección del rayo que genera con el hiperplano  $[F^*]_{=1}$ ), y

$$h_2 : [F^*]_{=1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

la aplicación definida por  $(x_1, 1, x_3, \dots, x_{n+2}) \mapsto (x_1, -x_3, \dots, -x_n)$ , siendo  $(x_1, 1, x_3, \dots, x_{n+2})$  coordenadas en  $A_1(Z)$  respecto a la base  $\mathcal{B}_\delta$ .

Es clara la igualdad

$$t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0}) = \left\{ (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=2}^{n+1} y_i^2 - 2y_1 = \delta \right\}.$$

Además, si  $\bar{x}$  es un elemento cualquiera de  $[F^*]_{>0}$  y  $W_2$  es el semiespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por  $\{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -2y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} y_i < \delta + 2\}$ , se

satisface la equivalencia

$$[K_Z] \cdot \bar{x} < 0 \iff t_2(\bar{x}) \in W_2.$$

Mediante un razonamiento análogo al utilizado en el *Caso I*,  $NE(Z)$  será poliédrico si se demuestra la inclusión  $t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0}) \subseteq W_2$ .

Consideramos la función  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(y_1, \dots, y_{n+1}) = -2y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} y_i$ . La inclusión anterior quedaría probada si demostramos que los valores de la función restricción  $g|_{t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0})}$  están acotados superiormente por un número real estrictamente menor que  $\delta + 2$ . Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, es sencillo probar que la función  $g$  posee un único máximo relativo sobre  $t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0})$ , que es estricto, en el punto  $\bar{z} = ((n-4\delta)/8, 1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , siendo  $g(\bar{z}) = \frac{n}{4} + \delta$ . Veamos que este máximo relativo es también absoluto. Si  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0})$ , entonces

$$\sum_{i=2}^{n+1} y_i^2 - 2y_1 = \delta.$$

Por tanto:

$$g(\bar{y}) = -2y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} y_i = \delta - \sum_{i=2}^{n+1} y_i^2 + \sum_{i=2}^{n+1} y_i = \delta + \sum_{i=2}^{n+1} (y_i - y_i^2) \leq \delta + \frac{n}{4}.$$

Luego  $g|_{t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0})}$  tiene un máximo absoluto estricto en  $\bar{z}$ . Si  $K_Z^2 > 0$ , entonces  $n \leq 7$  y se tiene que  $g(\bar{z}) < \delta + 2$ , quedando así demostrado el apartado (a).

Si  $K_Z^2 = 0$ , entonces  $n = 8$ . En este caso,  $g(\bar{z}) = \delta + 2$  y  $g(\bar{y}) < \delta + 2$  si  $\bar{y} \in t_2(Q_0 \cap [F^*]_{>0}) \setminus \{\bar{z}\}$ . Por lo tanto, el único rayo  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  de  $A_1(Z)$  que cumple las condiciones  $[K_Z] \cdot \bar{r} \geq 0$  y  $\bar{r}^2 = 0$  es aquel que verifica  $t_1(\bar{r}) = \bar{z}$ . Luego  $R = \mathbb{R}_+[-K_Z]$ . Razonando igual que en *Caso I*, si  $NE(Z)$  no es poliédrico, entonces  $\mathcal{T}(Z)$  ha de tener a  $R = \mathbb{R}_+[-K_Z]$  como rayo límite, quedando así probado el apartado (b).

Demostremos ahora el apartado (c). Supongamos que  $K_Z^2 = 0$  y que existe un divisor efectivo  $D$  tal que  $K_Z \cdot D > 0$ . Según el apartado (b),  $NE(Z)$  será poliédrico si  $[-K_Z]$  no genera un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ . Pero  $[-K_Z]$  no pertenece a  $P(Z)$ , pues  $[-K_Z] \cdot [D] < 0$ . Por tanto, aplicando la proposición 2.5.28 concluimos que no puede generar un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ .  $\square$

En [10, Example 2] Campillo y González-Sprinberg se plantean el estudio del cono de curvas y el cono característico asociados al cielo de una configuración de cadena formada por un punto de inflexión de una cúbica racional sobre  $\mathbb{P}^2$  y 8 puntos más, infinitamente próximos al primero y pertenecientes a los sucesivos transformados estrictos de la cúbica. Deducen que el cono de curvas está generado por las imágenes en  $A_1(Z)$  de los transformados estrictos de los divisores excepcionales y del transformado estricto de la recta tangente a la cúbica en el primer punto de la cadena. Deducen también que el cono característico  $\tilde{P}(Z)$  es cerrado. Por tanto, ambos conos son regulares. Los dos siguientes ejemplos vienen a completar el estudio del cono de curvas y del cono característico asociados al cielo de una cadena formada por 9 puntos pertenecientes a los sucesivos transformados estrictos de una cúbica racional.

**Ejemplo 3.4.4.** Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_9\}$  una configuración de  $\mathbb{P}^2$  formada por una cadena de nueve puntos pertenecientes todos ellos a los sucesivos transformados estrictos de una cúbica reducida e irreducible  $C$  con una singularidad en  $p_1$ . Sea  $Z$  el cielo de la configuración  $\mathcal{C}$ . Las coordenadas de la imagen en  $A_1(Z)$  del transformado estricto de  $C$ ,  $[\bar{C}]$ , respecto de la base  $\mathcal{B}$ , son  $(3, -2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$ . Como  $[K_Z] \cdot [\bar{C}] > 0$ ,  $NE(Z)$  es un cono poliédrico, según el apartado (c) del teorema 3.4.3.  $[\bar{C}]$  genera un rayo extremal del cono de curvas, ya que  $[\bar{C}]^2 < 0$ . Además cualquier otro generador de rayo extremal de  $NE(Z)$  ha de pertenecer a la región  $[\bar{C}]_{\geq 0}$ , que está contenida en  $[K_Z]_{< 0}$ . Por tanto, según el teorema del cono, los rayos extremales de  $NE(Z)$  vendrán generados por  $[\bar{C}]$ , las imágenes en  $A_1(Z)$  de las curvas íntegras excepcionales de  $Z$  y las imágenes de los transformados estrictos de las curvas íntegras  $D$  de  $\mathbb{P}^2$  tales que  $[\bar{C}] \cdot [\bar{D}] \geq 0$ ,  $[K_Z] \cdot [\bar{D}] = -1$  y  $[\bar{D}]^2 = -1$ . Distinguiremos dos casos, según el tipo de singularidad de  $C$  en  $p_1$ :

- Supongamos que la singularidad de  $C$  en  $p_1$  es nodal y consideremos las coordenadas  $(d, -v_1, \dots, -v_9)$  de uno de los generadores del último tipo respecto de la base  $\mathcal{B}$ . Deberán cumplir, por tanto, las siguientes condiciones:

$$2v_1 + \sum_{i=2}^n v_i \leq 3d \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = 3d - 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = d^2 + 1 \quad (3.3)$$

$$v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_9 \geq 0, \quad (3.4)$$

donde la condición (3.4) corresponde a las desigualdades de proximidad. De las condiciones (3.1), (3.2) y (3.4) se deduce que  $v_i \leq 1$  para todo  $i = 1, \dots, 9$ . Si llamamos  $k$  al valor  $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n v_i^2$ , las ecuaciones (3.2) y (3.3) se transforman en:

$$3d - 1 = k,$$

$$d^2 + 1 = k.$$

De ellas se deduce que sólo existen dos posibilidades para el par  $(d, k)$ :  $(2, 5)$  y  $(1, 2)$ . Por tanto, los generadores de los posibles rayos extremales de  $NE(Z)$  (expresados en coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$ ) serán los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= (1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{q} &= (2, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{c} &= (3, -2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1), \\ \bar{e}_1 &= (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_2 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_3 &= (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_4 &= (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0), \\ \bar{e}_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0), \\ \bar{e}_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0), \\ \bar{e}_8 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1), \\ \bar{e}_9 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Los puntos  $p_1, p_2$  y  $p_3$  no están alineados, con lo cual existe una cónica irreducible  $Q$  que pasa efectivamente por  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$ . Si también pasara efectivamente por  $p_6$  tendríamos  $[\bar{Q}] \cdot [\bar{C}] = -1$ , que contradice la irreducibilidad de  $\bar{C}$  y de  $\bar{Q}$ . Por tanto,  $[\bar{Q}] = \bar{q}$ . Luego, en este caso, los rayos extremales del cono de curvas de  $Z$  son  $\bar{l}, \bar{q}, \bar{c}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_9$ , siendo  $NE(Z)$  un cono poliédrico no simplicial.

Veamos que  $\tilde{P}(Z)$  es cerrado. Si  $D$  es un divisor de  $X$  numéricamente efectivo, entonces  $D^2 \geq 0$  (por la nota 3.3.5) y  $-K_Z \cdot D \geq 0$  (al ser  $X$  anti-canónica). Teniendo en cuenta la demostración del teorema 3.4.3, las únicas clases de divisores con auto-intersección no negativa contenidas en el hiperplano  $[K_Z]_{=0}$  son las de los múltiplos positivos de  $[-K_Z]$ , que no pertenecen a  $P(Z)$  (pues  $-K_Z \cdot \bar{C} < 0$ ). Por tanto, se satisface la desigualdad  $-K_Z \cdot D > 0$  y se tiene que  $[K_Z] \cdot [sD] \geq 2$  para todo  $s \in \mathbb{Z}_+$ , con  $s \geq 2$ . Aplicando el apartado (a) del teorema 3.3.6 se deduce que el sistema lineal  $|sD|$  no tiene

puntos base y, por tanto,  $[sD] \in \tilde{P}(Z)$ . Se concluye, pues, que el cono característico  $\tilde{P}(Z)$  es cerrado.

• Si la singularidad de  $C$  en  $p_1$  es de tipo cuspidal, mediante razonamientos análogos a los del caso anterior se deduce que el cono  $NE(Z)$  está generado por las imágenes en  $A_1(Z)$  de las siguientes curvas: los transformados estrictos de los divisores excepcionales, el transformado estricto de la cúbica  $C$  y el transformado estricto de la recta tangente a  $C$  en  $p_1$ . Por consiguiente,  $NE(Z)$  es también un cono poliédrico no simplicial. También mediante un razonamiento análogo se deduce que el cono característico  $\tilde{P}(Z)$  es cerrado.

El siguiente lema nos será útil en el ejemplo posterior.

**Lema 3.4.5.** *Sea  $D$  un divisor de  $Z$  tal que*

- (a)  $D \cdot L^* > 0$ , si  $X = \mathbb{P}^2$ ,
- (b)  $D \cdot F^* > 0$ , si  $X$  es una superficie de Hirzebruch,
- (c)  $D^2 = K_Z \cdot D$ .

*Entonces,  $D$  es linealmente equivalente a un divisor efectivo.*

*Demostración.* Procedamos por reducción al absurdo y supongamos la existencia de un divisor  $D$  de  $Z$  cumpliendo las condiciones del enunciado y tal que  $|D| = \emptyset$ . Según el Teorema de Riemann-Roch, tenemos

$$h^0(D) - h^1(D) + h^0(K_Z - D) = \frac{1}{2}(D^2 - K_Z \cdot D) + 1.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis sobre  $D$ :

$$h^0(K_Z - D) = h^1(D) + 1$$

de lo que deducimos que  $|K_Z - D| \neq \emptyset$ . Esto es una contradicción, ya que  $(K_Z - D) \cdot L^* < 0$  si  $X = \mathbb{P}^2$  y  $(K_Z - D) \cdot F^* < 0$  si  $X$  es una superficie de Hirzebruch.  $\square$

El siguiente ejemplo está tomado de [10], aunque hemos utilizado en su desarrollo técnicas distintas a las usadas por los autores. En él se obtiene una superficie regular  $Z$  cuyos conos semiamplio y característico son distintos siendo, además,  $NE(Z)$  no poliédrico.



**Ejemplo 3.4.6.** Consideremos una cadena de nueve puntos  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_9\}$  sobre los sucesivos transformados estrictos de una cúbica racional  $C_0$  de  $\mathbb{P}^2$ , de manera que  $p_1$  es un punto regular de la curva y no es de inflexión. Sea  $Z$  el cielo de la configuración  $\mathcal{C}$ . Como es usual, denotamos por  $\bar{C}_0$  al transformado estricto de  $C_0$  en  $Z$ . Expresando  $[\bar{C}_0] \in A_1(Z)$  en coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$  tenemos:

$$[\bar{C}_0] = (3, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

La única curva íntegra  $D$  de  $\mathbb{P}^2$  cuya multiplicidad de intersección con  $C_0$  en  $p_1$  es igual a  $3 \cdot \deg(D)$  es la propia curva  $C_0$  (véase [10, Example 3]). Por tanto, como  $[\bar{C}_0] = [-K_Z]$ , la única curva reducida e irreducible no excepcional de  $Z$  cuya imagen en  $A_1(Z)$  pertenece al hiperplano  $[K_Z]_{=0}$  es  $\bar{C}_0$ . Luego el cono  $NE(Z) \cap [K_Z]_{=0}$  estará generado por  $[\bar{C}_0], [E_1], \dots, [E_8]$  y, según la proposición 2.5.6,  $NE(Z) \subseteq [\bar{C}_0]_{\geq 0} = [K_Z]_{\leq 0}$ .

Teniendo en cuenta el teorema del cono,  $NE(Z)$  estará generado por  $[\bar{C}_0], [E_1], \dots, [E_9]$  y las imágenes en  $A_1(Z)$  de las  $(-1)$ -curvas no excepcionales de  $Z$  (que deben ser transformados estrictos de curvas irreducibles de  $\mathbb{P}^2$ ).

Las  $(-1)$ -curvas no excepcionales  $D$  de  $Z$  deben satisfacer las siguientes condiciones:

1.  $D$  es un  $(-1)$ -divisor de  $Z$ ,
2.  $L^* \cdot D > 0$ ,
3.  $D \cdot E_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, 9$ .

Veamos que cualquier divisor  $A$  de  $Z$  verificando las tres condiciones anteriores es linealmente equivalente a una  $(-1)$ -curva. Como  $A$  es un  $(-1)$ -divisor perteneciente a  $[L^*]_{>0}$ , existe un divisor efectivo  $C$  de  $Z$  linealmente equivalente a  $A$ , según el lema 3.4.5. Como  $C^2 < 0$  y  $C$  es efectivo, existe una curva íntegra  $D$  de  $Z$  tal que  $C \cdot D < 0$  y  $D^2 < 0$ . Obsérvese que  $D$  no puede ser una curva excepcional, ya que  $C \cdot E_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, 9$ . Además, la intersección  $K_Z \cdot D$  no puede ser nula ya que, en este caso,  $D$  coincidiría con  $\bar{C}_0$ , entrando en contradicción con la desigualdad  $D^2 < 0$ . Por tanto,  $K_Z \cdot D < 0$ . Aplicando la proposición 2.5.21 deducimos que  $D$  es una  $(-1)$ -curva. Por otra parte,

$$(C - D)^2 = C^2 + D^2 - 2C \cdot D \geq 0,$$

puesto que  $C \cdot D \leq -1$ . Luego  $C - D$  es un divisor efectivo no excepcional. Además:

$$K_Z \cdot (C - D) = -K_Z \cdot D + K_Z \cdot C = 1 - 1 = 0.$$

De la demostración del teorema 3.4.3 se deduce que el cono de  $A_1(Z)$  dado por  $\{\bar{x} \in A_1(Z) \mid \bar{x}^2 \geq 0\} \cap [L^*]_{\geq 0}$  es tangente al hiperplano  $[K_Z]_{=0}$ , siendo  $\mathbb{R}_+[-K_Z] \cup \{0\}$  la semi-recta de tangencia. Como consecuencia,  $[C - D] = l[-K_Z] = l[\bar{C}_0]$  por algún entero  $l \in \mathbb{Z}_+$  y, por tanto, se tiene que  $C - D = l\bar{C}_0$ . Luego:

$$-1 = C^2 = (D + l\bar{C}_0)^2 = D^2 + 2l(D \cdot \bar{C}_0) = D^2 - 2lK_Z \cdot D = -1 + 2l$$

Concluimos, pues, que  $l = 0$  y  $C = D$ . Por tanto,  $C$  es una  $(-1)$ -curva linealmente equivalente al divisor  $A$ .

Para cada entero positivo  $t$  consideramos el divisor de  $Z$  definido por:

$$D_t := (3t^2 + 3)L^* - (t^2 + t)E_1^* - (t^2 + 2)E_2^* - (t^2 + 1) \sum_{i=3}^8 E_i^* - (t^2 - t)E_9^*.$$

Es sencillo comprobar que, para cada entero  $t$  mayor o igual que 2,  $D_t$  es un divisor que verifica las condiciones 1,2 y 3 anteriores, luego es linealmente equivalente a una  $(-1)$ -curva. Por tanto,  $Z$  tiene un número infinito de  $(-1)$ -curvas, con lo que el cono de curvas  $NE(Z)$  tiene un número infinito de rayos extremales no siendo, por tanto, poliédrico. Consecuentemente, el cono  $P(Z)$  tampoco es poliédrico.

$\mathbb{R}_+[\bar{C}_0]$  es un rayo extremal de  $NE(Z)$ . En efecto, si  $[\bar{C}_0]$  se pudiera expresar como combinación positiva de ciertas imágenes en  $A_1(Z)$  de curvas íntegras  $D_1, \dots, D_i$  de  $Z$  generando rayos distintos de  $\mathbb{R}_+[\bar{C}_0]$ , se tendría que  $K_Z \cdot D_i = 0$  para todo  $i$  (recuérdese que  $NE(Z) \subseteq [K_Z]_{\leq 0}$  y  $[\bar{C}_0] \in [K_Z]^\perp$ ). Puesto que alguna de las curvas  $D_i$  ha de ser no excepcional, se llega a que  $l = 1$  y  $D_1 = \bar{C}_0$ , pues  $\bar{C}_0$  es la única curva íntegra no excepcional de  $Z$  cuya imagen en  $A_1(Z)$  pertenece a  $[K_Z]^\perp$ .

$[\bar{C}_0]$  pertenece a  $P(Z)$  ya que  $NE(Z) \subseteq [K_Z]_{\leq 0} = [\bar{C}_0]_{\geq 0}$ . Según la nota 3.3.5,  $P(Z) \subseteq NE(Z)$  y así  $[\bar{C}_0]$  genera un rayo extremal de  $P(Z)$  (pues  $\mathbb{R}_+[\bar{C}_0]$  es rayo extremal de  $NE(Z)$ ). Pero, para cada  $s \in \mathbb{Z}_+$ , el sistema lineal  $|s\bar{C}_0|$  contiene a  $\bar{C}_0$  en su parte fija, con lo cual  $\mathcal{O}_Z(s\bar{C}_0)$  no está generado por secciones globales. Luego  $[\bar{C}_0] \notin \tilde{P}(Z)$  y  $P(Z) \neq \tilde{P}(Z)$ .

**Proposición 3.4.7.** *Si  $X = \mathbb{P}^2$  y  $|L^* - \sum_{i=1}^n E_i^*| \neq \emptyset$ , es decir, si los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$  están alineados, entonces:*

- (a)  $NE(Z)$  es un cono regular generado por las imágenes en  $A_1(Z)$  de la recta que pasa por los puntos de  $\mathcal{C}$  y los transformados estrictos de los divisores excepcionales.
- (b)  $\tilde{P}(Z)$  es un cono regular generado por  $[L^*]$  y aquellos elementos de  $A_1(Z)$  cuyas coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$ ,  $(a_0, -a_1, \dots, -a_n)$ , satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $a_0 = a_1 + \dots + a_n$ ,
2. existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_j = 1$  si  $p_j \leq p_{i_0}$  y  $a_j = 0$  en otro caso.

*Demostración.* Si  $C \in |L^* - \sum_{i=1}^n E_i^*|$ , entonces es clara la inclusión

$$\{\bar{z} \in \overline{NE}(Z) \mid [K_Z] \cdot \bar{z} \geq 0\} \cap [L^*]_{>0} \subseteq [C]_{<0}. \quad (3.5)$$

Por el lema 3.4.2 y la proposición 2.5.26, los rayos límite de  $\mathcal{T}(Z)$  pertenecen a  $\{\bar{z} \in \overline{NE}(Z) \mid [K_Z] \cdot \bar{z} \geq 0\} \cap [L^*]_{>0}$ . Pero, por el corolario 2.5.28, deben pertenecer también a  $P(X)$ . Por tanto, la existencia de un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$  entraría en contradicción con la inclusión (3.5). Luego, en virtud de la proposición 3.4.1, el cono  $NE(Z)$  es poliédrico.

Sea  $D$  una  $(-1)$ -curva no excepcional de  $Z$  y  $[D] = (d, -v_1, \dots, -v_n)$  las coordenadas de su imagen en  $A_1(Z)$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ . Si  $C \cdot D < 0$  entonces  $C = D$ . Por tanto, podemos suponer  $C \cdot D \geq 0$ . Luego se cumplirá la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n v_i \leq d$$

Por otra parte, como  $K \cdot D = -1$ :

$$\sum_{i=1}^n v_i = 3d - 1$$

Las dos condiciones anteriores implican  $d \leq 1/2$ , lo cual es una contradicción.

Concluimos que  $NE(Z)$  está generado por  $[E_1], \dots, [E_n]$  y  $[C]$  siendo, por tanto, un cono regular.

Para demostrar (b), observemos primero que, al estar los puntos de  $\mathcal{C}$  sobre los sucesivos transformados estrictos de una recta de  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathcal{C}$  se puede expresar como una unión  $\mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_s$ , siendo  $\mathcal{C}_j$  una cadena de puntos libres con origen en  $p_{i_j} \in \mathcal{C}$  para cada  $j = 1, \dots, s$ . Podemos suponer  $i_1 = 1$ ,  $\mathcal{C}_j = \{p_{i_j}, p_{i_j+1}, \dots, p_{i_{j+1}-1}\}$  para todo  $j = 1, \dots, s-1$ , y  $\mathcal{C}_s = \{p_{i_s}, p_{i_s+1}, \dots, p_n\}$ .

Al ser  $NE(Z)$  un cono regular, su cono dual  $P(Z)$  también lo será, siendo sus rayos extremales las semirrectas:

$$H_0 := [L^*]_{>0} \cap \left( \bigcap_{i=1}^n [E_i]^\perp \right) = \mathbb{R}_+[L^*],$$

$$H_j := [L^*]_{>0} \cap [C]^\perp \cap \left( \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} [E_i]^\perp \right) \quad j = 1, \dots, n.$$

Sean  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{x} = (d, -x_1, \dots, -x_n) \in A_1(Z)$  y supongamos que  $p_j \in \mathcal{C}_k$ . Dadas las equivalencias

$$\begin{aligned} [C] \cdot \bar{x} &= 0 \text{ si, y sólo si, } d - x_1 - \dots - x_n = 0 \\ [E_i] \cdot \bar{x} &= 0 \text{ si, y sólo si, } x_i = 0, \text{ cuando } p_i \text{ es un punto maximal} \\ [E_i] \cdot \bar{x} &= 0 \text{ si, y sólo si, } x_i - x_{i+1} = 0, \text{ cuando } p_i \text{ no es maximal} \end{aligned}$$

tendremos que  $\bar{x} \in H_j$  si, y sólo si

- $x_i = x_j$  cuando  $p_i \leq p_j$ ,
- $x_i = 0$  en caso contrario,
- $d = x_1 + \dots + x_n$ .

Por tanto, es claro que los rayos extremales del  $P(Z)$  vienen generados por los elementos del enunciado. Si  $\bar{a} = (a_0, -a_1, \dots, -a_n)$  es uno de ellos, consideremos el divisor dado por  $F := a_0L^* - \sum_{i=1}^n a_i E_i^*$ . Si  $[F] = [L^*]$ , es claro que  $[F] \in \tilde{P}(Z)$ , y si  $[F] \neq [L^*]$ , entonces  $[-K_Z] \cdot [F] = 2a_0 \geq 2$ . Puesto que  $Z$  es una superficie anticanónica ( $-K_Z$  es linealmente equivalente a  $C + 2L^*$ , que es un divisor efectivo), según el teorema 3.3.6 se tiene que el sistema lineal  $|F|$  no tiene puntos base. Luego  $\bar{a}$  pertenece a  $\tilde{P}(Z)$  y concluimos así que  $\tilde{P}(Z)$  es un cono regular.  $\square$

**Proposición 3.4.8.** *Si  $X = \mathbb{P}^2$  y  $|2L^* - \sum_{i=1}^n E_i^*| \neq \emptyset$ , entonces  $NE(Z)$  es un cono poliédrico y  $P(Z) = \tilde{P}(Z)$ .*

*Demostración.* El mismo razonamiento de la proposición 3.4.7 para el divisor  $A = 2L^* - \sum_{i=1}^n E_i^*$  prueba que el cono  $NE(Z)$  es poliédrico. Además, éste vendrá generado por  $[E_1], \dots, [E_n]$ , las imágenes en  $A_1(Z)$  de las  $(-1)$ -curvas íntegras no excepcionales de  $Z$  y las imágenes de las curvas íntegras no excepcionales de  $Z$  pertenecientes al semiespacio  $[K_Z]_{\geq 0}$ . Las únicas posibilidades para los generadores de este último tipo son las imágenes en  $A_1(Z)$  de las componentes íntegras de la parte fija del sistema lineal  $|A|$  (puesto que  $[K_Z]_{\geq 0} \subseteq [A]_{<0}$ ). Éstas son, o bien rectas, o bien una cónica irreducible pasando por todos los puntos de  $\mathcal{C}$  (en cuyo caso, su imagen en  $A_1(Z)$  sería  $[A]$ ).

Sea  $D$  una  $(-1)$ -curva no excepcional de  $Z$  y  $(d, -v_1, \dots, -v_n)$  las coordenadas de su imagen en  $A_1(Z)$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ . Si  $A \cdot D < 0$ , entonces  $D$  está contenida en la parte fija de  $|A|$ . Podemos suponer, por tanto, que

$A \cdot D \geq 0$ . Además, al ser  $D$  una  $(-1)$ -curva, verificará también las condiciones  $K \cdot D = -1$  y  $D^2 = -1$ , que traducidas a coordenadas son:

$$\sum_{i=1}^n v_i \leq 2d \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = 3d - 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = d^2 + 1 \quad (3.8)$$

De (3.6) y (3.7) se deduce que  $d = 1$ . Luego, según (3.8),  $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 2$ . Por tanto, concluimos que  $d = 1$  y existen  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $v_k = 1$  si  $k \in \{i, j\}$  y  $v_k = 0$  en caso contrario. Luego las  $(-1)$ -curvas no excepcionales de  $Z$  son las imágenes en  $A_1(Z)$  de las rectas de  $\mathbb{P}^2$  que pasan por dos puntos (al menos) de  $\mathcal{C}$ .

Sólo queda ver que  $P(Z)$  y  $\tilde{P}(Z)$  coinciden. Para ello, consideremos un divisor  $D$  de  $Z$  numéricamente efectivo y supongamos que  $D \sim dL^* - \sum_{i=1}^n v_i E_i^*$ , con  $d \in \mathbb{Z}_+$  y  $v_i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $[A] \in NE(Z)$ ,  $A \cdot D \geq 0$ . Por tanto, se verificará la desigualdad

$$2d - \sum_{i=1}^n v_i \geq 0.$$

Esto implica:

$$-K_Z \cdot D = 3d - \sum_{i=1}^n v_i \geq d. \quad (3.9)$$

Si  $d \geq 2$ , por (3.9) se tiene que  $-K_Z \cdot D \geq 2$ . Si  $d = 1$ , teniendo en cuenta que  $D^2 = d^2 - \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq 0$  (al ser  $D$  numéricamente efectivo), deducimos que  $D$  ha de ser linealmente equivalente a  $L^*$  o a un divisor de la forma  $L^* - E_i^*$  para algún  $p_i \in \mathcal{C}$ . En ambos casos también se verifica la desigualdad  $-K_Z \cdot D \geq 2$ . Al ser  $Z$  una superficie anticanónica (ya que  $[-K_Z]$  coincide con  $[A + L^*]$ , que es una clase efectiva), el sistema lineal  $|D|$  no tiene puntos base (teorema 3.3.6). Luego  $[D]$  pertenece a  $\tilde{P}(Z)$ .

Concluimos, por tanto, que la imagen en  $A_1(Z)$  de todo divisor numéricamente efectivo de  $Z$  pertenece a  $\tilde{P}(Z)$ . Luego  $\tilde{P}(Z) = P(Z)$ .  $\square$

**Corolario 3.4.9.** *Supongamos que  $X = \mathbb{P}^2$  y  $\mathcal{C}$  es una cadena. Entonces:*

- (a) *Si  $|A = 2L^* - \sum_{i=1}^n E_i^*| \neq \emptyset$  y  $n \leq 4$  entonces  $NE(Z)$ ,  $P(Z)$  y  $\tilde{P}(Z)$  son conos regulares.*

(b) Si  $n \geq 5$  y existe una cónica íntegra pasando por los puntos  $p_1, \dots, p_5$ , entonces el cono  $\tilde{P}(Z)$  no es simplicial.

*Demostración.* (a) El divisor  $A$  tiene auto-intersección no negativa, con lo cual  $[A]$  no genera un rayo extremal de  $NE(Z)$  (al ser poliédrico, todos sus rayos extremales han de venir generados por elementos de auto-intersección negativa). Teniendo en cuenta la demostración de la proposición anterior, los rayos extremales de  $NE(Z)$  son  $[E_1], \dots, [E_n]$  y la imagen en  $A_1(Z)$  de la recta de  $\mathbb{P}^2$  pasando por  $p_1$  y  $p_2$ . Es claro, por tanto, que  $NE(Z)$  es un cono regular, siéndolo también  $P(Z)$  y  $\tilde{P}(Z)$ .

(b) Sea

$$Z = X_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} X_n \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi_1} X_1 = X$$

la sucesión de explosiones correspondiente a  $\mathcal{C}$ . Consideremos la configuración  $\mathcal{C}_0 := \{p_1, \dots, p_5\}$  y, en  $A_1(X_6)$ , la clase  $[A]$  del divisor  $A := 2L^* - \sum_{i=1}^5 E_i^* \in \text{Div}(X_6)$ . Por hipótesis,  $A$  es linealmente equivalente al transformado estricto en  $X_6$  de una cónica reducida e irreducible de  $\mathbb{P}^2$ . Como  $A^2 = -1 < 0$ ,  $[A]$  es un rayo extremal del cono  $NE(X_6)$ . Según la demostración de la proposición 3.4.8, los rayos extremales de  $NE(X_6)$  son  $[A], [\bar{L}_1], [E_1], [E_2], [E_3], [E_4]$  y  $[E_5]$ , siendo  $L_1$  la recta de  $\mathbb{P}^2$  pasando por  $\{p_1, p_2\}$ . Por tanto,  $NE(X_6)$  no es un cono simplicial y, así,  $\tilde{P}(X_6)$  tampoco lo es. Pero  $\tilde{P}(X_6)$  se corresponde con una cara de  $\tilde{P}(Z)$  (véase el teorema 2.3.20) y, por tanto,  $\tilde{P}(Z)$  tampoco es simplicial.  $\square$

**Proposición 3.4.10.** *Supongamos  $X = \mathbb{P}^2$  y  $\rho(Z) \geq 11$ . Sea  $d \in \mathbb{Z}_+$  y sean  $v_1, \dots, v_n$  enteros no negativos no todos iguales tales que el sistema lineal  $|dL^* - \sum_{i=1}^n v_i E_i^*|$  es no vacío. Consideremos los números reales:*

$$\delta_j := 3 \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 + \mu_j d \sum_{i=1}^n v_i}{d \sum_{i=1}^n v_i + nd^2 \mu_j}, j \in \{1, 2\},$$

donde  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) son las raíces de la ecuación cuadrática

$$d^2(9-n)nx^2 + 2d(9-n) \sum_{i=1}^n v_i x + 9 \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 = 0.$$

Entonces, el cono  $NE(Z)$  es poliédrico si  $\min\{\delta_1, \delta_2\} > 1$ .

*Demostración.* Sea  $D$  un divisor efectivo de  $X$  linealmente equivalente a  $dL^* - \sum_{i=1}^n v_i E_i^*$ . Utilizando la misma notación que en el teorema 3.4.3, sea  $t_1$  la función  $h_1 \circ \phi_{[L^*]}$ , siendo

$$\phi_{[L^*]} : [L^*]_{>0} \rightarrow [L^*]_{=1}$$

la función definida en la sección A.2 del apéndice y

$$h_1 : [L^*]_{=1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la aplicación definida por  $(1, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$ , denotando por  $(1, x_1, \dots, x_n)$  a las coordenadas de un elemento de  $[L^*]_{=1} \subseteq A_1(Z)$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ . Consideremos también el conjunto  $Q_0 := \{\bar{x} \in A_1(Z) \mid \bar{x}^2 = 0\}$ . En virtud del lema 3.4.2 y la proposición 2.5.26, los rayos límite de  $\mathcal{T}(Z)$  han de estar contenidos en el conjunto

$$\Delta := [L^*]_{>0} \cap [K_Z]_{\geq 0} \cap Q_0.$$

Obsérvese que  $\Delta \neq \emptyset$ , pues  $n \geq 10$  (véase la demostración del teorema 3.4.3). Deduciremos qué condiciones han de verificar los enteros  $d, v_1, \dots, v_n$  para que el conjunto  $\Delta$  esté contenido en  $[D]_{<0}$ ; en este caso, por el corolario 2.5.28,  $\mathcal{T}(X)$  no puede tener rayos límite, con lo cual el cono  $NE(Z)$  será poliédrico en virtud de la proposición 3.4.1. Para ello, obraremos en tres pasos.

*Paso 1. Reducción del problema inicial a un problema de extremos condicionados en  $\mathbb{R}^n$ .*

Obsérvese que  $t_1(\Delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 3 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ , que es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos la función

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

siendo  $a_i = v_i/d$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Es de sencilla comprobación la siguiente equivalencia:

$$\Delta \subseteq [D]_{<0} \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) > 1 \text{ para todo } (x_1, \dots, x_n) \in t_1(\Delta).$$

Por tanto,  $\Delta \subseteq [D]_{<0}$  si y sólo si el valor mínimo de la función  $f$  en  $t_1(\Delta)$  es estrictamente mayor que 1.

*Paso 2. Reducción de las condiciones dadas por  $t_1(\Delta)$  a otras definidas por dos igualdades.*

Demostraremos la siguiente igualdad:

$$\min\{f(Q) \mid Q \in t_1(\Delta)\} = \min\{f(Q) \mid Q \in \Xi\}$$

siendo  $\Xi := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 3 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ .

Sea  $\delta = \min\{f(Q) \mid Q \in \Xi\}$  y consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} H &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 3\}, \\ H^+ &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 3\}, \\ F^+ &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \delta\}, \\ S^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}, \\ \tilde{S}^n &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Sea  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n) \in t_1(\Delta)$ . La proyección perpendicular de  $\bar{p}$  sobre  $H$  es  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , siendo  $q_j = p_j + h^{-1}(3 - \sum_{i=1}^n p_i)$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .  $\bar{q}$  pertenece a  $H \cap \tilde{S}^n$ , que es la envoltura convexa de una esfera  $(n-2)$ -dimensional en el hiperplano  $H$ . Como  $F^+$  contiene a  $H \cap S^n$ , también contendrá a  $H \cap \tilde{S}^n$ . Luego  $\bar{q} \in F^+$  y, por tanto,  $\sum_{i=1}^n a_i q_i \geq \delta$ . Pero como  $q_j - p_j = h^{-1}(3 - \sum_{i=1}^n p_i) \leq 0$  para todo  $j$  (puesto que  $\bar{p} \in H^+$ ) y  $a_i \geq 0$  para todo  $i$ , se tiene que  $\sum_{i=1}^n a_i p_i \geq \delta$ .

Por tanto, concluimos que  $f(\bar{p}) \geq \delta$  para todo punto  $\bar{p}$  de  $t_1(\Delta)$ . Así pues, se satisface la igualdad deseada.

*Paso 3. Determinación de las condiciones que deben de cumplir los coeficientes  $a_i$  para que la función  $f$  alcance un valor mínimo superior a 1 en  $\Xi$ .*

Según el teorema de los multiplicadores de Lagrange, existen dos números reales  $\lambda, \mu$  tales que los extremos relativos de la restricción de  $f$  a  $\Xi$  han de ser puntos críticos de la función  $g(x_1, \dots, x_n, \lambda, \mu) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda(\sum_{i=1}^n x_i - 3) + \mu(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1)$ . Se comprueba fácilmente que estos puntos críticos son de la forma  $(c_1, \dots, c_n)$  con  $c_i = -(a_i + \mu)/(2\lambda)$ , siendo  $\lambda = -(\sum_{i=1}^n a_i + n\mu)/6$  y  $\mu$  raíz de la ecuación:

$$(9-n)nx^2 + 2(9-n)\sum_{i=1}^n a_i x + 9\sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = 0. \quad (3.10)$$

La condición a imponer es:

$$\frac{3(\sum_{i=1}^n a_i^2 + \mu \sum_{i=1}^n a_i)}{\sum_{i=1}^k a_i + n\mu} > 1 \quad (3.11)$$

para cada raíz  $\mu$ , puesto que el valor de la función  $f$  en los puntos críticos es el que aparece en la parte izquierda de la desigualdad (3.11).

Sustituyendo  $a_i$  por  $v_i/d$  se obtienen las condiciones del enunciado.

Finalizamos la prueba comprobando que la ecuación (3.10) siempre posee dos raíces reales distintas (una corresponderá al máximo absoluto de  $f$



en  $\Xi$  y otra al mínimo absoluto). Si calculamos explícitamente estas raíces obtenemos:

$$\mu_i = \frac{d(n-9) \sum_{i=1}^n v_i \pm 3d \sqrt{(n-9) \left[ n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 \right]}}{d^2 n (9-n)}.$$

Aplicando el hecho de que la media geométrica de dos números no negativos es menor o igual que su media aritmética y que la desigualdad es estricta si dichos números son distintos, deducimos la siguiente cadena de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{i<j} v_i v_j \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{i<j} \sqrt{v_i^2 v_j^2} \\ &< \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{v_i^2 + v_j^2}{2} \\ &= n \sum_{i=1}^n v_i^2 \end{aligned}$$

lo que prueba que el discriminante de la ecuación (3.10) es no nulo. Además, el denominador de la expresión de  $\delta_j$  se anula si y sólo si dicho discriminante es nulo, cosa que no ocurre teniendo en cuenta lo anterior.  $\square$

**Ejemplo 3.4.11.** Supongamos que  $k$  es un cuerpo de característica nula y consideremos coordenadas homogéneas  $(X, Y, Z)$  en  $\mathbb{P}^2$ , el punto  $O = (0, 0, 1)$  y la carta afín de  $\mathbb{P}^2$  dada por  $Z \neq 0$ . Escribamos  $x = X/Z$ ,  $y = Y/Z$  y consideremos una cadena  $\mathcal{C}$  de diez puntos sobre  $\mathbb{P}^2$  que contenga a la configuración de puntos base del ideal  $(x^4, y)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, O}$ . Sea  $Z$  el cielo de  $\mathcal{C}$ . La cuártica dada por la ecuación  $Y^4 = 0$  pasa por el clúster  $\mathcal{K} = (\mathcal{C}, \{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\})$ , siendo su transformado virtual en  $Z$  respecto de  $\mathcal{K}$  un elemento del sistema lineal  $|4L^* - \sum_{i=1}^6 2E_i^* - \sum_{i=7}^{10} E_i^*|$ . Aplicando la proposición 3.4.10 obtenemos que el cono  $NE(Z)$  es poliédrico, puesto que  $\min\{\delta_1, \delta_2\} \simeq 1,07 > 1$ .

**Proposición 3.4.12.** Si  $X$  es la superficie de Hirzebruch  $\mathbb{F}_\delta$  y el sistema lineal  $|(1-\delta)F^* + 2M^* - \sum_{i=1}^n E_i^*|$  es no vacío, entonces el cono de curvas  $NE(Z)$  es poliédrico.

*Demostración.* Sea  $A$  el divisor de  $Z$  dado por  $(1 - \delta)F^* + 2M^* - \sum_{i=1}^n E_i^*$ . Si  $\bar{x} = (e, d, x_1, \dots, x_n) \in \{\bar{z} \in \overline{NE(Z)} \mid [K_Z] \cdot \bar{z} \geq 0 \cap [F^*]_{>0}\}$  entonces

$$[F^*] \cdot \bar{x} = d > 0 \quad \text{y} \quad [-K_Z] \cdot \bar{x} = (\delta + 2)d + 2e - \sum_{i=1}^n x_i \leq 0.$$

Por tanto

$$[A] \cdot \bar{x} = (\delta + 1)d + 2e - \sum_{i=1}^n x_i \leq [-K_Z] \cdot \bar{x} - d < 0.$$

Luego se verifica la inclusión

$$\{\bar{z} \in \overline{NE(Z)} \mid [K_Z] \cdot \bar{z} \geq 0\} \cap [F^*]_{>0} \subseteq [A]_{<0},$$

que junto con el lema 3.4.2, la proposición 2.5.26 y el corolario 2.5.28 prueba que  $NE(Z)$  es poliédrico.  $\square$

### 3.5. Condiciones infinitesimales de poliedricidad

Al igual que en la sección precedente, consideremos una superficie racional regular  $Z$  obtenida como cielo de una configuración  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  sobre una superficie  $X$ , que puede ser  $\mathbb{P}^2$  o una superficie de Hirzebruch. Deduciremos unas condiciones, dependientes exclusivamente del grafo de proximidad asociado a la configuración  $\mathcal{C}$  (y, por tanto, del morfismo  $\pi_{\mathcal{C}} : Z \rightarrow X$ ), cuya verificación implicará la poliedricidad del cono de curvas  $NE(Z)$ . Obtendremos, de esta manera, una clase de configuraciones sobre la superficie  $X$  tales que el cono de curvas asociado a sus cielos es poliédrico.

**Definición 3.5.1.** Denominaremos *cono de proximidad* asociado a  $Z$  al cono de  $A_1(Z)$  definido por

$$CP(Z) := \{\bar{x} \in A_1(Z) \mid \bar{x} \cdot [E_i] \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\}.$$

**Nota 3.5.2.** Si  $C$  es una curva de  $X$ , entonces  $[\bar{C}] \cdot [E_i] \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , puesto que las multiplicidades efectivas de  $C$  en los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$  deben de verificar las desigualdades de proximidad. Por tanto,  $[\bar{C}] \in CP(Z)$ .

**Proposición 3.5.3.** Si  $R$  es un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ , entonces  $R \subseteq CP(Z)$ .

*Demostración.* Sea  $T$  el conjunto de las imágenes en  $A_1(Z)$  de las curvas íntegras excepcionales de  $Z$  y sea  $N := \overline{NE}(Z) \cap CP(Z)$ .  $\phi_{[H]}(T \cup N)$  es conjunto compacto, luego  $\text{con}(T \cup N)$  es un cono cerrado (por el corolario A.1.39) que contiene a  $NE(Z)$ , puesto que las únicas curvas íntegras de  $Z$  cuyas imágenes en  $A_1(Z)$  no pertenecen a  $N$  deben de ser necesariamente excepcionales. Por tanto:

$$\overline{NE}(Z) = \text{con}(T \cup N).$$

Sea  $R$  un rayo límite de  $\mathcal{T}(Z)$ . Por el lema A.1.34 cualquier rayo extremal de  $\overline{NE}(Z)$  debe estar generado por un elemento de  $T \cup N$  y al ser  $T$  finito, debe existir una sucesión de rayos de  $A_1(Z)$  generados por elementos de  $N$  cuyo límite es  $R$ . Como  $N$  es cerrado, se tiene que  $R \subseteq N \subseteq CP(Z)$ , quedando probado el resultado.  $\square$

Con este resultado se ha conseguido delimitar aún más la situación de los rayos límite de  $\mathcal{T}(Z)$ . Aunando todas las restricciones obtenidas hasta ahora podemos decir que los rayos límite de  $\mathcal{T}(Z)$ , en caso de existir, han de pertenecer necesariamente al subconjunto de  $A_1(Z)$  dado por:

$$\Omega(Z) := \begin{cases} [L^*]_{>0} \cap [K_Z]_{\geq 0} \cap Q_0 \cap CP(Z) & \text{si } X = \mathbb{P}^2 \\ [F^*]_{>0} \cap [F^* - \delta M^*]_{\geq 0} \cap [K_Z]_{\geq 0} \cap Q_0 \cap CP(Z) & \text{si } X = \mathbb{F}_\delta \end{cases} \quad (3.12)$$

siendo  $Q_0 = \{\bar{z} \in A_1(Z) \mid \bar{z}^2 = 0\}$ . La estrategia ahora consistirá en determinar qué condiciones, expresadas en términos de las relaciones de proximidad entre los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ , equivalen o implican la condición geométrica  $\Omega(Z) = \emptyset$ . La verificación de estas condiciones, obviamente, implicará la poliedricidad del cono de curvas  $NE(Z)$ .

**Definición 3.5.4.** Sea  $G$  una matriz real cuadrada y simétrica de orden  $m$ , y sea  $g$  su forma cuadrática asociada:

$$g(\bar{x}) = \bar{x}G\bar{x}^t,$$

donde  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Diremos que la matriz  $G$  (o la forma cuadrática  $g$ ) es *condicionalmente definida positiva* si  $g(\bar{x}) > 0$  para todo vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas.

**Definición 3.5.5.** A cada configuración  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  sobre  $X$  le asignamos la matriz  $G_{\mathcal{C}} = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  definida de la siguiente manera:

$$g_{ij} := \begin{cases} -9D(p_i) \cdot D(p_j) - (K_Z \cdot D(p_i))(K_Z \cdot D(p_j)) & \text{si } X = \mathbb{P}^2, \text{ y} \\ -8D(p_i) \cdot D(p_j) - (K_Z \cdot D(p_i))(K_Z \cdot D(p_j)) & \text{si } X = \mathbb{F}_\delta, \end{cases}$$

donde  $Z$  es el cielo de la configuración  $\mathcal{C}$  y  $D(p_i)$  es el divisor de  $Z$  asociado al clúster de puntos base del ideal completo correspondiente a  $p_i$  (véase la sección 1.3). Diremos que  $\mathcal{C}$  es una configuración *P-suficiente* si la matriz  $G_{\mathcal{C}}$  es condicionalmente definida positiva.

**Nota 3.5.6.** Obsérvese que la condición de P-suficiencia no depende del orden admisible considerado en la configuración. En efecto, dada una configuración  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  ordenada según un cierto orden admisible, cualquier otro orden admisible viene asociado a una permutación  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que la nueva ordenación de los puntos es  $p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)}$ . Por tanto, si  $G_{\mathcal{C}} = (g_{ij})$  es la matriz de la definición 3.5.5 respecto al orden inicial, y  $G'_{\mathcal{C}} = (g'_{ij})$  es la matriz análoga con el nuevo orden, se verifican las siguientes igualdades:

$$g'_{ij} = -\gamma D(p_{\sigma(i)})D(p_{\sigma(j)}) - (K_Z \cdot D(p_{\sigma(i)}))(K_Z \cdot D(p_{\sigma(j)})) = g_{\sigma(i)\sigma(j)},$$

donde  $\gamma$  es igual a 9 si  $X = \mathbb{P}^2$ , y es igual a 8 si  $X$  es una superficie de Hirzebruch. Por tanto, las formas cuadráticas asociadas a  $G_{\mathcal{C}}$  y a  $G'_{\mathcal{C}}$  son las mismas, salvo una permutación de sus variables. Luego una de ellas es condicionalmente definida positiva si, y sólo si, la otra lo es.

Obsérvese que la matriz  $G_{\mathcal{C}}$  asociada a una cierta configuración  $\mathcal{C}$  sobre  $X$  depende únicamente del grafo de proximidad asociado a  $\mathcal{C}$ , de manera que todas las configuraciones sobre la misma superficie  $X$  con idéntico grafo de proximidad tienen asociada la misma matriz  $G_{\mathcal{C}}$ . Así pues, tiene sentido dar la siguiente definición:

**Definición 3.5.7.** Si  $\Gamma$  es el grafo de proximidad asociado a alguna configuración sobre  $X$ , diremos que  $\Gamma$  es *P-suficiente sobre  $X$*  si dicha configuración es P-suficiente.

**Nota 3.5.8.** Si  $\Gamma$  es un grafo de proximidad P-suficiente sobre una superficie de Hirzebruch, entonces también lo es sobre  $\mathbb{P}^2$ . En efecto, sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  (resp.,  $\mathcal{C}' = \{p'_i\}_{i=1}^n$ ) una configuración sobre una superficie de Hirzebruch (resp., sobre  $\mathbb{P}^2$ ) cuyo grafo de proximidad asociado es  $\Gamma$ . Podemos suponer que los ordenes admisibles considerados son compatibles, en el sentido de que  $p_i$  y  $p'_i$  corresponden al mismo vértice de  $\Gamma$ . En estas condiciones, es claro que los coeficientes de la matriz  $G_{\mathcal{C}'}$  son mayores o iguales que los de  $G_{\mathcal{C}}$  (coeficiente a coeficiente). Por tanto, la P-suficiencia de  $\mathcal{C}$  implicará la P-suficiencia de  $\mathcal{C}'$ .

**Definición 3.5.9.** Dadas dos configuraciones  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  y  $\mathcal{C}' = \{p'_i\}_{i=1}^n$  de  $X$ , con el mismo cardinal, consideremos sus respectivos grafos de proximidad

$\Gamma_{\mathcal{C}}$  y  $\Gamma_{\mathcal{C}'}$ . Diremos que  $\Gamma_{\mathcal{C}'}$  es un *refinamiento* de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  si existe una permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  tal que, si  $1 \leq i, j \leq n$ , se verifican las condiciones siguientes:

$$(1) \quad p_i \geq p_j \Leftrightarrow p'_{\sigma(i)} \geq p'_{\sigma(j)}.$$

$$(2) \quad p_i \rightarrow p_j \Rightarrow p'_{\sigma(i)} \rightarrow p'_{\sigma(j)}$$

**Teorema 3.5.10.** *Sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  una configuración sobre  $X = \mathbb{P}^2$  y sea  $Z = X(\mathcal{C})$  el cielo de  $\mathcal{C}$ . Entonces:*

- (a) *El conjunto  $\Omega(Z)$  es vacío si y sólo si  $\mathcal{C}$  es  $P$ -suficiente. Por tanto, el cono  $NE(Z)$  es poliédrico si  $\mathcal{C}$  es  $P$ -suficiente.*
- (b) *Si  $\mathcal{C}$  es  $P$ -suficiente y  $\mathcal{C}'$  es otra configuración de  $X$  de cardinal  $n$  cuyo grafo de proximidad es un refinamiento de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{C}'$  es también  $P$ -suficiente.*
- (c) *Si  $\mathcal{C}$  es  $P$ -suficiente y  $\mathcal{C}'$  es una configuración sobre  $X$  tal que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  entonces  $\mathcal{C}'$  también es  $P$ -suficiente.*

*Demostración.* (a) Consideramos la aplicación

$$h : [L^*]_{=1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por  $(1, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$  y la aplicación composición

$$\mu := h \circ \phi_{[L^*]} : [L^*]_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Definimos el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \mu([L^*]_{>0} \cap CP(Z)) = \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - \sum_{j \rightarrow i} x_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Es claro que  $\Delta$  es el cono regular de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$  formado por los elementos  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^t \cdot \bar{x}^t \geq 0$ . Según el corolario A.3.23 y la nota posterior, las columnas de la matriz  $(\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^t)^{-1}$  nos proporcionan las coordenadas de los rayos extremales de  $\Delta$ . Según se vio en la sección 1.3, esta matriz coincide con  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , cuya columna  $j$ -ésima contiene los opuestos de las coordenadas de la clase en  $\text{Pic}(Z)$  del divisor  $D(p_j)$  respecto de la base  $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . Es decir:

$$-D(p_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i^* = \sum_{i=1}^j m_{ij} E_i^*,$$

teniendo en cuenta que  $m_{ij}$  es nulo si  $i > j$ .

Obsérvese que  $\mu(\Omega(Z))$  puede descomponerse como intersección de tres subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\mu(\Omega(Z)) = \Delta \cap S^{n-1} \cap K^+,$$

donde  $S^{n-1}$  es la esfera unidad en  $\mathbb{R}^n$  y  $K^+ := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 3\}$ .

Al ser  $\Delta$  el cono generado por los vectores columna de  $\mathbf{M}_C$ , cada vector  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas da lugar a un elemento de  $\Delta \setminus \{0\}$ ,  $\sum_{j=1}^n \alpha_j (m_{1j}, \dots, m_{nj})$ , denotado por  $\bar{r}_{\bar{\alpha}}$ ; y recíprocamente, cada elemento de  $\Delta \setminus \{0\}$  viene dado por un vector de esta forma. Por tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$S^{n-1} \cap \Delta = \left\{ \frac{\bar{r}_{\bar{\alpha}}}{\|\bar{r}_{\bar{\alpha}}\|} \mid \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ y } \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Es claro que la condición necesaria y suficiente para que el conjunto  $\Omega(Z)$  sea vacío es la inclusión:

$$\Delta \cap S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K^+,$$

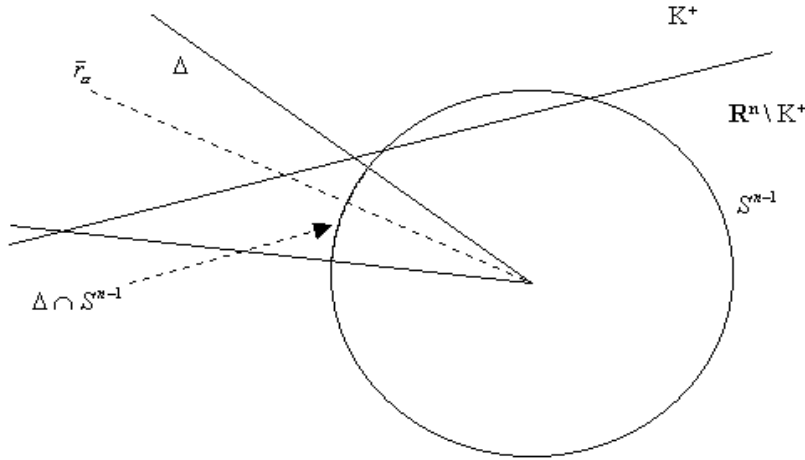
es decir:

$$\frac{\bar{r}_{\bar{\alpha}}}{\|\bar{r}_{\bar{\alpha}}\|} \in \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i < 3 \right\}$$

para todo  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas. O, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} < 3 \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2} \quad (3.13)$$

para todo  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas.



Elevando al cuadrado cada miembro de la expresión (3.13) se obtiene la desigualdad:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2 < 9 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2,$$

llegándose a la conclusión de que  $\Omega(Z) = \emptyset$  si y sólo si

$$9 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2 > 0$$

para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas, es decir, si y sólo si la forma cuadrática

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := 9 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{ij} \alpha_j)^2 - \left( \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2$$

es condicionalmente definida positiva. La matriz simétrica  $(g_{ij})$  asociada a dicha forma cuadrática viene definida por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \\ &= 9 \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} - \left( \sum_{i=1}^n m_{ki} \right) \left( \sum_{i=1}^n m_{kj} \right) \\ &= -9D(p_i) \cdot D(p_j) - (K \cdot D(p_i))(K \cdot D(p_j)), \end{aligned}$$

y el resultado queda probado.

(b) Denotemos por  $Z'$  a la superficie  $X(\mathcal{C}')$ , y por  $\mu'$  y  $\Delta'$  a los análogos a  $\mu$  y  $\Delta$  de la demostración del apartado (a) respecto de la configuración  $\mathcal{C}'$ . Si  $L'^*$  denota el transformado total en  $Z'$  de una recta general de  $X$  y  $E_i'^*$  denota el transformado total en  $Z'$  del divisor excepcional asociado a la explosión con centro en  $p'_i$ , es claro que las asignaciones  $[L^*] \mapsto [L'^*]$  y  $[E_i^*] \mapsto [E_{\sigma(i)}'^*]$  para  $i = 1, \dots, n$  proporcionan un isomorfismo de espacios vectoriales  $\varphi : A_1(Z) \rightarrow A_1(Z')$  tal que  $\varphi([L^*]_{>0}) = [L'^*]_{>0}$  y hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [L^*]_{>0} & \xrightarrow{\varphi} & [L'^*]_{>0} \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu' \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Como  $\Gamma_{\mathcal{C}'}$  es un refinamiento de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  se satisfará la inclusión  $\Delta' \subseteq \Delta$  y, por tanto, se tendrá:

$$\mu'(\Omega(Z')) = \Delta' \cap S^{m-1} \cap K^+ \subseteq \Delta \cap S^{m-1} \cap K^+ = \mu(\Omega(Z)).$$

Como  $\Omega(Z)$  es vacío (por el apartado (a)),  $\Omega(Z')$  también será vacío, siendo  $\mathcal{C}'$  una configuración P-suficiente.

(c) Supongamos que  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  y  $\mathcal{C}' = \{p_i \mid i \in J\}$ , con  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Consideramos en  $\mathcal{C}'$  el orden admisible inducido por el de  $\mathcal{C}$ . Es claro que  $G_{\mathcal{C}'}$  es la submatriz de  $G_{\mathcal{C}}$  resultante al eliminar las filas y las columnas con índices en  $\{1, \dots, n\} \setminus J$ . Por consiguiente, si  $G_{\mathcal{C}}$  es condicionalmente definida positiva,  $G_{\mathcal{C}'}$  también lo será.  $\square$

Obtengamos ahora un resultado similar para el caso en que  $X$  es una superficie de Hirzebruch.

**Teorema 3.5.11.** *Sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  una configuración sobre una superficie de Hirzebruch  $X = \mathbb{F}_\delta$  y sea  $Z = X(\mathcal{C})$  el cielo de  $\mathcal{C}$ . Entonces:*

- (a) *Si  $\mathcal{C}$  es P-suficiente, entonces el conjunto  $\Omega(Z)$  es vacío y, por tanto, el cono  $NE(Z)$  es poliédrico.*
- (b) *Si  $\mathcal{C}$  es P-suficiente y  $\mathcal{C}'$  es otra configuración sobre  $X$  de cardinal  $n$  cuyo grafo de proximidad es un refinamiento de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$ , entonces  $NE(X(\mathcal{C}'))$  es poliédrico.*
- (c) *Si  $\mathcal{C}$  es P-suficiente y  $\mathcal{C}'$  es una configuración sobre  $X$  tal que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  entonces  $\mathcal{C}'$  también es P-suficiente.*

Deduciremos este teorema a partir de una serie de lemas que demostraremos a continuación. En ellos, serán de utilidad los siguientes subconjuntos de  $A_1(Z)$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &:= [F^*]_{>0} \cap [M^* - \delta F^*]_{=0}, \\ \Sigma_+ &:= [F^*]_{>0} \cap [M^* - \delta F^*]_{>0}. \end{aligned}$$

Si  $\Omega(Z)$  es el conjunto definido en (3.12) es clara la siguiente igualdad:

$$\Omega(Z) = (\Omega(Z) \cap \Sigma_0) \cup (\Omega(Z) \cap \Sigma_+).$$

Considaremos la aplicación

$$h : \Sigma_0 \cap [F^*]_{=1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$



definida por  $(0, 1, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$  y la aplicación

$$\mu : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por  $\mu = h \circ \phi_{[F^*]}$ . Denotamos  $\Delta_0$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\begin{aligned} \Delta_0 &:= \mu(\Sigma_0 \cap CP(Z)) = \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - \sum_{j \rightarrow i} x_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Al igual que en la prueba del teorema 3.5.10,  $\Delta_0$  es el cono regular de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$  cuyos rayos extremales están generados por los vectores columna de la matriz  $\mathbf{M}_C = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Obsérvese que  $\mu(\Omega(Z) \cap \Sigma_0)$  puede descomponerse como intersección de tres subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\mu(\Omega(Z) \cap \Sigma_0) = \Delta_0 \cap S_\delta^{n-1} \cap K^+,$$

donde

$$S_\delta^{n-1} = \mu(Q_0 \cap \Sigma_0)$$

es la esfera de  $\mathbb{R}^n$  de radio  $\sqrt{\delta}$  y

$$K^+ := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq \delta + 2 \right\}$$

es la imagen vía  $\mu$  de la región  $\Sigma_0 \cap [K]_{\geq 0}$ .

Definamos la siguiente forma cuadrática:

$$g'(x_1, \dots, x_n) = (\delta + 2)^2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2 - \delta \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2.$$

Claramente, el elemento  $(i, j)$  de la matriz simétrica  $G' = (g'_{ij})$  asociada a  $g'$  es

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g'}{\partial x_i \partial x_j} = (\delta + 2)^2 \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} - \delta \left( \sum_{k=1}^n m_{ki} \right) \left( \sum_{k=1}^n m_{kj} \right) = \\ &= -(\delta + 2)^2 D(p_i) \cdot D(p_j) - \delta (K \cdot D(p_i))(K \cdot D(p_j)). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es determinar condiciones para que el conjunto  $\Omega(Z)$  sea vacío. Veamos primero cuando es así su intersección con  $\Sigma_0$ .

**Lema 3.5.12.** *El conjunto  $\Omega(Z) \cap \Sigma_0$  es vacío si y sólo si la matriz  $G'$  es condicionalmente definida positiva.*

*Demostración.* Es claro que la condición necesaria y suficiente para que el conjunto  $\Omega(Z) \cap \Sigma_0$  sea vacío es la inclusión:

$$S_\delta^{n-1} \cap \Delta_0 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K^+ \quad (3.14)$$

Al igual que se veía en la demostración del teorema 3.5.10, cada vector  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas da lugar a un elemento de  $\Delta_0 \setminus \{0\}$ ,  $\bar{r}_{\bar{\alpha}} := \sum_{i=1}^n \alpha_j(m_{1j}, \dots, m_{nj})$ ; y recíprocamente, todo elemento de  $\Delta_0 \setminus \{0\}$  puede expresarse de esta manera. Se tiene, por tanto, la igualdad:

$$S_\delta^{n-1} \cap \Delta_0 = \left\{ \frac{\sqrt{\delta}}{\|\bar{r}_{\bar{\alpha}}\|} \bar{r}_{\bar{\alpha}} \mid \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ y } \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\},$$

y la condición (3.14) equivale a que, para todo  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con coordenadas no negativas, se tenga:

$$\frac{\delta}{\|\bar{r}_{\bar{\alpha}}\|} \bar{r}_{\bar{\alpha}} \in \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i < \delta + 2 \right\}.$$

Si  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tiene coordenadas no negativas, se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\delta}}{\|\bar{r}_{\bar{\alpha}}\|} \bar{r}_{\bar{\alpha}} \in \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i < \delta + 2 \right\} \\ \iff \frac{\sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{ij} \right)^2}} < \delta + 2 \\ \iff (\delta + 2)^2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 > 0 \\ \iff g'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0. \end{aligned}$$

Concluimos, por tanto, que  $\Omega(Z) \cap \Sigma_0 = \emptyset$  si y sólo si la matriz  $G'$  es condicionalmente definida positiva.  $\square$

Deduciremos ahora una condición aritmética similar que implicará la condición geométrica  $\Omega(Z) \cap \Sigma_+ = \emptyset$ . Para ello, consideremos la aplicación

$$t : \Sigma_+ \cap [M^* - \delta F^*]_{=1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

dada por  $(1, x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0, -x_1, \dots, -x_n)$ , y la aplicación

$$\psi : \Sigma_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

definida por  $\psi := t \circ \phi_{[M^* - \delta F^*]}$ . Consideremos el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_+ &:= \psi(\Sigma_+ \cap CP(Z)) \\ &= \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \text{ y } x_i - \sum_{j=i}^n x_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

La clausura topológica de  $\Delta_+$  es un cono regular de dimensión  $n+1$  cuyos rayos extremales vienen generados por los vectores columna de la siguiente matriz de orden  $n+1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_c^t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_c \end{pmatrix}$$

Luego los rayos extremales de la clausura del conjunto  $\Delta_+$  vienen generados por el conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :  $\{(1, 0, \dots, 0), (0, m_{1j}, \dots, m_{nj})_{1 \leq j \leq n}\}$ .

Definimos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Delta'_+ := \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_+ \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, n\} \text{ con } \alpha_i > 0\},$$

$$K_1^+ := \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq (\delta + 2)x_0 + 2 \right\},$$

que es la imagen por  $\psi$  de  $\Sigma_+ \cap [K_Z]_{\geq 0}$ , y

$$S_1 := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2x_0 + \delta x_0^2 \right\},$$

la imagen por  $\psi$  de  $\Sigma_+ \cap Q_0$ .

Obsérvese que  $\psi(\Omega(Z) \cap \Sigma_+)$  puede descomponerse como intersección de tres subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la siguiente manera:

$$\psi(\Omega(Z) \cap \Sigma_+) = \Delta'_+ \cap S_1 \cap K_1^+.$$

Cada vector  $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  con coordenadas no negativas y tal que  $\alpha_0 > 0$  y con algún  $\alpha_i > 0$  (con  $i \geq 1$ ), da lugar a un elemento de  $\Delta'_+$ ,  $\bar{r}_{\bar{\alpha}} := \alpha_0(1, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \alpha_j(0, m_{1j}, \dots, m_{nj})$ . Recíprocamente, todo elemento de  $\Delta'_+$  puede escribirse de esta manera.

Definimos la forma cuadrática de  $\mathbb{R}^n$ :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 8 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2.$$

Su matriz simétrica asociada  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  viene dada por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_j} = 8 \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} - \left( \sum_{k=1}^n m_{ki} \right) \left( \sum_{k=1}^n m_{kj} \right) = \\ &= -8D(p_i) \cdot D(p_j) - (K \cdot D(p_i))(K \cdot D(p_j)) \end{aligned}$$

y coincide con la matriz  $G_{\mathcal{C}}$ .

Para clarificar la notación, denotaremos por  $\underline{\alpha}$  a un vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , y por  $(\alpha_0, \underline{\alpha})$  el vector de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Lema 3.5.13.** Sean  $\beta_1$  y  $\beta_2$  las funciones reales definidas por

$$\begin{aligned} \beta_1(\alpha_0, \underline{\alpha}) &:= \frac{2\alpha_0}{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \alpha_0^2} \\ \beta_2(\alpha_0, \underline{\alpha}) &:= \frac{2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j - (\delta + 2)\alpha_0}. \end{aligned}$$

Si la forma cuadrática  $g$  es condicionalmente definida positiva, entonces  $\beta_1(\alpha_0, \underline{\alpha}) < \beta_2(\alpha_0, \underline{\alpha})$  para todo  $(\alpha_0, \underline{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  perteneciente a la intersección de los dominios de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  tal que  $\alpha_0 > 0$  y los valores  $\alpha_i$  (para  $i = 1 \dots, n$ ) son no negativos y no todos nulos.

*Demostración.* Es sencillo comprobar que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\begin{aligned} \beta_1(\alpha_0, \underline{\alpha}) &< \beta_2(\alpha_0, \underline{\alpha}) \\ \frac{2\alpha_0}{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \alpha_0^2} &< \frac{2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j - (\delta + 2)\alpha_0} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j - (\delta + 2) \alpha_0^2 < \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \alpha_0^2$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 + v_{\underline{\alpha}}(\alpha_0) > 0,$$

siendo  $v_{\underline{\alpha}}(x) := 2x^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right) x$ . La función  $v_{\underline{\alpha}}$  posee un mínimo absoluto en  $x_{\underline{\alpha}} := \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j$ , siendo  $v_{\underline{\alpha}}(x_{\underline{\alpha}}) = -\frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2$ .

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 + v_{\underline{\alpha}}(\alpha_0) \geq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \left[ 8 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 \right] = \frac{1}{8} \cdot g(\underline{\alpha}).$$

Como consecuencia, si  $g$  es condicionalmente definida positiva, entonces

$$\beta_1(\alpha_0, \underline{\alpha}) < \beta_2(\alpha_0, \underline{\alpha})$$

para todo  $(\alpha_0, \underline{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  perteneciente a la intersección de los dominios de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  tal que  $\alpha_0 > 0$  y los valores  $\alpha_i$  (para  $i = 1 \dots, n$ ) son no negativos y no todos nulos.  $\square$

**Lema 3.5.14.** *Si la matriz  $G_C$  (o equivalentemente, la forma cuadrática  $g$ ) es condicionalmente definida positiva, entonces el conjunto  $\Omega(Z) \cap \Sigma_+$  es vacío.*

*Demostración.* Denotemos por  $\Gamma$  al conjunto de los vectores  $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  con coordenadas no negativas tales que  $\alpha_0 > 0$  y existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  con  $\alpha_i > 0$ . Para cualquier  $\bar{\alpha} \in \Gamma$ , denotemos por  $R_{\bar{\alpha}}$  al rayo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  generado por  $\bar{r}_{\bar{\alpha}}$ . Es evidente que se satisface la igualdad:

$$\Delta'_+ = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \Gamma} R_{\bar{\alpha}}. \quad (3.15)$$

Ahora tomamos los siguientes subconjuntos de  $\Gamma$ :

$$\Gamma_1 := \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma \mid \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \alpha_0^2 = 0 \right\}$$

y

$$\Gamma_2 := \left\{ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma \mid \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j - (\delta + 2) \alpha_0 \leq 0 \right\}.$$

Consideremos la función real  $f(x_0, x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i - (\delta + 2)x_0 - 2$  y observemos que  $K_1^+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x_0, \dots, x_n) \geq 0\}$  y que si  $\bar{\alpha} \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ , entonces la intersección del rayo  $R_{\bar{\alpha}}$  con  $S_1$  y con el hiperplano  $J$  definido por la ecuación  $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$  viene dada por las expresiones siguientes:

$$R_{\bar{\alpha}} \cap S_1 = \{\beta_1(\bar{\alpha}) \bar{r}_{\bar{\alpha}}\}; \quad R_{\bar{\alpha}} \cap J = \{\beta_2(\bar{\alpha}) \bar{r}_{\bar{\alpha}}\},$$

siendo

$$\beta_1(\bar{\alpha}) = \frac{2\alpha_0}{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \right)^2 - \delta \alpha_0^2}$$

$$\beta_2(\bar{\alpha}) = \frac{2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j - (\delta + 2) \alpha_0}.$$

Si  $\bar{\alpha} \in \Gamma_1$ , entonces es claro que el rayo  $R_{\bar{\alpha}}$  no interseca con  $S_1$ , con lo cual  $\psi(\Omega(Z) \cap \Sigma_+) \cap R_{\bar{\alpha}} = \emptyset$ .

Si  $\bar{\alpha} \in \Gamma_2$  entonces:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j \leq (\delta + 2) \alpha_0 < (\delta + 2) \alpha_0 + 2,$$

con lo cual  $R_{\bar{\alpha}} \cap K_1^+ = \emptyset$ . Luego, en este caso, también se verifica la igualdad  $\psi(\Omega(Z) \cap \Sigma_+) \cap R_{\bar{\alpha}} = \emptyset$ .

Como consecuencia, se tiene la siguiente igualdad:

$$\psi(\Omega(Z) \cap \Sigma_+) = \left( \bigcup_{\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} R_{\bar{\alpha}} \right) \cap S_1 \cap K_1^+ \quad (3.16)$$

y las siguientes condiciones son todas equivalentes:

$$\begin{aligned} \Omega(Z) \cap \Sigma_+ &= \emptyset, \\ \left( \bigcup_{\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} R_{\bar{\alpha}} \right) \cap S_1 \cap K_1^+ &= \emptyset, \\ f(\beta_1(\bar{\alpha})\bar{r}_{\bar{\alpha}}) < 0 &= f(\beta_2(\bar{\alpha})\bar{r}_{\bar{\alpha}}) \text{ para todo } \bar{\alpha} \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \\ t_{\bar{\alpha}}(\beta_1(\bar{\alpha})) < t_{\bar{\alpha}}(\beta_2(\bar{\alpha})) &\text{ para todo } \bar{\alpha} \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde, para cada  $\bar{\alpha} \in \Gamma$ ,  $t_{\bar{\alpha}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por:

$$t_{\bar{\alpha}}(x) = f(x\bar{r}_{\bar{\alpha}}).$$

Esta función  $t_{\bar{\alpha}}$  es estrictamente creciente para todo  $\bar{\alpha} \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ , pues su derivada satisface  $t'_{\bar{\alpha}}(x) = 2/\beta_2(\bar{\alpha}) > 0$ . Por tanto, la condición (3.17) equivale a

$$\beta_1(\bar{\alpha}) < \beta_2(\bar{\alpha}) \text{ para todo } \alpha \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

y ésta se satisface por el lema 3.5.13, dado que  $g$  es condicionalmente definida positiva y  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  contiene al conjunto de vectores  $\bar{\alpha}$  de  $\Gamma$  que no pertenecen a la intersección de los dominios de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .  $\square$

*Demostración del teorema 3.5.11.*

(a) Como consecuencia de la igualdad  $\Omega(Z) = (\Omega(Z) \cap \Sigma_0) \cup (\Omega(Z) \cap \Sigma_+)$  y de los lemas 3.5.12 y 3.5.14 se tiene que  $\Omega(Z)$  es vacío (y, por tanto,  $NE(Z)$  es poliédrico) si las formas cuadráticas  $g$  y  $g'$  son ambas condicionalmente definidas positivas. Pero, si  $g$  es condicionalmente definida positiva, entonces  $g'$  también lo es. Esto es consecuencia de la siguiente igualdad, de inmediata comprobación:

$$g'(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\delta + 2)^2}{8} g(x_1, \dots, x_n) + \frac{(\delta - 2)^2}{8} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2.$$

Queda, así, finalizada la prueba.

(b) Denotemos por  $Z'$  al cielo de la configuración  $\mathcal{C}'$  y sean  $\mu', \psi', \Sigma'_0, \Sigma'_+, \Delta'_0$  y  $\Delta'_+$  los análogos a  $\mu, \psi, \Sigma_0, \Sigma_+, \Delta_0$  y  $\Delta_+$  de la demostración del apartado (a), respecto de la configuración  $\mathcal{C}'$ . Si  $F'^*$  y  $M'^*$  denotan los transformados totales en  $Z'$  de los divisores  $F$  y  $M$  de  $X$  y  $E'_i$  denota el transformado total en  $Z'$  del divisor excepcional asociado a la explosión con centro en  $p'_i$ , es claro que

las asignaciones  $[F^*] \mapsto [F'^*]$ ,  $[M^*] \mapsto [M'^*]$  y  $[E_i^*] \mapsto [E_{\sigma(i)}'^*]$  para  $i = 1, \dots, n$  proporcionan un isomorfismo de espacios vectoriales  $\varphi : A_1(Z) \rightarrow A_1(Z')$  tal que  $\varphi(\Sigma_0) = \Sigma'_0$ ,  $\varphi(\Sigma_+) = \Sigma'_+$  y hace conmutativos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma'_0 \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu' \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_+ & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma'_+ \\ & \searrow \psi & \swarrow \psi' \\ & \mathbb{R}^{n+1} & \end{array}$$

Como  $\Gamma_{\mathcal{C}'}$  es un refinamiento de  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  se verifican las inclusiones  $\Delta'_0 \subseteq \Delta_0$  y  $\Delta'_+ \subseteq \Delta_+$ . Por tanto, se tendrá:

$$\begin{aligned} \mu'(\Omega(Z') \cap \Sigma'_0) &= \Delta'_0 \cap S_{\delta}^{n-1} \cap K^+ \subseteq \Delta_0 \cap S_{\delta}^{n-1} \cap K^+ = \mu(\Omega(Z) \cap \Sigma_0) \\ \psi'(\Omega(Z') \cap \Sigma'_+) &= \Delta'_+ \cap S_1 \cap K^+ \subseteq \Delta_+ \cap S_1 \cap K^+ = \mu(\Omega(Z) \cap \Sigma_+) \end{aligned}$$

Si  $g$  es condicionalmente definida positiva entonces  $\Omega(Z)$  es vacío (por el apartado (a)), y al ser  $\Omega(Z') = (\Omega(Z') \cap \Sigma'_0) \cup (\Omega(Z') \cap \Sigma'_+)$ , también será vacío  $\Omega(Z')$ , siendo  $NE(Z')$  un cono poliédrico.

(c) Su prueba es idéntica a la del apartado (c) del teorema 3.5.10  $\square$

**Ejemplo 3.5.15.** La matriz  $G_{\mathcal{C}}$  asociada a una configuración  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^{11}$  sobre  $X = \mathbb{P}^2$  cuyo grafo de proximidad es el de la figura 3.1 es la siguiente:

$$G_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 9 & 12 & 11 \\ 7 & 14 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 9 & 15 & 13 \\ 14 & 19 & 38 & 34 & 30 & 26 & 22 & 18 & 18 & 30 & 26 \\ 13 & 17 & 34 & 38 & 33 & 28 & 23 & 18 & 18 & 33 & 28 \\ 12 & 15 & 30 & 33 & 36 & 30 & 24 & 18 & 18 & 27 & 21 \\ 11 & 13 & 26 & 28 & 30 & 32 & 25 & 18 & 18 & 21 & 14 \\ 10 & 11 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 18 & 18 & 15 & 7 \\ 9 & 9 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 9 & 18 & 9 & 0 \\ 12 & 15 & 30 & 33 & 27 & 21 & 15 & 9 & 9 & 36 & 30 \\ 11 & 13 & 26 & 28 & 21 & 14 & 7 & 0 & 0 & 30 & 32 \end{pmatrix}.$$

$G_{\mathcal{C}}$  es condicionalmente definida positiva, puesto que todos sus coeficientes son no negativos y los coeficientes de la diagonal son estrictamente positivos. Luego  $\mathcal{C}$  es una configuración P-suficiente y el cono  $NE(X(\mathcal{C}))$  es poliédrico.



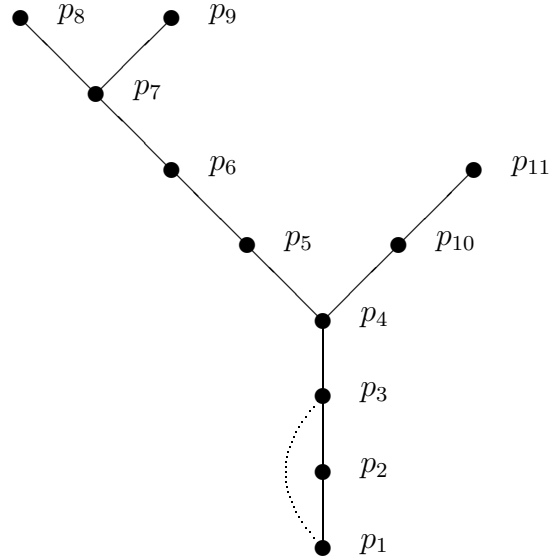


Figura 3.1: Grafo de proximidad del ejemplo 3.5.15

**Ejemplo 3.5.16.** Consideremos una configuración  $\mathcal{C}$  cualquiera sobre  $\mathbb{P}^2$  cuyo grafo de proximidad sea el de la figura 3.2. La matriz  $G_{\mathcal{C}}$  asociada es la siguiente:

$$G_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 7 & 6 & 12 & 18 & 24 & 5 & 4 & 10 \\ 7 & 14 & 19 & 24 & 29 & 34 & 39 & 5 & 3 & 6 & 9 & 12 & 1 & -1 & 2 \\ 14 & 19 & 38 & 48 & 58 & 68 & 78 & 10 & 6 & 12 & 18 & 24 & 2 & -2 & 4 \\ 21 & 24 & 48 & 72 & 87 & 102 & 107 & 15 & 8 & 18 & 27 & 36 & 3 & -3 & 6 \\ 28 & 29 & 58 & 87 & 116 & 136 & 156 & 20 & 12 & 24 & 36 & 48 & 4 & -4 & 8 \\ 35 & 34 & 68 & 102 & 136 & 170 & 195 & 25 & 15 & 30 & 45 & 60 & 5 & -5 & 10 \\ 42 & 39 & 78 & 117 & 156 & 195 & 243 & 30 & 18 & 36 & 54 & 72 & 6 & -6 & 12 \\ 7 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 14 & 12 & 24 & 36 & 48 & 10 & 8 & 20 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 12 & 18 & 27 & 36 & 45 & 15 & 12 & 30 \\ 12 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 24 & 27 & 54 & 72 & 90 & 21 & 15 & 42 \\ 18 & 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 36 & 36 & 72 & 108 & 135 & 27 & 18 & 54 \\ 24 & 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 & 48 & 45 & 90 & 135 & 180 & 33 & 21 & 66 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 10 & 15 & 21 & 27 & 33 & 20 & 16 & 31 \\ 4 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 16 & 20 & 23 \\ 10 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 20 & 30 & 42 & 54 & 66 & 31 & 23 & 62 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por  $g(x_1, \dots, x_{15})$  a la forma cuadrática definida por esta matriz y por  $h(x_1, \dots, x_7)$  a la siguiente forma cuadrática en 7 variables:

$$13x_1^2 + 37x_2^2 + 71x_3^2 + 115x_4^2 + 169x_5^2 + 233x_6^2 + 19x_7^2 - \\ -2x_7(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6).$$

Puesto que  $h$  es definida positiva y la forma cuadrática (con 15 variables)  $g(x_1, \dots, x_{15}) - h(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{14})$  es condicionalmente definida positiva (puesto que todos sus coeficientes son no negativos y los correspondientes a los cuadrados son estrictamente positivos), se concluye que  $g$  es condicionalmente definida positiva y, por tanto, la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente.

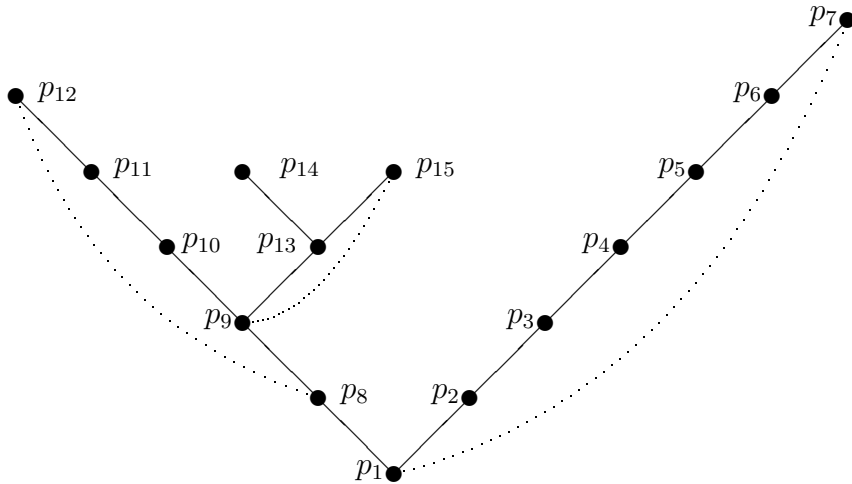


Figura 3.2: Grafo de proximidad del ejemplo 3.5.16

**Ejemplo 3.5.17.** Sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^{10}$  una configuración cualquiera sobre una superficie de Hirzebruch tal que su grafo de proximidad asociado sea el de la figura 3.3. La matriz  $G_{\mathcal{C}}$  es la siguiente:

$$G_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 12 & 18 & 24 & 17 & 34 & 51 & 50 & 49 \\ 6 & 12 & 16 & 20 & 24 & 18 & 36 & 54 & 52 & 50 \\ 12 & 16 & 32 & 40 & 48 & 36 & 72 & 108 & 104 & 100 \\ 18 & 20 & 40 & 60 & 72 & 54 & 108 & 162 & 156 & 150 \\ 24 & 24 & 48 & 72 & 96 & 64 & 128 & 192 & 184 & 176 \\ 17 & 18 & 36 & 54 & 64 & 55 & 102 & 149 & 142 & 135 \\ 34 & 36 & 72 & 108 & 128 & 102 & 204 & 298 & 284 & 270 \\ 51 & 54 & 108 & 162 & 192 & 149 & 298 & 447 & 426 & 405 \\ 50 & 52 & 104 & 156 & 184 & 142 & 284 & 426 & 412 & 390 \\ 49 & 50 & 100 & 150 & 176 & 135 & 270 & 405 & 390 & 375 \end{pmatrix}.$$

Al tener todos los coeficientes estrictamente positivos, es claro que se trata de una matriz condicionalmente definida positiva. Por tanto,  $\mathcal{C}$  es una configuración P-suficiente.

Además, cualquier configuración sobre  $\mathbb{P}^2$  cuyo grafo de proximidad sea el mismo que el de  $\mathcal{C}$  también será P-suficiente, por la nota 3.5.8.

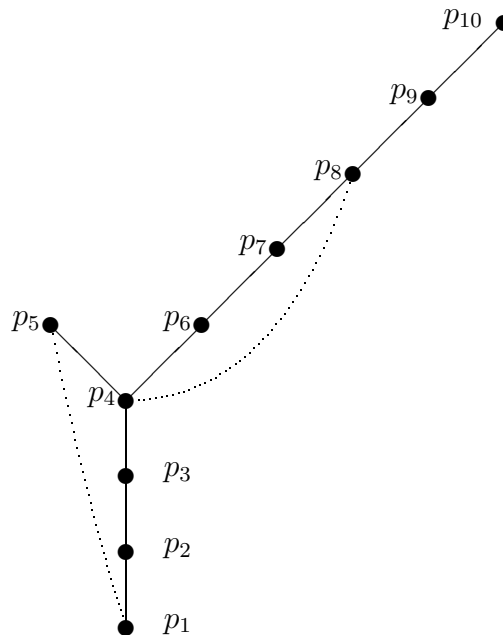


Figura 3.3: Grafo de proximidad del ejemplo 3.5.17

Dada una configuración P-suficiente, “moviendo” adecuadamente sus puntos de manera que la nueva configuración conserve el mismo grafo de proximidad que la inicial, obtenemos una nueva configuración P-suficiente. De esta manera pueden generarse familias de superficies racionales no singulares con cono de curvas poliédrico. Una muestra de ello es el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.5.18.** Supongamos que la característica del cuerpo  $k$  es nula y consideremos un punto  $p$  del plano proyectivo. Sean  $x, y$  coordenadas locales en  $p$ . Para cada  $(a, b, c, d, e) \in k^5$  tales que  $ae \neq 1$  y  $be \neq 1$ , consideramos el germen de curva en  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p}$  dado por  $g := f_1 f_2 f_3 f_4$ , siendo

$$\begin{aligned} f_1 &= (ex + y)^6 - (x + ay)^7, \\ f_2 &= (x + by)^4 - [cx + (cb + 1)y]^9, \\ f_3 &= (x + by)^2 - [dx + (bd + 1)y]^7, \\ f_4 &= x + by - [dx + (bd + 1)y]^5. \end{aligned}$$

El árbol de proximidad de la configuración asociada a la resolución sumergida minimal de  $g$  es justamente el grafo de proximidad de la figura 3.2, que se corresponde con el de la configuración P-suficiente del ejemplo 3.5.16. Tenemos, por tanto, una familia infinita de gérmenes de curvas planas cuyas configuraciones asociadas a sus resoluciones sumergidas minimales se adaptan a un mismo grafo de proximidad, que sabemos que es P-suficiente sobre  $\mathbb{P}^2$ . Ello implica que los cielos de todas estas configuraciones poseen un cono de curvas poliédrico.

**Proposición 3.5.19.** *Sea  $\mathcal{C}$  una configuración sobre  $\mathbb{P}^2$  o sobre una superficie de Hirzebruch, y denotemos por  $Z$  al cielo de  $\mathcal{C}$ .*

- (a) *Si  $K_Z^2 > 0$  entonces  $\mathcal{C}$  es P-suficiente.*
- (b) *Si  $K_Z^2 = 0$ , entonces  $\mathcal{C}$  es P-suficiente si existe en  $\mathcal{C}$  algún punto satélite.*
- (c) *Si  $K_Z^2 \leq 0$  y todo punto de  $\mathcal{C}$  posee, a lo sumo, un punto de  $\mathcal{C}$  que le es próximo, entonces  $\mathcal{C}$  no es P-suficiente.*

*Demostración.* Denotemos por  $p_1, \dots, p_n$  a los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$  (ordenados, como es usual, respecto a un cierto orden total admisible) y consideremos la matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  y la siguiente forma cuadrática:

$$h(x_1, \dots, x_n) := n \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)^2.$$

Sean  $x_1, \dots, x_n$  son números reales no negativos arbitrarios y no todos nulos, y denotemos  $\Delta_i := \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Se verifica la siguiente secuencia de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + 2 \sum_{k<l} \Delta_k \Delta_l = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + 2 \sum_{k<l} \sqrt{\Delta_k^2 \Delta_l^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + 2 \sum_{k<l} \frac{\Delta_k^2 + \Delta_l^2}{2} = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + (n-1) \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = n \sum_{i=1}^n \Delta_i^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde la desigualdad proviene de la existente entre la media geométrica y la media aritmética de dos números reales no negativos.

Sea  $g$  la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica  $G_{\mathcal{C}}$ .

(a) Supongamos que  $K_{\mathcal{Z}}^2 > 0$ . Esta condición equivale a  $n \leq 8$  si  $\mathcal{C}$  es una configuración sobre  $\mathbb{P}^2$ , y  $n \leq 7$  si lo es sobre una superficie de Hirzebruch. Por tanto, en este caso:

$$g(x_1, \dots, x_n) > h(x_1, \dots, x_n) = n \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i \right)^2 \geq 0,$$

siendo la última desigualdad consecuencia de (3.18). Como  $x_1, \dots, x_n$  se han tomado arbitrarios,  $g$  es condicionalmente definida positiva. Luego la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente, probándose al apartado (a).

(b) Supongamos ahora que  $K_{\mathcal{Z}}^2 = 0$ . Esto equivale a  $n = 9$  si  $\mathcal{C}$  es una configuración sobre  $\mathbb{P}^2$ , y  $n = 8$  si lo es sobre una superficie de Hirzebruch. Por tanto, en este caso se tiene la igualdad:

$$g(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n)$$

para cualquier elección posible de  $x_1, \dots, x_n$ .

Supongamos que existe un punto satélite  $p_s \in \mathcal{C}$  y veamos que  $\mathcal{C}$  es P-suficiente. Sea  $p_r$  un punto de  $\mathcal{C}$  tal que  $p_s$  es próximo a  $p_r$  y no pertenece al primer entorno infinitesimal de  $p_r$ .

Probemos la existencia de dos índices  $k, l$  tales que  $\Delta_k \neq \Delta_l$  para cualquier elección posible de  $x_1, \dots, x_n$ . Procedamos por reducción al absurdo, suponiendo la existencia de números reales no negativos no todos nulos  $x_1, \dots, x_n$  tales que todos los valores  $\Delta_k$  sean iguales. Se verifican las siguientes igualdades:

$$\Delta_r = \sum_{j=r}^n m_{rj}x_j = \sum_{j=r}^{s-1} m_{rj}x_j + \sum_{j=s}^n m_{rj}x_j,$$

$$\Delta_s = \sum_{j=s}^n m_{sj} x_j.$$

Pero al ser  $p_s$  próximo a  $p_r$ , se tiene que  $m_{rj} > m_{sj}$  si  $p_s \leq p_j$ , y  $m_{rj} = m_{sj} = 0$  si  $j \geq s$  pero  $p_j$  no es infinitamente próximo a  $p_s$ . Por tanto, para que se dé la igualdad  $\Delta_r = \Delta_s$ , la única posibilidad es  $\Delta_r = \Delta_s = 0$  siendo, por tanto, todos los  $\Delta_k$  nulos. Esto es una contradicción, puesto que  $m_{ii} = 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y este hecho obligaría a la nulidad de todos los  $x_i$ .

Luego para cualquier elección de  $x_1, \dots, x_n$  existen, al menos, dos índices  $k, l$  tales que  $\Delta_k \neq \Delta_l$ . Esto implica que la desigualdad de la secuencia (3.18) es estricta siempre (pues la media geométrica de dos números positivos distintos es estrictamente menor que su media aritmética) y, por tanto,  $g(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) > 0$  para cualquier elección de  $x_1, \dots, x_n$ , siendo  $g$  condicionalmente definida positiva. Por tanto, la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente.

(c) La condición  $K_Z \leq 0$  equivale a  $n \geq 9$  si  $\mathcal{C}$  es una configuración sobre  $\mathbb{P}^2$ , o  $n \geq 8$  si es una configuración sobre una superficie de Hirzebruch. Por tanto, es clara la desigualdad:

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq h(x_1, \dots, x_n)$$

para todo vector  $(x_1, \dots, x_n)$  con coordenadas no negativas y no todas nulas. Puesto que todo punto de  $\mathcal{C}$  posee, a lo sumo, un punto de  $\mathcal{C}$  que le es próximo, se tiene que  $m_{ij} = 1$  si  $p_i \leq p_j$  y  $m_{ij} = 0$  en caso contrario. Sean  $p_{s_1}, \dots, p_{s_t}$  los puntos maximales de  $\mathcal{C}$  y elijamos  $x_{s_1} = x_{s_2} = \dots = x_{s_t} = 1$  y  $x_i = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_t\}$ . Con esta elección de los valores  $\{x_i\}$ , calculemos  $\Delta_k$ , para  $k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^n m_{kj} x_j = \sum_{j=k}^n m_{kj} x_j = m_{ks_{j_0}} x_{s_{j_0}} = 1,$$

donde  $p_{s_{j_0}}$  es tal que  $p_k \leq p_{s_{j_0}}$ . Así pues, todos los valores  $\Delta_k$  serían iguales, con lo cual la desigualdad de (3.18) sería, para esta elección de  $\{x_i\}$ , una igualdad (puesto que las medias geométrica y aritmética de dos números positivos iguales coinciden). Por tanto, se tendría  $g(x_1, \dots, x_n) \leq h(x_1, \dots, x_n) = 0$  y  $g$  no sería condicionalmente definida positiva.  $\square$

La condición de P-suficiencia incluye los casos con divisor anticanónico amplio, como muestra el siguiente corolario.

**Corolario 3.5.20.** *Si  $Z$  es una superficie racional no singular tal que  $-K_Z$  es amplio, entonces cualquier configuración  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbb{P}^2$  o sobre una superficie de Hirzebruch cuyo cielo sea isomorfo a  $Z$  es P-suficiente.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  una configuración sobre una superficie  $X$  (igual a  $\mathbb{P}^2$  o una superficie de Hirzebruch). Al ser  $-K_Z$  amplio se tiene que  $K_Z^2 > 0$ , y la configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente, por la proposición 3.5.19.  $\square$

A continuación, establecemos algunos resultados que nos conducirán a probar que cuando la configuración  $\mathcal{C}$  es una cadena, la condición de P-suficiencia puede expresarse de una manera mucho más simple.

**Lema 3.5.21.** *Si  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  es una configuración de  $X$ , que es una superficie racional relativamente minimal o bien la superficie de Hirzebruch  $\mathbb{F}_1$ ,  $Z$  es el cielo de  $\mathcal{C}$  y  $\gamma$  es un número real positivo, entonces los coeficientes de la matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $G_\gamma = (g_{ls})$ , definida por*

$$g_{ls} := -\gamma D(p_l) \cdot D(p_s) - (K_Z \cdot D(p_l))(K_Z \cdot D(p_s))$$

*están relacionados por las siguientes igualdades:*

$$g_{ls} = \sum_{j|l \rightarrow j} g_{js} + \gamma m_{ls} - \sum_{i=1}^n m_{is}.$$

*Demostración.* Se sigue de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} g_{ls} &= \gamma \sum_{i=1}^{l-1} m_{il} m_{is} + \gamma m_{ls} - \left( \sum_{i=1}^{l-1} m_{il} + 1 \right) \left( \sum_{i=1}^n m_{is} \right) = \\ &= \gamma \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j|l \rightarrow j} m_{ij} m_{is} - \left( \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j|l \rightarrow j} m_{ij} \right) \left( \sum_{i=1}^n m_{is} \right) + \gamma m_{ls} - \sum_{i=1}^n m_{is} = \\ &= \sum_{j|l \rightarrow j} \left[ \gamma \sum_{i=1}^{l-1} m_{ij} m_{is} - \left( \sum_{i=1}^{l-1} m_{ij} \right) \left( \sum_{i=1}^n m_{is} \right) \right] + \gamma m_{ls} - \sum_{i=1}^n m_{is} = \\ &= \sum_{j|l \rightarrow j} g_{js} + \gamma m_{ls} - \sum_{i=1}^n m_{is}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la proposición 1.3.14 y la última se sigue de que la condición  $l \rightarrow j$  implica  $j < l$ .

**Lema 3.5.22.** *Sea  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  una cadena de  $X$ ,  $\gamma$  un número real positivo y  $G_\gamma = (g_{ls})$  la matriz dada en el lema 3.5.21. Si  $g_{nn} > 0$ , entonces todos los coeficientes de  $G_\gamma$  son positivos.*

*Demostración.* Razonaremos por reducción al absurdo. Para cada índice  $s$  ( $1 \leq s \leq n$ ), definamos  $\Delta_s = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid g_{is} \leq 0\}$  y asumamos que  $\Delta_s \neq \emptyset$  para un índice fijado  $s$ . Sea  $i_0$  el mínimo del conjunto  $\Delta_s$ . En esta demostración usaremos las siguientes propiedades, que se deducen fácilmente de la fórmula que proporciona el lema 3.5.21 para el elemento  $g_{i_0s}$  (que sabemos que no es positivo).

- Propiedad 1. Si el punto  $p_{i_0}$  es próximo a  $p_k$  entonces,

$$g_{ks} + \gamma m_{i_0s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

- Propiedad 2.  $\gamma m_{js} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0$  para todo  $j \geq i_0$ .

Obsérvese que la propiedad 2 es cierta para  $j = i_0$  por el lema 3.5.21, y también para  $j > i_0$ , puesto que se verifica la desigualdad  $m_{js} \leq m_{i_0s}$  si  $j \geq i_0$ .

Probaremos ahora que  $g_{js} \leq 0$  para todo  $j \geq i_0$ . Esto implicará que  $g_{ns} \leq 0$ , concluyéndose la prueba de este lema ya que, si  $s = n$ , tenemos una contradicción y, en caso contrario,  $g_{sn} \leq 0$  al ser  $G_\gamma$  una matriz simétrica, y el mismo procedimiento para  $n$  en lugar de  $s$  prueba que  $g_{nn} \leq 0$ , que es una contradicción.

Podemos suponer que  $i_0 < n$ . Para probar la desigualdad anterior usaremos el segundo principio de inducción para  $j \geq i_0 + 1$ . Probaremos primero la desigualdad para  $j = i_0 + 1$  (paso básico). Para ello, distinguimos dos casos: el *caso 1*, que se produce si existe un índice  $k$  ( $1 \leq k < i_0 < n$ ) tal que el punto  $p_{i_0+1}$  es próximo a  $p_k$  (y obviamente  $p_{i_0}$  es también próximo a  $p_k$ ), y el complementario del *caso 1*, que denominaremos *caso 2*.

En el *caso 1* tenemos

$$g_{i_0+1,s} = g_{ks} + g_{i_0s} + \gamma m_{i_0+1,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq g_{ks} + g_{i_0s} + \gamma m_{i_0,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

Y en el *caso 2*

$$g_{i_0+1,s} = g_{i_0s} + \gamma m_{i_0+1,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

En ambos casos la igualdad es consecuencia del lema 3.5.21. En el *caso 1*, la primera igualdad es cierta al ser  $\mathcal{C}$  una cadena. Finalmente, la desigualdad  $g_{i_0s} \leq 0$  y la dada por la propiedad 1 (resp., 2) para el *caso 1* (resp., 2) concluye la prueba del paso básico.

Veamos ahora el paso inductivo. Supongamos que  $g_{js} \leq 0$  para  $i_0 < j \leq l < n$ ; veremos que  $g_{l+1,s} \leq 0$ . Para ello, necesitamos distinguir tres casos:



i) Existe un índice  $k$  ( $1 \leq k < i_0 < n$ ) tal que el punto  $p_{l+1}$  es próximo a  $p_k$  (en tal caso, el punto  $p_{i_0}$  es también próximo a  $p_k$ ). Entonces,

$$g_{l+1,s} = g_{ks} + g_{ls} + \gamma m_{l+1,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq g_{ls} + g_{ks} + \gamma m_{i_0s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

ii) Existe un índice  $k$  ( $1 \leq i_0 \leq k < l$ ) tal que el punto  $p_{l+1}$  es próximo a  $p_k$ . Entonces,

$$g_{l+1,s} = g_{ks} + g_{ls} + \gamma m_{l+1,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

iii) El punto  $p_{l+1}$  sólo es próximo a  $p_l$ . Entonces,

$$g_{l+1,s} = g_{ls} + \gamma m_{l+1,s} - \sum_{i=1}^n m_{is} \leq 0.$$

Estas fórmulas obtenidas en i), ii) y iii) son consecuencia de la aplicación del lema 3.5.21 en todos los casos, de la propiedad 1 en el caso i) y de la propiedad 2 en los casos ii) y iii), y de la hipótesis de inducción en todos los casos ( $g_{ls} \leq 0$  en i) y iii), y  $g_{ks} \leq 0$  y  $g_{ls} \leq 0$  en ii)).  $\square$

**Lema 3.5.23.** *Sea  $\gamma > 0$  y  $G_\gamma = (g_{is})$  la matriz dada en el lema 3.5.22. Entonces,  $G_\gamma$  es condicionalmente definida positiva si y sólo si  $g_{nn} > 0$*

*Demostración.* Si  $G_\gamma$  es condicionalmente definida positiva, tomando  $\bar{x} = (0, \dots, 0, 1)$  tenemos:

$$g_{nn} = \bar{x} G_\gamma x^t > 0.$$

Recíprocamente, si  $g_{nn} > 0$  entonces, por el lema 3.5.22, todos los coeficientes de  $G_\gamma$  son positivos, con lo cual  $G_\gamma$  es condicionalmente definida positiva.  $\square$

Obsérvese que, para cualquier configuración  $\mathcal{C}$ , la matriz  $G_{\mathcal{C}}$  coincide con  $G_9$ , si  $X = \mathbb{P}^2$ , y con  $G_8$ , si  $X$  es una superficie de Hirzebruch. Cuando  $\mathcal{C}$  es una cadena, tal y como advertimos anteriormente, existe una forma sencilla de verificar si esta matriz es condicionalmente definida positiva: simplemente hay que comprobar si el signo del último coeficiente de la matriz es positivo. Esto se concreta en el siguiente resultado:

**Corolario 3.5.24.** *Sea  $Z$  una superficie racional no singular obtenida como cielo de una cadena  $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n$  de puntos infinitamente próximos a  $X$ , donde  $X$  es una superficie relativamente minimal o la superficie de Hirzebruch  $\mathbb{F}_1$ . Entonces,*

- *Caso 1:*  $X = \mathbb{P}^2$ . La configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente si y sólo si

$$-9D(p_n)^2 - (K_Z \cdot D(p_n))^2 > 0.$$

- *Caso 2:*  $X = \mathbb{F}_\delta$ . La configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente si y sólo si

$$-8D(p_n)^2 - (K_Z \cdot D(p_n))^2 > 0.$$

Tal y como puede deducirse de las pruebas de los teoremas 3.5.10 y 3.5.11, la condición de P-suficiencia se verifica cuando las relaciones de proximidad entre los puntos de la configuración son “suficientemente especiales” (lo necesario para que  $\Omega(Z)$  sea vacío). En el siguiente teorema se muestra cómo este hecho fuerza a que las multiplicidades en los puntos de la configuración de cualquier curva de  $X$  verifiquen una cierta relación “especial”; y es más, esto proporciona una nueva caracterización de la condición de P-suficiencia.

**Teorema 3.5.25.** *Sea  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  una configuración sobre  $X$  (que puede ser  $\mathbb{P}^2$  o una superficie de Hirzebruch). Entonces,  $\mathcal{C}$  es P-suficiente si y sólo si para toda curva  $C$  de  $X$  que pase por algún punto de  $\mathcal{C}$  se verifica:*

$$(a) \quad 9 \sum_{i=1}^n e_i(C)^2 - (\sum_{i=1}^n e_i(C))^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{P}^2,$$

$$(b) \quad 8 \sum_{i=1}^n e_i(C)^2 - (\sum_{i=1}^n e_i(C))^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{F}_\delta,$$

donde  $e_i(C)$  denota la multiplicidad de  $C$  en el punto  $p_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una configuración P-suficiente y sea  $C$  una curva cualquiera de  $X$  pasando por algún punto de  $\mathcal{C}$ . Denotemos por  $\bar{e}(C)$  al vector de  $\mathbb{R}^n$  cuyas componentes son las multiplicidades de  $C$  en cada uno de los puntos de la configuración  $\mathcal{C}$ , es decir:

$$\bar{e}(C) = (e_1(C), \dots, e_n(C)).$$

Puesto que, según la nota 3.5.2,  $[C]$  pertenece al cono de proximidad

$$CP(X(\mathcal{C})) = \{\bar{x} \in A_1(X(\mathcal{C})) \mid \bar{x} \cdot [E_i] \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\},$$

se tiene que  $\bar{e}(C)$  debe pertenecer al cono regular de  $\mathbb{R}^n$  determinado por las relaciones de proximidad:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - \sum_{j \rightarrow i} x_j \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\},$$

cuyos rayos extremales vienen dados por los vectores columna de la matriz  $\mathbf{M}_C$  (esto ya se vió en la prueba del teorema 3.5.10). Por tanto, existirán números enteros no negativos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tales que:

$$\bar{e}(C) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (m_{1j}, \dots, m_{nj}).$$

Como  $C$  pasa por algún punto de  $\mathcal{C}$ , los valores  $\{\alpha_i\}$  no pueden ser todos nulos. Por consiguiente, al ser  $\mathcal{C}$  una configuración P-suficiente, se verifica:

$$(a) \quad 9 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j)^2 - (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j)^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{P}^2,$$

$$(b) \quad 8 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j)^2 - (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \alpha_j)^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{F}_\delta,$$

que equivalen a:

$$(a) \quad 9 \sum_{i=1}^n e_i(C)^2 - (\sum_{i=1}^n e_i(C))^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{P}^2,$$

$$(b) \quad 8 \sum_{i=1}^n e_i(C)^2 - (\sum_{i=1}^n e_i(C))^2 > 0, \text{ si } X = \mathbb{F}_\delta,$$

quedando probada la implicación directa.

Para probar la implicación recíproca, supongamos que cualquier curva  $C$  de  $X$  que pasa por algún punto de  $\mathcal{C}$  verifica la condición (a) o la condición (b) (dependiendo del caso) y veamos que  $\mathcal{C}$  es P-suficiente. Denotemos por  $g$  a la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica  $G_C$ :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \gamma \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j)^2 - (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j)^2,$$

donde  $\gamma$  es igual a 9 si  $X = \mathbb{P}^2$  y es igual a 8 si  $X$  es una superficie de Hirzebruch.

Denotemos por  $W$  al conjunto de los puntos no nulos del primer ortante de  $\mathbb{R}^n$ , es decir:

$$W := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

y sea  $W_{\mathbb{Q}} := W \cap \mathbb{Q}^n$ .

La forma cuadrática  $g$  es estrictamente positiva en todos los puntos de  $W_{\mathbb{Q}}$ . En efecto, dado  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in W_{\mathbb{Q}}$  existe un entero positivo  $m$  tal que  $m\bar{x}$  pertenece a  $\mathbb{Z}^n$ . Sea el vector de coordenadas naturales  $(v_1, \dots, v_n) := m \sum_{j=1}^n x_j (m_{1j}, \dots, m_{nj})$  y consideremos los divisores

$$H_d := dL^* - \sum_{i=1}^n v_i E_i^*$$

para todo número natural positivo  $d$ . Según el apartado (a) de la proposición 3.3.1 se tiene:

$$h^0(H_d) - h^1(H_d) + h^2(H_d) = \frac{H_d^2 - K_{X(C)} \cdot H_d}{2} + 1$$

para cada  $d \in \mathbb{Z}_+$ . Pero por el teorema de dualidad de Serre se satisface  $h^2(H_d) = h^0(K_{X(C)} - H_d) = 0$ . Por tanto:

$$h^0(H_d) - h^1(H_d) = \frac{H_d^2 - K_{X(C)} \cdot H_d}{2} + 1$$

y desarrollando el segundo miembro:

$$h^0(H_d) - h^1(H_d) = \frac{1}{2}(d+1)(d+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i(v_i+1).$$

Puesto que el segundo miembro diverge cuando  $d$  tiende a infinito, el sistema lineal  $|H_d|$  será no vacío para  $d$  suficientemente elevado. Esto implica la existencia de una curva de  $X$  cuya multiplicidad en  $p_i$  es  $v_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Luego, por hipótesis, se tendrá la desigualdad:

$$9 \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 > 0$$

y sustituyendo  $v_i$  por sus expresiones en función de  $x_1, \dots, x_n$  se concluye

$$g(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

Por tanto, la forma cuadrática  $g$  es estrictamente positiva en todo punto de  $W_{\mathbb{Q}}$ .

El resultado se sigue del hecho de que, en estas condiciones,  $g$  ha de ser estrictamente positiva en todos los puntos de  $W$ , propiedad que se deriva del siguiente lema:

**Lema 3.5.26.** *Con las notaciones anteriores, sea  $f$  una forma cuadrática de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{x}) > 0$  para todo  $\bar{x} \in W_{\mathbb{Q}}$ . Entonces,  $f(\bar{x}) > 0$  para todo  $\bar{x} \in W$ .*

*Demostración.* Probemos este resultado por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  el resultado se verifica de forma trivial, puesto que  $f(x) = x^2 f(1)$  para todo número real  $x$ , que es estrictamente positivo por hipótesis.

Supongamos el resultado cierto para  $n - 1$  y veámoslo para  $n$ . Como consecuencia de la continuidad de la función real  $f$  y de la densidad de  $\mathbb{Q}^n$

en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que  $f(\bar{x}) > 0$  para todo  $\bar{x} \in W^o$ . Sólo queda probar, pues, que  $f$  es también estrictamente positiva en todo punto de  $W \setminus W^o$ . Pero este conjunto es la unión de los ortantes positivos de los hiperplanos coordenados (sin el origen):

$$Y_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid x_i = 0 \text{ y } x_j \geq 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, n\}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Si consideramos ahora cualquiera de ellos,  $Y_i$ , y la forma cuadrática de  $\mathbb{R}^{n-1}$  obtenida al sustituir en la expresión de  $f$  la variable  $x_i$  por cero, podemos aplicar la hipótesis de inducción y concluir que  $f$  es estrictamente positiva en todo punto de  $Y_i$ .  $\square$

La condición de P-suficiencia, en virtud de los teoremas 3.5.10 y 3.5.11, es una condición suficiente para la poliedricidad del cono de curvas de  $Z$  cuya verificación involucra comprobar si una cierta matriz cuadrada es condicionalmente definida positiva. Una cuestión natural que cabe plantearse es si esta comprobación es computable. La respuesta es afirmativa. Gaddum, en [22], obtiene una condición equivalente a la de ser condicionalmente definida positiva, expresada en términos de existencia de soluciones en el primer ortante no nulas, de un conjunto de inecuaciones homogéneas que dependen de la matriz. A continuación describiremos esta condición y daremos un algoritmo cuya implementación permitirá decidir si una configuración es o no P-suficiente.

Dada una matriz cuadrada de orden  $n$  con coeficientes reales  $A$  y dados dos subconjuntos propios  $S$  y  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$ , consideramos la submatriz  $A^{S,T}$  formada al eliminar de  $A$  las filas correspondientes a los índices de  $S$  y las columnas correspondientes a los índices de  $T$ . Denotaremos por  $(A; S, T)$  al subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  (siendo  $m$  el número de columnas de la matriz  $A^{S,T}$ ) formado por todos los vectores  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  cumpliendo las condiciones:

$$A^{S,T} \cdot X > 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \neq 0$$

donde  $X = (x_1, \dots, x_m)^t$  y, para cada vector  $V = (v_1, \dots, v_m)^t$ , la expresión  $V \geq 0$  significa  $v_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . El siguiente teorema muestra la citada condición debida a Gaddum.

**Teorema 3.5.27.** *Una matriz cuadrada simétrica de orden  $n$  con coeficientes reales  $A$  es condicionalmente definida positiva si, y sólo si, el conjunto  $(A; S, S)$  es no vacío para todo subconjunto propio  $S$  de  $\{1, \dots, n\}$ .*

Para todo par de subconjuntos propios  $S$  y  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$  definimos el siguiente cono poliédrico de  $\mathbb{R}^m$  (siendo  $m$  el número de columnas de  $A^{S,T}$ ):

$$C(A; S, T) := \{X^t = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid A^{S,T} \cdot X \geq 0 \text{ y } X \geq 0\}.$$

**Lema 3.5.28.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y sea  $S$  un subconjunto propio de  $\{1, \dots, n\}$ . Entonces, el conjunto  $(A; S, S)$  es no vacío si y sólo si existe un subconjunto propio  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$  que contiene a  $S$  tal que  $C(A; S, T)^\circ \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta las igualdades

$$(A; S, S) = (A^{S,S}; \emptyset, \emptyset)$$

$$C(A; S, T) = C(A^{S,T}; \emptyset, T \setminus S)$$

para todo subconjunto propio  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$  que contiene a  $S$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $S = \emptyset$ .

Supongamos que el conjunto  $(A; \emptyset, \emptyset)$  es no vacío y consideremos uno de sus elementos  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Definimos el subconjunto propio de  $\{1, \dots, n\}$  dado por

$$T = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{x}_i = 0\}.$$

Es claro que el vector resultante de eliminar en  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  las componentes correspondientes a los índices de  $T$  es una solución del sistema:

$$A^{\emptyset, T} \cdot X > 0$$

$$X > 0$$

y, por tanto, pertenece a  $C(A; \emptyset, T)^\circ$ .

Recíprocamente, supongamos la existencia de un subconjunto propio  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $C(A; \emptyset, T)^\circ \neq \emptyset$ . Es claro que todo elemento  $\bar{x}$  de  $C(A; \emptyset, T)^\circ$  pertenece al conjunto  $(A; \emptyset, T)$  y añadiendo nuevas componentes nulas en lugares adecuados al vector  $\bar{x}$  se obtiene un elemento de  $(A; \emptyset, \emptyset)$ .  $\square$

Como veremos a continuación, el siguiente teorema, que es consecuencia directa del lema anterior y del teorema 3.5.27, proporcionará un procedimiento computable para determinar si una matriz cuadrada simétrica es condicionalmente definida positiva.

**Teorema 3.5.29.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada simétrica de orden  $n$ .  $A$  es condicionalmente definida positiva si y sólo si para todo subconjunto propio  $S$  de  $\{1, \dots, n\}$  existe un subconjunto propio  $T$  de  $\{1, \dots, n\}$  que contiene a  $S$  tal que  $C(A; S, T)^\circ \neq \emptyset$ .*

El algoritmo para determinar si una cierta configuración  $\mathcal{C}$  es P-suficiente es el siguiente:

Entrada (Input):  $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}$  (Matriz de Proximidad)

Salida (Output): 1 (si la configuración es P-suficiente), 0 (en caso contrario)

**Cálculo** de la matriz  $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}$

**Cálculo** de la matriz  $G_{\mathcal{C}}$

$Q :=$  conjunto de las partes de  $\{1, \dots, n\}$  (donde  $n$  es el cardinal de  $\mathcal{C}$ )

$Q := Q \setminus \{\{1, \dots, n\}\}$

**Mientras**  $Q \neq \emptyset$ :

$S :=$  un elemento de  $Q$

$R :=$  conjunto de los elementos de  $Q$  que contienen a  $S$

$w := 0$

**Mientras**  $w = 0$  o  $R \neq \emptyset$

$T :=$  un elemento de  $R$

**Calcular**  $G^{S,T}$

**Si**  $C(G; S, T)^{\circ} = \emptyset$ , **entonces**  $R := R \setminus \{T\}$

**Si**  $C(G; S, T)^{\circ} \neq \emptyset$ , **entonces**  $w := 1$

**Si**  $w = 0$  **entonces**  $Output := 0$  y **terminar**

$Q := Q \setminus \{S\}$

$Output := 1$  y **terminar**

Obviamente, el espacio de linealidad de cada cono  $C(G; S, T)$  es igual a  $\{0\}$  y, por tanto, son conos fuertemente convexos. Ello implica que están generados por sus rayos extremales. Por tanto, para determinar si  $C(G; S, T)^{\circ}$  es vacío o no, puede calcularse el conjunto de los rayos extremales de  $C(G; S, T)$  (realmente basta con un conjunto de generadores del cono) y estudiar si generan el espacio ambiente  $\mathbb{R}^m$ . En caso afirmativo  $C(G; S, T)^{\circ}$  será no vacío y en caso negativo no lo será. Para calcular un conjunto de generadores de cada cono  $C(G; S, T)$  puede utilizarse la proposición A.3.22 o algún otro de los algoritmos existentes para calcular los rayos extremales (o conjuntos de generadores) de un cono poliédrico fuertemente convexo (por ejemplo el proporcionado por Hemmecke en [38]).

### 3.6. Conos de curvas asociados a superficies sobre $\mathbb{P}^2$

En esta sección consideraremos dos clases amplias de superficies sobre  $\mathbb{P}^2$ , es decir, de superficies obtenidas como cielo de una configuración sobre  $\mathbb{P}^2$ . Serán las obtenidas como cielo de una configuración tórica sobre el plano proyectivo o una configuración de puntos base de un haz de curvas planas. En el caso de las configuraciones tóricas, caracterizaremos aquellas que verifican la condición de P-suficiencia. Lo mismo haremos para las configuraciones de puntos base de haces de curvas planas con una única rama en el infinito. En el caso de los haces de curvas planas con curvas genéricas irreducibles, veremos que la P-suficiencia de la configuración de puntos base implica la racionalidad de dichas curvas genéricas.

#### CONFIGURACIONES TÓRICAS

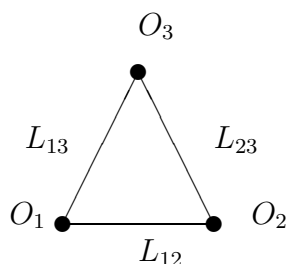
Una situación especialmente conocida corresponde al caso de la superficie obtenida como cielo de una *configuración tórica*  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  sobre  $\mathbb{P}^2$ . En este caso, el cono de curvas se sabe que es poliédrico (véase [44]). Cabe preguntarse, en vista de que la condición de P-suficiencia constituye una condición suficiente de poliedricidad del cono de curvas asociado al cielo de una configuración, qué configuraciones tóricas verifican tal condición. Las cadenas tóricas admiten una codificación muy sencilla en términos de secuencias ordenadas de ciertos símbolos. Mostraremos, a continuación, cómo se forman las configuraciones tóricas sobre  $\mathbb{P}^2$  y cómo se codifican las cadenas tóricas. Ello nos permitirá caracterizar los grafos de proximidad correspondientes a configuraciones tóricas y decidir cuáles de ellos corresponden a configuraciones P-suficientes.

Consideremos tres puntos no alineados  $O_1, O_2, O_3$  del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . Denotemos por  $L_{ij}$  a la recta proyectiva que une  $O_i$  con  $O_j$ , con  $1 \leq i, j \leq 3$  y  $i \neq j$ .

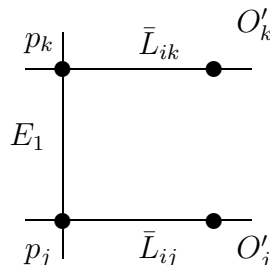
Una *configuración tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$*  es aquella en la que sólo aparecen puntos propios e infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  pertenecientes a una cierta familia de puntos permitidos. Veamos, inductivamente, cuáles son estos puntos permitidos.

Los puntos propios permitidos en una configuración de este tipo son  $O_1, O_2$  y  $O_3$ .

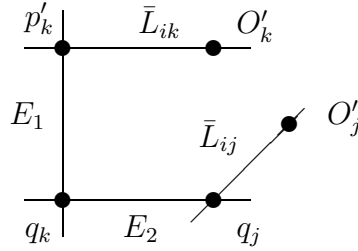




Si elegimos uno de ellos,  $O_i$ , y denotamos por  $O_j$  y  $O_k$  a los otros dos, en el primer entorno infinitesimal de  $O_i$  sólo son permitidos dos puntos: el correspondiente a la dirección dada por la recta  $L_{ij}$ , que diremos que *apunta a*  $O_j$ , y el correspondiente a la dirección dada por  $L_{ik}$ , que diremos que *apunta a*  $O_k$ . En el siguiente gráfico,  $O'_j$  y  $O'_k$  denotan las imágenes en  $\text{Bl}_{O_i}(\mathbb{P}^2)$  de los puntos  $O_j$  y  $O_k$ ,  $\bar{L}_{ij}$  y  $\bar{L}_{ik}$  denotan los transformados estrictos de las rectas  $L_{ij}$  y  $L_{ik}$ ,  $E_1$  es el divisor excepcional,  $p_j$  es el punto de  $E_1$  que apunta a  $j$  y  $p_k$  es el que apunta a  $k$ .



Si efectuamos una explosión con centro en uno de los puntos  $p_j, p_k$ , se tiene que, en la nueva superficie, la curva  $\Phi_1 := \bar{L}_{ij} + \bar{L}_{ik} + E_1$  posee dos componentes conexas, cada una de ellas conteniendo a una de las curvas  $\bar{L}_{ij}$  y  $\bar{L}_{ik}$ .  $\Phi_1$  interseca con  $E_2$  en sendos puntos pertenecientes a componentes conexas distintas de  $\Phi_1$ . Estos dos puntos son los únicos de  $E_2$  permitidos. Cada uno de estos puntos se dice que *apunta a*  $O_j$  (resp., *apunta a*  $O_k$ ) si pertenece a la misma componente conexa que contiene a  $\bar{L}_{ij}$  (resp.,  $\bar{L}_{ik}$ ). En el siguiente gráfico se representa la situación después de explotar en  $p_j$ . Se denota por  $q_j$  al punto del divisor excepcional  $E_2$  que apunta a  $O_j$ , y por  $q_k$  al que apunta a  $O_k$ .  $p'_k$ ,  $O'_j$  y  $O'_k$  denotan las imágenes de los puntos  $p_k$ ,  $O_j$  y  $O_k$  en la superficie obtenida.



Supongamos ya determinados los puntos permitidos en el  $(s - 1)$ -ésimo entorno infinitesimal de  $O_i$  (para  $s \geq 2$ ). Consideremos la explosión en uno de estos puntos y la siguiente curva sobre la nueva superficie obtenida:  $\Phi_{s-1} := \bar{L}_{ij} + \bar{L}_{ik} + E_1 + E_2 + \dots + E_{s-1}$ . Es claro que  $\Phi_{s-1}$  tiene dos componentes conexas, cada una de ellas conteniendo a una de las curvas  $\bar{L}_{ij}$  y  $\bar{L}_{ik}$ . Además,  $\Phi_{s-1}$  interseca con el nuevo divisor excepcional  $E_s$  en dos puntos pertenecientes a componentes conexas distintas de  $\Phi_{s-1}$ . Estos dos puntos son los únicos de  $E_s$  permitidos. Cada uno de ellos se dice que *apunta a*  $O_j$  (resp., *apunta a*  $O_k$ ) si pertenece a la componente conexa que contiene  $\bar{L}_{ij}$  (resp.,  $\bar{L}_{ik}$ ).

Inductivamente determinamos, así, los puntos propios e infinitamente próximos a  $\mathbb{P}^2$  que son permitidos en una configuración tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$ .

Diremos que una configuración  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbb{P}^2$  es *tórica* si existen tres puntos no alineados de  $\mathbb{P}^2$ ,  $O_1, O_2$  y  $O_3$ , tales que  $\mathcal{C}$  es una configuración tórica de  $\mathbb{P}^2$  con orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$ .

**Nota 3.6.1.** Las configuraciones tóricas pueden también describirse a partir de la estructura de  $\mathbb{P}^2$  como variedad tórica. Una variedad tórica es una variedad normal  $X$  que contiene un toro algebraico  $T \cong k^* \times \dots \times k^*$  como subconjunto abierto denso, junto con una acción  $T \times X \rightarrow X$  de  $T$  en  $X$  que extiende a la acción natural de  $T$  sobre sí mismo. Fijados tres puntos no alineados  $O_1, O_2, O_3 \in \mathbb{P}^2$ , existe en  $\mathbb{P}^2$  una estructura de variedad tórica de manera que los únicos puntos de  $\mathbb{P}^2$  que quedan fijos por la acción de  $T$  son  $O_1, O_2$  y  $O_3$ . Si consideramos un índice  $i \in \{1, 2, 3\}$  y denotamos  $\{j, k\} := \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ , la variedad  $\text{Bl}_{O_i}(\mathbb{P}^2)$  posee también estructura de variedad tórica y existen únicamente dos puntos del divisor excepcional que quedan fijos por la acción de  $T$ ; estos puntos son el que *apunta a*  $O_j$  y el que *apunta a*  $O_k$ . De igual manera, si elegimos uno de estos dos puntos y consideramos la superficie obtenida mediante la explosión con centro en este punto, el nuevo divisor excepcional posee también dos puntos fijados por  $T$ , que se corresponden con el que *apunta a*  $O_j$  y el que *apunta a*  $O_k$ . El mismo

fenómeno se obtiene en cada entorno infinitesimal sucesivo. Por tanto, una configuración tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$  es aquella tal que sus puntos propios son puntos de  $\mathbb{P}^2$  fijados por la acción de  $T$  y cada punto no propio es fijado por la acción de  $T$  sobre la variedad obtenida al explotar en el punto precedente. Para una descripción más detallada véase [63] o también [9, Sect. 2].

Fijaremos, a partir de ahora, tres puntos no alineados del plano proyectivo,  $O_1, O_2$  y  $O_3$ , y convendremos que todas las configuraciones tóricas utilizadas tienen orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$ .

Dada una configuración tórica  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbb{P}^2$ , a partir de la descripción geométrica anterior son claras las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{C}$  puede tener, como máximo, tres orígenes.
2. Para cada punto  $p \in \mathcal{C}$  el cardinal del conjunto  $\{q \in \mathcal{C} \mid q \geq p \text{ y } \ell(q) = \ell(p) + 1\}$  es menor o igual que 2.

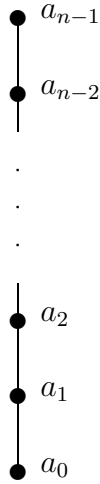
Denominaremos *cadena tórica* a toda configuración tórica que sea una cadena. Cabe observar que cualquier cadena tórica  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  (con orígenes en  $\{O_1, O_2, O_3\}$ ) queda determinada mediante una secuencia ordenada  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  verificando las siguientes condiciones:

1.  $a_0 \in \{1, 2, 3\}$  indica que el punto propio  $p_1$  de la cadena es  $O_{a_0}$ .
2. Para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a_0\}$  indica que  $p_{i+1}$  apunta a  $O_{a_i}$ .

Además, dados dos puntos  $p_j, p_{j+k} \in \mathcal{C}$  se verifica que  $p_{j+k}$  es próximo a  $p_j$  si y sólo si  $a_j \notin \{a_{j+1}, \dots, a_{j+k-1}\}$ .

De forma equivalente, toda cadena tórica puede caracterizarse mediante un árbol etiquetado con raíz  $A_{\mathcal{C}}$  tal que:

1. Sus vértices están en correspondencia biyectiva con los puntos de la cadena (siendo la raíz el correspondiente al punto propio  $p_1$ ).
2. Dos vértices están unidos por una arista si y sólo si uno de ellos pertenece al primer entorno infinitesimal del otro.
3. La raíz está etiquetada con  $a_0 \in \{1, 2, 3\}$ , indicando que  $p_1$  coincide con el punto  $O_{a_0}$ .
4. Para todo  $j = 1, \dots, n$ , el vértice  $p_{j+1}$  se etiqueta con  $a_j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a_0\}$ , indicando que el punto  $p_{j+1}$  apunta a  $O_{a_j}$ .



Consideremos ahora una configuración tórica  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbb{P}^2$ . Puesto que es unión (no necesariamente disjunta) de cadenas tóricas, queda determinada mediante un grafo (bosque) etiquetado  $A_{\mathcal{C}}$  cuyos vértices están en correspondencia biyectiva con los puntos de  $\mathcal{C}$  y que es la unión (no necesariamente disjunta) de los árboles etiquetados correspondientes a las cadenas maximales contenidas en  $\mathcal{C}$ . Este grafo etiquetado satisface las siguientes propiedades:

- (a)  $A_{\mathcal{C}}$  es unión disjunta de tres sub-grafos etiquetados  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , donde  $A_i$  es el conjunto vacío o un árbol con raíz, cuya raíz lleva la etiqueta  $i$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- (b) No concurren más de tres aristas en un mismo vértice.
- (c) Todo vértice de  $A_i$  (excepto la raíz) está etiquetado con un elemento de  $\{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ .
- (d) Los extremos de dos aristas con origen común tienen diferentes etiquetas.

Es claro, además, que todo grafo etiquetado verificando las condiciones (a), (b), (c) y (d) se corresponde con una única configuración tórica sobre  $\mathbb{P}^2$ , y que a partir de él puede recuperarse el grafo de proximidad de la configuración (puesto que las etiquetas determinan las relaciones de proximidad entre los puntos). Tenemos, por tanto, caracterizados todos los grafos de proximidad asociados a configuraciones tóricas sobre  $\mathbb{P}^2$ .

Los siguientes ejemplos muestran que existen configuraciones tóricas que son P-suficientes y otras que no lo son.

**Ejemplo 3.6.2.** Consideremos la configuración tórica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{P}^2$  correspondiente al grafo etiquetado de la figura 3.4. El grafo de proximidad asociado a esta configuración es el mismo que el correspondiente a la configuración del ejemplo 3.5.16. Se vea en este ejemplo que cualquier configuración sobre  $\mathbb{P}^2$  con este grafo de proximidad es P-suficiente. Luego  $\mathcal{C}$  es P-suficiente.

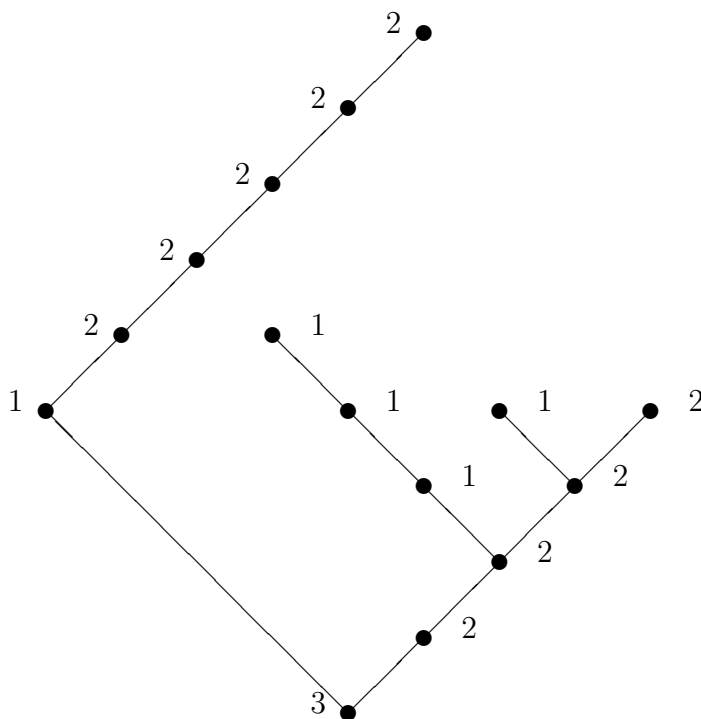


Figura 3.4: Grafo etiquetado del ejemplo 3.6.2

**Ejemplo 3.6.3.** Según la proposición 3.5.19, son P-suficientes las configuraciones tóricas de cardinal menor o igual que 8 y también las de cardinal 9 con un punto satélite al menos (como por ejemplo la configuración tórica correspondiente al grafo etiquetado de la figura 3.5).

**Ejemplo 3.6.4.** No todas las configuraciones tóricas son P-suficientes: considérense aquellas configuraciones tóricas  $\mathcal{C}$  formadas por nueve o más puntos de manera que cada punto posee, a lo sumo, otro punto en  $\mathcal{C}$  que le es próximo

(véase, por ejemplo, la configuración tórica correspondiente al grafo etiquetado de la figura 3.6). Según la proposición 3.5.19 estas configuraciones no son P-suficientes.

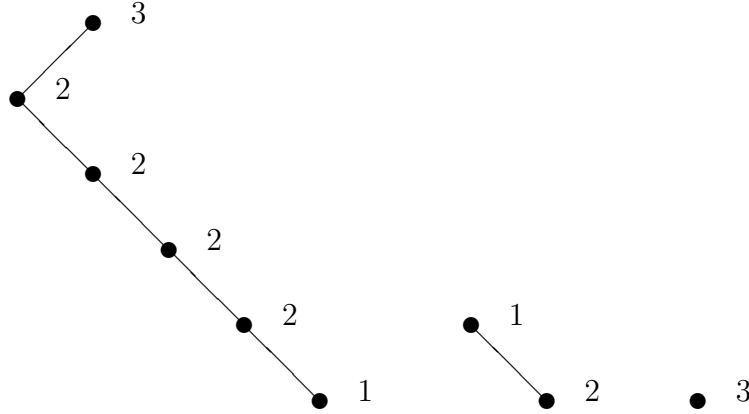


Figura 3.5: Grafo etiquetado del ejemplo 3.6.3

Expresemos ahora las condiciones de P-suficiencia para las configuraciones tóricas en términos de las etiquetas de los correspondientes grafos. Para ello, consideremos primero una cadena tórica cualquiera  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  y su secuencia de etiquetas asociada. Si ésta consta de una sola etiqueta  $a_0 \in \{1, 2, 3\}$  (es decir, si la configuración tiene un solo punto) definimos  $T(\mathcal{C}) := \emptyset$ . En otro caso la secuencia será de la forma

$$(a_0, \overbrace{a_1, \dots, a_1}^{k_1}, \dots, \overbrace{a_i, \dots, a_i}^{k_i}, \dots, \overbrace{a_s, \dots, a_s}^{k_s})$$

con  $a_0 \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a_0\}$  y  $a_i \neq a_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, s - 1$ . Definimos los siguientes valores asociados a la cadena tórica  $\mathcal{C}$ :

$$s(\mathcal{C}) := s,$$

$$k_i(\mathcal{C}) := k_i$$

para todo  $i = 1, \dots, s(\mathcal{C})$ , y también el siguiente vector:

$$T(\mathcal{C}) := (k_1(\mathcal{C}), \dots, k_{s(\mathcal{C})}(\mathcal{C})).$$

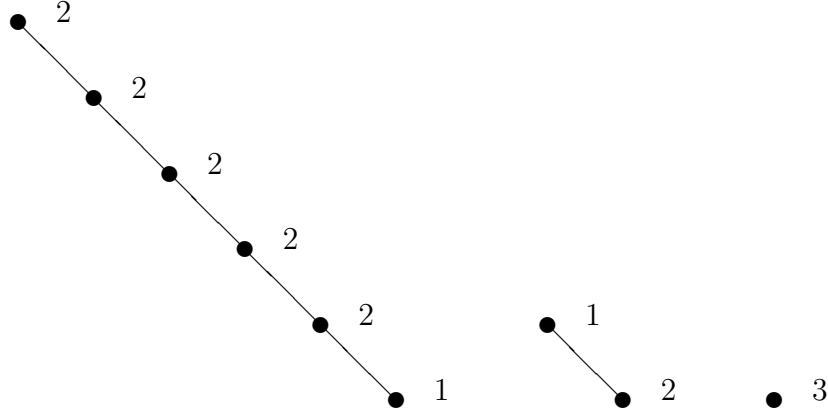


Figura 3.6: Grafo etiquetado del ejemplo 3.6.4

Mediante una simple comparación entre el grafo de proximidad de la cadena  $\mathcal{C}$  y su grafo etiquetado  $A_{\mathcal{C}}$  se deduce que las relaciones de proximidad entre los puntos de  $\mathcal{C}$  son las siguientes:

- Si  $i = 1, \dots, s-2$ , el punto  $p_{k_1+\dots+k_i+j}$  es próximo a  $p_{k_1+\dots+k_i}$  para todo  $j = 1, \dots, k_{i+1} + 1$ .
- $p_{k_1+\dots+k_{s-1}+j}$  es próximo a  $p_{k_1+\dots+k_{s-1}}$  para todo  $j = 1, \dots, k_s + 1$

A partir de estas relaciones podemos calcular, en función de  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , el divisor  $D(p_n)$  asociado al punto maximal de la cadena  $\mathcal{C}$ . En efecto, este divisor tiene la forma:

$$D(p_n) = - \sum_{i=1}^n v_i(\mathcal{C}) E_i^*$$

donde  $v_n(\mathcal{C}) = 1$  y  $v_i(\mathcal{C}) = \sum_{j:p_j \rightarrow p_i} v_j(\mathcal{C})$ .

Denotemos por  $v(\mathcal{C})$  al vector  $(v_1(\mathcal{C}), v_2(\mathcal{C}), \dots, v_n(\mathcal{C}))$  y veamos cuales son sus componentes. Para ello definamos, para cada cadena tórica  $\mathcal{C}$ , la siguiente secuencia de enteros positivos:

$$w_{s(\mathcal{C})+1}(\mathcal{C}) := 1,$$

$$w_s(\mathcal{C}) := 1,$$

$$w_i(\mathcal{C}) := k_{i+1}(\mathcal{C})w_{i+1}(\mathcal{C}) + w_{i+2}(\mathcal{C})$$

para todo  $i = 1, \dots, s(\mathcal{C}) - 1$ .

**Lema 3.6.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una cadena tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con  $T(\mathcal{C}) = (k_1, \dots, k_s)$ . Para cualquier índice  $i$  perteneciente a  $\{1, \dots, s-1\}$  se satisfacen las siguientes igualdades:*

$$v_{k_1+\dots+k_i+j}(\mathcal{C}) = v_{k_1+\dots+k_{i+1}}(\mathcal{C}) \text{ para todo } j = 1, \dots, k_{i+1} - 1.$$

*Demostración.* A partir de las relaciones de proximidad entre los puntos de  $\mathcal{C}$  descritas anteriormente, es claro que  $p_{k_1+\dots+k_i+j}$  sólo posee un único punto próximo a él para todo  $j = 1, \dots, k_{i+1} - 1$ . Teniendo en cuenta esto y la definición recurrente de la secuencia  $\{v_i(\mathcal{C})\}_{i=1}^n$ , la igualdad del enunciado es clara.  $\square$

**Lema 3.6.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una cadena tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con  $T(\mathcal{C}) = (k_1, \dots, k_s)$ . Se verifican las igualdades*

$$v_{k_1+\dots+k_i}(\mathcal{C}) = w_i(\mathcal{C})$$

para todo  $i = 1, \dots, s$ .

*Demostración.* Demostremos el resultado por inducción descendente sobre  $i$ . Para  $i = s$  es evidente. Así que supongamos  $v_{k_1+\dots+k_t}(\mathcal{C}) = w_t(\mathcal{C})$  para  $t > i$  y veamos que la igualdad también se verifica para  $i$ . Aplicando el lema 3.6.5 y la hipótesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned} v_{k_1+\dots+k_i}(\mathcal{C}) &= \sum_{j=1}^{k_{i+1}} v_{k_1+\dots+k_i+j}(\mathcal{C}) + v_{k_1+\dots+k_{i+1}+1}(\mathcal{C}) = \\ &= k_{i+1}w_{i+1}(\mathcal{C}) + w_{i+2}(\mathcal{C}) = w_i(\mathcal{C}), \end{aligned}$$

verificándose la igualdad también para  $i$ .  $\square$

**Lema 3.6.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una cadena tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  con  $T(\mathcal{C}) = (k_1, \dots, k_s)$ . Las expresiones de las componentes de  $v(\mathcal{C})$  en función de  $k_1, \dots, k_s$  son las siguientes:*

- $v_1(\mathcal{C}) = v_2(\mathcal{C}) = \dots = v_{k_1}(\mathcal{C}) = w_1(\mathcal{C})$ .
- $v_{k_1+\dots+k_{i+1}}(\mathcal{C}) = v_{k_1+\dots+k_{i+2}}(\mathcal{C}) = \dots = v_{k_1+\dots+k_i+k_{i+1}}(\mathcal{C}) = w_{i+1}(\mathcal{C})$  para todo  $i = 1, \dots, s-1$ .
- $v_n(\mathcal{C}) = 1$ .



*Demostración.* La primera secuencia de igualdades se deduce a partir del lema 3.6.6 y del hecho de que  $p_i$  sólo posee un punto que le es próximo, para todo  $i = 1, \dots, k_1 - 1$ . La segunda secuencia se deduce del lema 3.6.5 y del lema 3.6.6. La tercera es trivial.  $\square$

Por tanto, para cualquier cadena tórica  $\mathcal{C}$ , el vector  $v(\mathcal{C})$  admite la siguiente expresión:

$$v(\mathcal{C}) = (\overbrace{w_1(\mathcal{C}), \dots, w_1(\mathcal{C})}^{k_1(\mathcal{C})}, \overbrace{w_2(\mathcal{C}), \dots, w_2(\mathcal{C})}^{k_2(\mathcal{C})}, \dots, \overbrace{w_{s(\mathcal{C})}(\mathcal{C}), \dots, w_{s(\mathcal{C})}(\mathcal{C})}^{k_{s(\mathcal{C})}(\mathcal{C})}, 1).$$

Consideremos ahora una configuración tórica cualquiera  $\mathcal{C}$ . Denotaremos por  $\mathcal{C}_{p_i}$  a la cadena tórica formada por  $p_i$  y los puntos que le preceden:

$$\mathcal{C}_{p_i} := \{q \in \mathcal{C} \mid p_i \geq q\}.$$

Los resultados anteriores nos permiten expresar cada divisor  $D(p_i)$  asociado a un punto de  $\mathcal{C}$  en términos de  $T(\mathcal{C}_{p_i})$ , es decir, en términos de las etiquetas del grafo  $A_{\mathcal{C}}$  correspondientes a puntos de  $\mathcal{C}_{p_i}$ . Esto nos permitirá caracterizar las configuraciones tóricas P-suficientes en términos de las etiquetas del grafo etiquetado asociado. La siguiente proposición muestra esta caracterización:

**Proposición 3.6.8.** *Considerando las notaciones anteriores, una configuración tórica  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  es P-suficiente si y sólo si la matriz  $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  dada por*

$$g_{ij} := 9 \sum_{k=1}^{\#(\mathcal{C}_{p_i} \cap \mathcal{C}_{p_j})} v_k(\mathcal{C}_{p_i}) v_k(\mathcal{C}_{p_j}) - \left( \sum_{k=1}^{\#\mathcal{C}_{p_i}} v_k(\mathcal{C}_{p_i}) \right) \left( \sum_{k=1}^{\#\mathcal{C}_{p_j}} v_k(\mathcal{C}_{p_j}) \right)$$

*es condicionalmente definida positiva.*

*Demostración.* Se sigue de sustituir en la expresión de la matriz  $G_{\mathcal{C}}$ , los divisores  $D(p_i)$  por sus expresiones deducidas anteriormente.  $\square$

En el caso de una cadena tórica, el corolario 3.5.24 nos proporciona una caracterización mucho más simple:

**Proposición 3.6.9.** *Con las notaciones anteriores, una cadena tórica  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_n\}$  es P-suficiente si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones:*

(a)  $T(\mathcal{C}) = \emptyset$ .

$$(b) \ s(\mathcal{C}) = 1 \quad y \quad k_1(\mathcal{C}) \leq 7.$$

$$(c) \ s(\mathcal{C}) = 2 \quad y \quad 7k_1(\mathcal{C})k_2(\mathcal{C}) + 7k_1(\mathcal{C}) + 8 > k_1(\mathcal{C})^2k_2(\mathcal{C}) + k_1(\mathcal{C})^2 + k_2(\mathcal{C}).$$

$$(d) \ s(\mathcal{C}) \geq 3 \quad y$$

$$9[k_1(\mathcal{C})w_1(\mathcal{C})^2 + w_1(\mathcal{C})w_2(\mathcal{C})] > [(k_1(\mathcal{C})w_1(\mathcal{C}) + w_1(\mathcal{C}) + w_2(\mathcal{C}) - 1]^2.$$

*Demostración.* Si  $T(\mathcal{C}) = \emptyset$ , entonces la configuración es claramente P-suficiente, al estar reducida a un punto.

Si  $s(\mathcal{C}) = 1$ , entonces todos los puntos de  $\mathcal{C}$  son libres, con lo cual la configuración será P-suficiente si y sólo si  $n = k_1(\mathcal{C}) + 1 \leq 8$  (como consecuencia de la proposición 3.5.19).

Si  $s(\mathcal{C}) = 2$ , por el corolario 3.5.24 se tiene que la cadena  $\mathcal{C}$  será P-suficiente si y sólo si

$$9D(p_n)^2 - K_Z \cdot D(p_n) > 0, \quad (3.19)$$

siendo  $Z$  el cielo de  $\mathcal{C}$ . Pero en este caso se tiene

$$v(\mathcal{C}) = \overbrace{(k_2(\mathcal{C}) + 1, \dots, k_2(\mathcal{C}) + 1)}^{k_1(\mathcal{C})}, \overbrace{(1, \dots, 1, 1)}^{k_2(\mathcal{C})},$$

y la condición anterior equivale a

$$9[k_1(\mathcal{C})(k_2(\mathcal{C}) + 1)^2 + k_2(\mathcal{C}) + 1] - [k_1(\mathcal{C})(k_2(\mathcal{C}) + 1) + k_2(\mathcal{C}) + 1]^2 > 0,$$

que, a su vez, es equivalente a la condición del enunciado.

Supongamos ahora  $s(\mathcal{C}) \geq 3$ . Para simplificar la notación, denotemos simplemente por  $k_i, w_i$  y  $s$  a los valores  $k_i(\mathcal{C}), w_i(\mathcal{C})$  y  $s(\mathcal{C})$ . Según el corolario 3.5.24,  $\mathcal{C}$  será P-suficiente si y sólo si se satisface (3.19), es decir, si y sólo si

$$9\left[\sum_{i=1}^s k_i w_i^2 + 1\right] - \left[\sum_{i=1}^s k_i w_i + 1\right]^2 > 0. \quad (3.20)$$

Por otra parte, como  $w_i = k_{i+1}w_{i+1} + w_{i+2}$  para todo  $i = 1, \dots, s-2$ , efectuando el correspondiente sumatorio en ambos miembros obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{s-2} w_i = \sum_{i=2}^{s-1} k_i w_i + \sum_{i=3}^s w_i.$$

Por tanto:

$$\sum_{i=2}^{s-1} k_i w_i = w_1 + w_2 - w_{s-1} - w_s.$$

Sumando  $k_1w_1 + k_sw_s$  en ambos miembros y teniendo en cuenta que  $w_{s-1} = k_sw_s + 1$  y que  $w_s = 1$ :

$$\sum_{i=1}^s k_i w_i = k_1 w_1 + w_1 + w_2 - 2. \quad (3.21)$$

Por otro lado, puesto que  $w_i - w_{i+2} = k_{i+1}w_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, s-2$ , multiplicando ambos miembros por  $w_{i+1}$  y sumando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{s-1} w_i w_{i+1} - \sum_{i=2}^s w_i w_{i+1} = \sum_{i=2}^s k_i w_i^2,$$

y teniendo en cuenta que  $w_s = w_{s+1} = 1$ :

$$\sum_{i=2}^s k_i w_i^2 = w_1 w_2 - 1.$$

Sumando a ambos miembros  $k_1 w_1^2$  se obtiene:

$$\sum_{i=1}^s k_i w_i^2 = k_1 w_1^2 + w_1 w_2 - 1 \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.21) y (3.22) en (3.20) se llega a la condición del enunciado.  $\square$

Hemos caracterizado todas las configuraciones tóricas sobre  $\mathbb{P}^2$  que son P-suficientes. Puesto que la condición de P-suficiencia depende únicamente del grafo de proximidad, cualquier configuración sobre  $\mathbb{P}^2$  cuyo grafo de proximidad coincida con el de alguna configuración tórica será también P-suficiente; es más, en virtud del teorema 3.5.10 serán P-suficientes aquellas configuraciones cuyo grafo de proximidad sea un refinamiento de uno asociado a una configuración tórica P-suficiente. Esto se resume en el siguiente resultado:

**Proposición 3.6.10.** *Cualquier configuración sobre  $\mathbb{P}^2$  cuyo grafo de proximidad coincida con un refinamiento del grafo de proximidad asociado a una configuración tórica sobre  $\mathbb{P}^2$  P-suficiente, es también P-suficiente. Por tanto, el cono de curvas asociado a su cielo será poliédrico.*

## CONFIGURACIONES ASOCIADAS A HACES DE CURVAS PLANAS

Supondremos a partir de ahora que la característica del cuerpo  $k$  es nula. Un haz de curvas planas  $V$  será un sistema lineal de  $\mathbb{P}^2$  sin parte fija y de

dimensión proyectiva uno.  $V$  estará generado, por tanto, por dos secciones globales  $C$  y  $D$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  sin componentes comunes, para algún número natural positivo  $d$  que denominaremos *grado* del haz. Lo denotaremos  $V = \langle C, D \rangle$ . Diremos que *las curvas genéricas  $V$  verifican una determinada propiedad* si todas las curvas de  $V$ , salvo un número finito, satisfacen tal propiedad.

Dado un haz de curvas planas  $V = \langle C, D \rangle$ , el haz  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-D)$  es un haz de ideales con soporte finito de  $\mathbb{P}^2$ , con lo cual podemos considerar su configuración de puntos base y su clúster de puntos base asociados, que denominaremos *configuración* (resp., *clúster*) *de puntos base del haz  $V$* .

El siguiente resultado muestra cómo la P-suficiencia de la configuración de puntos base de un haz de curvas planas con curvas genéricas íntegras implica la racionalidad de dichas curvas genéricas. Por tanto, la condición de P-suficiencia constituye, en este ámbito particular, un criterio de racionalidad para las curvas genéricas.

**Teorema 3.6.11.** *Sea  $V$  un haz de curvas planas cuyas curvas genéricas son íntegras y tal que su configuración de puntos base es P-suficiente. Entonces, las curvas genéricas de  $V$  son racionales.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K} = (\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n)$  el clúster de puntos base de  $V$ . Puesto que todas las curvas de  $V$ , salvo un número finito, pasan efectivamente por  $\mathcal{K}$  y sus transformados estrictos en el cielo de  $\mathcal{C}$  son no singulares, se tiene que las curvas genéricas de  $V$  verifican las tres siguientes condiciones:

- (1) pasan efectivamente por  $\mathcal{K}$ ,
- (2) sus transformados estrictos en el cielo de  $\mathcal{C}$  son no singulares,
- (3) son curvas íntegras.

Consideremos cualquier curva  $C$  de  $V$  verificando (1), (2) y (3). Según el teorema 3.5.25 se satisface la siguiente desigualdad:

$$9 \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 > 0. \quad (3.23)$$

Pero, por otra parte, aplicando el teorema de Bezout a dos curvas cualesquiera del haz satisfaciendo la propiedad (1), se deduce la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = d^2,$$

donde  $d$  es el grado de  $V$ . Sustituyendo en (3.23) se tiene:

$$9d^2 - \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 > 0,$$

que equivale a

$$-3d + \sum_{i=1}^n v_i < 0,$$

es decir,

$$K_Z \cdot \bar{C} < 0,$$

siendo  $Z$  el cielo de la configuración  $\mathcal{C}$  y  $\bar{C}$ , como es usual, el transformado estricto de  $C$  en  $Z$ .

Utilizando esto y teniendo en cuenta que  $\bar{C}^2 = 0$ , podemos acotar el género aritmético de  $\bar{C}$ :

$$p_a(\bar{C}) = 1 + \frac{1}{2}(\bar{C}^2 + K_Z \bar{C}) \leq 0.$$

Por tanto,  $p_a(\bar{C}) = 0$  (al ser  $\bar{C}$  reducida). Como  $\bar{C}$  es no singular,  $p_a(\bar{C})$  coincide con su género geométrico, que coincide, a su vez, con el de  $C$ . Por tanto, se concluye que  $C$  es una curva racional.  $\square$

Dada una curva  $C$  de  $\mathbb{P}^2$  y una recta  $R$  de  $\mathbb{P}^2$ , diremos que  $C$  tiene una *única rama en  $R$*  si la intersección  $C \cap R$  consta de un único punto  $p \in \mathbb{P}^2$  y  $C$  es reducida y con una única rama en  $p$  (es decir, el germen de  $C$  en  $p$  es analíticamente irreducible). Obsérvese que esta condición implica que  $C$  es una curva íntegra. La recta  $R$  puede ser considerada como la *recta del infinito* en la compactificación de  $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{P}^2 \setminus R$  a  $\mathbb{P}^2$ , en cuyo caso se dice que  $C$  tiene una *única rama en el infinito*. Este tipo de curvas ha sido extensamente estudiado por muchos autores, especialmente Abhyankar, Moh y Satayhe (véase [2], [57] y [70]), por su relación con la conjetura del jacobiano. Campillo, Piltant y Reguera estudian en [11] el cono de curvas y los conos característico y semiamplio de la superficie obtenida como cielo de la configuración de puntos base de un haz de  $\mathbb{P}^2$  del tipo  $V_C := \langle C, dR \rangle$ , siendo  $d$  el grado de la curva  $C$ . Estos haces, denominados *haces con una única rama en el infinito*, poseen como configuración de puntos base una cadena de  $\mathbb{P}^2$  cuyo origen es el punto  $p$  de intersección entre  $C$  y la recta del infinito; denotemos por  $\mathcal{C}_{V_C}$  a esta configuración.

Por otra parte, consideremos la configuración  $\mathcal{D}_C$  de  $\mathbb{P}^2$  tal que su morfismo asociado  $\pi_{\mathcal{D}_C} : X(\mathcal{D}_C) \rightarrow X := \mathbb{P}^2$  es la resolución sumergida minimal

de la rama de  $C$  en  $p$ . Por un resultado de Moh en [57], todas las curvas de  $V_C$ , excepto  $dR$ , son también curvas íntegras con una única rama en el infinito que pasan efectivamente por los puntos de  $\mathcal{D}_C$  con multiplicidades iguales a las de  $C$  (es decir, tienen una resolución sumergida minimal en  $p$  simultánea a la de  $C$ ). Dicho de otra forma, si  $\mathcal{C}_{V_C} = \{p_1 = p, \dots, p_n\}$  y  $\mathcal{K}_{V_C} = (\mathcal{C}_{V_C}, \{v_i\}_{i=1}^n)$  es el clúster de puntos base de  $V_C$ , entonces existe  $m \leq n$  tal que  $\mathcal{D}_C = \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $v_i$  es la multiplicidad efectiva de  $C$  en  $p_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$  y  $v_i = 1$  para todo  $i = m + 1, \dots, n$ . Por tanto, la configuración de puntos base de  $V_C$  consta de los puntos que aparecen en la resolución sumergida minimal de la rama de  $C$  en  $p$ , seguidos de tantos puntos libres como sean necesarios para verificarse la relación  $d^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2 + (n - m)$ ; esto último es consecuencia del teorema de Bezout, puesto que la intersección de dos curvas genéricas del haz debe ser igual a  $d^2$ .

En el estudio de las curvas con una única rama en el infinito se ha usado con frecuencia en la literatura un semigrupo, al que llamaremos *semigrupo en el infinito*, asociado a la rama de  $C$  en su punto de intersección con la recta del infinito. Veremos que, para cada curva de este tipo, existe un determinado conjunto de generadores del semigrupo a partir del cual pueden obtenerse los exponentes característicos asociados a la rama de  $C$  en  $p$  y, por tanto, el grafo de proximidad asociado a la resolución sumergida minimal de la rama de  $C$  en  $p$ . Ahora bien, este grafo de proximidad determina, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, al grafo de proximidad asociado a la configuración de puntos base del haz  $V_C$ : sólo hay que completar la cadena con vértices correspondientes a tantos puntos libres como sean necesarios para que la suma de los cuadrados de las multiplicidades coincida con  $d^2$ . Esto nos permitirá expresar la condición de P-suficiencia de la configuración  $\mathcal{C}_{V_C}$  también en términos de los generadores del semigrupo en el infinito.

Comencemos con unos conceptos previos. Sea  $C$  una curva de  $\mathbb{P}^2$  de grado  $d$  con una única rama en el infinito y sea  $p$  el punto de intersección de  $C$  con la recta del infinito. Consideremos coordenadas afines  $(X, Y, Z)$  de  $\mathbb{P}^2$  de manera que  $Z = 0$  es la recta del infinito. Supongamos que  $F(X, Y, Z)$  es el polinomio homogéneo de  $k[X, Y, Z]$  que define a  $C$  y consideremos  $R = k[x, y]/(f)$ , la  $k$ -álgebra asociada a la curva afín  $C \setminus \{p\}$  en  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{(X, Y, Z) \mid Z = 0\}$ , siendo  $f(x, y) = F(x, y, 1)$ . La única rama de  $C$  en el infinito se corresponde con una valoración  $v$  de  $K(C)$ , el cuerpo de funciones racionales sobre  $k$ . Definimos los siguientes subsemigrupos de  $\mathbb{N}$  asociados a  $C$ : *el semigrupo en el infinito*, dado por

$$\Gamma(p) := \{-v(g) \mid g \in R\},$$

y el *semigrupo de Weierstrass*

$$\Gamma'(p) := \{-v(g) \mid g \in \tilde{R}\},$$

donde  $\tilde{R}$  es la clausura íntegra de  $R$ .

Obviamente,  $\Gamma(p)$  está contenido en  $\Gamma'(p)$  y ambos semigrupos son iguales si y sólo si  $C \setminus \{p\}$  es una curva afín regular. Además, el género de  $C$  coincide con el cardinal del conjunto  $\mathbb{N} \setminus \Gamma'(p)$ . Por tanto,  $C$  será una curva racional si y sólo si  $\Gamma'(p) = \mathbb{N}$ .

Utilizando el algoritmo de las raíces aproximadas se obtiene el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [1] o en [65].

**Teorema 3.6.12. (Abhyankar-Moh)** *En las mismas condiciones y notaciones que en el párrafo anterior, existen un entero no negativo  $h$  y una sucesión de enteros  $\delta_0 = d, \delta_1, \dots, \delta_h \in \Gamma(p)$  que generan  $\Gamma(p)$  y verifican las siguientes condiciones:*

- (I) *Si  $d_i := \text{mcd}(\delta_0, \dots, \delta_{i-1})$  para  $1 \leq i \leq h+1$  y  $n_i := d_i/d_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq h$ , entonces  $d_{h+1} = 1$  y  $n_i > 1$  para  $1 \leq i \leq h$ .*
- (II)  *$n_i \delta_i$  pertenece al semigrupo generado por  $\delta_0, \dots, \delta_{i-1}$  para  $1 \leq i \leq h$ .*
- (III)  *$n_i \delta_i > \delta_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq h-1$ .*

Consideramos ahora el problema inverso: dado un semigrupo

$$\Gamma = \langle \delta_0, \dots, \delta_h \rangle \subseteq \mathbb{N},$$

cuyos generadores  $\delta_0, \dots, \delta_n$  verifican las condiciones (I), (II) y (III) del teorema 3.6.12, probar la existencia de curvas  $C$  de grado  $\delta_0$  con una única rama en el infinito cuyo semigrupo  $\Gamma(p)$  en dicha rama sea igual a  $\Gamma$ . Este problema es considerado por Reguera en [67] (sin la suposición de la característica nula) y obtiene el siguiente resultado utilizando el concepto de aproximante, que es un concepto más débil que el de raíz aproximada (utilizado por Abhyankar y Moh).

**Proposición 3.6.13.** *Sean  $\delta_0, \dots, \delta_h$  enteros positivos verificando las condiciones (I), (II) y (III) del teorema 3.6.12. Entonces, existe una curva proyectiva plana de grado  $\delta_0$  con una única rama en el infinito tal que el semigrupo  $\Gamma(p)$  en dicha rama está generado por  $\delta_0, \dots, \delta_h$ .*

*Demostración.* Se deduce de la sección 4 de [67].  $\square$

Dada una curva  $C$  de grado  $\delta_0$  con una única rama en el infinito cuyo semigrupo  $\Gamma(p)$  asociado a dicha rama está generado por enteros positivos  $\delta_0, \dots, \delta_h$  verificando las condiciones (I), (II) y (III) del teorema 3.6.12, a partir de los datos  $\delta_0, \dots, \delta_h$  es posible recuperar el grafo de proximidad

asociado a la configuración  $\mathcal{D}_C$  formada por los centros de las explosiones necesarias para obtener la resolución sumergida minimal de  $C$  en  $p$  (y, por tanto, las multiplicidades de  $C$  en cada uno de estos puntos). Para ver esto, utilizaremos como herramienta los polígonos de Newton: a cada rama de una curva centrada en un punto  $p$  se le puede asociar una secuencia de polígonos, a partir de los cuales se puede determinar la secuencia de exponentes característicos de la rama y, por tanto, el grafo de proximidad asociado a su resolución sumergida minimal. Describimos a continuación el algoritmo para el cálculo de estos polígonos de Newton. Esta construcción puede verse con más detalle en [7].

En primer lugar, definamos el concepto de polígono de Newton. Sea  $f(x, y) = \sum_{\alpha, \beta \geq 0} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  un polinomio en  $k[x, y]$  definiendo un germen de curva en  $p = (0, 0)$  y supongamos que en dicho germen sólo tiene una rama en  $p$ . Consideremos el *diagrama de Newton* de  $f$ :

$$D(f) := \{(\alpha, \beta) \mid A_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

Se denomina *polígono de Newton* de  $f$  en  $p$  al conjunto de los segmentos acotados de la frontera de la envoltura convexa de  $D(f) + (\mathbb{R}_+^2 \cup \{0\})$ , y será denotado por  $P(f)$ . Supongamos que  $v(x) < v(y)$ , donde  $v$  es la valoración asociada a la rama de  $f$  en el origen. Debe verificarse una de las dos situaciones siguientes:

- (a)  $P(f)$  consta sólo del punto  $(0, 1)$  (esto ocurre si  $v(y) = \infty$ ).
- (b)  $P(f)$  es el segmento de vértices  $(m, 0)$  y  $(0, e)$  (si  $v(y) < \infty$ ).

En el caso (a) no hay nada que hacer y el proceso termina. En el caso (b) pueden darse dos posibilidades:

- (b.1)  $e$  divide a  $m$ . En este caso, existen  $a, \lambda \in k \setminus \{0\}$  tales que

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in P(f)} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = a(y - \lambda x^{m/e})^e.$$

De esta manera, mediante el cambio de variables  $x' = x$ ,  $y' = y - \lambda(x')^{m_0/e}$  el polígono de Newton se transforma en el segmento de extremos  $(m', 0)$  y  $(0, e')$  con  $m' > m$ ; este cambio de coordenadas se denomina *transformación de tipo b.1*, y está unívocamente determinado por la ecuación de  $f$ .

- (b.2) En caso contrario, sea  $e_1 = \text{mcd}(m, e) < e$  y sea  $(\sigma, \tau)$  la única solución entera de la ecuación:

$$|\tau m - \sigma e| = e_1$$



que cumple las condiciones  $\sigma, \tau \geq 0$ ,  $2\sigma \leq m/e_1$  y  $2\tau \leq e/e_1$ ; en este caso, se efectúa la transformación  $x' = x^{e/e_1}y^\tau$ ,  $y' = x^{m/e_1}y^\sigma$  (es decir, una sucesión finita de explosiones), que llamaremos *transformación de tipo b.2*, y se considera el transformado estricto de  $f$  en dicha transformación. De esta manera, el polígono de Newton se transforma en un segmento vertical de extremos  $(0, 0)$  y  $(0, e_1)$ .

Al ser  $f$  irreducible como serie de potencias centrada en  $p$  (pues sólo hay una rama), siempre que  $v(y) < \infty$  y  $e > 1$  podemos efectuar el siguiente proceso algorítmico:

1. Mientras  $e$  divide a  $m$ , hacemos sucesivas transformaciones de tipo b.1 hasta obtener un polígono de Newton cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados sean  $m_0$  y  $e = e_0$  tales que  $e_0 < m_0$  y  $e_1 = \text{mcd}(e_0, m_0) < e_0$ .
2. En caso contrario, efectuamos la transformación de tipo b.2 apropiada tras la cual, siempre que  $e_1 > 1$ , podemos hacer de nuevo una sucesión de transformaciones de tipo b.1 hasta conseguir que el nuevo polígono de Newton verifique que  $e_2 = \text{mcd}(m_1, e_2) < e_1$ , y se sigue el proceso.

Puesto que la sucesión  $\{e_i\}$  es estrictamente decreciente, existirá un entero  $g$  tal que  $e_g = 1$ , con lo cual el proceso terminará en un número finito de pasos. Al final del algoritmo obtendremos  $g$  polígonos de Newton  $(P_i)_{i=1}^{g-1}$  que son segmentos de vértices  $(m_i, 0)$  y  $(0, e_i)$  verificando:

- (i)  $\text{mcd}(e_i, m_i) < e_i$  para  $0 \leq i \leq g - 1$ .
- (ii)  $e_{i+1} = \text{mcd}(e_i, m_i)$  para  $0 \leq i \leq g - 1$ .

En las condiciones anteriores, se tiene que los exponentes característicos de la rama de la curva definida por  $f$  en el origen son los siguientes (véase [7]):

$$\beta_0 = e_0, \quad \beta_{i+1} = m_0 + m_1 + \dots + m_i \quad \text{para } 0 \leq i \leq g - 1,$$

y éstos determinan el grafo de proximidad asociado a la resolución sumergida minimal de la rama (y, por tanto, sus multiplicidades en los centros de explosión).

Si  $\mathcal{D}_C = \{p_1 = p, \dots, p_t\}$  es la configuración formada por los puntos que aparecen como centros de explosión en la resolución sumergida minimal de

la rama determinada por  $f$  en  $p$  y  $v_i$  denota la multiplicidad de esta rama en  $p_i$ , se tienen las siguientes igualdades (véase [7]):

$$\sum_{i=1}^t v_i = m_0 + m_1 + \dots + m_{g-1} + e_0 - 1 \quad (3.24)$$

$$\sum_{i=1}^t v_i^2 = e_0 m_0 + e_1 m_1 + \dots + e_{g-1} m_{g-1} \quad (3.25)$$

Además,  $e_0$  coincide con  $s_1$  (la multiplicidad en  $p$ ).

Consideremos ahora un subsemigrupo  $\Gamma$  de  $\mathbb{N}$  generado por enteros positivos  $\delta_0, \dots, \delta_h$  verificando las condiciones (I), (II) y (III) del teorema 3.6.12 y una curva plana  $C$  de grado  $\delta_0$  con una única rama en el infinito (en el punto  $p$ ) tal que  $\Gamma(p) = \Gamma$ . En la sección 3 de [67] se deduce la expresión de la secuencia de polígonos de Newton anteriormente descrita asociada a la rama de  $C$  en  $p$  en función de los datos  $\delta_0, \dots, \delta_h$ :

- (a) Si  $\delta_0 - \delta_1$  no divide a  $\delta_0$  entonces  $h = g$  y se verifican las siguientes igualdades:

$$e_0 = \delta_0 - \delta_1 \quad \text{y} \quad m_0 = \delta_0$$

$$e_i = d_{i+1} \quad \text{y} \quad m_i = n_i \delta_i - \delta_{i+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, h-1$$

- (b) Si  $\delta_0 - \delta_1$  divide a  $\delta_0$  entonces  $h = g + 1$  y se verifican las igualdades:

$$e_0 = d_2 = \delta_0 - \delta_1 \quad \text{y} \quad m_0 = \delta_0 + n_1 \delta_1 - \delta_2$$

$$e_i = d_{i+2} \quad \text{y} \quad m_i = n_{i+1} \delta_{i+1} - \delta_{i+2} \quad \text{para } i = 1, \dots, h-2$$

De esta manera se puede recuperar, a partir de  $\delta_0, \dots, \delta_h$ , el grafo de proximidad asociado a la resolución sumergida minimal de la rama de  $C$  en  $p$  (y, por tanto, también las multiplicidades de dicha rama en los centros de explosión).

Campillo, Piltant y Reguera, en [11], prueban que el cono de curvas asociado al cielo de la configuración de puntos base de un haz con una única rama en el infinito es regular (en particular, poliédrico). Puesto que la condición de P-suficiencia proporciona un criterio de poliedricidad, es natural preguntarse cuales son los haces con una única rama en el infinito cuya configuración de puntos base es P-suficiente. El siguiente teorema caracteriza, en términos diversos, los haces  $V_C$  con una única rama en el infinito con configuración de puntos base P-suficiente.

**Teorema 3.6.14.** *Sea  $C$  una curva proyectiva plana de grado  $d$  con una única rama en el infinito (en un punto  $p$ ) y sea  $V_C$  el haz con una única rama en el infinito determinado por  $C$ . Sean  $\delta_0 = d, \delta_1, \dots, \delta_h$  generadores del semigrupo  $\Gamma(p)$  verificando las condiciones del teorema 3.6.12. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (1) *La configuración  $\mathcal{C}_{V_C}$  es  $P$ -suficiente.*
- (2) *El haz  $V_C$  posee curvas genéricas racionales.*
- (3) *El haz  $V_C$  posee curvas genéricas racionales y regulares en la parte afín.*
- (4)  *$C$  es una curva racional y regular en la parte afín.*
- (5)  *$\delta_h$  es igual a 1.*
- (6) *Se satisface una de las dos siguientes condiciones:*

(a)  $\delta_0 - \delta_1$  no divide a  $\delta_0$  y

$$\delta_0 + \delta_1 \geq d_h \delta_h + \sum_{i=1}^{h-1} (n_i \delta_i - \delta_{i+1})$$

(b)  $\delta_0 - \delta_1$  divide a  $\delta_0$  y

$$\delta_0 + \delta_1 + (n_1 - 1)\delta_0\delta_1 \geq n_1\delta_1^2 + d_h\delta_h + \sum_{i=1}^{h-1} (n_i\delta_i - \delta_{i+1})$$

- (7) *Existe un automorfismo  $\phi$  del espacio afín  $\mathbb{A}^2$  y existe una recta  $L \subseteq \mathbb{A}^2$  tal que  $\phi(L) = C \setminus \{p\}$ .*

*Demostración.* Por el teorema 3.6.11, la propiedad (1) implica la (2).

La equivalencia entre (2) y (3) es clara, puesto que las curvas genéricas de  $V_C$  poseen transformados estrictos en el cielo de  $\mathcal{C}_{V_C}$  que son curvas regulares; por tanto, su singularidad debe concentrarse necesariamente en  $p$  y deben ser regulares en la parte afín.

Denotemos por  $\mathcal{K}_{V_C} = (\mathcal{C}_{V_C}, \{v_i\}_{i=1}^l)$  al clúster de puntos base de  $V_C$ , donde  $\mathcal{C}_{V_C} = \{p_1 = p, p_2, \dots, p_l\}$ . Existe un número natural positivo  $t \leq l$  tal que la configuración asociada a la resolución sumergida minimal de la rama de  $C$  en  $p$  es  $\mathcal{D}_C = \{p_1, \dots, p_t\}$ , siendo  $v_i$  la multiplicidad de  $C$  en  $p_i$  para

todo  $i = 1, \dots, t$  y  $v_i = 1$  para todo  $i = t + 1, \dots, l$ . Si  $k := l - t$ , aplicando el teorema de Bezout se tiene la siguiente igualdad:

$$d^2 = \sum_{i=1}^t v_i^2 + k.$$

Luego:

$$k = d^2 - \sum_{i=1}^t v_i^2. \quad (3.26)$$

Puesto que las multiplicidades  $v_1, \dots, v_l$  corresponden a una resolución sumergida de un germen de curva con una sola rama, se verifican las igualdades:

$$v_i = \sum_{j \rightarrow i} v_j \quad \text{para } i = 1, \dots, l-1 \quad \text{y} \quad v_l = 1$$

y esto implica que el divisor  $D(p_l)$  correspondiente al último punto de la configuración  $\mathcal{C}_{V_C}$  tiene la siguiente expresión (véase la proposición 1.3.14):

$$D(p_l) = - \sum_{i=1}^l v_i E_i^*$$

Por tanto, si denotamos por  $Z$  al cielo de la configuración  $\mathcal{C}_{V_C}$  tenemos las siguientes igualdades:

$$D(p_l)^2 = - \sum_{i=1}^l v_i^2$$

$$K_Z \cdot D(p_l) = \sum_{i=1}^l v_i.$$

Según el corolario 3.5.24,  $\mathcal{C}$  será P-suficiente si y sólo si

$$-9D(p_l)^2 - (K_Z \cdot D(p_l))^2 > 0$$

o, de forma equivalente,

$$9 \sum_{i=1}^l v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^l v_i \right)^2 > 0.$$

Teniendo en cuenta que el primer sumatorio es igual a  $d^2$  (por el teorema de Bezout), y el segundo sumatorio coincide con  $\sum_{i=1}^t v_i + k$ , se tiene la siguiente condición equivalente:

$$\sum_{i=1}^t v_i + k < 3d. \quad (3.27)$$

Si denotamos por  $Z$  al cielo de la configuración  $\mathcal{C}_{V_C}$ , se tiene que  $K_Z \cdot \bar{C} = -3d + \sum_{i=1}^t v_i + k$ , denotando  $\bar{C}$ , como es usual, el transformado estricto de  $\bar{C}$  en  $Z$ . Por tanto, la condición de P-suficiencia equivale a:

$$K_Z \cdot \bar{C} < 0.$$

Veamos que la propiedad (1) se deduce de (4). Si  $C$  es una curva racional y regular en la parte afín, entonces el género aritmético de su transformado estricto en  $Z$  será nulo (al ser esta última una curva íntegra regular en  $Z$ ). Por tanto:

$$0 = p_a(\bar{C}) = 1 + \frac{1}{2}(\bar{C}^2 + K_Z \cdot \bar{C}) = 1 + \frac{1}{2}K_Z \cdot \bar{C},$$

al ser nula la auto-intersección de  $\bar{C}$ . Y esto implica que  $K_Z \cdot \bar{C} < 0$  y, por tanto,  $\mathcal{C}_{V_C}$  es P-suficiente.

La propiedad (3) implica la (4). En efecto, si asumimos que las curvas genéricas de  $V_C$  son racionales y regulares en la parte afín, entonces su género geométrico, que es nulo, coincide con su género aritmético. Puesto que  $\bar{C}$  posee el mismo género aritmético que las curvas genéricas, se tiene que  $p_a(\bar{C}) = 0$ . Si  $C$  no fuese regular en la parte afín,  $\bar{C}$  sería una curva singular, con lo cual el género aritmético de su normalización tendría que ser estrictamente menor que 0; esto es contradictorio, pues  $\bar{C}$  es una curva íntegra. Por tanto,  $C$  es regular en la parte afín. Esto implica que  $\bar{C}$  es una curva regular y, por tanto, su género geométrico (que es el de  $C$ ) coincide con su género aritmético (que es nulo). Concluimos, así, que  $C$  es racional.

Veamos ahora la equivalencia entre (1) y (6). Teniendo en cuenta las igualdades (3.26) y (3.27) obtenemos la siguiente condición equivalente a (1):

$$d^2 + \sum_{i=1}^t v_i < 3d + \sum_{i=1}^t v_i^2,$$

que sólo depende del grado de la curva  $C$  y de sus multiplicidades en los puntos de  $\mathcal{D}_C$ . Teniendo en cuenta (3.24) y (3.25), se llega a la siguiente expresión:

$$d^2 + m_0 + m_1 + \dots + m_{g-1} + e_0 - 1 < 3d + e_0 m_0 + e_1 m_1 + \dots + e_{g-1} m_{g-1}.$$

Sustituyendo ahora los valores  $d, m_0, \dots, m_{g-1}, e_0, \dots, e_{g-1}$  por sus expresiones en función de  $\delta_0, \dots, \delta_h$ , se llega a las condiciones (a) y (b) del enunciado, obteniéndose así la equivalencia entre las propiedades (1) y (6).

(4) implica (5). En efecto, si  $C$  es regular en la parte afín, se tiene que  $\Gamma(p)$  coincide con el semigrupo de Weierstrass de la rama de  $C$  en  $p$ . Pero, al ser  $C$  racional, este semigrupo de Weierstrass coincide con  $\mathbb{N}$ ; luego

$\Gamma(p) = \mathbb{N}$ . Debido a las propiedades de los generadores  $\delta_0, \dots, \delta_h$ , esto se verificará siempre y cuando  $\delta_h$  sea igual a 1.

Veamos que la propiedad (4) se deduce de la (5). Puesto que  $\delta_h = 1$  quiere decir  $\Gamma(p) = \mathbb{N}$ , se tiene  $\Gamma(p) = \Gamma'(p) = \mathbb{N}$ . Esto implica que  $C \setminus \{p\}$  es regular y que  $C$  es una curva racional.

La propiedad (7) implica la propiedad (4). En efecto, si existe un automorfismo afín  $\phi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  y una recta  $L \subseteq \mathbb{A}^2$  tal que  $\phi(L) = C \setminus \{p\}$ , entonces  $\phi$  induce un automorfismo  $\tilde{\phi} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  que deja fija la recta del infinito y verificando  $C = \tilde{\phi}(L)$ . Es claro, por tanto, que  $C$  debe ser una curva con una única rama en el infinito regular y racional.

La implicación recíproca de la anterior es justamente el enunciado del teorema del epimorfismo de Abhyankar y Moh (véase [2] o [56]).  $\square$

En los siguientes ejemplos se determinan los grafos de proximidad asociados a diversos haces con una única rama en el infinito, unos con configuración de puntos base P-suficiente y otros no.

**Ejemplo 3.6.15.** Sea  $C$  una curva plana de grado  $d$  con una única rama en el infinito (en un punto  $p$ ), con  $\Gamma(p) = \langle \delta_0 = d, \delta_1 \rangle$ , de manera que los generadores  $\delta_0, \delta_1$  verifican las condiciones del teorema 3.6.12 y  $\delta_0 - \delta_1$  no divide a  $\delta_0$ .

En virtud del teorema 3.6.14 la configuración de puntos base del haz  $V_C$  será P-suficiente si y sólo si  $\delta_1 = 1$ . En este caso se tendrá  $e_0 = \delta_0 - \delta_1 = d - 1$  y  $m_0 = d$ . A partir de estos valores puede calcularse la secuencia de exponentes característicos:

$$\beta_0 = e_0 = d - 1 \quad \text{y} \quad \beta_1 = m_0 = d,$$

y a partir de éstos puede construirse el grafo de proximidad asociado a la configuración formada por los centros de explosión de la resolución sumergida minimal de  $C$ , junto con la secuencia de multiplicidades (véase [7]). Consta del vértice correspondiente al punto propio  $p$  (con multiplicidad asociada  $d - 1$ ) y de  $d - 1$  puntos próximos al primero (con multiplicidad 1).

Completando el grafo anterior con  $k = d^2 - (d - 1)^2 - (d - 1)^2 - (d - 1) = d$  vértices correspondientes a puntos libres (en los que la multiplicidad de las curvas genéricas del haz  $V_C$  es 1), se obtiene el grafo de proximidad asociado a la configuración de puntos base  $\mathcal{C}_{V_C}$ . En la figura 3.7 mostramos ambos grafos, junto con las multiplicidades.

Como ejemplo explícito de este tipo de haces, podemos considerar el generado por las curvas dadas por las ecuaciones homogéneas  $XZ^{d-1} + Y^d$  y  $Z^d$ , con  $d \geq 2$ .

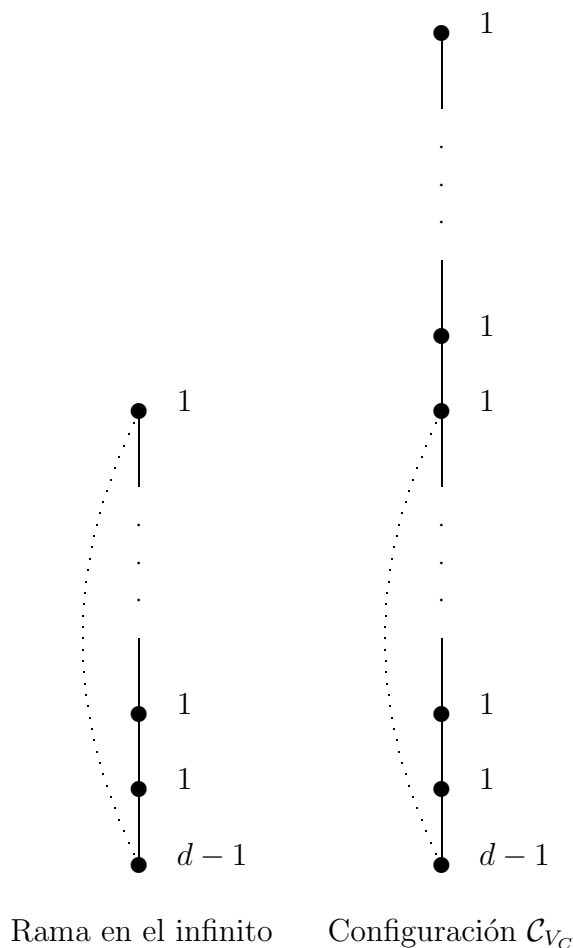


Figura 3.7: Grafos de proximidad del ejemplo 3.6.15

**Ejemplo 3.6.16.** Consideremos los siguientes subsemigrupos de  $\mathbb{N}$ :

$$\Gamma_1 = \langle \delta_0 = 10, \delta_1 = 5, \delta_2 = 1 \rangle$$

$$\Gamma_2 = \langle \delta_0 = 12, \delta_1 = 3, \delta_2 = 1 \rangle$$

$$\Gamma_3 = \langle \delta_0 = 20, \delta_1 = 10, \delta_2 = 5, \delta_3 = 1 \rangle$$

Según la proposición 3.6.13, existen tres curvas  $C_1, C_2$  y  $C_3$  con una única rama en el infinito de grados 10, 12 y 20 cuyos semigrupos en el infinito son, respectivamente,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$ . Los haces  $V_{C_1}, V_{C_2}$  y  $V_{C_3}$  tienen configuraciones de puntos base P-suficientes (por el teorema 3.6.14). En la figura 3.8 se muestran los grafos de proximidad correspondientes a la resolución sumergida

minimal de las ramas en el infinito de  $C_1, C_2$  y  $C_3$ . Los grafos de proximidad correspondientes a las configuraciones de puntos base de los haces asociados se obtienen añadiendo, respectivamente, 5, 3 y 5 vértices correspondientes a puntos libres.

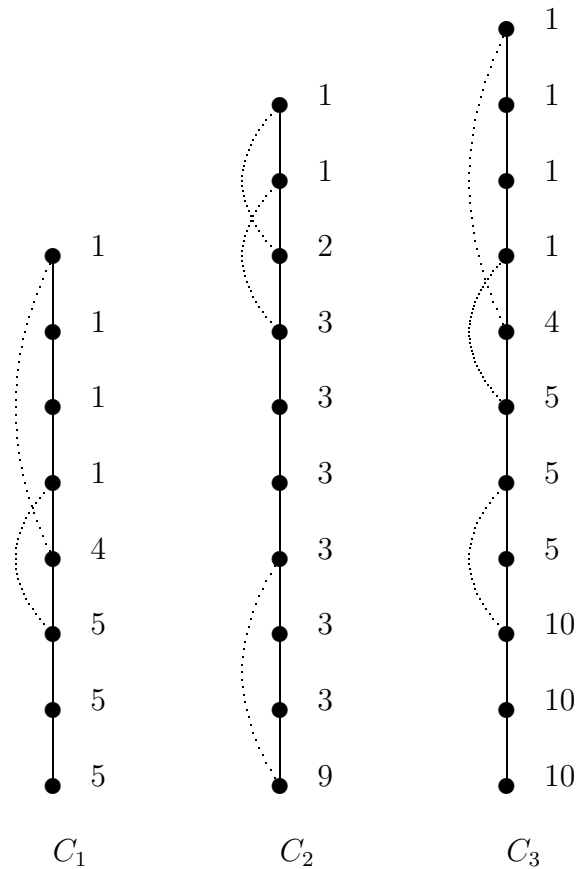


Figura 3.8: Grafos de proximidad del ejemplo 3.6.16

**Ejemplo 3.6.17.** Consideremos los siguientes subsemigrupos de  $\mathbb{N}$ :

$$\Gamma_4 = \langle \delta_0 = 8, \delta_1 = 5 \rangle$$

$$\Gamma_5 = \langle \delta_0 = 8, \delta_1 = 4, \delta_2 = 3 \rangle$$

$$\Gamma_6 = \langle \delta_0 = 45, \delta_1 = 15, \delta_2 = 10, \delta_3 = 3 \rangle$$



Por la proposición 3.6.13 existen tres curvas con una única rama en el infinito  $C_4, C_5$  y  $C_6$  de grados 8, 8 y 45 tales que sus respectivos semigrupos en el infinito son  $\Gamma_4, \Gamma_5$  y  $\Gamma_6$ . Puesto que los generadores de estos semigrupos no verifican las condiciones del teorema 3.6.14, las configuraciones de puntos base asociadas a los haces  $V_{C_4}, V_{C_5}$  y  $V_{C_6}$  no son P-suficientes. Los grafos de proximidad asociados a la resolución sumergida minimal de las ramas en el infinito de  $C_4, C_5$  y  $C_6$  son los de la figura 3.9, y los asociados a los haces con una única rama en el infinito correspondientes se construyen añadiendo, respectivamente, 41, 12 y 5 puntos libres.

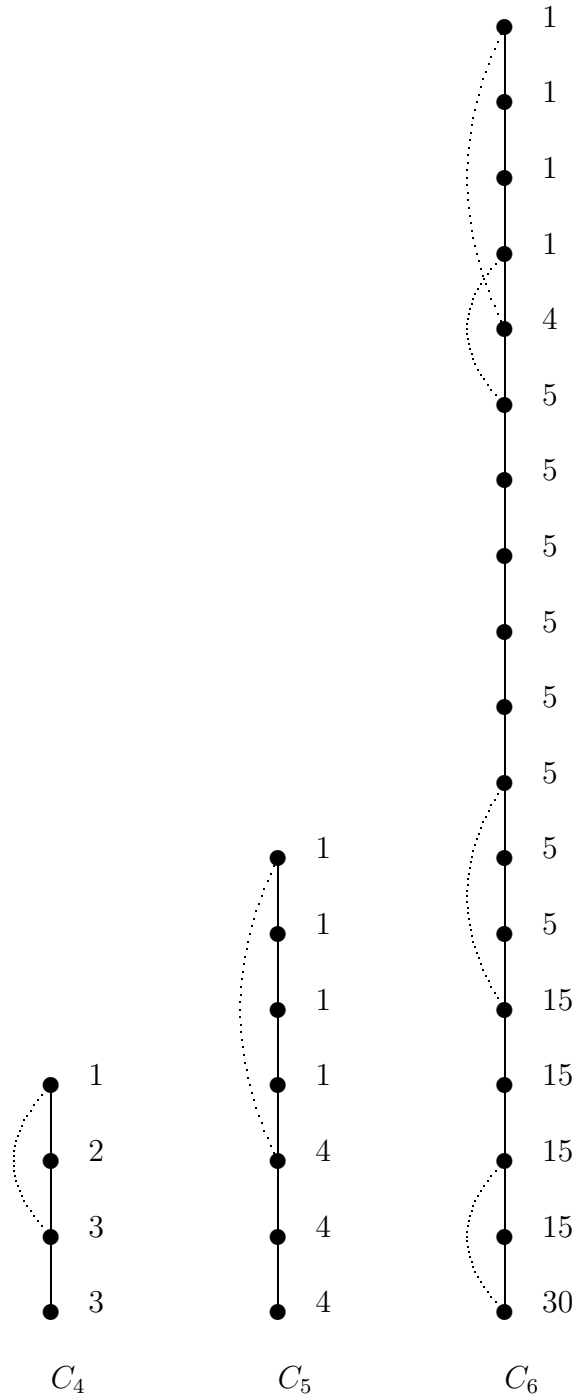


Figura 3.9: Grafos de proximidad del ejemplo 3.6.17

# Apéndice A

## Análisis convexo

El propósito de esta sección es recopilar algunos resultados básicos de análisis convexo, que son utilizados ampliamente a lo largo de esta memoria.

### A.1. Primeras definiciones y propiedades

Fijemos un módulo libre  $N \cong \mathbb{Z}^m$  de rango  $m$  sobre el anillo  $\mathbb{Z}$ . Si  $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  es el  $\mathbb{Z}$ -módulo dual de  $N$ , tenemos un par  $\mathbb{Z}$ -bilineal canónico:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{A.1})$$

de manera que, si  $\bar{x} \in N$  y  $\bar{y} \in M$ ,  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$  es el valor de  $\bar{y}$  en  $\bar{x}$ .

Por extensión de escalares al cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales, obtenemos los  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales  $m$ -dimensionales duales  $V := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$  y  $V^* := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$ , con un par  $\mathbb{R}$ -bilineal canónico:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Identificando cada elemento  $\bar{x}$  de  $N$  (o de  $M$ ) con su imagen  $\bar{x} \otimes 1$  en  $V$  (o en  $V^*$ ), podemos considerar  $N \subseteq V$  y  $M \subseteq V^*$ . A los elementos de  $V$  (o de  $V^*$ ) que pertenecen a  $N$  (o a  $M$ ) los denominaremos *elementos reticulares*.

Consideraremos  $V$  y  $V^*$  dotados de la topología inducida por la usual de  $\mathbb{R}^m$  y fijaremos una norma  $\|\cdot\|$  en  $V$ .

Para cada subconjunto  $A$  de  $V$  o de  $V^*$ , el símbolo  $\bar{A}$  denotará su clausura topológica,  $A^\perp$  su complemento ortogonal respecto de la forma bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $-A$  su múltiplo por  $(-1)$ , es decir,  $-A = \{-a \mid a \in A\}$ .

Denotaremos también por  $V_{\mathbb{Q}}$  (resp.,  $V_{\mathbb{Q}}^*$ ) al  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  (resp.,  $M^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ), que puede identificarse con un subconjunto de  $V$  (resp., de  $V^*$ ). Si  $A$  es un subconjunto de  $V$  (resp., de  $V^*$ ),  $A_{\mathbb{Q}}$  denotará la intersección de  $A$  con  $V_{\mathbb{Q}}$  (resp.,  $V_{\mathbb{Q}}^*$ ).

Si  $A, B$  son dos subconjuntos de  $V$  (o de  $V^*$ ), denotaremos por  $A + B$  al conjunto  $\{\bar{a} + \bar{b} \mid \bar{a} \in A \text{ y } \bar{b} \in B\}$ .

**Definición A.1.1.** Un subconjunto  $A$  de  $V$  es *convexo* si  $\lambda \cdot \bar{x} + (1 - \lambda) \cdot \bar{y} \in A$  siempre que  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  y  $\lambda$  es un número real tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Es claro que la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo. Además, como  $V$  es convexo, para cada  $L \subseteq V$  la familia de conjuntos convexos que contienen a  $L$  es no vacía. Esto da sentido a la siguiente definición:

**Definición A.1.2.** Si  $L \subseteq V$  denominamos *envoltura convexa* de  $L$ , y la denotamos por  $\text{conv}(L)$ , a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $L$ . Es decir,  $\text{conv}(L)$  es el menor conjunto convexo que contiene a  $L$ .

**Definición A.1.3.** Dado  $L \subseteq V$ , llamaremos *combinación convexa* de  $L$  a todo elemento  $\bar{w} \in V$  expresable de la forma  $\bar{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \bar{x}_i$ , donde  $k \in \mathbf{Z}_+$ ,  $\bar{x}_i \in L$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , i.e.  $\bar{w}$  es el baricentro de los vectores  $\bar{x}_i$  pesos  $\lambda_i$ ,

**Proposición A.1.4.** Si  $L \subseteq V$ ,  $\text{conv}(L)$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de  $L$ .

*Demostración.* Sea  $S$  el conjunto de todas las combinaciones convexas de  $L$ . Como  $S$  es un conjunto convexo que contiene a  $L$ , es suficiente demostrar la inclusión  $S \subseteq \text{conv}(L)$ .

Toda combinación convexa de  $L$  es de la forma  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \bar{x}_i \in S$  con  $\bar{x}_i \in L$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Demostraremos que cualquier combinación convexa de  $L$  pertenece a  $\text{conv}(L)$  por inducción sobre el número de sumandos  $k$ . Es evidente si  $k = 2$ , al ser  $\text{conv}(L)$  convexo. Supongamos que todas las combinaciones convexas con  $k - 1$  sumandos pertenecen a  $\text{conv}(L)$  y demostrémoslo para las combinaciones convexas con  $k$  sumandos.

Sea

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \bar{x}_i \in S$$

con  $\bar{x}_i \in L$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Definimos  $\mu = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$ . No hay pérdida de generalidad al suponer  $\mu > 0$ , ya que si  $\mu$  fuera nulo tendríamos  $\bar{w} = \bar{x}_k \in \text{conv}(L)$ . Definimos, para cada  $i = 1, \dots, k - 1$ , el número real  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \geq 0$ . Como  $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i = 1$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $\bar{b} := \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \cdot \bar{x}_i \in \text{conv}(L)$ . Luego  $\bar{w} = \mu \cdot \bar{b} + (1 - \mu) \cdot \bar{x}_k \in \text{conv}(L)$ .  $\square$

**Definición A.1.5.** Llamaremos *cono convexo* (o simplemente *cono*) a todo subconjunto no vacío  $C \subseteq V$  que satisfaga las siguientes condiciones:

- (1)  $\bar{x}, \bar{y} \in C \implies \bar{x} + \bar{y} \in C$
- (2)  $\bar{x} \in C, \alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \implies \alpha \cdot \bar{x} \in C$ .

Si, además,  $C$  es un subconjunto cerrado de  $V$ , diremos que es un *cono convexo cerrado* (o un *cono cerrado*).

Denotando por  $\text{lin}(C)$  al subespacio vectorial de  $V$  generado por  $C$ , llamaremos *dimensión* de  $C$ , y la denotaremos por  $\text{dim}(C)$ , a la dimensión de  $\text{lin}(C)$ . Si  $C = \{0\}$ , entonces diremos que su dimensión es 0.

Si  $A$  es cualquier subconjunto de  $V$ , denotaremos por  $A^\circ$  a su interior topológico en  $V$  y por  $\bar{A}$  a su clausura topológica.

**Definición A.1.6.** Si  $A$  y  $B$  son dos conos de  $V$  tales que  $A \subseteq B$ , llamaremos *interior de  $A$  relativo a  $B$* , y lo denotaremos por  $\text{int}_B(A)$ , al interior topológico de  $A$  considerado como subespacio topológico de  $\text{lin}(B)$ . Si  $A = B$  lo denotaremos simplemente por  $\text{int}(A)$  y lo llamaremos *interior relativo de  $A$* .

Obsérvese que si  $C$  es un cono de  $V$  diferente de  $\{0\}$  de dimensión  $\text{dim}(V)$ , entonces  $\text{int}(C)$  y  $C^\circ$  coinciden.

**Nota A.1.7.** Es claro que cualquier cono  $C$  es un conjunto convexo y que su clausura topológica  $\bar{C}$  es un cono. Además,  $\text{int}(C) \cup \{0\}$  es también un cono. En efecto, sean  $\bar{x}, \bar{y}$  dos elementos de  $\text{int}(C) \setminus \{0\}$  y veamos que su suma pertenece a  $\text{int}(C) \setminus \{0\}$ . Podemos suponer que ambos son no nulos, ya que el caso contrario es trivial. Existen dos entornos abiertos del cero en  $\text{lin}(C)$ ,  $U$  y  $V$ , tales que  $\bar{x} + U, \bar{y} + V \subseteq \text{int}(C)$ . Supongamos que  $\bar{x} + \bar{y} \notin \text{int}(C)$ ; entonces existe un elemento  $\bar{z} \in U \cap V$  tal que  $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \notin C$  (en otro caso  $\bar{x} + \bar{y} \in \text{int}(C)$ ), siendo esto una contradicción, ya que  $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) \in U + (\bar{y} + V) \subseteq \text{int}(C) \subseteq C$ , al ser  $C$  un cono. Veamos que la condición (2) también se verifica. Sean  $\bar{x} \in \text{int}(C)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  (obsérvese que si  $\alpha = 0$  o  $\bar{x} = 0$  la condición se verifica trivialmente). Existe un entorno del cero  $U$  en  $\text{lin}(C)$  tal que  $\bar{x} + U \subseteq \text{int}(C)$ . El elemento  $\alpha \cdot \bar{x}$  pertenece a  $\text{int}(C)$  ya que, en caso contrario, al ser  $\alpha \cdot U$  un entorno del cero, existiría un elemento  $\bar{z} \in U$  tal que  $\alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{z} \notin C$ ; pero esto es absurdo, ya que  $\alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{z} = \alpha \cdot (\bar{x} + \bar{z}) \in C$ , al ser  $C$  un cono y  $\bar{x} + \bar{z}$  un elemento de  $C$ .

La intersección de una familia arbitraria no vacía de conos es también un cono. Además, como  $V$  es un cono, para cada  $L \subseteq V$  la familia de todos los conos que contienen a  $L$  es no vacía. Esto da sentido a la siguiente definición:

**Definición A.1.8.** Si  $L$  es un subconjunto de  $V$  no vacío, denominamos *envoltura cónica* de  $L$ , y la denotamos por  $\text{con}(L)$ , a la intersección de todos los conos de  $V$  que contienen a  $L$ .  $\text{con}(L)$  es, pues, el menor cono de  $V$  que contiene a  $L$ .

**Definición A.1.9.** Dado un subconjunto  $L \neq \emptyset$  de  $V$ , llamamos *combinación positiva* de  $L$  a todo elemento  $\bar{w}$  de  $V$  expresable de la forma  $\bar{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \bar{x}_i$ , donde  $k \in \mathbf{Z}_+$ ,  $\bar{x}_i \in L$  y  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Proposición A.1.10.** Si  $L$  es un subconjunto de  $V$  no vacío,  $\text{con}(L)$  es el conjunto de todas las combinaciones positivas de  $L$ .

*Demostración.* Sea  $S$  el conjunto de todas las combinaciones positivas de  $L$ . Es claro que  $S$  es estable respecto a la operación suma y al producto por un número real positivo. Luego  $S$  es un cono que contiene a  $L$ . Por tanto,  $\text{con}(L) \subseteq S$ . Como cualquier combinación positiva de  $L$  pertenece a cualquier cono que contenga a  $L$ , se tiene la igualdad  $\text{con}(L) = S$ .  $\square$

**Definición A.1.11.** Si  $C$  es un cono de  $V$  tal que  $C = \text{con}(L)$  para un cierto subconjunto  $L$  de  $V$  diremos que  $C$  *está generado por  $L$*  o que  $L$  *es un sistema de generadores de  $C$* . Además, diremos que un sistema de generadores  $L$  de  $C$  es *minimal* si  $C \neq \text{con}(S)$  para todo subconjunto propio  $S$  de  $L$ .

**Definición A.1.12.** Un subconjunto  $A$  de  $V$  es *poliédrico* si puede expresarse como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, es decir, si existen  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k \in V^*$  y  $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$  tales que

$$A = \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{b}_i, \bar{x} \rangle \geq \beta_i \text{ para todo } i = 1, \dots, k\}.$$

Los hiperplanos  $H_i := \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{b}_i, \bar{x} \rangle = \beta_i\}$  se denominan *hiperplanos frontera*.

$A$  será un *cono poliédrico* si admite una expresión como la anterior, con  $\beta_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

**Nota A.1.13.** Es claro que todo conjunto poliédrico es un conjunto convexo cerrado.

**Definición A.1.14.** Un conjunto convexo  $A \subseteq V$  es *finitamente generado* si se puede expresar de la forma

$$A = \text{conv}(L_1) + \text{con}(L_2)$$

siendo  $L_1$  y  $L_2$  dos subconjuntos finitos de  $V$ .

Los conjuntos poliédricos y los conjuntos convexos finitamente generados son, en realidad, los mismos, como muestra el siguiente teorema:

**Teorema A.1.15.** [66, Th. 19.1] *Un conjunto  $C \subseteq V$  es poliédrico si, y sólo si,  $C$  es un conjunto convexo finitamente generado.*

**Nota A.1.16.** Como consecuencia, podemos caracterizar los conos poliédricos como aquellos conjuntos  $C \subseteq V$  que pueden expresarse de la forma  $C = \text{con}(L)$ , siendo  $L$  un subconjunto finito de  $V$ .

**Definición A.1.17.** Un conjunto  $C \subseteq V$  es un *cono simplicial* si  $C = \text{con}(L)$ , siendo  $L$  un subconjunto finito no vacío de  $V$  formado por vectores linealmente independientes.

**Definición A.1.18.** Un cono  $C \subseteq V$  es *racional* si está generado por elementos de  $N$ .

**Definición A.1.19.** Un cono racional  $C$  de  $V$  es *regular* si está generado por un subconjunto de una  $\mathbf{Z}$ -base de  $N$ .

**Nota A.1.20.** Obsérvese que, si  $C$  es un cono regular generado por un subconjunto  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  de una  $\mathbf{Z}$ -base de  $N$ , cualquier elemento de  $C \cap N$  se expresa de forma única como combinación positiva de  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ .

**Definición A.1.21.** Dado un cono  $C$  de  $V$ , el conjunto

$$C^\vee := \{\bar{y} \in V^* \mid \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } \bar{x} \in C\}$$

es un cono cerrado de  $V^*$  que denominaremos *cono dual* de  $C$ .

Si  $C$  es un cono, y  $C^{\vee\vee}$  es el cono de  $V$  dual de  $C^\vee$ , es clara la inclusión  $C \subseteq C^{\vee\vee}$ . La igualdad entre ambos conos no es cierta en general. El siguiente teorema y su corolario muestran que la condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad es que el cono  $C$  sea cerrado.

**Teorema A.1.22.** [66, Th. 14.1] *Si  $C \subseteq V$  es un cono cerrado entonces  $C$  coincide con el cono  $C^{\vee\vee}$ . En particular, si  $C$  es poliédrico,  $C = C^{\vee\vee}$ .*

**Corolario A.1.23.** *Para cualquier cono  $C$  de  $V$  se verifica la igualdad  $\overline{C} = C^{\vee\vee}$ .*

*Demostración.* Es claro que  $C^\vee = \overline{C}^\vee$ . Según el teorema A.1.22, tenemos  $C^{\vee\vee} = \overline{C}^{\vee\vee} = \overline{C}$ .  $\square$

**Teorema A.1.24.** (Teorema de Farkas. Véase [66], capítulos 19 y 22) *El cono dual de un cono poliédrico es un cono poliédrico.*

**Definición A.1.25.** Si  $\bar{r} \in V \setminus \{0\}$ , el conjunto  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r} := \{\alpha \cdot \bar{r} \mid \alpha > 0\} \subseteq V$  se denomina *rayo* generado por  $\bar{r}$ .

**Definición A.1.26.** Si  $C \subseteq V$  es un cono y  $R$  es un rayo contenido en  $C$ , diremos que  $R$  es un *rayo extremal* de  $C$  si para cada par de elementos  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in C \setminus \{0\}$  tales que  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 \in R$  se cumple  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in R$ .

En general, un cono no está generado necesariamente por sus rayos extremales. Sí ocurre, como veremos más adelante, cuando el cono es fuertemente convexo. Este último concepto lo definimos a continuación.

**Definición A.1.27.** Dado un cono cerrado  $C \subseteq V$ , el subespacio vectorial de  $V$  dado por  $C \cap (-C)$  se denomina *espacio de linealidad* de  $C$ . Diremos que  $C$  es *fuertemente convexo* si es cerrado y su espacio de linealidad es  $\{0\}$ .

La siguiente proposición proporciona dos caracterizaciones más de los conos fuertemente convexos. Nos será especialmente útil en esta memoria la caracterización (c). Para demostrarla, necesitaremos el siguiente

**Lema A.1.28.** Si  $C$  es un cono fuertemente convexo, entonces para todo  $\bar{w} \in C \setminus \{0\}$  existe un elemento  $\bar{p} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{p}, \bar{w} \rangle > 0$ .

*Demostración.* Sea  $\bar{w}$  un elemento no nulo de  $C$ . Al ser  $C$  un cono cerrado, por el teorema A.1.22 tenemos que  $C = C^{\vee\vee}$ . Por tanto, como  $-\bar{w} \notin C$  (pues  $C$  es fuertemente convexo por hipótesis), ha de existir  $\bar{p} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{p}, -\bar{w} \rangle < 0$ , de lo que se deduce el resultado.  $\square$

**Proposición A.1.29.** Si  $C$  es un cono cerrado de  $V$ , son equivalentes:

- (a)  $C$  es fuertemente convexo;
- (b) No existe ninguna recta de  $V$  contenida en  $C$ ;
- (c) Existe  $\bar{u} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0$  para todo  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$ .

*Demostración.* Empezamos probando la equivalencia entre las afirmaciones (a) y (b). Si  $C$  no fuera fuertemente convexo, existiría un elemento  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$  tal que  $-\bar{x}$  también pertenece a  $C$ , con lo cual  $C$  habría de contener a la recta que contiene a  $\bar{x}$  y  $-\bar{x}$ . Por tanto, será suficiente suponer que  $C$  es fuertemente convexo y demostrar que no puede contener a ninguna recta.

Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que  $C$  contiene a una cierta recta  $L = \{\bar{a} + \lambda \cdot \bar{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ , con  $\bar{a}, \bar{v} \in V$ ,  $\bar{v} \neq 0$ . Consideremos las sucesiones de elementos de  $C$  definidas por:

$$\bar{s}_k := \frac{\bar{a} + k \cdot \bar{v}}{\|\bar{a} + k \cdot \bar{v}\|} \quad \text{y} \quad \bar{t}_k := \frac{\bar{a} - k \cdot \bar{v}}{\|\bar{a} - k \cdot \bar{v}\|}$$



para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Calculando el límite de ambas cuando  $k$  tiende a infinito:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{-1} \cdot \bar{a} + \bar{v}}{\|k^{-1} \cdot \bar{a} + \bar{v}\|} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{t}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{-1} \cdot \bar{a} - \bar{v}}{\|k^{-1} \cdot \bar{a} - \bar{v}\|} = -\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

Al ser  $C$  un cono cerrado,  $\bar{v}$  y  $-\bar{v}$  pertenecen a  $C$ , lo cual es una contradicción, puesto que  $C \cap (-C) = \{0\}$ .

Ahora vamos a probar que (c) puede deducirse de (a). Supongamos que  $C$  es fuertemente convexo. Si  $C = \{0\}$  la implicación es trivial. Por tanto, podemos suponer  $C \neq \{0\}$ . Definimos  $L_0 := V$  y  $U_0 := L_0 \cap C$ . Como  $U_0 \neq \{0\}$  podemos elegir  $\bar{w}_1 \in U_0 \setminus \{0\}$ . Aplicando el lema A.1.28, existe  $\bar{p}_1 \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{p}_1, \bar{w}_1 \rangle > 0$ . Definimos ahora  $L_1 := L_0 \cap \{p_1\}^\perp$  y  $U_1 := L_1 \cap C$ .  $L_1$  es un subespacio vectorial propio de  $L_0$  (puesto que  $\bar{w}_1 \in L_1$ ), con lo cual  $\dim(L_1) < \dim(L_0)$ . Supuestos definidos  $L_{i-1}$ ,  $U_{i-1}$  y  $\bar{p}_i$  podemos definir inductivamente  $L_i := L_{i-1} \cap \{p_i\}^\perp$  y  $U_i := L_i \cap C$ . Si  $U_i \neq \{0\}$  consideramos  $\bar{w}_{i+1} \in U_{i+1} \setminus \{0\}$  y por el lema A.1.28, existe  $\bar{p}_{i+1} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{p}_{i+1}, \bar{w}_{i+1} \rangle > 0$ . Por tanto,  $L_i$  es un subespacio propio de  $L_{i-1}$  y, así,  $\dim(L_i) < \dim(L_{i-1})$ . Como la dimensión de los subespacios  $L_0, L_1, \dots$  es estrictamente decreciente, el proceso debe parar. Si  $k$  es el mínimo número natural tal que  $U_k = \{0\}$ , entonces  $\bar{u} := p_1 + \dots + p_k \in C^\vee$  satisface la propiedad requerida en el enunciado.

Para acabar, comprobaremos que la afirmación (c) implica la (a). Supongamos que existe  $\bar{u} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0$  para todo  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$  y procedamos por reducción al absurdo. Si existe  $\bar{x} \in C \cap (-C) \setminus \{0\}$ , tendríamos que  $\bar{x}, -\bar{x} \in C$ . Luego  $\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0$  y  $\langle \bar{u}, -\bar{x} \rangle > 0$ , lo cual es contradictorio.  $\square$

Finalizamos esta sección con una batería de resultados sobre convexidad fuerte y rayos extremales, a la que añadimos una condición para que la envoltura cónica de un compacto sea cerrada.

**Proposición A.1.30.** *Si  $C$  es un cono de  $V$  tal que  $\dim(C) = \dim(V)$  entonces  $C^\vee$  es fuertemente convexo.*

*Demostración.* Como  $C^\vee$  es cerrado, si no fuera fuertemente convexo existiría un elemento  $\bar{q}$  perteneciente a  $C^\vee \cap (-C^\vee) \setminus \{0\}$ . En este caso, se tendría que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 0$  para todo  $\bar{x} \in C$ , y esto contradice la hipótesis  $\dim(C) = \dim(V)$ , puesto que  $C$  estaría contenido en el hiperplano  $\{\bar{y} \in V \mid \langle \bar{q}, \bar{y} \rangle = 0\}$ .  $\square$

**Definición A.1.31.** Dado un conjunto convexo  $A \subseteq V$  diremos que  $\bar{r} \in A$  es un *punto extremo* de  $A$  si para cada  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  se verifica la siguiente

implicación: siempre que exista un valor  $\alpha$  en el intervalo real  $(0, 1)$  tal que  $\bar{r} = \alpha \cdot \bar{x} + (1 - \alpha) \cdot \bar{y}$  entonces  $\bar{x} = \bar{y}$ . Denotaremos por  $\text{ex}(A)$  al conjunto de los puntos extremos de  $A$ .

**Teorema A.1.32.** [66, Coro. 18.5.1] *Sea  $A \subseteq V$  un conjunto convexo compacto no vacío. Entonces  $\text{ex}(A) \neq \emptyset$  y  $A = \text{conv}(\text{ex}(A))$ .*

**Lema A.1.33.** *Sea  $C$  un cono cerrado fuertemente convexo, sea  $\bar{u} \in C^V$  tal que  $\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0$  para todo  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$ , y sea  $T = \{\bar{x} \in C \mid \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle = 1\}$ . Entonces,  $T$  es un conjunto convexo compacto. Además, dado  $\bar{r} \in T$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $\bar{r}$  es un punto extremo de  $T$ .
- (b)  $\bar{r}$  genera un rayo extremal de  $C$ .

*Demostración.* Veamos primero que  $T$  es compacto y convexo. Consideremos los siguientes subconjuntos de  $V$ :

$$S := \{\bar{x} \in V \mid \|\bar{x}\| = 1\}$$

$$S' := \{\bar{x} \in S \mid \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0\}$$

$$Q := \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle = 1\}$$

y la función continua  $t : S' \rightarrow Q$  definida por  $\bar{x} \mapsto \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle^{-1} \cdot \bar{x}$ . Claramente,  $T = t(S' \cap C)$ . Pero  $S' \cap C = S \cap C$  es compacto (es un subconjunto cerrado del conjunto compacto  $S$ ). Luego  $T$  es compacto. Además, como  $T = Q \cap C$ ,  $T$  es convexo. A continuación probamos la equivalencia entre las condiciones (a) y (b).

En primer lugar, veamos que (b) se deduce de (a). Supongamos que  $\bar{r}$  es un punto extremo de  $T$  y sea  $R$  el rayo generado por  $\bar{r}$ . Si  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in C \setminus \{0\}$  y  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 \in R$ , entonces existe un número real  $\alpha > 0$  tal que  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \alpha \cdot \bar{r}$ . Si  $\alpha = 0$ , entonces  $\bar{z}_1, -\bar{z}_1 \in C$  y, como  $C$  es fuertemente convexo,  $\bar{z}_1 = 0$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\alpha \neq 0$ . Consideramos los elementos de  $T$  dados por  $\bar{x} := \langle \bar{u}, \bar{z}_1 \rangle^{-1} \cdot \bar{z}_1$ ,  $\bar{y} := \langle \bar{u}, \bar{z}_2 \rangle^{-1} \cdot \bar{z}_2$ . Sean  $\beta_1 := \alpha^{-1} \cdot \langle \bar{u}, \bar{z}_1 \rangle$  y  $\beta_2 := \alpha^{-1} \cdot \langle \bar{u}, \bar{z}_2 \rangle$ . Es claro que  $\beta_1 + \beta_2 = 1$  y  $\beta_1 \cdot \bar{x} + \beta_2 \cdot \bar{y} = \bar{r}$ . Si  $\beta_1 = 0$  o  $\beta_2 = 0$  es claro que  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in R$ . Si  $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$ , como  $\bar{r}$  es un punto extremo de  $T$ ,  $\bar{x} = \bar{y}$ , con lo cual también se cumple que  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in R$ . Por tanto,  $R$  es un rayo extremal de  $C$ .

Para acabar, probamos la implicación contraria. Supongamos que  $\bar{r}$  genera un rayo extremal  $R$  del cono  $C$  y  $\bar{r} = \alpha \cdot \bar{x} + (1 - \alpha) \cdot \bar{y}$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in T$  y  $0 < \alpha < 1$ . Al ser  $R$  un rayo extremal,  $\bar{x}, \bar{y} \in R$ . Como  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{r} \in T$ , concluimos  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{r}$ . Luego  $\bar{r}$  es un punto extremo de  $T$ .  $\square$

**Proposición A.1.34.** *Si  $\{0\} \neq C \subseteq V$  es un cono fuertemente convexo, entonces el conjunto de sus rayos extremales es no vacío y  $C = \text{con}(L)$  para cualquier subconjunto  $L$  de  $V$  que contenga generadores de todos los rayos extremales de  $C$ .*

*Demostración.* Aplicando la Proposición A.1.29, existe  $\bar{u} \in C^\vee$  tal que  $\langle \bar{u}, \bar{x} \rangle > 0$  para todo  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$ . Sea  $T = \{\bar{x} \in C \mid \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle = 1\}$ . Como  $C \neq \{0\}$ , aplicando el lema A.1.33 deducimos que  $T$  es un conjunto compacto no vacío. Luego  $\text{ex}(T) \neq \emptyset$  y  $T = \text{conv}(\text{ex}(T))$ , por el teorema A.1.32. Según el lema A.1.33,  $\text{ex}(T)$  es un conjunto de generadores de todos los rayos extremales de  $C$ . Luego  $T \subset \text{con}(L)$  y, por tanto,  $C \setminus \{0\} \subseteq \text{con}(L)$ , verificándose la igualdad  $C = \text{con}(L)$ .  $\square$

**Proposición A.1.35.** *Si  $\{0\} \neq C \subseteq V$  es un cono y  $L$  es un subconjunto de  $V$  tal que  $C = \text{con}(L)$ , entonces el conjunto de los rayos generados por los elementos de  $L$  debe contener al conjunto de los rayos extremales de  $C$ .*

*Demostración.* Sea  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  un rayo extremal de  $C$ . Como  $\bar{r} \in C = \text{con}(L)$ , existen  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in L$  y números reales no negativos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tales que  $\bar{r} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \bar{x}_i$ . Al ser  $R$  un rayo extremal,  $\bar{x}_i \in R$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , luego  $\bar{r}$  es un múltiplo positivo de algún elemento de  $L$ .  $\square$

**Teorema A.1.36.** *(de Carathéodory, [64, Th. 2.3.4]) Sea  $L \subseteq V \cong \mathbb{R}^m$  y  $\bar{x} \in \text{conv}(L)$ . Entonces,  $\bar{x}$  se puede expresar como combinación convexa de, a lo sumo,  $m + 1$  puntos de  $L$ .*

**Proposición A.1.37.** *Si  $L \subseteq V$  es un conjunto compacto, entonces  $\text{conv}(L)$  es compacto.*

*Demostración.* Definimos el siguiente conjunto:

$$A := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, x_1, \dots, x_{m+1}) \mid \lambda_i \geq 0, x_i \in L \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1\}.$$

$A$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{m+1} \times V^{m+1}$ , luego su imagen por la función continua

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot x_i \in V$$

es un subconjunto compacto de  $V$ . Finalmente el teorema A.1.36 prueba que esta imagen es igual a  $\text{conv}(L)$ .  $\square$

**Proposición A.1.38.** *Sea  $\bar{q} \in V^* \setminus \{0\}$  y sea  $A$  un conjunto convexo compacto tal que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 1$  para todo  $\bar{x} \in A$ . Entonces,  $\text{con}(A)$  es un cono cerrado.*

*Demostración.* Sea  $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión convergente de elementos no nulos de  $\text{con}(A)$ . Será suficiente demostrar que su límite  $\bar{x} \in V$  pertenece a  $\text{con}(A)$ . Es claro que  $\langle \bar{q}, \bar{x}_k \rangle > 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Luego podemos definir la sucesión dada por  $z_k := \langle \bar{q}, \bar{x}_k \rangle^{-1} \cdot \bar{x}_k$ . Los términos de esta sucesión verifican  $\langle \bar{q}, \bar{z}_k \rangle = 1$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Si  $\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_{ki} \cdot \bar{a}_{ki}$  es la expresión de  $\bar{x}_k$  como combinación positiva de elementos de  $A$ , entonces  $\langle \bar{q}, \bar{x}_k \rangle = \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_{ki}$ . Por tanto,  $\bar{z}_k = (\sum_{i=1}^{s_k} \alpha_{ki})^{-1} \cdot \bar{x}_k = (\sum_{i=1}^{s_k} \alpha_{ki})^{-1} \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_{ki} \cdot \bar{a}_{ki} \in \text{conv}(A) = A$ . La sucesión  $\{\langle \bar{q}, \bar{x}_k \rangle\}_{k=1}^\infty$  es convergente y tiene límite no nulo (ya que, si su límite fuera nulo, la sucesión  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  no estaría acotada, contradiciendo la compacidad de  $A$ ). Luego  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}_k = \frac{\bar{x}}{\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle} \in A$ , al ser  $A$  cerrado. Por tanto,  $\bar{x} \in \text{con}(A)$ .  $\square$

**Corolario A.1.39.** *Sea  $\bar{q} \in V^* \setminus \{0\}$  y sea  $A \subseteq V$  un conjunto compacto tal que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 1$  para todo  $\bar{x} \in A$ . Entonces,  $\text{con}(A)$  es un cono cerrado.*

*Demostración.*  $\text{conv}(A)$  es un conjunto compacto, por la Proposición A.1.37. Luego  $\text{con}(A) = \text{con}(\text{conv}(A))$  es un cono cerrado, por la Proposición A.1.38.  $\square$

## A.2. Convergencia de una sucesión de rayos

Denotemos por  $\mathcal{R}(V)$  al conjunto formado por los rayos de  $V$ . Si asociamos cada rayo de  $\mathcal{R}(V)$  con su punto de intersección con la esfera unidad  $S^{n-1} := \{\bar{z} \in V \mid \|\bar{z}\| = 1\}$  obtenemos una biyección:

$$\Theta : \mathcal{R}(V) \rightarrow S^{n-1}$$

definida por  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r} \mapsto \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}$ . Consideremos en  $S^{n-1}$  la topología inducida por la de  $V$  y en  $\mathcal{R}(V)$  la topología menos fina que hace continua la biyección  $\Theta$ . De esta manera  $\Theta$  se transforma en un homeomorfismo de espacios topológicos. Tenemos, de esta forma, una noción de *convergencia* en  $\mathcal{R}(V)$ : una sucesión  $\{R_k\}_{k=1}^\infty$  de rayos de  $V$  es *convergente* si la sucesión  $\{\Theta(R_k) = \frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|}\}_{k=1}^\infty$  es convergente en  $S^{n-1}$ , siendo  $\bar{r}_k \in V$  un generador de  $R_k$  para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$ . En este caso, el *límite* de la sucesión  $\{R_k\}_{k=1}^\infty$  será el rayo de  $V$  generado por  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|}$ .

Si  $\bar{q} \in V^* \setminus \{0\}$ , definimos la función

$$\phi_{\bar{q}} : \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle > 0\} \longrightarrow \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 1\}$$

tal que  $\phi_{\bar{q}}(\bar{x}) = \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle^{-1} \cdot \bar{x}$ .

Finalizamos la sección con dos resultados sobre sucesiones de rayos de  $V$  que son utilizados en el capítulo 2.

**Proposición A.2.1.** *Sea  $\bar{q} \in V^*$ . Si  $\{R_k = \mathbb{R}_+ \bar{r}_k\}_{k=1}^\infty$  es una sucesión de rayos y  $R = \mathbb{R}_+ \bar{r}$  es un rayo tales que  $\langle \bar{q}, \bar{r}_k \rangle > 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$  y  $\langle \bar{q}, \bar{r} \rangle > 0$ , entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R \text{ si, y sólo si } \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\bar{q}}(\bar{r}_k) = \phi_{\bar{q}}(\bar{r}).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$ . Entonces,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} = \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}.$$

Teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\bar{q}}(\bar{r}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_k}{\langle \bar{q}, \bar{r}_k \rangle} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\bar{r}_k\|^{-1} \cdot \bar{r}_k}{\langle \bar{q}, \|\bar{r}_k\|^{-1} \cdot \bar{r}_k \rangle} = \phi_{\bar{q}}(\bar{r})$$

Recíprocamente, si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\bar{q}}(\bar{r}_k) = \phi_{\bar{q}}(\bar{r})$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{r}_k}{\langle \bar{q}, \bar{r}_k \rangle} \cdot \frac{\langle \bar{q}, \bar{r}_k \rangle}{\|\bar{r}_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\bar{q}}(\bar{r}_k) \cdot \left\| \frac{\bar{r}_k}{\langle \bar{q}, \bar{r}_k \rangle} \right\|^{-1} = \frac{\phi_{\bar{q}}(\bar{r})}{\|\phi_{\bar{q}}(\bar{r})\|} = \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}$$

y esto implica  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$ .  $\square$

**Proposición A.2.2.** *Si  $\{R_k\}_{k=1}^\infty$  es una sucesión convergente de rayos distintos de  $V$  de manera que cada  $R_k$  admite un generador  $\bar{r}_k$  perteneciente a  $N \cong \mathbb{Z}^m$ , entonces la sucesión  $\{\|\bar{r}_k\|\}_{k=1}^\infty$  contiene una subsucesión que diverge a  $\infty$ .*

*Demostración.* Razonando por reducción al absurdo, si la tesis del enunciado fuera falsa, la sucesión  $\{\|\bar{r}_k\|\}_{k=1}^\infty$  debería de estar acotada. Esto implicaría que el conjunto  $\{\bar{r}_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$  estaría contenido en una cierta bola de  $V$ , con lo cual tendría que ser necesariamente finito. Esto contradice las condiciones del enunciado.  $\square$

### A.3. Caras y células de un cono

Célula y cara son dos conceptos útiles en el estudio de los conos. Por su proximidad pueden ser confundidos entre sí. Dedicamos esta sección a su estudio, indicando que ambos conceptos son el mismo en el caso de los conos poliédricos.

**Definición A.3.1.** Dado un cono  $C$  de  $V$ , denominamos *cara* de  $C$  a todo subconjunto de la forma  $F := C \cap \{\bar{q}\}^\perp$ , siendo  $\bar{q} \in C^\vee$ .  $C$  es una cara de  $C$ , ya que  $C = C \cap \{0\}^\perp$ . Además, si  $C$  es fuertemente convexo,  $\{0\}$  es también una cara de  $C$  (esto es consecuencia del apartado (c) de la proposición A.1.29). Las caras distintas de  $C$  y de  $\{0\}$  se denominan *caras propias*.

**Proposición A.3.2.** Si  $C$  es un cono de  $V$  se verifican las siguientes propiedades:

- (a) Las caras de  $C$  son conos de  $V$ .
- (b) Si  $C$  es poliédrico, sus caras propias son también conos poliédricos.
- (c) Si  $C$  es fuertemente convexo, sus caras también lo son.
- (d) La intersección de un número finito de caras de  $C$  es una cara de  $C$ .
- (e) Si  $F_1$  y  $F_2$  son caras de  $C$  tales que  $F_1 \subseteq F_2$ , entonces  $F_1$  es una cara de  $F_2$ .
- (f) Si  $C$  es poliédrico,  $F_2$  es una cara de  $C$  y  $F_1$  es una cara de  $F_2$ , entonces  $F_1$  es una cara de  $C$ .
- (g) Si  $C$  es poliédrico, entonces la aplicación  $F \mapsto C^\vee \cap F^\perp$  es una biyección entre el conjunto de las caras de  $C$  y el de las caras de  $C^\vee$ . Además, si  $F$  y  $G$  son dos caras de  $C$ , se verifica  $\dim(F) + \dim(C^\vee \cap F^\perp) = \dim(V)$  y la equivalencia

$$F \subseteq G \text{ si, y sólo si } C^\vee \cap G^\perp \subseteq C^\vee \cap F^\perp.$$

- (h) Si  $C$  es poliédrico, entonces tiene un número finito de caras.
- (i) Si  $C$  es un cono regular, entonces todas sus caras propias son también conos regulares.

*Demostración.* El apartado (a) es evidente, por propia definición de cara.

(b), (h) e (i) son consecuencia del siguiente hecho: si  $C = \mathbb{R}_+v_1 + \mathbb{R}_+v_2 + \dots + \mathbb{R}_+v_k$  y  $F = C \cap \{\bar{q}\}^\perp$  es una cara de  $C$ , con  $\bar{q} \in C^\vee$ , entonces  $F$  está generado por aquellos  $v_i$  tales que  $\langle \bar{q}, v_i \rangle = 0$ .

(c) Si  $F$  es una cara de  $C$ , entonces  $F \cap (-F) \subseteq C \cap (-C)$ . Por tanto, si  $C$  es fuertemente convexo,  $F$  también lo es.

(d) Se deduce de la igualdad

$$\bigcap_{i=1}^k (C \cap \{\bar{q}_i\}^\perp) = C \cap \left\{ \sum_{i=1}^k \bar{q}_i \right\}^\perp,$$

siendo  $\{\bar{q}_i\}_{i=1}^k$  cualquier subconjunto finito de  $C^\vee$ .

(e) Si  $F_1 = C \cap \{\bar{q}\}^\perp$ , con  $\bar{q} \in C^\vee$ , es claro que  $\bar{q}$  también pertenece a  $F_2^\vee$ . Luego  $F_1$  es una cara de  $F_2$ .

(f) Véase, por ejemplo, [19, Chap. II, Prop. 1.7].

(g) Véase, por ejemplo, [20, Sect. 1.2].  $\square$

**Definición A.3.3.** Si  $C$  es un cono de  $V$ , denominaremos *componente frontera* de  $C$  a todo cono maximal contenido en  $C \setminus \text{int}(C)$ . Definimos las *células*  $F$  de  $C$  por inducción descendente sobre  $\dim(F)$ : un cono  $F$  de  $V$  es una *célula* de  $C$  si  $F = C$  o  $F$  es una componente frontera de alguna célula de  $C$  que contenga a  $F$ .

**Nota A.3.4.** Si  $D$  es un subcono de  $C$ , a partir de la definición anterior es claro que *existe una célula  $F$  de  $C$  de dimensión máxima tal que  $D \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$ .*

**Lema A.3.5.** *Si  $F$  es una célula de un cono  $C$  de  $V$ , se verifica la igualdad:*

$$F = \bar{F} \cap C.$$

*Demostración.* Si  $\dim(F) = \dim(C)$ , entonces  $F = C$  y la igualdad es trivial. Demostraremos el resultado por inducción descendente sobre  $\dim(F)$ . Supongamos, por tanto, que  $\dim(F) < \dim(C)$  y que el resultado es cierto para todas las células de  $C$  de dimensión superior a  $\dim(F)$ . Existe una célula  $G$  de  $C$  tal que  $F$  es una componente frontera de  $G$ . Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$\bar{F} \cap C \subseteq \bar{G} \cap C \setminus \text{int}(G) = G \setminus \text{int}(G).$$

Teniendo en cuenta ahora la maximalidad de  $F$ , se obtiene la igualdad  $\bar{F} \cap C = F$ .  $\square$

**Lema A.3.6.** (*Lema de accesibilidad*, [72, Lem. 3.2.11]) *Si  $A$  es un subconjunto convexo de  $V$ ,  $\bar{x} \in A^\circ$  y  $\bar{z} \in \bar{A}$ , entonces  $A^\circ$  contiene al segmento semiabierto  $[\bar{x}, \bar{z})$ .*

**Proposición A.3.7.** *Si  $C$  es un cono de  $V$  y  $\bar{x} \in \text{int}(C)$  entonces  $\bar{x} + \bar{y} \in \text{int}(C)$  para todo  $\bar{y} \in \bar{C}$ .*

*Demostración.* El resultado es obvio si  $C = \{0\}$ . Por tanto, podemos suponer  $C \neq \{0\}$ . Además, considerando  $\text{lin}(C)$  en lugar de  $V$ , si fuera necesario, podemos suponer también  $\dim(C) = \dim(V)$ .  $\text{int}(C)$  coincidirá, por tanto, con  $C^\circ$ . Como  $\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y} \in [\bar{x}, \bar{y})$ , por el Lema A.3.6 se tiene que  $\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \in \text{int}(C)$ . Luego  $\bar{x} + \bar{y} \in \text{int}(C)$ .  $\square$

**Proposición A.3.8.** Si  $A$  es un conjunto convexo de  $V$  tal que  $A^\circ \neq \emptyset$  entonces  $(\bar{A})^\circ = A^\circ$ .

*Demostración.* Es clara la inclusión  $A^\circ \subseteq (\bar{A})^\circ$ . Veamos la inclusión contraria. Sea  $\bar{x} \in (\bar{A})^\circ$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(\bar{x}) \subseteq (\bar{A})^\circ$ . Además, como  $A^\circ \neq \emptyset$ , existe  $\bar{y} \in A^\circ \setminus \{\bar{x}\}$ . Definimos

$$\bar{z} := \bar{x} + \lambda(\bar{x} - \bar{y}),$$

siendo  $\lambda = \frac{\epsilon}{2\|\bar{y} - \bar{x}\|}$ . Como  $\|\bar{z} - \bar{x}\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ , se tiene que  $\bar{z} \in B_\epsilon(\bar{x}) \subseteq \bar{A}$ . Por otra parte,  $\bar{x}$  puede expresarse como combinación convexa de  $\bar{z}$  y  $\bar{y}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{1+\lambda}\bar{z} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\bar{y}.$$

Luego  $\bar{x}$  pertenece al segmento  $(\bar{z}, \bar{y}]$ . Aplicando el lema A.3.6 concluimos que  $(\bar{z}, \bar{y}] \subseteq A^\circ$  y, por tanto,  $\bar{x} \in A^\circ$ .  $\square$

**Lema A.3.9.** Sea  $D$  un subcono de  $C$  y sea  $F$  una célula de  $C$  de dimensión maximal tal que  $D \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$ . Se verifican las siguientes inclusiones:

- (a)  $\text{int}(D) \subseteq \text{int}(F)$ .
- (b)  $D \subseteq F$ .

*Demostración.*

(a) Como necesariamente  $\dim(D) \leq \dim(F)$  se tiene que  $D \cap \text{int}(F) = \text{int}(D) \cap \text{int}(F) \neq \emptyset$ . Sea  $\bar{x} \in \text{int}(D) \cap \text{int}(F)$ . Si  $\bar{y} \in \text{int}(D) \setminus \{\bar{x}\}$ , existe  $\bar{z} \in \text{int}(D)$  tal que  $\bar{y} \in (\bar{x}, \bar{z}) \subseteq D \subseteq F$ . Al ser  $\bar{x} \in \text{int}(F)$ , por el lema A.3.6 se tiene que  $\bar{y} \in \text{int}(F)$ . Se verifica, por tanto, la inclusión deseada.

(b) Se deduce a partir de la siguiente cadena de desigualdades e igualdades:

$$D \subseteq \bar{D} \cap C = \overline{\text{int}(D)} \cap C = \bar{F} \cap C = F,$$

donde la última igualdad es consecuencia del Lema A.3.5.  $\square$

**Lema A.3.10.** Si  $C$  y  $F$  son conos de  $V$  tales que  $F \subseteq C \setminus \text{int}(C)$ , entonces existe  $\bar{q} \in \text{lin}(C)^* \setminus \{0\}$  tal que  $F \subseteq \{\bar{q}\}^\perp \subseteq \text{lin}(C)$ .

*Demostración.* Si no existiera un tal elemento  $\bar{q} \in \text{lin}(C)^* \setminus \{0\}$ , entonces  $F$  no estaría contenido en ningún hiperplano de  $\text{lin}(C)$  y, al ser convexo,  $\text{int}_C(F)$  sería no vacío. Esto contradice las hipótesis del enunciado, ya que  $\text{int}_C(F) \subseteq \text{int}_C(C)$ .  $\square$

**Proposición A.3.11.** Sea  $C$  un cono de  $V$  y  $F$  un subcono de  $C$ . Son equivalentes:



(a)  $F$  es una célula de  $C$ .

(b)  $\bar{x}, \bar{y} \in C, \quad \bar{x} + \bar{y} \in F \implies \bar{x}, \bar{y} \in F$ .

*Demostración.*

Veamos, en primer lugar, la condición (a) implica la (b). Sea  $k := \dim(C)$ . Si  $\dim(F) = k$  entonces  $F = C$ , puesto que la única célula de  $C$  de dimensión  $k$  es  $C$ . En este caso, es clara la implicación. Utilizaremos un proceso inductivo descendente y supondremos que  $\dim(F) < k$  y que la implicación es cierta para todas aquellas células de  $C$  cuya dimensión es superior a la de  $F$ , demostrando que también es cierta para  $F$ . Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que existen  $\bar{x}, \bar{y} \in C$  tales que  $\bar{x} + \bar{y} \in F$  y  $\bar{x} \notin F$ . Existe una célula  $G$  de  $C$  tal que  $F$  es un subcono maximal contenido en  $G \setminus \text{int}(G)$ . Como consecuencia de la maximalidad de  $F$ ,  $\text{con}(F \cup \{\bar{x}\}) \not\subseteq G \setminus \text{int}(G)$  y, por tanto, existe  $\bar{z} \in \text{con}(F \cup \{\bar{x}\})$  tal que  $\bar{z} \notin G \setminus \text{int}(G)$ .  $\bar{z}$  se podrá expresar de la forma  $\bar{z} = \alpha\bar{x} + \bar{f}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\bar{f} \in F$ . Tenemos:

$$\bar{z} + \alpha\bar{y} = (\alpha\bar{x} + \bar{f}) + \alpha\bar{y} = \alpha(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{f} \in F \subseteq G.$$

Como  $\dim(G) > \dim(F)$ , según la hipótesis de inducción se tiene que  $\bar{z}, \bar{y} \in G$ . Como  $\bar{z} \notin G \setminus \text{int}(G)$ ,  $\bar{z}$  debe pertenecer a  $\text{int}(G)$ . Por tanto,  $\bar{z} + \alpha\bar{y} \in \text{int}(G)$  (por la proposición A.3.7), que es una contradicción, puesto que  $\bar{z} + \alpha\bar{y} \in F$ .

Veamos ahora la implicación recíproca. Sea  $F$  un subcono de  $C$  verificando la condición (b). Si  $F$  no interseca con  $\text{int}(A)$  para cada célula  $A$  de  $C$  distinta de  $\{0\}$ , entonces  $F = \{0\}$ , que es una célula. Por tanto, la célula  $G$  de  $C$  de dimensión maximal tal que  $F \cap \text{int}(G) \neq \emptyset$  tiene dimensión estrictamente positiva. Sea  $\bar{x} \in F \cap \text{int}(G)$ . Existe una bola abierta  $B_\epsilon(\bar{x})$  de  $\text{lin}(G)$  contenida en  $G$ . La bola  $B_\epsilon(\bar{x})$  ha de estar necesariamente contenida en  $F$ . En efecto: para todo  $\bar{y} \in B_\epsilon(\bar{x})$  se verifica  $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{2}(2\bar{x} - \bar{y})$  y  $2\bar{x} - \bar{y} \in B_\epsilon(\bar{x}) \subseteq C$ ; por la condición (b),  $\bar{y}$  debe de pertenecer a  $F$ . Utilizaremos este hecho para demostrar que  $G \subseteq F$ :

Si  $\bar{w} \in G$ , existe un número real estrictamente positivo  $\delta$  tal que  $\bar{x} + \delta\bar{w} \in B_\epsilon(\bar{x}) \subseteq F$ ; según la condición (b),  $\delta\bar{w} \in F$  y, al ser  $F$  un cono,  $\bar{w} \in F$ . Luego  $G \subseteq F$ .

Por otra parte, según el lema A.3.9, se verifica la inclusión  $F \subseteq G$ , con lo cual se obtiene la igualdad  $F = G$ .  $\square$

**Corolario A.3.12.** *Si  $F$  y  $G$  son dos células de un cono  $C$  entonces  $F \cap G$  es una célula común a  $F$  y a  $G$ .*

*Demostración.* Si  $\bar{x}, \bar{y}$  son dos elementos de  $F$  tales que  $\bar{x} + \bar{y} \in F \cap G$ , en virtud de la proposición A.3.11 es claro que  $\bar{x}, \bar{y} \in F \cap G$ . Luego  $F \cap G$  es una célula de  $F$ . De manera análoga se prueba que es una célula de  $G$ .  $\square$

**Corolario A.3.13.** *Dos células distintas de un cono  $C$  tienen interiores relativos disjuntos.*

*Demostración.* Procediendo por reducción al absurdo, si  $F$  y  $G$  son dos células de un cono  $C$  tales que  $\text{int}(F) \cap \text{int}(G) \neq \emptyset$ , entonces  $\text{int}(F) \cap \text{int}(G) \subseteq F \cap G$ , siendo esto una contradicción ya que, según el corolario A.3.12,  $F \cap G$  es una célula común a  $F$  y a  $G$  y, por tanto, está contenida en  $(F \setminus \text{int}(F)) \cap (G \setminus \text{int}(G))$ .  $\square$

**Corolario A.3.14.** *Si  $C$  es un cono de  $V$  y  $D$  es un subcono de  $C$ , existe una célula  $F$  cumpliendo las condiciones siguientes:*

- (a)  $F$  es la única célula de  $C$  tal que  $\text{int}(D) \subseteq \text{int}(F)$ .
- (b)  $F$  es la única célula de  $C$  de dimensión mínima tal que  $D \subseteq F$ .

*Demostración.* Según la Nota A.3.4 y el Lema A.3.9, existe una célula  $F$  de  $C$  de dimensión máxima tal que  $\text{int}(D) \subseteq \text{int}(F)$ . Realmente, esta es la única célula de  $C$  con esta condición, ya que dos células distintas deben tener interiores relativos disjuntos (Corolario A.3.13). Además, por el Lema A.3.9, se verifica la inclusión  $D \subseteq F$ . Veamos que la célula  $F$  es la única célula con dimensión mínima, entre todas las que verifican dicha inclusión:

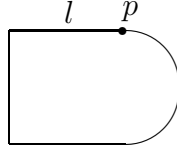
Sea  $G$  una célula de  $C$  de dimensión minimal tal que  $D \subseteq G$ . Entonces,  $D$  está contenido en la célula  $F \cap G$ . Teniendo en cuenta la minimalidad de  $G$ , se tiene que  $F \cap G = G$ , con lo cual  $G$  es una célula de  $F$ . Si  $F$  y  $G$  fueran células distintas tendríamos, por una parte,  $\text{int}(D) \subseteq \text{int}(F)$ , y por otra  $\text{int}(D) \subseteq G \subseteq F \setminus \text{int}(F)$ , lo cual es contradictorio. Por tanto, las células  $F$  y  $G$  deben coincidir.  $\square$

**Proposición A.3.15.** *Si  $F$  es una cara de un cono  $C$ , entonces  $F$  es una célula de  $C$ .*

*Demostración.* Si  $F$  es una cara de  $C$ , existe  $\bar{q} \in C^\vee$  tal que  $F = C \cap \{\bar{q}\}^\perp$ . Si  $\bar{q} = 0$  entonces  $F$  coincide con  $C$  y, por tanto, es claramente una célula. Luego podemos suponer que  $\bar{q} \neq 0$ . Si  $\bar{x}, \bar{y} \in C$  son tales que  $\bar{x} + \bar{y} \in F$ , entonces  $0 = \langle \bar{q}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{q}, \bar{y} \rangle$ . Como  $\bar{q} \in C^\vee$ , es claro que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 0$  y  $\langle \bar{q}, \bar{y} \rangle = 0$ . Luego  $\bar{x}, \bar{y} \in F$ . Por la proposición A.3.11  $F$  es una célula de  $C$ .  $\square$

El recíproco de este corolario es, en general, falso, como muestra el siguiente

**Ejemplo A.3.16.** Consideremos  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{q} \in V^* \setminus \{0\}$  y sea  $C$  un cono cerrado fuertemente convexo de  $V$  tal que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle > 0$  para todo  $\bar{x} \in C \setminus \{0\}$ . Sea  $\phi_{\bar{q}}$  la función definida en la sección A.2. Ahora,  $\phi_{\bar{q}}(C \setminus \{0\})$  satisface  $\phi_{\bar{q}}(C \setminus \{0\}) \subseteq \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 1\} \cong \mathbb{R}^2$  y tiene la siguiente forma:



Consideremos el punto  $p$  y el segmento  $l$  de la figura y sean  $F := \phi_{\bar{q}}^{-1}(p) \cup \{0\}$  y  $G := \phi_{\bar{q}}^{-1}(l) \cup \{0\}$ . Es claro que  $G$  es una célula de  $C$  y que  $F$  es una componente frontera de  $G$ . Por tanto,  $F$  es también una célula de  $C$ . Sin embargo,  $F$  no es una cara, ya que si  $\bar{w}$  es el único elemento de  $C^\vee$  cuyo espacio ortogonal  $\{\bar{w}\}^\perp$  contiene a  $F$ , es claro que  $\{\bar{w}\}^\perp$  también contiene a  $G$ .

**Corolario A.3.17.** *Si  $C$  es un cono y  $F$  es una célula de  $\bar{C}$  tal que  $F \subseteq C$ , entonces  $F$  es también una célula de  $C$ .*

*Demostración.* Aplicaremos la caracterización de la Proposición A.3.11. Para ello, escojamos  $\bar{x}, \bar{y} \in C$  tales que  $\bar{x} + \bar{y} \in F$ . Como  $\bar{x}, \bar{y}$  pertenecen a  $\bar{C}$  y  $F$  es una célula de  $\bar{C}$  por hipótesis, por la proposición A.3.11 se tiene que  $\bar{x}, \bar{y} \in F$ , quedando demostrado así el resultado.  $\square$

**Corolario A.3.18.** *Si  $C$  es un cono y  $R$  es un rayo de  $V$ , entonces  $R$  es un rayo extremal de  $C$  si y sólo si  $R \cup \{0\}$  es una célula de  $C$ .*

*Demostración.* Se deduce inmediatamente a partir de la definición de rayo extremal y de la caracterización de las células dada por la proposición A.3.11.  $\square$

La siguiente proposición nos muestra que, en el caso de un cono poliédrico, los conceptos de cara y célula son coincidentes.

**Proposición A.3.19.** *Si  $C$  es un cono poliédrico, entonces  $F \subseteq C$  es una cara si y sólo si es una célula.*

*Demostración.* Según la proposición A.3.15, es suficiente probar que todas las células de  $C$  son caras. Procederemos por inducción sobre  $\dim(C)$ . El resultado es claro si  $\dim(C) = 0$ . Supongamos que  $\dim(C) > 0$  y que la implicación es cierta para todos los conos de dimensión estrictamente menor que  $\dim(C)$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\dim(C) = \dim(V)$  (en otro caso, consideraríamos  $\text{lin}(C)$  en lugar de  $V$ ). Es claro que  $C$  es una cara. Por tanto, es suficiente demostrar que todas las células propias de  $C$  son también caras. Como  $\dim(C) > 0$  y  $C$  es cerrado, se tiene que  $C \setminus \text{int}(C) \neq \emptyset$ , luego el conjunto de las componentes frontera de  $C$  es no vacío. Sea  $F$  una de estas componentes frontera. Al ser  $C$  poliédrico, existe un subconjunto finito  $L$  de  $C^\vee$  tal que  $C = \{\bar{x} \in V \mid \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } \bar{q} \in L\}$

$L\}$ . Es claro que  $F \subseteq C \setminus \text{int}(C) \subseteq \bigcup_{\bar{q} \in L} \{\bar{q}\}^\perp$ . Como  $F$  es un cono convexo que no intersecta con  $\text{int}(C)$ , existe  $\bar{w} \in L$  tal que  $F \subseteq \{\bar{w}\}^\perp$ . Luego  $F \subseteq C \cap \{\bar{w}\}^\perp$ . Al ser  $F$  un cono maximal contenido en  $C \setminus \text{int}(C)$ , se tiene la igualdad  $F = C \cap \{\bar{w}\}^\perp$ . Por tanto,  $F$  es una cara de  $C$ . Concluimos, pues, que todas las componentes frontera de  $C$  son caras. Si  $G$  es una célula de una de las componentes frontera  $F$  de  $C$  entonces, por hipótesis de inducción,  $G$  es una cara de  $F$ . Pero, según el apartado (f) de la proposición A.3.2,  $G$  será también una cara de  $C$ , quedando así probado el resultado.

**Proposición A.3.20.** *Si  $C$  es un cono de  $V$  y  $F$  es una célula de  $C$ , entonces  $F^\perp \cap C^\vee = \{\bar{y}\}^\perp \cap C^\vee$  para cualquier  $\bar{y} \in \text{int}_F(F)$ . En particular,  $F^\perp \cap C^\vee$  es una cara de  $C^\vee$ .*

*Demostración.* Es evidente que  $F^\perp \cap C^\vee \subseteq \{\bar{y}\}^\perp \cap C^\vee$ . Para probar la inclusión contraria, escogamos cualquier  $\bar{q} \in \{\bar{y}\}^\perp \cap C^\vee$ . Se verificarán las condiciones

$$\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in C \quad \text{y} \quad \langle \bar{q}, \bar{y} \rangle = 0. \quad (\text{A.3})$$

Como  $\bar{y} \in \text{int}_F(F)$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que la bola abierta  $B_\epsilon(\bar{y})$  de  $\text{lin}(F)$  está contenida en  $F$ .

Sea  $f : \text{lin}(F) \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación lineal definida por  $\bar{x} \mapsto \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle$ . Veamos que  $B_\epsilon(\bar{y}) \subseteq \text{Ker}(f)$ . Si  $\bar{x} \in B_\epsilon(\bar{y})$ , se verifica la igualdad

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}(2\bar{y} - \bar{x}),$$

siendo  $2\bar{y} - \bar{x} \in B_\epsilon(\bar{y}) \subseteq F \subseteq C$ . A partir de la igualdad

$$0 = \langle \bar{q}, \bar{y} \rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{q}, \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{q}, 2\bar{y} - \bar{x} \rangle$$

y de las condiciones (A.3), deducimos que  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 0$ . Luego  $B_\epsilon(\bar{y}) \subseteq \text{Ker}(f)$ .

Por tanto, el núcleo de la aplicación lineal  $f$  contiene a un abierto no vacío de  $\text{lin}(F)$  y, como consecuencia,  $f = 0$ . Luego  $\langle \bar{q}, \bar{x} \rangle = 0$  para todo  $\bar{x} \in F$  y así,  $\bar{q} \in F^\perp \cap C^\vee$ .  $\square$

**Nota A.3.21.** Si  $C$  es un cono de  $V$  y  $G$  es una célula de  $C^\vee$ , entonces  $G^\perp \cap C$  es una cara de  $C$ . En efecto: si  $G = \{0\}$  es evidente; en caso contrario  $G^\perp \cap C = (G^\perp \cap C^{\vee\vee}) \cap C = (\{\bar{q}\}^\perp \cap C^{\vee\vee}) \cap C = \{\bar{q}\}^\perp \cap C$  para cualquier  $\bar{q} \in \text{int}(G)$ , según la proposición A.3.20, siendo  $G^\perp \cap C$  es una cara de  $C$ .

El siguiente resultado proporciona un método algorítmico para calcular los rayos extremales del dual de un cono poliédrico fuertemente convexo.

**Proposición A.3.22.** *Sea  $C$  un cono poliédrico fuertemente convexo de dimensión  $m = \dim(V)$ . Sea  $R$  un rayo de  $C^\vee$ . Entonces,  $R$  es un rayo extremal de  $C^\vee$  si y sólo si existen  $m - 1$  rayos extremales  $R_1 = \mathbb{R}_+\bar{r}_1, \dots, R_{m-1} = \mathbb{R}_+\bar{r}_{m-1}$  de  $C$  tales que el sistema  $\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{m-1}\}$  es linealmente independiente y  $R = C^\vee \cap R_1^\perp \cap \dots \cap R_{m-1}^\perp \setminus \{0\}$ .*

*Demostración.* Según el corolario A.3.18 y la proposición A.3.19, los rayos extremales de  $C^\vee$  son los contenidos en las caras 1-dimensionales de  $C$ . Sea  $R$  un rayo extremal de  $C$ . Teniendo en cuenta el apartado (g) de la Proposición A.3.2, existe una única cara  $F$  de  $C$  de dimensión  $m - 1$  tal que  $R = C^\vee \cap F^\perp \setminus \{0\}$ . Por el apartado (c) de la proposición A.3.2 se tiene que  $F$  es fuertemente convexo y por la proposición A.1.34  $F$  está generado por los generadores de sus rayos extremales. Según los apartados (e) y (f) de la proposición A.3.2, los rayos extremales de  $F$  son exactamente los rayos extremales de  $C$  contenidos en  $F$ . Sean estos  $R_1, \dots, R_s$ . Como  $\dim(\text{lin}(F)) = m - 1$ , existen  $i_1, \dots, i_{m-1} \in \{1, \dots, s\}$  tales que  $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_{m-1}}\}$  es una base de  $\text{lin}(F)$ . Como  $F^\perp = \text{lin}(F)^\perp = R_{i_1}^\perp \cap \dots \cap R_{i_{m-1}}^\perp$ , tenemos  $R = C^\vee \cap R_{i_1}^\perp \cap \dots \cap R_{i_{m-1}}^\perp \setminus \{0\}$ .

Para probar la implicación contraria, supongamos ahora que  $R$  es un rayo de  $C^\vee$  tal que  $R = C^\vee \cap R_1^\perp \cap \dots \cap R_{m-1}^\perp \setminus \{0\}$ , siendo  $R_1 = \mathbb{R}_+\bar{r}_1, \dots, R_{m-1} = \mathbb{R}_+\bar{r}_{m-1}$  rayos extremales de  $C$  cuyos generadores son linealmente independientes. Sea  $L$  el subespacio vectorial de  $V$  generado por  $\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{m-1}\}$  y sea  $F := C \cap L$ . Si  $\bar{q} \in R$ , es claro que  $L = \{\bar{q}\}^\perp$  y, por tanto,  $F = C \cap \{\bar{q}\}^\perp$ . Como  $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{m-1} \in F$ ,  $F$  es una cara  $(m - 1)$ -dimensional de  $C$ . Además,  $F^\perp = L^\perp = R_1^\perp \cap \dots \cap R_{m-1}^\perp$ . Por tanto,  $R = C^\vee \cap F^\perp \setminus \{0\}$ . Según el apartado (g) de la proposición A.3.2,  $C^\vee \cap F^\perp$  es una cara de  $C^\vee$ . Luego  $R$  es un rayo extremal de  $C^\vee$ .  $\square$

**Corolario A.3.23.** *Sea  $C$  un cono poliédrico de  $V$  tal que  $C^\vee$  está generado por  $m = \dim(V)$  elementos de  $V^*$  linealmente independientes  $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m$ . Sea  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$  una base de  $V$  y  $h : V \rightarrow V$  el isomorfismo lineal definido por  $h(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \langle \bar{q}_k, \bar{x} \rangle \bar{e}_k$  para todo  $\bar{x} \in V$ . Entonces, los rayos extremales del cono  $C$  vienen generados por  $h^{-1}(\bar{e}_1), \dots, h^{-1}(\bar{e}_m)$ .*

*Demostración.* Según la Proposición A.3.22, los rayos extremales de  $C = C^{\vee\vee}$  son  $R_i := C \cap \{\bar{q}_1\}^\perp \cap \dots \cap \{\bar{q}_{i-1}\}^\perp \cap \{\bar{q}_{i+1}\}^\perp \cap \dots \cap \{\bar{q}_m\}^\perp \setminus \{0\}$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Si  $i \in \{1, \dots, m\}$ :

$$\bar{e}_i = h(h^{-1}(\bar{e}_i)) = \sum_{k=1}^m \langle \bar{q}_k, h^{-1}(\bar{e}_i) \rangle \bar{e}_k.$$

De esta igualdad deducimos que  $\langle \bar{q}_k, h^{-1}(\bar{e}_i) \rangle$  es igual a 0 si  $k \neq i$  e igual a 1 si  $k = i$ . Luego  $h^{-1}(\bar{e}_i)$  pertenece a  $C^{\vee\vee} = C$  (al ser  $\langle \bar{q}_k, h^{-1}(\bar{e}_i) \rangle \geq 0$  para

todo  $k$ ) y también pertenece a  $\{\bar{q}_1\}^\perp \cap \dots \cap \{\bar{q}_{i-1}\}^\perp \cap \{\bar{q}_{i+1}\}^\perp \cap \dots \cap \{q_m\}^\perp$ . Por tanto,  $R_i$  viene generado por  $h^{-1}(\bar{e}_i)$ .  $\square$

**Nota A.3.24.** Consideremos un cono poliédrico de  $\mathbb{R}^m$  de la forma

$$C = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot \bar{x}^\top \geq \bar{0}\},$$

siendo  $A$  una matriz cuadrada regular de orden  $m$ ,  $\bar{0}$  la matriz nula de dimensión  $m \times 1$  y  $\bar{x}^\top$  la matriz traspuesta de la dada por el vector  $\bar{x}$ . En este caso,  $C$  es el cono dual del cono  $D$  de  $(\mathbb{R}^m)^*$  generado por los vectores  $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_m \in (\mathbb{R}^m)^*$  cuyas coordenadas respecto a la base canónica dual vienen dadas por las filas de la matriz  $A$ . La matriz asociada al isomorfismo lineal  $h$  definido en el corolario A.3.23, respecto a la base canónica, es justamente la matriz  $A$ . Por tanto, según este corolario, las coordenadas respecto a la base canónica de un conjunto de generadores de los rayos extremales de  $C$  vendrán dadas por los vectores columna de la matriz  $A^{-1}$ .

# Bibliografía

- [1] S. S. Abhyankar. *Lectures on expansion techniques in Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1977).
- [2] S. S. Abhyankar, T.T. Moh. Embeddings of the line in the plane. *J. Reine Angew. Math.* **276** (1975), 148-166.
- [3] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the Plane Cremona Maps*. Lecture Notes in Mathematics, no. 1769, Springer (2002).
- [4] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 4, Springer (1984).
- [5] T. Bauer. On the cone of curves of an abelian variety. *Amer. J. Math.* **120** (1998), 997-1006.
- [6] A. Beauville. *Complex Algebraic Surfaces*. London Mathematical Society, Student Texts, no. 34. Cambridge Univ. Press (1996).
- [7] A. Campillo. *Algebroid curves in positive characteristic*. Lecture Notes in Mathematics 813, Springer (1980).
- [8] A. Campillo, G. González-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert. Enriques diagrams, resolutions and toric clusters. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), 329-334.
- [9] A. Campillo, G. González-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert. Clusters of infinitely near points. *Math. Ann.* **306** (1996), 169-194.
- [10] A. Campillo, G. González-Sprinberg. On characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points. Brieskorn conference volume, *Progress in Math.* **162** (1998), Birkhauser. Boston.
- [11] A. Campillo, O. Piltant, A. J. Reguera. Cones of curves and of line bundles on surfaces associated with curves having one place at infinity. *Proc. Lond. Math. Soc.*, III. **84**, no 3, (2002), 559-580.
- [12] A. Campillo, O. Piltant, A. J. Reguera. Cones of curves and of line bundles “at infinity”. Preprint (2002).

- [13] E. Casas-Alvero. Infinitely near imposed singularities. *Math. Ann.* **287** (1990), 429-454.
- [14] E. Casas-Alvero. *Singularities of Plane Curves*. London Math. Soc. Lecture Notes Series, no 276. Cambridge University Press (2000).
- [15] C. Ciliberto, R. Miranda. Degenerations of planar linear systems. *J. Reine Ang. Math.* **501** (1998), 191-220.
- [16] S.D. Cutkosky. Complete Ideals in Algebra and Geometry. *Contemporary Math.* **159** (1994), 27-39.
- [17] S.D. Cutkosky. On unique and almost unique factorization of complete ideals II. *Inv. Math.* **98** (1989), 59-74.
- [18] O. Debarre. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry*. Universitext, Springer (2001).
- [19] G. Ewald. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 168. Springer (1996).
- [20] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton Univ. Press (1993).
- [21] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer (1984).
- [22] J. W. Gaddum. Linear inequalities and quadratic forms. *Pac. J. Math.* **8** (1958), 411-414.
- [23] C. Galindo, F. Monserrat. The cone of curves associated to a plane configuration. Preprint Univ. Jaume I (2002).
- [24] C. Galindo, F. Monserrat. On the cone of curves and of line bundles of a rational surface. Preprint Univ. Jaume I (2003).
- [25] A. Gimigliano. *On linear systems of plane curves*. Ph.D. thesis. Queens Univ. Kingston (1987).
- [26] H. Göhner. Semifactoriality and Muhly's condition ( $N$ ) for two dimensional local rings *J. Algebra* **34** (1975), 403-429.
- [27] G.-M. Greuel, C. Lossen. The geometry of families of singular curves. *NATO Science Series*, Kluwer (2001), 159-192.
- [28] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. The variety of plane curves with ordinary singularities is not irreducible. *Int. Math. Res. Notices* (2000).
- [29] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. Castelnuovo function, zero-dimensional schemes and singular plane curves. *J. Alg. Geom.* **9** (2000), 663-710.



- [30] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. Plane curves of minimal degree with prescribed singularities. *Invent. Math.* **133** (1998), 539-580.
- [31] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. Geometry of families of nodal curves on the blow-up projective plane. *Trans. AMS* **350** (1998), 251-274.
- [32] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin. New asymptotics in the geometry of equisingular families of curves. *Int. Math. Res. Notices* **13** (1997), 595-611.
- [33] B. Harbourne. Anticanonical Rational Surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1191-1208.
- [34] B. Harbourne. Blowing-up  $\mathbb{P}^2$  and their blowings-down. *Duke Math. J.* **52** (1985), 129-148.
- [35] B. Harbourne. Rational surfaces with  $K^2 > 0$ . *Proc. A.M.S.* **124** no 3 (1996), 727-733.
- [36] B. Harbourne. The geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane. *Proceedings of the 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry*, CMS Conf. Proc., vol. 6, A.M.S., Providence, RI (1986), 95-111.
- [37] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, no. 52. Springer (1977).
- [38] R. Hemmecke. On the computation of Hilbert bases and extreme rays of cones. Preprint of University of California (2002)
- [39] H. Hironaka. *On theory of birational blowing-up*. Thesis (unpublished), Harvard University, Cambridge (1960).
- [40] A. Hirschowitz. Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques. *J. Reine Angew. Math.* **397** (1989), 208-213.
- [41] K. Hoffman, R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall (1971).
- [42] S. Iitaka. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, no 76. Springer (1982).
- [43] Y. Kawamata. The cone of curves of algebraic varieties. *Annals of Math.*, 119 (1984), 603-633
- [44] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint Donat. *Toroidal embeddings*. Lect. Notes in Math. 339. Springer (1973).
- [45] S. Kleiman. Toward a numerical Theory of Ampleness. *Ann. Math.* **84** (1966), 293-344.

- [46] J. Kollár, S. Mori. *Birational Geometry of Algebraic Varieties*. Cambridge Tracts in Mathematics, no 134, Cambridge University Press (1998).
- [47] S. Lang, A. Néron. Rational points of abelian varieties over function fields. *Amer. J. Math.* (1959), 95-118.
- [48] M. Lahyane. Exceptional curves on smooth rational surfaces with  $-K$  not nef and of self-intersection zero. Aparecerá en *Proc. A.M.S.*
- [49] M. Lahyane. Rational surfaces having only a finite number of exceptional curves. Aparecerá en *Math. Z.*
- [50] M. Lahyane. Optimal bound for the number of  $(-1)$ -curves on extremal rational surfaces. *Int. J. Math. Math. Sci.* **31**, no. 2, (2002), 123-126.
- [51] J. Lipman. Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization. *Publ. IHES* **36** (1969), 195-279.
- [52] J. Lipman. On complete ideals in regular local rings. *Algebraic geometry and commutative algebra in honor of M. Nagata* (1987), 203-231.
- [53] J. Lipman. Proximity inequalities for complete ideals in two-dimensional regular local rings. *Commutative Algebra week* Mount Holyoke College (1992).
- [54] R. Miranda. Linear systems of plane curves. *Notices A.M.S.* **46** (1999), 192-202.
- [55] R. Miranda, U. Persson. On extremal rational elliptic surfaces. *Math. Z.*, **193** (1986), 537-558.
- [56] M. Miyanishi. *Lectures on curves on rational and unirational surfaces*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1978).
- [57] T.T. Moh. On analytic irreducibility at infinity of a pencil of curves. *Proc. A.M.S.*, **44** (1974), 22-23.
- [58] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Annals of Math.*, **124** (1982), 133-176.
- [59] M. Nagata. On self-intersection number of a section on a ruled surface. *Nagoya Math. J.* **37** (1970), 191-196.
- [60] M. Nagata. On rational surfaces II, *Mem. Coll. Scil Univ. Kyoto* **33** (1960), 271-293.
- [61] M. Nagata. On the fourteenth problem of Hilbert. *Amer. J. Math.* **81** (1959), 766-772.

- [62] V. V. Nikulin. A remark on algebraic surfaces with polyhedral Mori cone. *Nagoya Math. J.* **157** (2000), 73-92.
- [63] T. Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 15, Springer (1988).
- [64] M. J. Panik. *Fundamentals of Convex Analysis*. Kluwer Academic Publishers (1993).
- [65] H. Pinkham. *Séminaire sur les singularités des surfaces (Demazure-Pinkham-Teissier)*. Cours donné au Centre de Math. de l'École Polytechnique (1977-1978).
- [66] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press (1970).
- [67] A. J. Reguera. Semigroups and clusters at infinity. *Prog. in Math.*, vol. 134, Birkhäuser (1996), 339-374.
- [68] J. Roé. *Condicions infinitesimals i sistemes lineals de corbes planes*. Ph.D. thesis, Universitat de Barcelona (2001).
- [69] J. Rosoff. Effective divisor classes on a ruled surface. *Pac. J. Math.*, vol. 202, no. 1 (2002), 119-124.
- [70] A. Sathaye. On planar curves. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 1105-1135.
- [71] B. Segre. Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica. *Rend. Sem. Mat. Univ. Torino* **20** (1960/61), 67-85.
- [72] J. Stoer, C. Witzgall. *Convexity and optimization in finite dimensions I*. Springer (1970).
- [73] O. Zariski. *Algebraic Surfaces*, 2nd. suppl. ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 61, Springer (1971).
- [74] O. Zariski. Polynomial ideals defined by infinitely near base points. *Amer. J. Math.* **60** (1938), 151-204.
- [75] O. Zariski, P. Samuel. *Commutative Algebra II*, Apéndices 4 y 5. Van Nostrand (1960).