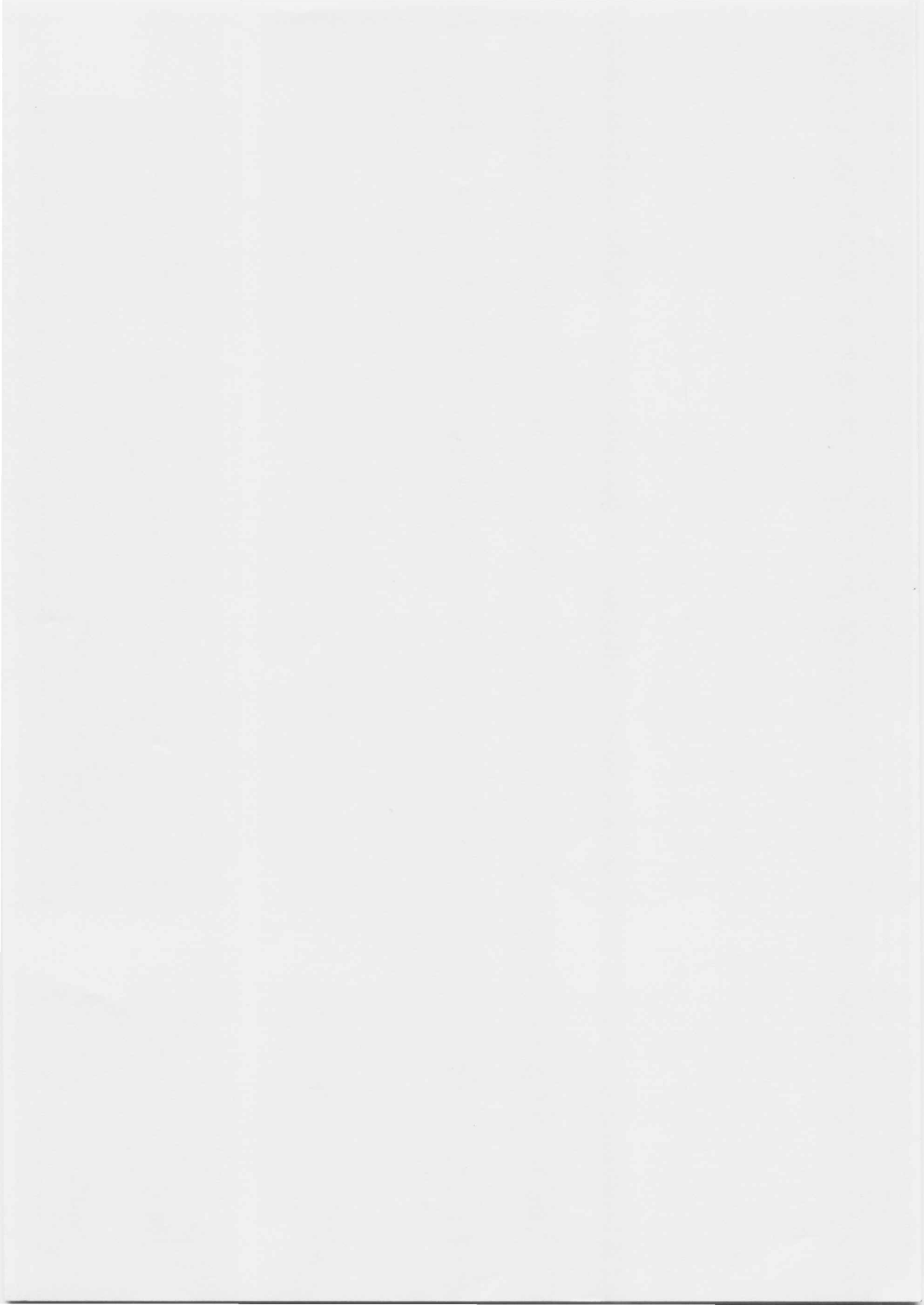


**UNA TEORIA BIRRACIONAL  
PARA LOS GRAFOS ACICLICOS.**

**Carlos Marijuán López**





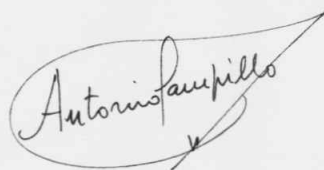
MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR  
AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS,  
SECCION DE MATEMATICAS, POR  
CARLOS MARIJUAN LOPEZ



ANTONIO CAMPILLO LOPEZ, CATEDRATICO DE ALGEBRA DEL  
DEPARTAMENTO DE ALGEBRA, GEOMETRIA Y TOPOLOGIA DE  
LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

CERTIFICA: Que la presente Memoria "Una teoría birracional para los grafos acíclicos" ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Algebra, Geometría y Topología de la Universidad de Valladolid por D. Carlos Marijuán López, y para que conste en cumplimiento de la vigente legislación, presenta y apadrina ante la Facultad de Ciencias de dicha Universidad la referida Tesis Doctoral.

Valladolid a 15 de Junio de 1988.

A handwritten signature in cursive script, enclosed in an oval shape. The signature reads "Antonio Campillo".

Fdo.: Prof. Dr. D. Antonio CAmpillo López



a Antonio

a Mariage, por lo que nos contrae  
contra lo que nos explota.

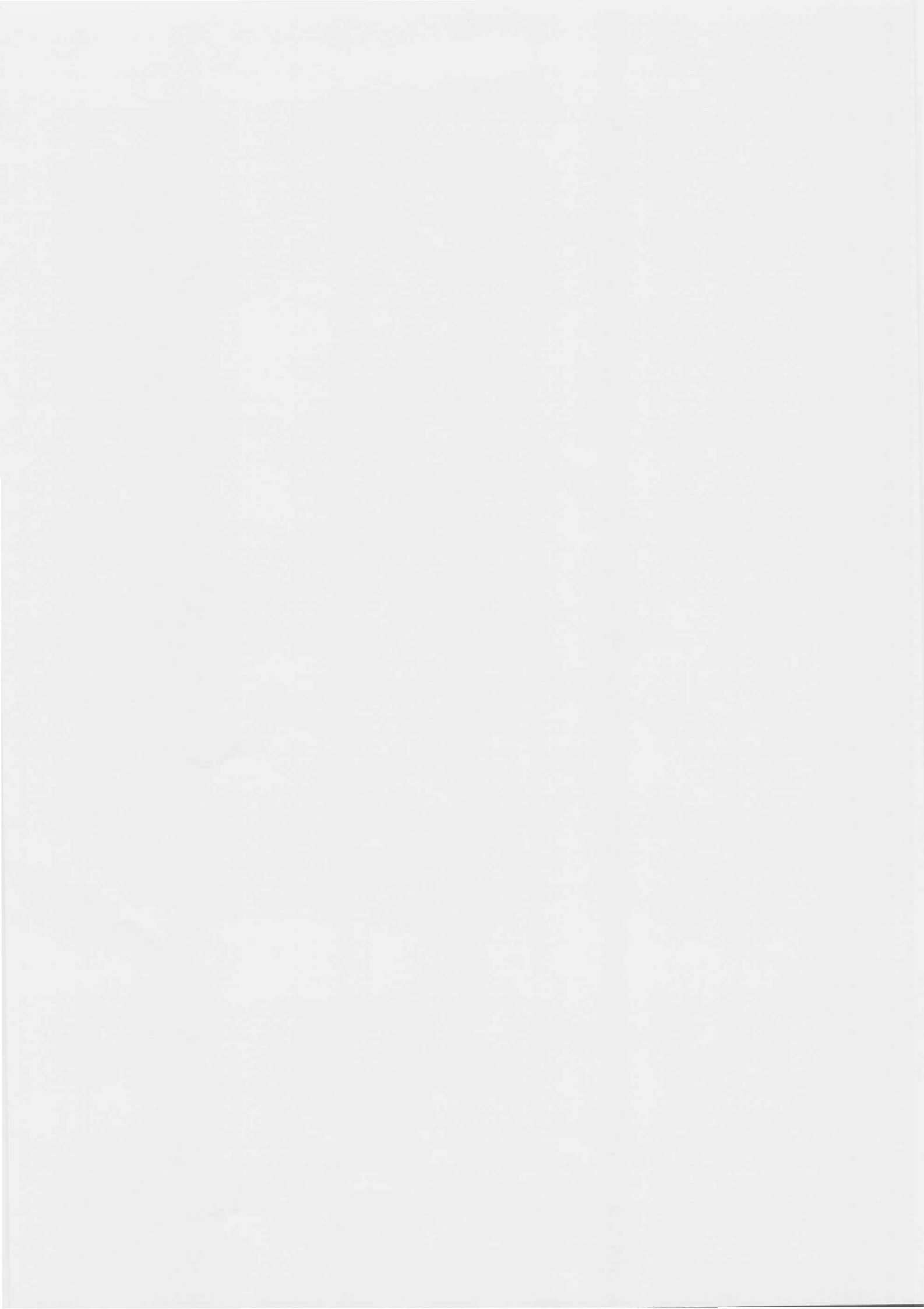
Y viceversa.



## AGRADECIMIENTO

Es mucha la gente que se ha interesado de una u otra manera por mí y por este trabajo mientras lo realizaba. Algunos me ayudaron de un modo decisivo; recuerdo especialmente el encuentro urdido por Elena, la hospitalidad de los componentes del Departamento de Algebra y Geometría y de los de Estadística, el apoyo de mis colegas, la generosa convivencia de Manolo, la confianza y el entusiasmo de Antonio, la terquedad de la sombra Mariage contra mis más disparatados comportamientos. Jose Manuel Aroca planteó y definió el problema tratado. Inicialmente realizó, también, un seguimiento continuado de este trabajo por lo que tuvo que soportar el descubrimiento de diversos, a veces repetidos, mediterráneos. Jesús Saez Aguado me hizo sugerencias bibliográficas de gran interés. Antonio Campillo me orientó con la certeza y buen tino con que el gallo pica el grano. M<sup>a</sup> José Valles mecanografió el manuscrito bajo la insoportable presión del tiempo. Los "músicos" Félix y Ana y las "figurinistas" Elena y Rosa vistieron y ambientaron el producto final.

Gracias a todos.





## INDICE

### INTRODUCCION

### CAPITULO I. GRAFOS TRANSITIVOS Y ESPACIOS TOPOLOGICOS

1.1	Grafos. Conceptos básicos. ....	3
1.2	Espacios topológicos finitos y grafos. ....	9
1.3	Grafo dual. ....	20

### CAPITULO II. EXPLOSION DE UN GRAFO REDUCIDO

2.1	Transitivización y reducción. Grafos reducidos .....	29
2.2	Grafos acíclicos. ....	39
2.3	Explosión de grafos reducidos. ....	43
2.4	Propiedad universal de la explosión. Aplicaciones y morfismos birracionales. ....	71

### CAPITULO III. CONTRACCION DE UN BOSQUE

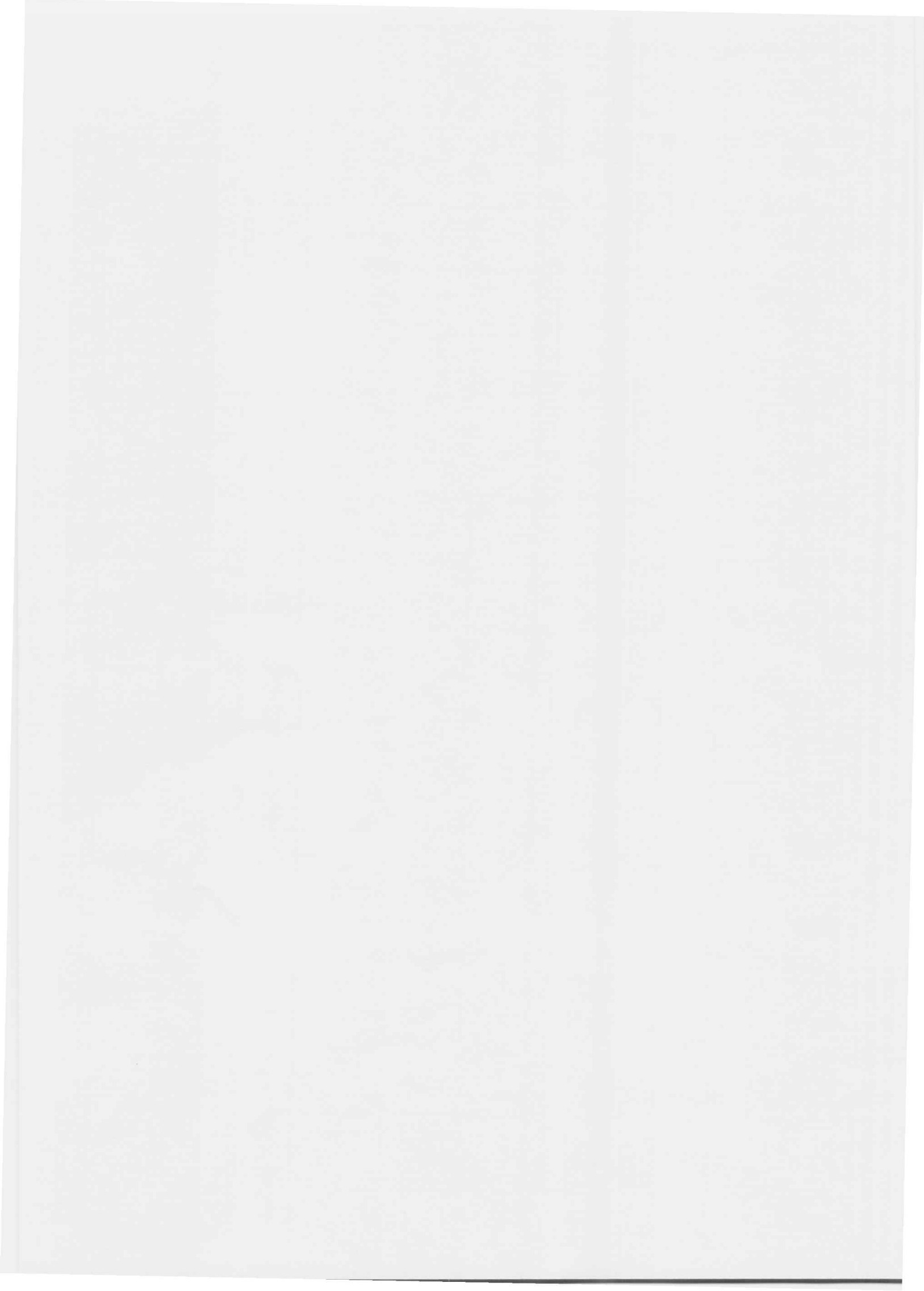
3.1	Pre-etiquetado de un bosque. ....	85
3.2	Contracción de un bosque en un grafo reducido. ....	89
3.3	Contracción canónica minimal de un bosque.	
	3.3.A Observaciones previas y descripción. ....	99
	3.3.B Pre-etiquetado canónico de un bosque. ....	113
3.4	Estructura del conjunto de grafos reducidos Iso-explotados. ....	133

### CAPITULO IV. EXPLOSIONES DE UN GRAFO ACICLICO

4.1	Bosque de las cadenas de un grafo acíclico. ....	140
4.2	Explosión completada de grafos acíclicos. ....	164

4.3	Explosión geométrica de un grafo acíclico. ....	178
4.4	Equivalencia birracional geométrica. Propiedad universal de la explosión completada. ....	193
4.5	Grafos acíclicos transitivos. ....	212
BIBLIOGRAFIA .....		225

## INTRODUCCION



INTRODUCCION

En esta memoria hacemos un estudio de la estructura de los grafos acíclicos atendiendo a un paralelismo notorio con la estructura birracional de las variedades algebraicas y, en particular, en muchos aspectos, con la de las curvas singulares. Este paralelismo se refleja en las fuertes analogías que presentan las técnicas y resultados que introducimos en esta memoria con sus correspondientes en Geometría.

Por un grafo acíclico entendemos un grafo finito dirigido sin ciclos (en particular sin lazos) ni arcos múltiples al que representaremos por  $(X,G)$ , donde  $X$  denota el conjunto de puntos y  $G \subset X \times X$  es el conjunto de arcos. Nuestro interés inicial es considerar la clase de grafos acíclicos transitivos, es decir aquellos grafos acíclicos para los que si  $(x,y) \in G$ ,  $(y,z) \in G$  y  $x \neq z$ , entonces  $(x,z) \in G$ . Esta clase es equivalente a la de conjuntos finitos parcialmente ordenados y a la de espacios topológicos finitos  $T_0$  y, por tanto, los resultados de esta memoria pueden ser interpretados, también, como ciertos resultados de estructura para dichas clases de objetos. Cada grafo acíclico transitivo puede representarse por lo que llamaremos el "grafo reducido asociado", grafo acíclico obtenido del anterior por eliminación de los arcos redundantes para la propiedad de transitividad; así un conjunto parcialmente ordenado o un espacio topológico  $T_0$  se podrán representar, también, por un grafo reducido.

## II

El análisis de la estructura birracional de un grafo acíclico transitivo requerirá exactamente las mismas técnicas que el análisis de la estructura birracional de un grafo acíclico en general. Más aún, si se comienza con un grafo transitivo, en su estructura birracional aparecerán involucrados otros grafos acíclicos no transitivos, en general. Estas razones nos obligan a plantear nuestro estudio en el contexto de grafos acíclicos.

La técnica fundamental de esta memoria se basa en el concepto de explosión. Esta noción presenta un paralelismo más que formal con la Geometría, sobre todo si tenemos en cuenta el concepto de explosión "geométrica" tal y como lo introducimos en el capítulo IV:

La explosión "geométrica" de un grafo acíclico  $(X,G)$  en un punto  $x \in X$  consiste esencialmente en las siguientes transformaciones: 1) sustitución de la parte del grafo  $(X,G)$  adyacente por debajo (en el sentido de la orientación) al punto  $x$  por el grafo suma de esta parte con la parte del grafo  $(X,G)$  adyacente a  $x$  por arriba; 2) el grafo suma anterior se conecta al resto del grafo por medio de los arcos que conectaban los dos subgrafos adyacentes a  $x$  contemplados en 1); 3) se conservan los caminos que originalmente conectaban exteriormente ambos subgrafos.

Si consideramos una variedad algebraica no singular y una colección finita  $C$  de subvariedades no singulares con las siguientes propiedades: 1) dadas dos subvariedades de  $C$  o bien una está contenida en la otra o bien su intersección es transversal y la

dimensión de cada componente conexa de la intersección es la suma de las dimensiones de las subvariedades menos la dimensión de la variedad ambiente, o su intersección es vacía; 2) cada componente de una intersección de dos subvariedades de la colección  $C$  es una subvariedad de  $C$ ; entonces, la geometría de la variedad explotada con centro en una de las subvariedades  $Y$  de la colección (la colección de transformadas estrictas y cortes de éstas con el divisor excepcional) se puede describir completamente con el explotado "geométrico", en el punto que corresponde a  $Y$ , del grafo transitivo asociado al conjunto ordenado formado por todas las subvariedades de la colección  $C$  de partida. De hecho, la condición de transversalidad fuerte bastaría imponerla a la subvariedad centro, a los pares de subvariedades que están por encima de ella en el grafo y a los pares formados por una subvariedad que está por debajo y otra que no lo está. Incluso se podría considerar, en vez del grafo acíclico transitivo, un grafo acíclico intermedio entre su reducido y el transitivo.

En Geometría se consideran frecuentemente sucesiones de explosiones de forma que siempre que se cumplan, en cada etapa, las condiciones anteriores se tendrá que el resultado final de la sucesión de explosiones se describirá gráficamente efectuando sucesivas explosiones "geométricas" a partir del grafo correspondiente a los datos iniciales. Así, por ejemplo, en [F.1] la geometría de la variedad de cuádricas completas aparece descrita mediante un  $n$ -cubo dirigido que se puede obtener a partir de un  $n$ -símplice

dirigido, por explosión "geométrica" sucesiva de sus vértices. Con precisión, el autor indica cómo en etapas intermedias lo que se explotan son aristas o caras (dirigidas) de distintas dimensiones, pero la explosión de una arista o cara no es otra cosa que la explosión "geométrica" de su máximo. Para completar el comentario indicaremos que el  $n$ -símplice dirigido considerado corresponde al grafo transitivo asociado a la colección de subvariedades  $C = \{Y_1, \dots, Y_{n+1}\}$ , donde  $Y_i$  es la subvariedad de cuádricas no completas de rango menor o igual que  $i$ .

El proceso de sustituir un  $n$ -símplice por un  $n$ -cubo aparece también en la Geometría en otros contextos; así, por ejemplo, en [G.N.P] se sustituyen los  $n$ -símplices de variedades algebraicas o esquemas por  $n$ -cubos obteniendo con ello buenos refinamientos de la resolución de singularidades de Hironaka y de la teoría de Hodge-Deligne, habiendo sido hasta el momento los  $n$ -símplices objetos naturales para expresar ciertas propiedades de las variedades singulares.

Uno de los resultados principales de esta memoria es la construcción de un complejo de cubos asociado a cada grafo acíclico y que generaliza la construcción del  $n$ -cubo a partir del  $n$ -símplice. Si el dato inicial es un grafo acíclico  $(X, G)$  el resultado final es exactamente una estructura gráfica que tiene en particular como información el citado complejo de cubos. Con precisión, este resultado final que llamaremos explosión completada de  $(X, G)$  consiste en una terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  donde  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es un bosque y  $\bar{G}$  da una estructura



cúbica sobre dicho bosque en el sentido de la definición 4.4.14. La construcción del grafo  $(\tilde{X}, \bar{G})$  se puede hacer por explosión "geométrica" sucesiva de los puntos de  $X$  ordenados por niveles (la posibilidad de ordenar los puntos por niveles caracteriza a los grafos acíclicos). Una construcción alternativa de  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  se puede obtener directamente tomando como  $\tilde{X}$  los caminos en  $(X, G)$  con fin maximal, en cuyo caso los arcos en  $\bar{G}$  unen un camino de  $X$  de longitud  $q$  con un subcamino de longitud  $q-1$  y los arcos de  $\tilde{G}$  son aquellos arcos de  $\bar{G}$  cuyos puntos extremos son caminos que difieren precisamente en el primer término. Los objetos  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  y  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  se podrán caracterizar a partir del grafo  $(X, G)$  mediante sendas propiedades universales lo que pondrá aún más de relieve el carácter natural de ambas construcciones de acuerdo con el objetivo que se requiere para cada una de ellas. El bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  determinará la clase de equivalencia birracional mientras que la terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  determina la clase de equivalencia birracional geométrica. Los morfismos dominantes entre grafos (aquellos que llevan maximales en maximales) inducirán morfismos entre bosques y ternas asociados, propiedad que conduce a establecer buenos conceptos de aplicaciones racionales dominantes y aplicaciones y morfismos birracionales y los correspondientes objetos con el apellido geométrico. El paralelismo de la correspondiente teoría birracional con la teoría birracional de curvas algebraicas llega a ser en este punto completo.

Si fijamos un bosque  $(Z, H)$ , la totalidad de grafos acíclic-

cos  $(X,G)$  cuyo explotado  $(\tilde{X},\tilde{G})$  es isomorfo a  $(Z,H)$  forman un conjunto ordenado por la relación birracional teniendo, por consiguiente, un grafo reducido asociado  $\text{Iso}_A(Z,H)$ . Muchos de los resultados de la memoria proporcionan propiedades notables de este grafo que nos ayudan a conocer su estructura. Cada clase de isomorfia de estructuras cúbicas sobre  $(Z,H)$  da lugar a un subgrafo  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$ . Los grafos reducidos forman a su vez un subgrafo  $\text{Iso}(Z,H)$  de  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$ . Los grafos acíclicos transitivos son exactamente los grafos de los conjuntos  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$  donde el número de elementos de  $\bar{H}$  es el máximo posible. Finalmente, la relación entre un grafo acíclico transitivo y su reducido se puede estudiar, también, en términos de distintos grafos de este tipo.

La aproximación a estas cuestiones que hacemos en la memoria no es geométrica, por lo tanto haremos una exposición sistemática realizada con técnicas propias de la teoría de grafos. Por su importancia especial y la simplicidad en la exposición desarrollamos previamente el caso de grafos reducidos (en este caso, en  $(\tilde{X},\tilde{G})$  y  $(\tilde{X},\tilde{G},\bar{G})$  hay la misma información). Esta simplicidad contrasta con la mayor dificultad que tiene el problema inverso de la explosión, la contracción, en este caso; ya que construir grafos reducidos por contracción de un bosque da lugar a un problema considerablemente más complejo que el de construir grafos acíclicos por contracción de dicho bosque.

En el capítulo I se introducen los conceptos básicos que se van a utilizar en la memoria detallando las relaciones entre

espacios topológicos, preórdenes y grafos transitivos.

En el capítulo II se introducen los grafos reducidos, su explosión por niveles y su explosión global (o simplemente explosión). La representación de la explosión mediante el bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  permite dar una caracterización aritmética de un grafo reducido mediante colecciones de números naturales. Esto es una consecuencia del hecho no trivial de la extensión de un etiquetado ordenado del grafo reducido a su explotado. Se caracteriza, también, la explosión por una propiedad universal y se establece la teoría birracional de grafos reducidos.

El capítulo III está dedicado a las contracciones birracionales de un bosque en un grafo reducido. El principal problema caracteriza las condiciones bajo las cuales se puede efectuar una tal contracción, dando una manejable caracterización aritmético-combinatoria en términos del bosque. Se construye también una contracción canónica minimal, en el sentido de que tiene un mínimo número de puntos y arcos, y se estudia la estructura del grafo reducido  $\text{Iso}(Z, H)$ .

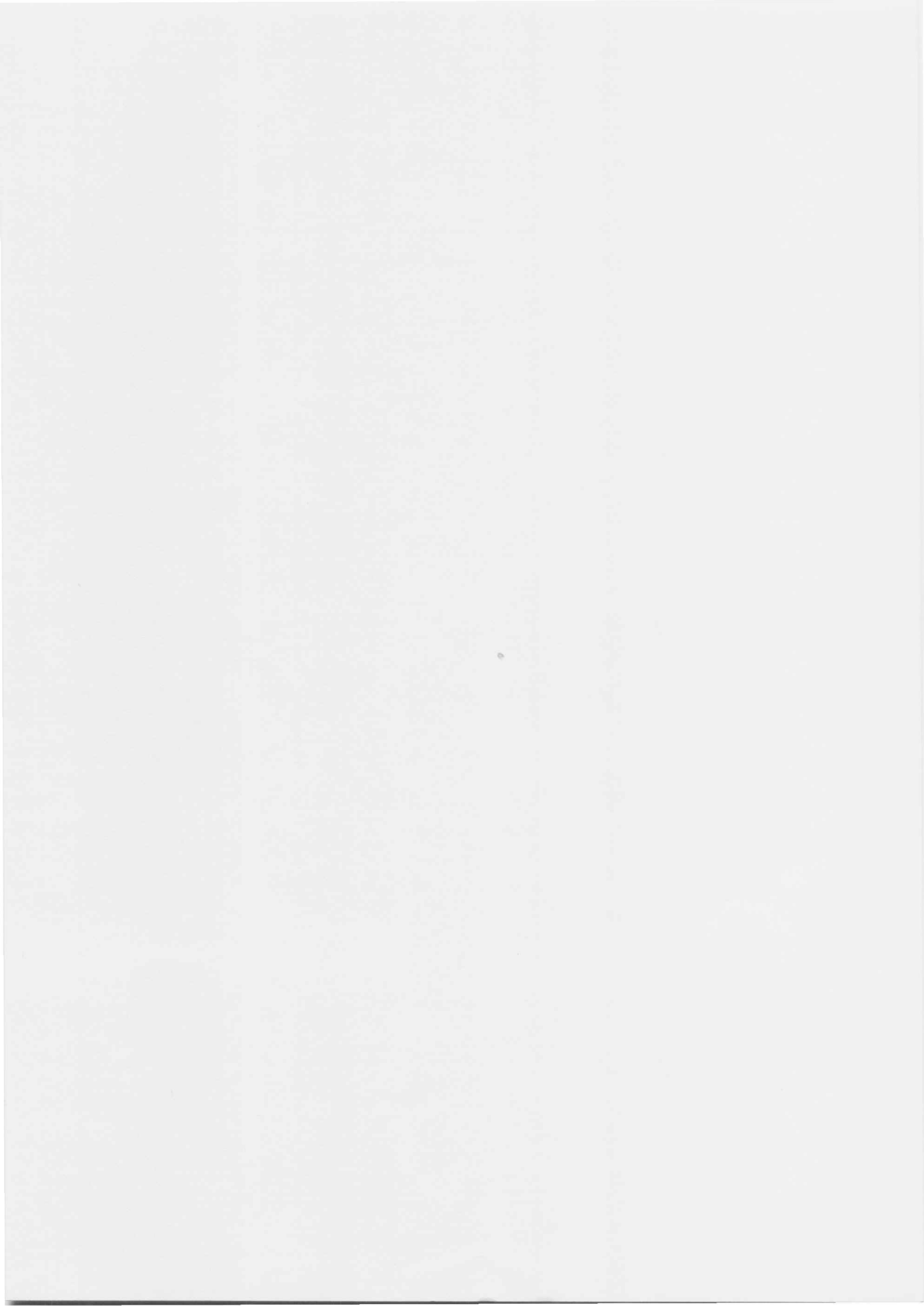
En el capítulo IV se construye, en primer lugar, el "bosque de las cadenas"  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  asociado a un grafo acíclico en general, haciendo una generalización de todos los resultados de los capítulos II y III. A continuación, se construye el "bosque de las cadenas completado"  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  y se prueba la coincidencia de éste con el explotado "geométrico" sucesivo. Se establece la teoría birracional geométrica y se estudia su representación en el grafo

$\text{Iso}_A(Z, H)$ . Se termina analizando el caso particular de los grafos acíclicos transitivos.

Indicaremos, finalmente, que con estas técnicas esperamos resolver o clarificar algunos problemas que aparecen en otros contextos. Por ejemplo, la construcción de Lewis de un anillo cuyo espectro sea un espacio topológico finito  $T_0$  dado está estrictamente relacionada con la idea de explosión, por lo que esperamos obtener una construcción más natural y más explícita, [L.1]. Puesto que un grafo acíclico transitivo da lugar a un complejo simplicial, la explosión algebraica adecuada del anillo de caras de dicho complejo, [S.1], debería proporcionar un esquema que jugaría el papel del esquema de caras de un complejo cúbico cuya utilidad en combinatoria sería manifiesta. Para acabar, la cohomología de un espacio topológico finito  $T_0$  visto como espacio localmente espectral estudiada en [P.1] podría ser calculable si se estudia el comportamiento de la misma por explosiones.

CAPITULO I

GRAFOS TRANSITIVOS Y ESPACIOS TOPOLOGICOS



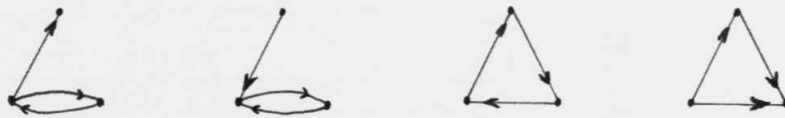
CAPITULO I

GRAFOS TRANSITIVOS Y ESPACIOS TOPOLOGICOS

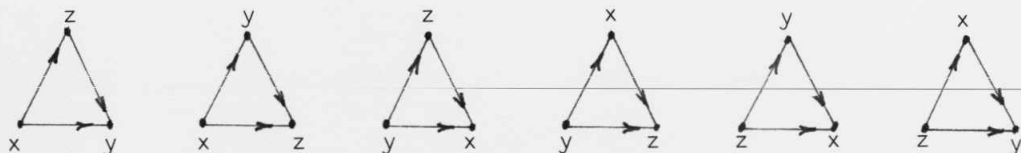
Los objetos sobre los que se escribe en esta memoria se suelen denominar "grafos dirigidos sin lazos ni arcos múltiples". Nosotros sintetizaremos esta expresión, mediante una definición precisa, en la más breve de "grafos". El lenguaje conjuntista utilizado en la definición impondrá las tres condiciones que los califican.

Distinguiremos entre grafos etiquetados y no-etiquetados mediante la relación "tener la misma forma". Cada una de las clases de equivalencia será un grafo no-etiquetado; cada representante de una clase será un grafo etiquetado.

A continuación se muestran todos los grafos no-etiquetados con tres puntos y tres arcos:



Los grafos siguientes representan todas las maneras posibles de etiquetar, con etiquetas x,y,z, el último de los grafos anteriores.



De un modo análogo se entenderán las etiquetas de los espacios topológicos que tratemos.

Se comienza el capítulo con una revisión de aquellos conceptos y propiedades básicas referentes a grafos que van a ser utilizados en el resto de la memoria. Esto servirá para fijar notaciones y nomenclaturas. A continuación se muestra la identidad existente, a través de la relación de especialización, entre espacios topológicos  $T_0$ , órdenes parciales y una cierta clase de grafos: los acíclicos transitivos. Finalmente se precisan nuevas notaciones y relaciones en las clases duales de las mencionadas anteriormente.



1.1. GRAFOS. CONCEPTOS BASICOS

Definiciones 1.1.1

Por un grafo  $(X,G)$  entenderemos un par formado por un conjunto finito no vacío  $X$  y un subconjunto  $G$  de  $X \times X - \{(x,x), x \in X\}$ .

Llamaremos puntos a los elementos de  $X$  y arcos a los de  $G$ .

Usaremos también la notación  $\vec{xy}$  para indicar  $(x,y) \in G$  y diremos que  $x$  es adyacente a  $y$ .

Observaciones 1.1.2

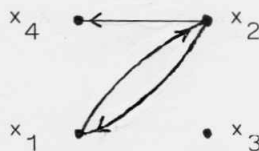
a) Si  $\text{Card}(X) = n$ , en  $X \times X - \{(x,x), x \in X\}$  hay  $n(n-1)$  posibles arcos. El número de grafos con  $n$  puntos y  $m$  arcos es  $\binom{n(n-1)}{m}$ , luego el número de grafos con  $X$  como conjunto de puntos es

$$\sum_{m=0}^{n(n-1)} \binom{n(n-1)}{m} = 2^{n(n-1)}.$$

b) Se pueden representar, también, los puntos de un grafo  $(X,G)$  como vértices de un polígono regular de  $n$  lados y cada arco  $\vec{xy}$  uniendo el punto  $x$  con el  $y$  por medio de una flecha orientada.

Por ejemplo, el grafo  $(X,G)$  dado por  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y

$G = \{\vec{x_1x_2}, \vec{x_2x_1}, \vec{x_2x_4}\}$  se representa por



Definiciones 1.1.3

Sea  $X$  un conjunto finito no vacío.

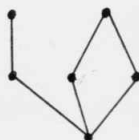
Llamaremos etiquetado de  $X$  por el conjunto de etiquetas  $E$

a toda biyección  $E \xrightarrow{X} X$ . Generalmente, escribiremos  $\underline{x}(e) = x_e$ ,  $\forall e \in E$ . También diremos, más brevemente, que X está etiquetado por E. Diremos que (X,G) es un grafo etiquetado por E si su conjunto de puntos X está etiquetado por E.

#### Ejemplos 1.1.4

a) Si  $E = \{1,2,\dots,n\}$ , entonces, un etiquetado de X por E nos permite ordenar sus elementos  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

b) Para referirnos a



con la intención de indicar los pisos en que se encuentran sus puntos será conveniente tomar  $E = \{11,21,22,23,31,32\}$  y entonces  $X = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ .

#### Definición 1.1.5

Diremos que dos grafos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  son isomorfos, y lo representaremos por  $(X,G) \cong (X',G')$ , si existe una biyección  $\psi: X \rightarrow X'$  tal que  $\overrightarrow{xy} \in G \iff \overrightarrow{\psi(x)\psi(y)} \in G'$ . La relación de isomorfía es de equivalencia. A cada clase de grafos isomorfos le llamaremos grafo no-etiquetado.

Como cada grafo  $(X,G)$  tiene al menos un etiquetado (tomando el propio X como conjunto de etiquetas), y como para representar un grafo se utiliza, normalmente, un etiquetado "ad hoc" con la cuestión que se está tratando, resulta que los representantes de cada clase de equivalencia serán o estarán representados por grafos

etiquetados. De aquí la noción de grafo no-etiquetado que acabamos de introducir, noción que corresponde a la idea intuitiva de esqueleto de un grafo.

Definiciones y notaciones 1.1.6

Diremos que el grafo  $(X,G)$  es transitivo si verifica la propiedad:  $\vec{xy}, \vec{yz} \in G, \text{ con } x \neq z, \implies \vec{xz} \in G$ . Diremos que el grafo  $(X,G)$  es antisimétrico si verifica  $\vec{xy} \in G \implies \vec{yx} \notin G$ .

Denotaremos por  $\mathcal{G}_X$  el conjunto de grafos con conjunto de puntos  $X$ , por  $\mathcal{G}_X^T$  el subconjunto de grafos transitivos, por  $\mathcal{G}_X^A$  el de grafos antisimétricos y por  $\mathcal{G}_X^{TA}$  a los grafos transitivos y antisimétricos.

Ejemplo 1.1.7

De los cuatro grafos no-etiquetados con tres puntos y tres arcos



sólo el último es transitivo; los dos últimos son antisimétricos.

.- Davis en [D.1] y Harary en [H.1] señalan que la enumeración de grafos transitivos es un problema particularmente intratable.

.- Harary en [H.1] llama "transgrafos" a los grafos transitivos y "grafos orientados" a los antisimétricos.

Definición 1.1.8

Llamaremos sucesión de puntos de  $X$  a toda aplicación  $s: \{1,2,\dots,p\} \rightarrow X$ , cualquiera que sea  $p \in \mathbb{N}$  y  $p \geq 2$ .

Una sucesión puede ser denotada, también, por  $s(1)s(2)\dots s(p)$ , o incluso por  $x_1x_2\dots x_p$ .

Definiciones 1.1.9

Diremos que una sucesión  $s$  de puntos de  $X$  es una trayectoria en el grafo  $(X,G)$  si se tiene  $\overrightarrow{s(i)s(i+1)} \in G$ , para todo  $i = 1, \dots, p-1$ .

Si  $s(1) = s(p)$  diremos que la trayectoria es cerrada.

Si  $s$  es inyectiva diremos que la trayectoria es un camino.

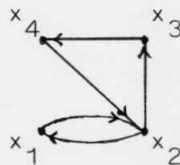
Llamaremos ciclo a toda trayectoria cerrada con todos sus puntos distintos, salvo  $s(1) = s(p)$ . Un ciclo es, por tanto, un camino cerrado. Un grafo será acíclico si no posee ciclos.

Finalmente, la longitud de una trayectoria es  $p-1$ , es decir, es el número de arcos que recorre.

Definiciones 1.1.10

Diremos que una sucesión  $s$  de puntos de  $X$  es una semitrayectoria en el grafo  $(X,G)$  si se tiene  $\overrightarrow{s(i)s(i+1)} \in G$  ó  $\overrightarrow{s(i+1)s(i)} \in G$ , para todo  $i = 1, \dots, p-1$ . De forma análoga se define semitrayectoria cerrada, semicamino, semiciclo y grafo semiacíclico. La longitud de una semitrayectoria es, también, el número de arcos que recorre.

Ejemplos 1.1.11



En el grafo de la figura se muestra que:

a) en una trayectoria puede haber puntos repetidos y p puede ser mayor, igual o menor que n. Así, son trayectorias  $s_1 = x_4x_2x_1x_2x_3$  y  $s_2 = x_4x_2x_1x_2x_1x_2x_3$ .

b) no todas las trayectorias cerradas son ciclos:  $x_2x_3x_4x_2x_1x_2$  es una trayectoria cerrada pero no es ciclo; sin embargo contiene dos ciclos:  $x_2x_3x_4x_2$  y  $x_2x_1x_2$ . En consecuencia,  $x_2x_1x_2x_1x_2$  son dos ciclos y no uno.

Es obvio que toda trayectoria cerrada factoriza de una única forma como yuxtaposición de ciclos.

Los grafos



contienen, respectivamente, dos y tres ciclos.

El grafo



es acíclico, pero contiene seis semiciclos.

Proposición 1.1.12

Un grafo transitivo (X,G) es acíclico si, y sólo si, es antisimétrico.

En efecto, es claro que todo grafo acíclico es antisimétrico, pues, si se tienen los arcos  $\overrightarrow{xy}$  e  $\overrightarrow{yx}$ , entonces  $xyx$  es un ciclo del grafo. Recíprocamente, si  $x_1...x_p$  es un ciclo y el grafo es transitivo, entonces  $\overrightarrow{x_1x_{p-1}}$  y  $\overrightarrow{x_{p-1}x_1}$  serían arcos lo que contradice la propiedad de antisimetría.

Definiciones 1.1.13

Llamaremos subgrafo de  $(X,G)$  a un grafo  $(Y,H)$  con  $Y \subset X$  y  $H \subset G$ . Al subgrafo  $(Y,H)$  le llamaremos grafo parcial cuando  $Y = X$ . Diremos, también, que  $(Y,H)$  es un subgrafo inducido por  $(X,G)$  si se tiene  $Y \subset X$  y  $H = G \cap (Y \times Y)$ .

Nótese que, en el subgrafo inducido,  $H$  lo constituyen todos los arcos de  $G$  cuyos puntos adyacentes están en  $Y$ . Escribiremos, también,  $(Y, G/Y)$  para denotar al subgrafo inducido por  $(X,G)$  en  $Y$ .

Nótese, también, que en la definición de subgrafo es necesaria la hipótesis de que  $(Y,H)$  es un grafo, pues las condiciones  $Y \subset X$  y  $H \subset G$  no son claramente suficientes.

Utilizaremos la notación  $(Y,H) \subset (X,G)$  para indicar que  $(Y,H)$  es un subgrafo de  $(X,G)$ .

Definiciones 1.1.14

Diremos que el grafo  $(X,G)$  es conexo si  $\forall x,y \in X$ , con  $x \neq y$ , existe un semicamino  $s : \{1, \dots, p\} \rightarrow X$  tal que  $s(1) = x, s(p) = y$ ; diremos, entonces, que el camino  $s$  une o conecta  $x$  con  $y$ .

En todo grafo  $(X,G)$  la relación:

$x \equiv y \iff x = y$  ó existe un semicamino  $x_1 \dots x_p$  con  $x_1 = x, x_p = y$  es de equivalencia en  $X$  y sus clases  $X_1, \dots, X_r$  definen una partición de  $X$ . Para cada  $i = 1, \dots, r$ , el subgrafo inducido  $(X_i, G/X_i)$  es conexo y le llamaremos componente conexa de  $(X,G)$ .

Eventualmente, puede suceder, para algún  $i$ , que  $G/X_i = \emptyset$ ; en este caso  $X_i$  consta de un solo punto del que diremos que es un punto desconectado. Cuando esto suceda para todo  $i$  diremos que el grafo está totalmente desconectado, lo que será equivalente a la no existencia de arcos en  $G$ .

## 1.2 ESPACIOS TOPOLOGICOS FINITOS Y GRAFOS

### Notaciones 1.2.1

$X$  representará, en esta sección, un conjunto finito no vacío de puntos y  $(X, T)$  un espacio topológico sobre  $X$ . Asimismo,  $\bar{T}_X$  representará el conjunto de espacios topológicos sobre un mismo conjunto subyacente  $X$ .

La relación de homeomorfismo entre los espacios de  $\bar{T}_X$  es de equivalencia; pues bien, de un modo análogo a como hicimos con los grafos dirigidos etiquetados, a cada clase de espacios topológicos homeomorfos le llamaremos espacio topológico no-etiquetado.

Si  $(X, T)$  es un espacio topológico y  $A \subset X$ , denotaremos la clausura de  $A$  por  $\bar{A}_T$  o simplemente por  $\bar{A}$  si no hay confusión posible.

### Definición 1.2.2

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico. Para un par de puntos  $x, y \in X$  escribiremos  $x \leq y$  si y sólo si  $x \in \bar{\{y\}}$  y diremos que  $x$  es una especialización de  $y$  o bien que  $y$  es una generización de  $x$ .

### Observación 1.2.3

La relación de especialización en un espacio topológico, debida a Grothendieck [G.1], es un pre-orden. En general, no es antisimétrica, pues en una topología, puntos distintos pueden tener la misma clausura, en cuyo caso están relacionados en ambos sentidos.

Esta relación nos permite asociar a cada espacio topológico sobre  $X$  un grafo sobre  $X$ , como se indica a continuación.

Definición y notaciones 1.2.4

Sea  $f : \bar{T}_X \rightarrow \mathcal{G}_X$  la aplicación dada por  $f(X,T) = (X,G)$  donde  $G$  es el conjunto de arcos siguiente:

$$G = \{(x,y) / x \leq y\} - \{(x,x), x \in X\}$$

Usaremos, también, la notación  $f(T)$  para aludir al conjunto de arcos  $G$  del grafo imagen.

Proposición 1.2.5

En las condiciones de la definición anterior:

- a)  $f$  es inyectiva.
- b)  $f(X,T)$  es un grafo transitivo.

En efecto:

a) Si  $T$  y  $T'$  son topologías distintas sobre  $X$  entonces existen puntos  $x$  con clausuras respectivas distintas, es decir  $\{\bar{x}\}_T \neq \{\bar{x}\}_{T'}$ . Así pues, o bien existen  $y \in \{\bar{x}\}_T$  tal que  $y \notin \{\bar{x}\}_{T'}$ , o viceversa y, por tanto,  $\overrightarrow{yx} \in f(T)$  e  $\overrightarrow{yx} \notin f(T')$  o viceversa, luego  $f(T) \neq f(T')$ .

b) es consecuencia de la transitividad de  $\leq$ .

En consecuencia,  $f$  no es suprayectiva; pues, los grafos no transitivos no proceden de ninguna topología.

También, es posible asociar a cada grafo  $(X,G)$  una topología sobre  $X$ , según el procedimiento que sigue.

Definición y notaciones 1.2.6

Sea  $g : \mathcal{G}_X \rightarrow \bar{T}_X$  la aplicación dada por  $g(X,G) = (X,T)$  donde  $T$  es la topología sobre  $X$  generada por la subbase de cerrados

$$G\uparrow = \{x\uparrow, x \in X\}, \text{ siendo } x\uparrow = \{y / \overrightarrow{yx} \in G\} \cup \{x\}.$$

Usaremos, también, la notación  $g(G) = T$ .



Proposición 1.2.7

En las condiciones de la definición anterior:  $g$  es suprayectiva.

En efecto, dado un espacio topológico  $(X, T)$ , como  $X$  es finito, la familia de clausuras de sus puntos es una subbase de cerrados para su topología. Indicaremos esta familia por  $\bar{T} = \{\bar{y}, y \in X\}$ .

A la topología  $(X, T)$  le asociamos mediante  $f$  el grafo  $(X, G)$  donde  $G = \{(x, y), x \in \bar{y}, x \neq y\}$ . Probaremos que  $g(G) = T$ . Para ello bastará con ver que  $G \uparrow = \{y \uparrow, y \in X\} = \bar{T}$ . Pero esto es claro, pues, por construcción de  $G$ , si  $x \neq y$  entonces  $\overrightarrow{xy} \in G$  si y sólo si  $x \in \bar{y}$  y de aquí  $\forall y, y \uparrow = \{x, \overrightarrow{xy} \in G\} \cup \{x\} = \{x, x \in \bar{y}, x \neq y\} \cup \{x\} = \bar{y}$ .

Corolario 1.2.8

$$\text{Se tiene } g \circ f = I_{\bar{T}_X}.$$

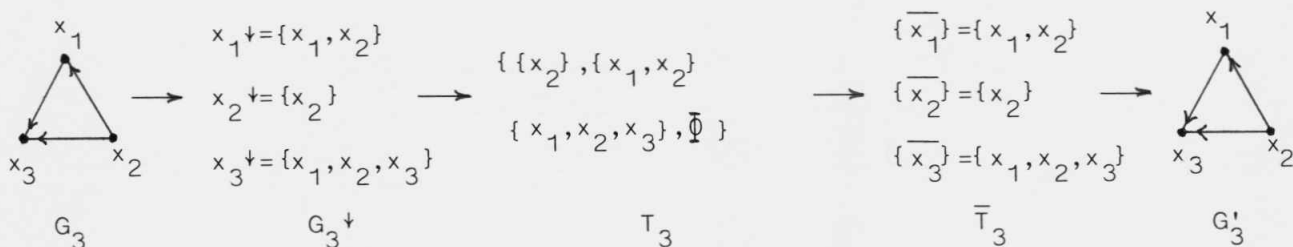
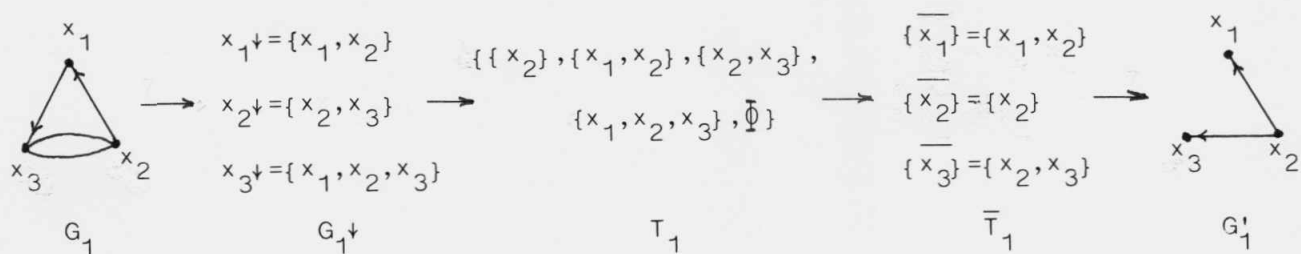
Observaciones 1.2.9

- a)  $g$  no es inyectiva.
- b)  $g$  no conserva la relación de inclusión entre grafos.
- c)  $f \circ g : \mathcal{G}_X \rightarrow \mathcal{G}_X$ , en consecuencia, ni es la identidad ni conserva la inclusión.

Contraejemplos 1.2.10

Para los grafos  $(X, G)$  dibujados a continuación se construyen: la familia  $G$ , la topología  $g(G) = T$  dada por sus cerrados, la subbase de cerrados  $\bar{T}$  y el grafo  $f(T)$  que llamaremos  $G'$ . De este modo  $f \circ g(G) = G'$  según el esquema

$$G \longrightarrow G \uparrow \longrightarrow T \longrightarrow \bar{T} \longrightarrow G'$$



- $G_1$  y  $G_2$  muestran dos grafos, no comparables por la relación de inclusión, con la misma imagen por  $g$  y por  $f \circ g$ . (Observación a).
- $G_1$  y  $G_3$  muestran como  $G_3 \subset G_1$  y  $f \circ g(G_3) \supset f \circ g(G_1)$ . (Observ. c)). No obstante  $T_3 \subset T_1$ .
- $G_1$  y  $G_4$  muestran como  $G_4 \subset G_1$  y  $T_4 \supset T_1$  y, en consecuencia,  $g(G_4) \supset g(G_1)$  y  $f \circ g(G_4) \supset f \circ g(G_1)$  (Observa. b))
- $G_3$  y  $G_4$  son grafos de comportamiento muy regular respecto de  $f$  y  $g$  como veremos a continuación.
- La no transitividad es la causante de estas anomalías. En el ejemplo, sólo  $G_3$  es transitivo y para él  $f \circ g(G_3) = G_3$ .

Proposición 1.2.11

Sea  $(X,G)$  un grafo cuyo conjunto de arcos definen un ciclo.

Entonces se tiene:

- a) La topología de  $g(X,G)$  es discreta.
- b)  $f \circ g(X,G)$  es un grafo totalmente desconectado.

En efecto:

a) Etiquetando convenientemente, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $X = \{x_1 \dots x_n\}$  y el ciclo es  $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}$  (con  $x_{n+1} = x_1$ ). Como  $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in G$ , para todo  $i$  se tiene  $x_i \downarrow = \{x_{i-1}, x_i\}$  y por tanto  $x_i \downarrow \cap x_{i+1} \downarrow = \{x_i\}$  es un cerrado para todo  $i$ . La topología de  $g(X,G)$  es, en consecuencia, la topología discreta.

b) En la topología discreta se tiene  $\{\bar{x}\} = \{x\}$ , para todo  $i$ , luego para  $f \circ g(X,G) = (X,G')$  se tiene  $G' = \emptyset$ .

En  $(X,G')$  no hay semicaminos y por tanto es totalmente desconectado.

Si nos reducimos a grafos transitivos, la relación entre  $f$  y  $g$  se pone finalmente de manifiesto como se muestra a continuación.

Lema 1.2.12

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^T$  un grafo transitivo y  $g(X,G) = (X,T)$ , entonces  $x \downarrow = \{\bar{x}\}$ , para todo  $x \in X$ .

En efecto, como  $G \downarrow = \{x \downarrow, x \in X\}$ , con  $x \downarrow = \{y / \overrightarrow{yx} \in G\} \cup \{x\}$ , es subbase de cerrados de  $T$ , los cerrados de  $T$  se obtienen como intersección de uniones de conjuntos  $x \downarrow$  y, según las leyes conjuntistas, como unión de intersecciones de conjuntos  $x \downarrow$ . Puesto que los cerrados minimales (para la inclusión) se obtienen por intersección de los  $x \downarrow$  consideraremos para cada  $y$  la intersección de todos los cerrados que les contienen: sea  $C_y = \bigcap_{y \in x \downarrow} x \downarrow$ . Este  $C_y$  es el mínimo

cerrado que contiene a  $y$  en  $T$  y son por tanto los  $\{\bar{y}\}$  de  $T$ . Bastará, pues, probar que  $C_y = y^\dagger$ .

$$a) y^\dagger \subset \bigcap_{y \in x^\dagger} x^\dagger$$

pues si  $z \in y^\dagger$  entonces para todo  $x$  tal que  $y \in x^\dagger$  se tiene  $\overrightarrow{zy} \in G$  e  $\overrightarrow{yx} \in G$ , luego  $\overrightarrow{zx} \in G$  y de aquí  $z \in x^\dagger$ , para dichos  $x$ .

b) Que  $C_y \subset y^\dagger$  es claro, pues  $y^\dagger$  es uno de los conjuntos que aparecen en la intersección que define  $C_y$ .

Teorema 1.2.13

La aplicación  $f: \bar{T}_X \rightarrow \mathcal{G}_X^T$  es biyectiva y se tiene  $f^{-1} = g$ . En efecto. Bastará probar que  $f \circ g: \mathcal{G}_X^T \rightarrow \mathcal{G}_X^T$  es la identidad.

El proceso de construcción de  $f \circ g(G)$  a partir del grafo transitivo  $(X, G)$  es:  $G \rightarrow G^\dagger \rightarrow T \rightarrow \bar{T} \rightarrow G' = f \circ g(G)$ . Entonces, para ver que  $G = G'$  es suficiente probar que  $G^\dagger = \bar{T}$ . El lema anterior muestra que  $x^\dagger = \{\bar{x}\}$ , para todo  $x$ .

Notaciones 1.2.14

Sea  $(X, G)$  un grafo transitivo y  $(X, T)$  el espacio topológico asociado. Se tiene  $y^\dagger = \bigcap_{y \in x^\dagger} x^\dagger = \{\bar{y}\}$ . Denotaremos simplemente por  $\bar{y}$  al conjunto  $\{\bar{y}\}$ .

Tanto el grafo como la topología se reconocen por la colección  $G^\dagger = \bar{T} = \{\bar{x}, x \in X\}$  ya que  $\bar{x} = \{y / \overrightarrow{yx} \in G\} \cup \{x\}$  y  $\bar{x}$  es la mínima clausura de un punto que contiene a  $x$ .

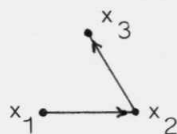
Es claro que si  $\bar{x} \subset \bar{y}$ , entonces  $x \in \bar{y}$ . La condición contraria caracteriza a los grafos transitivos:

Proposición 1.2.15

$(X, G)$  es transitivo si, y sólo si, se tiene  $\vec{xy} \in G \iff \bar{x} \subset \bar{y}$ .

En efecto, si  $(X, G)$  es transitivo y  $\vec{xy} \in G$  entonces  $\forall z \in \bar{x}$  se tiene  $\vec{zx} \in G$  y de aquí  $\vec{zy} \in G$  de donde  $z \in \bar{y}$ . Para probar el recíproco supongamos  $\vec{xy}, \vec{yz} \in G$ , entonces se tiene  $\bar{x} \subset \bar{y} \subset \bar{z}$ , por tanto  $\bar{x} \subset \bar{z}$  y de aquí  $\vec{xz} \in G$ .

Nótese que en el grafo no transitivo



se tiene  $x_2 \in \bar{x}_3$  y  $\bar{x}_2 = \{x_1, x_2\} \not\subset \bar{x}_3 = \{x_2, x_3\}$ .

En un grafo no transitivo, puede suceder que puntos distintos,  $x \neq y$ , tengan la misma clausura,  $\bar{x} = \bar{y}$ , por tanto, en general,  $\text{Card}(G^+) \leq n$ .

Corolario 1.2.16

Si  $(X, G)$  es un grafo transitivo, entonces se verifica:

$$\bar{x} = \bar{y} \iff \vec{xy}, \vec{yx} \in G$$

Y de este corolario junto con la proposición 1.1.12, obtenemos:

Proposición 1.2.17

Si  $(X, G)$  es un grafo transitivo entonces  $(X, G)$  es acíclico si y sólo si  $\bar{x} \neq \bar{y}$  para todo par  $x, y$  con  $x \neq y$ .

Corolario 1.2.18

Si  $(X, G)$  es un grafo transitivo y antisimétrico entonces  $\text{Card}(G^+) = \text{Card}(X)$ .

La propiedad de un espacio topológico consistente en tener todas las clausuras de sus puntos distintas caracteriza la propiedad de separación  $T_0$ : "Dados dos puntos distintos hay un entorno de uno que no contiene al otro".

Las biyecciones  $f$  y  $g$  para grafos transitivos hacen corresponder a las propiedades  $T_0$  y antisimetría, éstas son, pues, propiedades homólogas. Podemos enunciar el siguiente:

Teorema 1.2.19

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico y  $f(X, T) = (X, G)$  su grafo homólogo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $(X, T)$  es un espacio topológico  $T_0$ .
- b)  $(X, G)$  es un grafo transitivo acíclico.
- c)  $(X, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado.

donde  $\leq$  es la relación de especialización  $x \leq y \iff x \in \bar{y}$ .

Denotaremos por  $\mathcal{T}_X^0$  el conjunto de topologías  $T_0$  sobre  $X$ .

El teorema anterior pone en relación a los espacios topológicos finitos con los grafos transitivos acíclicos y con los conjuntos parcialmente ordenados. Esta relación se extiende también a las aplicaciones entre conjuntos que respetan las correspondientes estructuras.

Si  $(X, T)$ ,  $(X', T')$  son dos espacios topológicos las aplicaciones continuas  $\psi: X \rightarrow X'$  se caracterizan por la propiedad  $\psi(\bar{E}) \subset \overline{\psi(E)}$   $\forall E \subset X$ . Al restringirse a espacios topológicos finitos el criterio anterior da lugar al siguiente resultado:

Lema 1.2.20

Si  $(X, T)$ ,  $(X', T')$  son espacios topológicos finitos entonces una aplicación  $\psi: X \rightarrow X'$  es continua si, y sólo si,  $\psi(\bar{x}) \subset \overline{\psi(x)}$ ,  $\forall x \in X$ .

En efecto, el resultado se sigue de las expresiones siguientes:

$$\psi(\bar{E}) = \psi\left(\overline{\bigcup_{x \in E} \{x\}}\right) = \psi\left(\bigcup_{x \in E} \bar{x}\right) = \bigcup_{x \in E} \psi(\bar{x})$$

$$\overline{\psi(E)} = \bigcup_{x \in E} \overline{\psi(x)}$$

Definiciones 1.2.21

Si  $(X, G)$ ,  $(X', G')$  son dos grafos, por un morfismo entre dichos grafos entenderemos una aplicación  $\psi: X \rightarrow X'$  tal que si  $\overrightarrow{xy} \in G$  entonces o bien  $\psi(x) = \psi(y)$  o bien  $\overrightarrow{\psi(x)\psi(y)} \in G'$ .

Análogamente los morfismos entre conjuntos parcialmente ordenados  $(X, \leq)$ ,  $(X', \leq')$  serán las aplicaciones  $\psi: X \rightarrow X'$  tales que si  $x \leq y$  entonces  $\psi(x) \leq' \psi(y)$ .

Teorema 1.2.22

Sean  $(X, T)$ ,  $(X', T')$  espacios topológicos finitos  $T_0$ ,  $(X, G)$  y  $(X', G')$  los grafos transitivos antisimétricos asociados. Entonces, una aplicación  $\psi: X \rightarrow X'$  es continua si, y sólo si, es un morfismo de grafos o, equivalentemente, de conjuntos parcialmente ordenados.

La equivalencia entre un morfismo de grafos o de conjuntos ordenados es clara. Supongamos que  $\psi$  es continua y tomemos  $\overrightarrow{xy} \in G$ ; entonces  $x \in \bar{y}$  implica  $\psi(x) \in \psi(\bar{y}) \subset \overline{\psi(y)}$  y de aquí o bien  $\psi(x) = \psi(y)$  o bien  $\overrightarrow{\psi(x)\psi(y)} \in G'$ . Recíprocamente, si  $\psi$  es morfismo de grafos entonces  $\forall x \in \bar{x}$ ,  $z \neq x$ , se tiene  $\overrightarrow{zx} \in G$  y de aquí  $\psi(z) = \psi(x)$  o  $\overrightarrow{\psi(z)\psi(x)} \in G'$ , siendo en ambos casos  $\psi(z) \in \overline{\psi(x)}$ .

Corolario 1.2.23

Dado un conjunto finito  $X$ , la aplicación cociente  $f_{/\sim} : T_{X/\sim}^0 \longrightarrow \mathcal{G}_{X/\sim}^{TA}$  es biyectiva.

Nota 1.2.24

Sobre  $X$  hay, por tanto, el mismo número de topologías  $T_0$  que dé grafos transitivos antisimétricos (o acíclicos) que dé relaciones de orden parcial. A cada una de las estructuras anteriores se les puede añadir el adjetivo "no-etiquetado" permaneciendo válido el enunciado.

En [E.H.L.1] se da una fórmula que permite calcular el número de topologías sobre un conjunto finito en función del número de topologías  $T_0$  en dicho conjunto. Este último es hoy todavía desconocido.

Proposición 1.2.25

$$\text{Card}(\bar{T}_X) = \sum_{m=1}^n P_n^m \cdot \text{Card}(\bar{T}_Y^0),$$
 siendo  $m = \text{Card}(Y)$  y  $P_n^m$  el número de particiones de  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  en  $m$  partes ( $m \leq n$ ); conocido, también, por número de Stirling de segunda clase.

En dicho artículo se ofrece un algoritmo para obtener ambos cardinales. Los autores lo han ejecutado, para  $\text{Card}(X) = n \leq 7$ , en un ordenador que ha dado los siguientes valores

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$\text{Card}(\bar{T}_X)$	1	4	29	355	6.942	209.527	9.535.241
$\text{Card}(\bar{T}_X^0)$	1	3	19	219	4.231	130.023	6.129.859

En lo sucesivo, cuando nos refiramos a grafos transitivos y antisimétricos o sus equivalentes espacios topológicos y órdenes, podemos prescindir de la representación poligonal de un grafo y adoptar la representación arbórea de los órdenes parciales, lo que



evita dibujar la propiedad transitiva, economizando muchas flechas.

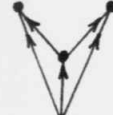
De este modo, el grafo A pasará a ser B y se debe leer C:



A



B



C

### 1.3. GRAFO DUAL

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico  $T_0$  y  $(X, G)$  su grafo transitivo antisimétrico homólogo. Ambos están descritos por la familia  $\bar{T} = G^+ = \{\bar{x}, x \in X\}$  como subbase de cerrados.

La dualidad topológica entre los conceptos de abierto y cerrado nos permite describir la topología y el grafo por la familia  $\{C\bar{x}, x \in X\}$  como subbase de abiertos. Sin embargo, estos abiertos no constituyen la mejor subbase para una descripción simple del espacio  $(X, T)$ , ni su concepto "gráfico" homólogo interesa para una buena descripción del grafo  $(X, G)$ .

Es natural, por otro lado, considerar en el grafo un concepto dual al de  $\bar{x}$  (cambiando la dirección de las flechas) e interpretar su significado en la topología.

#### Definición 1.3.1

Sea  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$

$\forall x \in X$ , denotaremos  $x^+ = \{x\} \cup \{y, \overrightarrow{xy} \in G\}$

y  $x^* = \{y, x \in \bar{y}\}$

Se desprende de la definición que  $x \in \bar{y} \iff y \in x^* \quad y \quad x^* = x^+$

#### Lema 1.3.2

Con las hipótesis y notaciones anteriores se tiene

$$C\bar{x} = \bigcup_{x \notin y^*} y^*, \quad \forall x \in X$$

En efecto, se tiene

$$z \in C\bar{x} \iff z \notin \bar{x} \iff x \notin z^*$$

luego  $z^*$  está entre los que se unen y como  $z \in z^*$  se tiene  $z \in \bigcup_{x \notin y^*} y^*$ .

Recíprocamente, si  $z \in \bigcup_{x \notin y^*} y^*$  entonces existe  $y$  tal que  $z \in y^*$ , con  $x \notin y^*$ , y por tanto  $x \notin z^*$ .

Lema 1.3.3

Con las hipótesis y notaciones anteriores se tiene

$$x \in \overline{C_y} \iff x^* \subset C_y$$

En efecto, si  $x \in \overline{C_y}$  entonces dado  $z \in x^*$  se tiene  $\overrightarrow{xy} \notin G$  y  $\overrightarrow{xz} \in G$ , por lo tanto, por transitividad, se sigue  $\overrightarrow{zy} \notin G$  y de aquí  $z \in \overline{C_y}$ . El recíproco es evidente.

Lema 1.3.4

Con las hipótesis y notaciones anteriores se tiene

$$x^* = \bigcap_{x^* \subset C_y} \overline{C_y} \quad \forall x \in X$$

Una contención es obvia por la naturaleza de las intersecciones. Para probar la otra supongamos que  $\exists z \in X$  tal que  $z \in \overline{C_y}$  siempre que  $x^* \subset C_y$  pero que  $z \notin x^*$ . Se tendría, entonces,  $x \in \overline{C_z}$  y, por 1.3.3,  $x^* \subset \overline{C_z}$ , por lo tanto sería  $z \in \overline{C_z}$  lo cual es absurdo.

La fórmula también es correcta cuando la familia de abiertos  $\overline{C_y}$  que se intersectan es vacía, pues si  $\nexists y / x^* \subset C_y$  entonces  $G$  es conexo y  $x$  es su único minimal; en consecuencia,

$$x^* = X = \text{intersección de la familia vacía.}$$

Observaciones 1.3.5

1) Esta fórmula del Lema 1.3.4 es la traducción en términos de grafos del enunciado topológico: "Un abierto es la intersección de todos los abiertos que lo contienen". Obsérvese que este lema demuestra que los  $x^*$  son abiertos en la topología homóloga a  $(X, G)$ .

2) El Lema 1.3.3 nos dice, entonces, que  $x^*$  es el mínimo abierto que contiene a  $x$ , pues la fórmula del Lema 1.3.4 admite las versiones:

$$x^* = \bigcap_{x \in C\bar{y}} C\bar{y} \quad , \quad x^* = \bigcap_{x \notin \bar{y}} C\bar{y}$$

en las que los segundos miembros se leen "intersección de los abiertos que contienen a  $x$ ".

Proposición 1.3.6

Si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X,T) \in \bar{T}_X^0$  es su homólogo, entonces, la familia  $T^* = \{x^*, x \in X\}$  es una subbase de abiertos para  $(X,T)$ .

En efecto, como  $\{C\bar{x}, x \in X\}$  es una subbase de abiertos y cada  $C\bar{x}$  es una unión de conjuntos  $y^*$ , se tiene que  $T^*$  es también una subbase.

Considerar  $T^*$  como subbase de abiertos para  $(X,T)$ , frente a la familia  $\{C\bar{x}, x \in X\}$ , facilita la interpretación "gráfica", dual a la de  $\bar{T}$  como subbase de cerrados. Veremos a continuación, otras propiedades topológicas de  $T^*$  que justifican su elección.

Lema 1.3.7

$T^*$  es una base de  $(X,T)$ .

Bastará probar que cualquier intersección de elementos de  $T^*$  se puede escribir como unión de elementos de  $T^*$  más concretamente si

$\bigcap_J x_j^* = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$  entonces

$$\bigcap_J x_j^* = \bigcup_{k=1}^r x_{j_k}^*$$

En efecto, la contención directa es clara pues,  $x_{j_k} \in x_{j_k}^*$ .

Sea ahora  $x \in \bigcup_{k=1}^r x_{j_k}^*$ . Entonces  $\exists k$  tal que  $x \in x_{j_k}^*$  (ó bien  $x_{j_k} \in \bar{x}$ ); y por la caracterización de la transitividad (proposición

1.2.15),  $\bar{x}_{jk} \subset \bar{x}$ . Por otro lado,  $x_{jk} \in \bigcap_y x_j^*$  luego  $x_j \in \bar{x}_{jk}$ ,  $\forall j \in J$  y, en consecuencia,  $x_j \in \bar{x}$ ,  $\forall j \in J$  y por tanto  $x \in \bigcap_j x_j^*$ .

Aunque cada  $x^*$  es el mínimo abierto que contiene a  $x$  esto no quiere decir necesariamente que la intersección de elementos de  $T^*$  sea un elemento de  $T^*$ .

La fórmula  $\bigcap_j x_j^* = \bigcup_{k=1}^r x_{jk}$ , aunque ha servido para probar el Lema, no tiene demasiado interés práctico pues la unión del segundo miembro no es, en general, disjunta; incluso, algunos de los abiertos que participan en ella pueden ser redundantes.

Próximamente veremos un ejemplo en el que se ponen de manifiesto estas observaciones.

Teorema 1.3.8

$T^*$  es la mínima base de  $(X, T)$ .

Hemos visto que  $T^*$  es una base y que  $\forall x \in X$  se tiene que  $x^*$  es el mínimo abierto que contiene a  $x$ . Si  $B$  es otra base arbitraria entonces los abiertos de  $B$  que contienen a  $x$  son un sistema fundamental de entornos de  $x$  y, por tanto, teniendo en cuenta que  $x^*$  es entorno de  $x$ , existe un abierto  $V \in B$  tal que  $x \in V \subset x^*$ . Como  $x^*$  es mínimo se tiene que  $V = x^*$  y de aquí  $x^* \in B$ ,  $\forall x \in X$ .

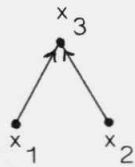
Corolario 1.3.9

Si  $B$  es una base de  $(X, T)$ , entonces  $\text{Car}(B) \geq n$  y se tiene

$$B = T^* \iff \text{Card}(B) = n$$

Es consecuencia del teorema anterior.

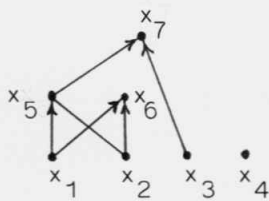
Observación 1.3.10



$T^*$  no es mínima como subbase. Como contraejemplo tenemos:  $X_1^* = \{x_1, x_3\}$ ,  $X_2^* = \{x_2, x_3\}$ ,  $X_3^* = \{x_3\}$ ,  $T^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$  es la mínima base, pero no es mínima subbase pues  $\{x_1^*, x_2^*\}$  también es subbase. Tampoco  $\bar{T}$  es la mínima subbase de cerrados.

Ejemplo 1.3.11

En el grafo de la figura se tiene:



$$T = \begin{matrix} \bar{x}_1 = \{x_1\} & \bar{x}_5 = \{x_1, x_2, x_5\} \\ \bar{x}_2 = \{x_2\} & \bar{x}_6 = \{x_1, x_2, x_6\} \\ \bar{x}_3 = \{x_3\} & \bar{x}_7 = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\} \\ \bar{x}_4 = \{x_4\} & \end{matrix}$$

como subbase de cerrados.

Los complementarios de éstos constituyen una subbase de abiertos:

$$\begin{matrix} C\bar{x}_1 = \{\hat{x}_1, \dots, x_7\} & x_1^* = \{x_1, x_5, x_6, x_7\} \\ C\bar{x}_2 = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, x_7\} & x_2^* = \{x_2, x_5, x_6, x_7\} \\ C\bar{x}_3 = \{x_1, \dots, \hat{x}_3, \dots, x_7\} & x_3^* = \{x_3, x_7\} \\ C\bar{x}_4 = \{x_1, \dots, x_4, \dots, x_7\} & \text{y la base es } T^* = x_4^* = \{x_4\} \\ C\bar{x}_5 = \{x_3, x_4, x_6, x_7\} & x_5^* = \{x_5, x_7\} \\ C\bar{x}_6 = \{x_3, x_4, x_5, x_7\} & x_6^* = \{x_6\} \\ C\bar{x}_7 = \{x_4, x_6\} & x_7^* = \{x_7\} \end{matrix}$$

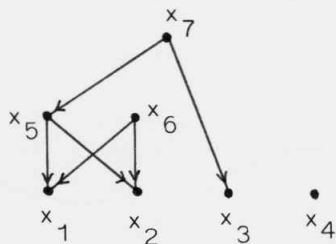
Estas familias ejemplifican el uso de las fórmulas

$$x^* = \bigcap_{x \notin \bar{y}} C\bar{y} \text{ del Lema 1.3.4 y } C\bar{x} = \bigcup_{x \notin y^*} y^* \text{ del Lema 1.3.2.}$$

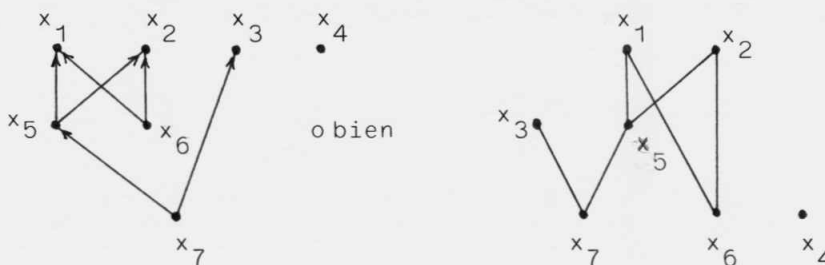
Para la fórmula  $\bigcap_j x_j^* = \bigcup_{k=1}^r x_{jk}^*$  del Lema 1.3.7 y los comentarios que allí hicimos, obsérvese que  $x_1^* \cap x_2^* = \{x_5, x_6, x_7\} \neq x^*$ ,

$\forall x \in X$  y  $\{x_5, x_6, x_7\} = x_5^* \cup x_6^* \cup x_7^* = \{x_5, x_7\} \cup \{x_6\} \cup \{x_7\}$  lo que muestra que en la unión no son necesarios todos los  $x_{jk}^*$ ; siendo  $x_7^*$  redundante .

Finalmente, obsérvese que  $T^*$  y  $\bar{T}$  son, respectivamente, una subbase de cerrados y la mínima base de abiertos para el grafo:



que normalmente representaremos de abajo hacia arriba por:



Definición 1.3.12

Llamaremos grafo dual del grafo  $(X, G)$ , y lo representaremos por  $(X, G^d)$ , al grafo sobre  $X$  cuyo conjunto de arcos es

$$G^d = \{(x, y) / (y, x) \in G\}$$

Son claras las siguientes conclusiones:

Proposición 1.3.13

Con las notaciones anteriores se tiene

- a)  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^T \iff (X, G^d) \in \mathcal{G}_X^T$
- b)  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA} \iff (X, G^d) \in \mathcal{G}_X^{TA}$

Si  $(X, G), (X, G^d) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X, T), (X, T^d) \in \bar{T}_X^0$  son sus espacios topológicos homólogos respectivos:

- c)  $\bar{T}$  es la mínima base de abiertos para  $(X, G^d)$ .
- d)  $T^*$  es una subbase de cerrados (no mínima) para  $(X, G^d)$ .
- e) es decir,  $\bar{T} = T^{d*}$  y  $T^* = \overline{T^d}$

Las aplicaciones continuas se pueden caracterizar también por la conservación de los  $x^*$ .

Proposición 1.3.14

Si  $(X, T)$ ,  $(X', T')$  son dos espacios topológicos finitos  $T_0$  y si  $\psi : X \rightarrow X'$  es una aplicación, entonces  $\psi$  es continua si, y sólo si,  $\psi(x^*) \subset \psi(x)^*$ ,  $\forall x \in X$ .

En efecto,  $\psi$  es continua si y sólo si es morfismo de grafos, pero obviamente la condición de ser morfismo de grafos se conserva si se toman los duales de los grafos, luego, teniendo en cuenta que  $x^*$  es la clausura de  $x$  para la situación dual el resultado se sigue fácilmente.



CAPITULO II

EXPLOSION DE UN GRAFO REDUCIDO



CAPITULO II

EXPLOSION DE UN GRAFO REDUCIDO

El objetivo de este capítulo es estudiar los grafos reducidos y detallar la explosión de tales grafos. En un grafo reducido, y más generalmente en un grafo acíclico, se permite una clasificación de sus puntos por niveles de tal manera que se puedan etiquetar por conjuntos totalmente ordenados con la propiedad de que los puntos de un nivel inferior a otro tienen etiquetas menores que los de éste.

La explosión de un grafo reducido se efectúa explotando sucesivamente los niveles, de menor a mayor, de tal manera que los etiquetados ordenados como los anteriores inducen etiquetados ordenados en el explotado. Estos etiquetados en el explotado ponen de relieve que los puntos del grafo explotado se corresponden biunívocamente con los caminos del grafo original que terminan en un punto maximal. Más aún, el explotado es un bosque con tantos árboles como maximales hay en el grafo de partida. El conjunto de etiquetas resultante sobre el bosque determina el grafo original y los conjuntos posibles de etiquetas ordenados sobre un bosque se caracterizan aritméticamente, de tal manera que podremos resolver el problema de caracterizar aritméticamente un grafo de una manera natural.

Los grafos reducidos con igual explosión (o desingularización si se prefiere) se denominarán birracionalmente equivalentes en analogía con la situación geométrica. En la última parte del capítulo establecemos la teoría birracional de grafos reducidos anali

zando las nociones de aplicación racinal, morfismo dominante y morfismo birracional. Esta teoría será extendida en el capítulo IV al contexto, más general, de grafos acíclicos.

## 2.1. TRANSITIVIZACION Y REDUCCION. GRAFOS REDUCIDOS

Seguimos designando por  $X$  a un conjunto finito no vacío de cardinal  $n$ .

### Definición 2.1.1

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X$ . Llamaremos transitivizado de  $(X,G)$  al grafo sobre  $X$  cuyo conjunto de arcos es  $G^t = G \cup \{(x,y), x \neq y \text{ y existe un camino } x_1 \dots x_p \text{ en } G, \text{ de longitud mayor que uno, con } x_1 = x, x_p = y\}$ .

### Observaciones 2.1.2

1. La condición  $x \neq y$  evita los lazos en  $G^t$ .
2. Entre dos puntos  $x,y \in X$  puede haber más de un camino en  $G$ ; la notación conjuntista evita los arcos múltiples.
3. El transitivizado de un grafo está unívocamente determinado por éste.
4. Grafos distintos pueden tener el mismo transitivizado.
5.  $(X,G)$  es un grafo parcial de  $(X,G^t)$ .

Sobre la conservación de las propiedades transitiva y anti-simétrica en la transitivización podemos decir que:

### Proposición 2.1.3

- a)  $\forall (X,G) \in \mathcal{G}_X, (X,G^t) \in \mathcal{G}_X^T$
- b) Si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^T$  entonces  $(X,G^t) = (X,G)$
- c) Si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^A$  entonces no necesariamente se tiene

$$(X, G^t) \in \mathcal{G}_X^A.$$

d) Si  $(X, G)$  es un ciclo entonces  $(X, G^t)$  tiene por topología homóloga la grosera, es decir  $G^t = X \times X - \Delta$ , donde  $\Delta$  es la diagonal de  $X \times X$ .

e) Si  $(X, G)$  es acíclico entonces  $(X, G^t)$  es acíclico.

f) Si  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  entonces  $(X, G^t) \in \mathcal{G}_X^{TA}$ .

En efecto:

a) Si  $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \in G^t$ , con  $x \neq z$ , entonces  $x_1 \dots x_p, x_{p+1} \dots x_q$  son caminos de longitud mayor o igual que uno en  $G$  con  $x = x_1, x_p = x_{p+1} = y, x_q = z$ , por tanto  $x_1 \dots x_p x_{p+1} \dots x_q$  es de longitud mayor que uno y de aquí  $\overline{xz} \in G^t$ .

b) En un grafo transitivo es claro que si  $x_1 \dots x_p$  es un camino y  $x_1, x_p$  son puntos de dicho camino, entonces  $\overrightarrow{x_1 x_p}$  es un arco del grafo.

c) Contraejemplo: el grafo



es antisimétrico, pero su transitivizado



no es antisimétrico.

Este contraejemplo se puede generalizar a:

d) Si  $(X, G)$  es un ciclo; entonces cada par de puntos distintos  $x, y \in X$ , se pueden unir por un camino en  $G$  (de longitud mayor o igual que uno), luego  $\overrightarrow{xy} \in G^t$ , por lo tanto  $G^t = X \times X - \Delta$  y la topología homóloga es  $T = \{\emptyset, X\}$ .

e) Sea  $x_1 x_2 \dots x_p$  un ciclo del grafo  $(X, G^t)$ . Para cada  $i < p$ ,

$\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in G^t$  luego  $x_i$  y  $x_{i+1}$  se conectan por un camino en  $G$  y por tanto hay un camino en  $G$  que conecta  $x_1$  con  $x_p$ . Los puntos de este camino no tienen por qué ser distintos.- (al margen de los extremos). Si este camino no es un ciclo es porque hay en él un punto  $z$  que se repite de forma que en el intervalo  $z\dots z$  no hay un par de puntos iguales salvo los extremos, entonces  $z\dots z$  es un ciclo en  $G$ .

f) Se deduce obviamente de b); también de a), e) y proposición 1.1.12.

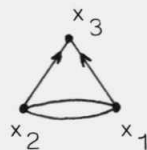
Si transitivizar es crear arcos  $\overrightarrow{xy}$  siempre que exista en el grafo un camino  $x\dots y$ , entenderemos, a grosso modo, por "reducir" la operación consistente en suprimir el arco  $\overrightarrow{xy}$  siempre que exista en el grafo otro camino  $x\dots y$  de longitud mayor que uno.

Son varios los grafos que tienen por transitivizado un mismo grafo transitivo y antisimétrico. Estos grafos "parcialmente transitivos" pueden considerarse, en algún sentido, como grafos intermedios entre su "reducido" y su transitivizado y, por la misma razón, podrían imaginarse como grafos "parcialmente reducidos". Nuestra intención, ahora, es caracterizar la clase de grafos "reducidos" que "representan" a los transitivos y antisimétricos.

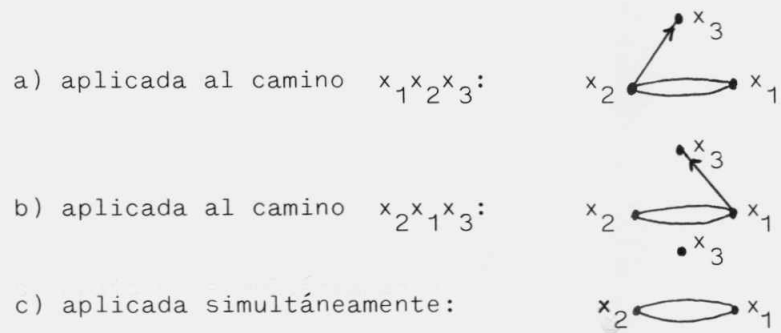
La idea de "reducción" presentará ambigüedad, en cuanto al orden de eliminación de arcos, cuando la referimos a grafos no antisimétricos como vemos a continuación.

#### Ejemplo 2.1.4

La reducción del grafo no antisimétrico



puede ser:



Los tres grafos obtenidos, son distintos, como grafos etiquetados, y son reducidos, en el sentido de que no poseen arcos transitivos. Por otro lado, la transitivización sólo permite recuperar el grafo original en los dos primeros casos.

Definición 2.1.5

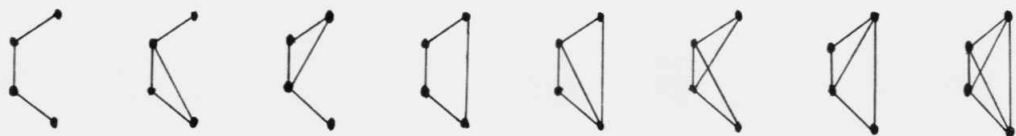
Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^A$  un grafo antisimétrico; llamaremos reducido de  $(X,G)$  al grafo parcial  $(X,G^r)$  cuyo conjunto de arcos es:

$$G^r = G - \{(x,y) \in G / \text{existe en } G \text{ un camino } x_1 \dots x_p \text{ de longitud mayor que uno con } x = x_1, x_p = y\}.$$

Observaciones 2.1.6

1. El reducido de un grafo antisimétrico es único.
2. Grafos distintos pueden tener el mismo reducido; a lo sumo uno de ellos es transitivo, los demás son grafos parciales de éste.

Ejemplo: los grafos




tienen todos el mismo reducido



Sólo el primero es reducido; el último es el único transitivo.



3.  $(X, G^{rr}) = (X, G^r)$
4. Si  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^A$  entonces  $(X, G^r) \in \mathcal{G}_X^A$
5. Si  $(X, G)$  es acíclico entonces  $(X, G^r)$  es acíclico.

Obsérvese que reducir no significa suprimir semiciclos, ni seleccionar un camino entre los que unen dos puntos: el reducido de  es el mismo.

Como en la transitivización de un grafo se añaden los arcos que se suprimen en la reducción podemos afirmar:

Proposición 2.1.7

Sea  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^A$ . Se tiene  $(X, G^{rt}) = (X, G^t)$ .

No se puede asegurar, sin embargo, que  $(X, G^{tr}) = (X, G^r)$  pues  $(X, G^t)$  bien puede ser no-antisimétrico en cuyo caso no tiene sentido reducir.

Nos interesa definir el concepto de grafo reducido de un grafo transitivo y antisimétrico con independencia de la existencia de un grafo de procedencia. En este sentido, no basta con decir: " $(X, G^r)$  es reducido  $\iff$  [si  $(x, y) \in G^r$  entonces no hay en  $G^r$  caminos de longitud mayor que uno uniendo los puntos  $x$  e  $y$ ]".

Es claro que hay que añadir la condición de antisimetría, pues es conservada por la reducción; aunque ésta no es suficiente al no conservarse en la transitivización. Aquí estamos como en la proposición anterior.

La propiedad de no poseer ciclos, más fuerte que la antisimetría, es conservada tanto por reducción como por transitivización y será, por tanto, la condición suficiente buscada. La razón última de esto es que antisimétrico y acíclico son equivalentes en grafos transitivos (proposición 1.1.12. Esto quedará claro después del

siguiente resultado.

Teorema 2.1.8

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^A$  y sean  $(X,G^r)$  y  $(X,G^t)$ , respectivamente, su reducido y su transitivizado; entonces

$$(X,G) \text{ es acíclico} \iff (X,G^{rt}) = (X,G^t) \text{ y } (X,G^{tr}) = (X,G^r)$$

En este caso diremos que  $(X,G^r)$  y  $(X,G^t)$  se representan mutuamente. En efecto, la condición necesaria resulta de lo dicho en los comentarios previos a este teorema y a la proposición 2.1.7. Veamos la suficiente. La existencia de  $(X,G^{tr})$  nos dice que  $(X,G^t)$  es antisimétrico y como también es transitivo, es, entonces, acíclico. La segunda igualdad y la conservación de la propiedad de ser acíclico por la reducción nos dice que  $(X,G^r)$  es acíclico. La primera igualdad y la conservación de los acíclicos en la transitivización nos dice que  $(X,G^t)$  es acíclico. Si  $(X,G)$  tuviera un ciclo, la demostración del apartado d) de la proposición 2.1.3 nos asegura que  $(X,G^t)$  no es antisimétrico, lo que es una contradicción.

Quedan cumplidos, ahora, nuestros objetivos iniciales:

Definición 2.1.9

Un grafo  $(X,G)$  es reducido si y sólo si:

- 1)  $(X,G)$  es acíclico.
- 2) Si  $(x,y) \in G$  entonces no hay caminos de longitud mayor que uno que unen  $x$  con  $y$ .

Es claro que todo grafo reducido es el reducido de un grafo transitivo y antisimétrico; también será en general, el reducido de otros grafos acíclicos no transitivos.

Corolario 2.1.10

a) Si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X,G^r)$  es su reducido, ambos grafos se representan mutuamente (es decir cada uno determina al otro). En este caso las dos igualdades del teorema anterior se reducen a  $(X,G^{rt}) = (X,G)$ , como consecuencia de la idempotencia de la operación transitivizar.

b) Si  $(X,G)$  es reducido, la idempotencia de la reducción nos asegura que  $(X,G^{tr}) = (X,G)$ .

Denotaremos por  $\mathcal{G}_X^{Ac}$  al conjunto de grafos acíclicos sobre  $X$  y por  $\mathcal{G}_X^r$  al de los reducidos sobre  $X$ . La aplicación  $r: \mathcal{G}_X^{Ac} \rightarrow \mathcal{G}_X^r$ , tal que  $r(X,G) = (X,G^r)$ , es suprayectiva y su restricción a  $\mathcal{G}_X^{TA}$  es biyectiva. De un modo natural se tiene:

Definición 2.1.11

Denotaremos por  $R$  a la siguiente relación de equivalencia:

$$(X,G), (X,H) \in \mathcal{G}_X^{Ac}, \quad (X,G)R(X,H) \iff (X,G^r) = (X,H^r)$$

Es claro que, si dos grafos tienen el mismo reducido tienen, también, el mismo transitivizado y viceversa. Para un grafo  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$ ,  $(X,G^r)$  o  $(X,G^t)$  pueden tomarse como representantes de la clase de  $(X,G)$ , luego es claro que:  $\mathcal{G}_{X/R}^{Ac} \approx \mathcal{G}_X^{TA} \approx \mathcal{G}_X^r$ . De los elementos de cada clase  $[(X,G)]$  diremos que son grafos parcialmente transitivizados de  $(X,G^r)$  y parcialmente reducidos de  $(X,G^t)$ . Observemos que  $\forall (X,H) \in [(X,G)], G^r \subset H \subset G^t$ , es decir  $(X,G^r)$  es un grafo parcial de  $(X,H)$  y éste lo es de  $(X,G^t)$ , siendo el recíproco también cierto.

Los conjuntos de arcos de los grafos de cada clase de equivalencia constituyen un retículo conjuntista para uniones e intersecciones isomorfo al retículo de partes del conjunto  $G^t - G^r$ . (Ver

ejemplo de la Observación 2.1.6).

En grafos transitivos y antisimétricos se puede concretar más

Proposición 2.1.12

Si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X,G^r)$  es su reducido, entonces se tiene:

a)  $G^r = G - \{(x,y) \in G / \exists z \text{ de modo que } (x,z) \text{ y } (z,y) \in G\}$ .

b)  $(x,y) \in G \iff$  existe en  $G^r$  un camino que une  $x$  con  $y$ .

Obsérvese que el encabezamiento de esta proposición se puede intercambiar con: "Si  $(X,G^r)$  es un grafo reducido y  $(X,G)$  es su transitivizado (que es también antisimétrico)".

El apartado a) permite interpretar la reducción como la total destransitivización de un grafo transitivo y antisimétrico y este concepto es, por tanto, una inequívoca alusión al grafo que suele dibujarse para representar un orden parcial. El apartado b) sugiere la siguiente conversión de notaciones:

Como sabemos, en un grafo transitivo y antisimétrico subyacen las estructuras de espacio topológico  $T_0$  y orden parcial. Las notaciones  $(x,y)$ ,  $\overrightarrow{xy}$ ,  $x \in \overline{y}$ ,  $y \in x^*$  y  $x \leq y$  son sinónimas; también lo son  $\overline{x}$ ,  $\{\overline{x}\}$  y  $x \dagger$  y  $x^*$  con  $x \dagger$ .

Un grafo reducido, por no ser, en general, transitivo, ni es un espacio topológico ni es un orden parcial, por lo que en él las notaciones  $\overline{x}$ ,  $x^*$  y  $x \leq y$  no tienen, a priori, sentido; sin embargo, en vista de lo anterior, las utilizaremos con el siguiente significado:

Definición 2.1.13

Para  $(X, G^r) \in \mathcal{G}_X^r$ , denotaremos:

$$\bar{y} = \{x / \text{hay un camino en } G^r \text{ que une } x \text{ con } y\} \cup \{y\}$$

$$y^* = \{x / \text{hay un camino en } G^r \text{ que une } y \text{ con } x\} \cup \{y\}$$

$$x \leq y \iff \text{existe un camino en } G^r \text{ que une } x \text{ con } y \text{ ó } x = y$$

Las notaciones propias de grafos se conservarán. Recordando:

$$\overrightarrow{xy} = (x, y) \text{ si } (x, y) \in G.$$

$$y\downarrow = \{x, (x, y) \in G^r\} \cup \{y\}$$

$$y\uparrow = \{x, (y, x) \in G^r\} \cup \{y\}$$

Así pues, en un grafo transitivo y antisimétrico  $\bar{y} = y\downarrow$  y  $y^* = y\uparrow$  pero en un reducido, en general,  $\bar{y} \neq y\downarrow$  e  $y^* \neq y\uparrow$ . No obstante, obsérvese que hay grafos transitivos y antisimétricos que coinciden con su reducido. Es claro cuales son:

Observación 2.1.14

Si  $(X, G^r) \in \mathcal{G}_X^r$ , son equivalentes:

a)  $\forall y \in X, \bar{y} = y\downarrow$

b)  $\forall y \in X, y^* = y\uparrow$

c)  $(X, G^r) = (X, G^{rt})$

d) En  $G^r$  no hay caminos de longitud mayor que uno.

La proposición 2.1.12 muestra la coherencia entre estas notaciones referidas a un grafo reducido y las mismas referidas al grafo transitivo y antisimétrico que representa. Los  $\bar{y}$  y el orden  $\leq$  tienen diferente significado en uno y otro, sin embargo:

Proposición 2.1.15

Sea  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X, G^r)$  su reducido:

a) La familia  $\{\bar{y}, y \in X\}$ , tomada como subbase de cerrados define en  $(X, G^r)$  la misma topología  $T_0$  que caracteriza a  $(X, G)$ .

b) Si  $\leq$  es la relación definida en  $(X, G^r)$ ,  $(X, \leq)$  es el orden parcial homólogo a  $(X, G)$ .

## 2.2. GRAFOS ACICLICOS

En el apartado anterior se ha puesto de manifiesto que los grafos acíclicos constituyen la clase más amplia de grafos para los que el reducido y el transitivizado se representan mutuamente. Veremos, en este párrafo, otra caracterización que contempla una condición sobre el etiquetado del grafo.

### Proposición 2.2.1

$$\text{Si } (X,G) \in \mathcal{G}_X^{\text{Ac}} \Rightarrow \begin{cases} 1) \exists x / \bar{x} = \{x\}, \\ 2) \exists y / y^* = \{y\}. \end{cases}$$

Es decir, en todo grafo acíclico hay al menos un punto que no posee anteriores y otro sin siguientes. Esto es claro, pues si  $(X,G)$  es acíclico y todo punto de  $X$  es adyacente de algún otro, entonces, partiendo de un punto cualquiera  $x_1$  se toma  $x_2 \in \bar{x}_1 - \{x_1\}$ ,  $x_3 \in \bar{x}_2 - \{x_2\}$  y así sucesivamente. Podemos construir un camino  $x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$  que, por ser el grafo finito, repite al menos uno de sus puntos, en contra de que el grafo no posee ciclos. Análogamente se prueba 2).

Como consecuencia, en un grafo acíclico se puede hablar de "minimiales" y "maximales" caracterizados por las condiciones 1) y 2) respectivamente.

Esta propiedad de los grafos acíclicos permite hacer la siguiente clasificación en su conjunto de puntos.

Definición 2.2.2

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$ . Se definen los siguientes conjuntos:

$$N_0 = \{x \in X, x \text{ es minimal de } (X,G)\}$$

$$N_1 = \{x \in X - N_0, x \text{ es minimal de } (X - N_0, G/X - N_0)\}$$

$$N_2 = \{x \in X - N_0 \cup N_1, x \text{ es minimal de } (X - N_0 \cup N_1, G/X - N_0 \cup N_1)\}$$

y, en general, para todo  $p, 0 < p \leq n$ , sea

$$N_p = \{x \in X - \bigcup_{r=0}^{p-1} N_r, x \text{ es minimal en } (X - \bigcup_{r=0}^{p-1} N_r, G/X - \bigcup_{r=0}^{p-1} N_r)\}$$

Observación 2.2.3

1) Nótese que  $\forall p, (X - \bigcup_{r=0}^{p-1} N_r, G/X - \bigcup_{r=0}^{p-1} N_r)$  es acíclico y por tanto tiene sentido el uso del término "minimal" en las definiciones de los  $N_p$ .

2) La sucesión de los  $N_p$  es estacionaria en el sentido de que existe  $k \leq n-1$ , tal que  $N_k \neq \emptyset$  y  $N_{k+j} = \dots = N_n = \emptyset$ , siendo  $n = \text{Card}(X)$ .

Como los  $N_p$  son disjuntos, constituyen una partición de  $X$  y escribiremos  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$ , con  $N_r \neq \emptyset, \forall r = 0, 1, \dots, k$ .

A los conjuntos  $N_r$  les llamaremos "niveles" del grafo acíclico  $(X,G)$  y si  $x \in N_r$ , diremos que "x es un punto de nivel r".

La relación de equivalencia que define esta partición puede caracterizarse por medio de las longitudes de los caminos en  $(X,G)$ .



Definiciones 2.2.4

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$  y  $x \in X$ :

Llamaremos longitud del punto  $x$ , a la longitud del más largo camino que termina en  $x$ . Es decir:

$$\text{long}(x) = \max \{ \text{long}(x_1 \dots x_p) / x_1 \dots x_p \text{ es un camino en } (X,G) \text{ con } x_p = x \}$$

Es claro que la igualdad de longitudes entre los puntos de  $X$  es la relación de equivalencia asociada a la partición en niveles de  $X$ , pues  $x \in N_p \iff \text{long}(x) = p$ .

Llamaremos dimensión del grafo  $(X,G)$ , y lo denotaremos por  $\text{dim}(X,G)$ , al  $\max \{ \text{long}(x), x \in X \}$ . Nótese que si  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$  y  $N_r \neq \emptyset$  para todo  $r$ , entonces  $\text{dim}(X,G) = k$ . El recíproco también es cierto.

La clasificación en niveles proporciona la siguiente caracterización de grafos acíclicos.

Proposición 2.2.5

Sea  $(X,G)$  un grafo con  $\text{Card}(X) = n$ . Entonces, se tiene que  $(X,G)$  es acíclico si, y sólo si, se puede etiquetar  $X$  por el conjunto de etiquetas  $E = \{1, \dots, n\}$  de modo que si  $(x_i, x_j) \in G$  entonces  $i < j$ . En efecto, supóngase que  $(X,G)$  es acíclico. Podemos clasificar sus puntos por niveles:  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$ , con  $N_r \neq \emptyset$ , y asignarles etiquetas respetando el orden creciente de los niveles; es decir, si  $n_r = \text{Card}(N_r)$  se define  $\underline{x} : E \rightarrow X$  de forma que sea biyectiva y que  $\forall m \in E, \underline{x}(m) = x_m \in N_p \iff \sum_{r=0}^{p-1} n_r < m \leq \sum_{r=0}^p n_r$ , lo que debe interpretarse en el caso  $p = 0$ , como  $0 < m \leq n_0$ .

Obviamente, si  $(x_i, x_j) \in G$  se tiene  $x_i \in N_p$  y  $x_j \in N_q$  con  $q > p$  y por tanto  $i < j$ .

Probemos ahora la condición suficiente. Supongamos que  $(X, G)$  posee un ciclo  $x_i x_j \dots x_k x_i$ . Sea  $m = \max\{i, j, \dots, k\}$  y sea  $x_n$  el siguiente a  $x_m$  en el ciclo. Entonces  $(x_m, x_n) \in G$  y, como  $m$  es máximo,  $m \geq n$ , contra la hipótesis  $m < n$ .

Observación 2.2.6

Si  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X, G^r)$  es su reducido, ambos se pueden clasificar en niveles pues son acíclicos. Como la reducción suprime caminos  $\xrightarrow{\quad}$  cuando existen otros de longitud mayor que unen  $x$  con  $y$  las particiones para ambos grafos coinciden. Lo mismo se puede decir de un grafo reducido  $(X, G)$  y su transitivizado  $(X, G^t)$ . La propiedad se extiende, obviamente, a los grafos parcialmente reducidos y parcialmente transitivizados de éstos.

Si  $[(X, G)]$  es la clase de los grafos parcialmente reducidos del grafo  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$ , todos los elementos de esta clase tienen la misma partición en niveles. El recíproco no es cierto, los grafos



tienen la misma partición en niveles y son de distinta clase como acíclicos.

2.3. EXPLOSION DE GRAFOS REDUCIDOS

Definiciones 2.3.1

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X$  un grafo cualquiera. Llamaremos in-grado del punto  $x \in X$ , y lo denotaremos por  $Ig(x)$ , al número de arcos que llegan a  $x$ . Denotaremos por  $Og(x)$  al número de arcos que parten de  $x$  y lo llamaremos out-grado de  $x$ . Dicho con más precisión:

$$Ig(x) = \text{Card}\{y, (y,x) \in G\} = \text{Card}(x\uparrow) - 1$$

$$Og(x) = \text{Card}\{y, (x,y) \in G\} = \text{Card}(x\downarrow) - 1$$

$$\text{Si } (X,G) \in \mathcal{G}_X^{TA}, \quad Ig(x) = \text{Card}(\bar{x}) - 1, \quad Og(x) = \text{Card}(x^*) - 1.$$

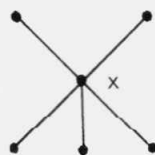
$$\text{Si } (X,G^r) \in \mathcal{G}_X^r, \quad Ig(x) \leq \text{Card}(\bar{x}) - 1, \quad Og(x) \leq \text{Card}(x^*) - 1.$$

También, diremos que  $x \in X$  es un punto singular  $\Leftrightarrow Og(x) \geq 2$ .

Observaciones previas 2.3.2

Vamos a describir un proceso de separación de arcos con origen común que llamaremos "explosión". La explosión se realizará en grafos reducidos, afectará a cada punto singular y consistirá en la separación de los arcos que parten de él; estos arcos se conservan heredando, en cada uno de sus nuevos extremos inferiores, la parte del grafo conexa por abajo; es decir, los nuevos arcos conservan, adyacente en su extremo inferior, la clausura del punto singular que se explota. En cada explosión el resto del grafo se conserva.

El grafo reducido

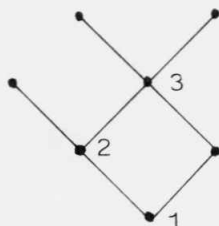


tiene a  $x$  como único punto singular. La explosión del punto  $x$  transformará el grafo en



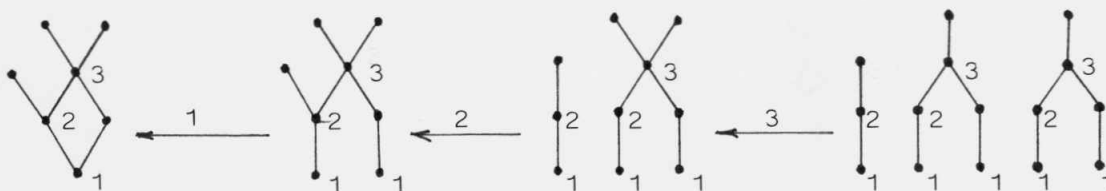
Cuando en un grafo haya más de un punto singular, la explosión del grafo, entendida como resultado de la explosión de todos sus puntos singulares, depende del orden de explosión.

El grafo

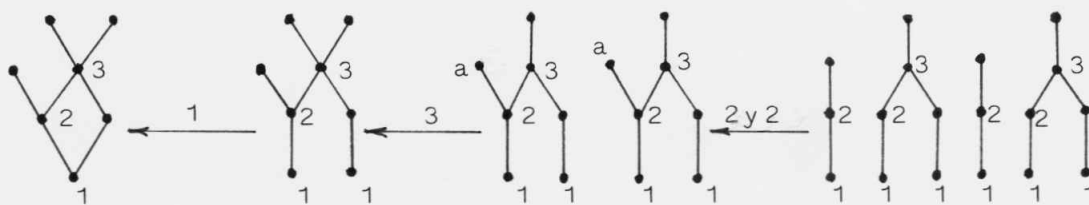


tiene a 1,2,3 por puntos singulares.

Si explotásemos estos puntos en el orden  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  obtendremos



sin embargo, si el orden de explosión es  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ :



En este último caso, al explotar el punto 3 habría que precisar si el arco (2,a) se conserva o no. Si lo conservamos, el punto 2 duplicado habrá que explotarlo dos veces (como se ha hecho

en la figura); si no, el punto 2 deja de ser singular por lo que el grafo no se transforma; en cualquier caso el resultado obtenido es distinto.

Estas anomalías se presentarán cuando el orden de explosión altere el orden de los niveles en los que se encuentran los puntos singulares. Se observa, sin embargo, que si conservamos como orden de explosión el de los niveles también se conserva en cada explosión el conjunto de puntos singulares que quedan por explotar. En este sentido podrá interpretarse la explosión como una ordenada desingularización del grafo reducido. Para puntos singulares de un mismo nivel, el orden de explosión no condicionará el resultado. En consecuencia, la explosión del grafo se hará ordenadamente por niveles.

En la precisión de estas ideas utilizaremos el lenguaje topológico referido a grafos reducidos, en el siguiente sentido:

### Notaciones 2.3.3

Ya hemos visto (proposición 2.1.15) que si  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $(X,G^r) \in \mathcal{G}_X^r$  es su reducido, la familia  $\{\bar{x}, x \in X\}$  tomada como subbase de cerrados define el mismo espacio topológico  $T_0$ ,  $(X,T)$ , en ambos; en un caso  $\bar{x} = \{y, (y,x) \in G\} \cup \{x\}$ , y en el otro,  $\bar{x} = \{y, \text{ existe un camino, en } (X,G^r), \text{ que une } y \text{ con } x\} \cup \{x\}$ .

Como  $g : \mathcal{G}_X^{TA} \rightarrow T_X^0$  es tal que  $g(X,G) = (X,T)$  (definición 1.2.6) y  $r : \mathcal{G}_X^{TA} \rightarrow \mathcal{G}_X^r$ , con  $r(X,G) = (X,G^r)$ , es biyectiva (notaciones 2.1.10), denotaremos por  $g^r$  la aplicación  $g^r : \mathcal{G}_X^r \rightarrow T_X^0$  tal que  $g^r = g \circ r^{-1}$  y que asocia a cada grafo reducido el espacio topológico asociado a su transitivizado.

Recíprocamente, al espacio topológico  $(X, T) \in \bar{T}_X^0$  le hemos asociado mediante  $f : \bar{T}_X^0 \rightarrow \mathcal{G}_X^{TA}$  (definición 1.2.4) el grafo  $(X, G)$  donde  $G = \{(x, y) / x \in \bar{y}, x \neq y\}$ . Podemos, también, dada la biyección entre  $\mathcal{G}_X^{TA}$  y  $\mathcal{G}_X^r$ , asociarle el grafo reducido  $(X, G^r)$ . Denotaremos por  $f^r$  la aplicación  $f^r : \bar{T}_X^0 \rightarrow \mathcal{G}_X^r$  tal que  $f^r = r \circ f$ .

Es claro, después del teorema 1.2.13, que  $f^r$  es biyectiva y  $(f^r)^{-1} = (r \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ r^{-1} = g \circ r^{-1} = g^r$

La siguiente definición será clave en el resto del capítulo.

#### Definición 2.3.4

Sea  $E$  un conjunto finito totalmente ordenado. Diremos que un grafo  $(X, G)$ , cuyo conjunto de puntos  $X$  está etiquetado por  $E$ , es un grafo E-ordenado si la biyección  $\underline{x} : E \rightarrow X$  tal que  $x(i) = x_i$  verifica  $(x_i, x_j) \in G \implies i < j$ .

Si  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  diremos que el grafo E-ordenado está ordenado naturalmente.

Esta condición,  $(x_i, x_j) \in G \implies i < j$ , en el etiquetado del grafo, caracteriza a los grafos acíclicos (proposición 2.2.5) y, en particular, es posible para los grafos reducidos.

Nótese que si el grafo es E-ordenado, el orden parcial asociado al grafo  $(X, G)$  es un orden menos fino que el orden imagen del de  $E$  por la biyección  $\underline{x}$ . Así, dar un E-orden sobre el grafo es esencialmente dar un orden total sobre  $X$  que es más fino que el orden asociado al grafo.

El etiquetado anterior no será absolutamente necesario para explicar las sucesivas explosiones, de tal manera que los sucesivos

explotados de un grafo no etiquetado serán grafos no etiquetados determinados a partir de aquel. Sucederá, sin embargo, que sobre el explotado de un grafo E-ordenado se podrá dar también un etiquetado cuyo conjunto  $\tilde{E}$  de etiquetas adquiere un orden total quedando el grafo explotado  $\tilde{E}$ -ordenado.

Sea E un conjunto finito totalmente ordenado y  $(X,G)$  un grafo reducido E-ordenado. Describiremos la clasificación de X en niveles por  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$  con  $N_r \neq \emptyset \quad \forall r = 0,1,\dots,k$ , siendo  $k=\dim(X,G)$ .

Definición 2.3.5.- (Explosión del nivel  $N_0$ )

Llamaremos explotado de  $(X,G)$  por los puntos del nivel  $N_0$  al grafo  $(X_1,G_1)$  dado por:

$$X_1 = (X - N_0) \cup \{x_{ij}, x_i \in N_0 \text{ y } (x_i, x_j) \in G\} \cup M_0$$

$$\text{donde } M_0 = \{x_i \in X, \bar{x}_i = x_i^*\}$$

$$G_1 = (G - \{(x_i, x_j) \in G, x_{ij} \in X_1\}) \cup \{(x_{ij}, x_j), x_{ij} \in X_1\}$$

Describiremos esta transformación con la notación

$$(X,G) \xleftarrow{\pi_0} (X_1,G_1).$$

De hecho  $\pi_0$  representa un morfismo de grafos en el sentido de la Definición 1.2.21. En efecto,  $\pi_0$  puede verse como la aplicación  $\pi_0 : X_1 \rightarrow X$  dada por  $\pi_0(x_i) = x_i$  si  $x_i \notin N_0$ ,  $\pi_0(x_{ij}) = x_i$  si  $x_i \in N_0$  y  $(x_i, x_j) \in G$ , y  $\pi_0(x_i) = x_i$  si  $x_i \in M_0$ . Es obvio que dicha aplicación es un morfismo suprayectivo de grafos, al que llamaremos explosión de  $(X,G)$  por los puntos del nivel  $N_0$  o más brevemente  $\pi_0$ -explosión de  $(X,G)$ .

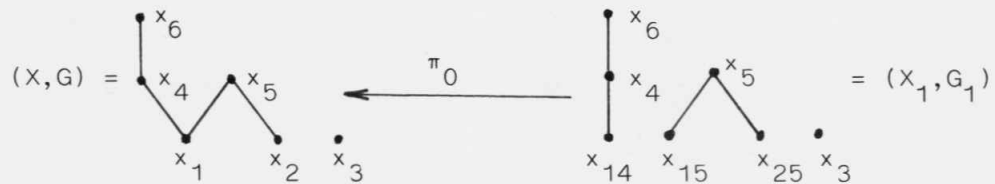
Observación 2.3.6

El grafo reducido  $(X,G)$  puede ser no-conexo y, en particular, puede contener puntos desconectados; éstos son los descritos en  $M_0$  que se han incluido en la definición de  $X_1$ , al final, porque previamente se excluyeron (en  $X-N_0$ ).

La notación  $M_0$  hace referencia a que estos puntos son los maximales del nivel  $N_0$ .

El grafo  $(X_1,G_1)$  es también y claramente, reducido.

Como ejemplo de explosión:



A continuación definiremos la explosión, punto a punto, del nivel  $N_p$  de un grafo  $(X,G)$  en el que han sido previamente explotados los niveles inferiores.

Definición y observaciones 2.3.7

Diremos que el nivel  $N_p$  del grafo reducido  $(X;G)$  es permisible si  $\forall x \in N_1$ , con  $1 < p$ , se tiene  $Og(x) \leq 1$ .

Obsérvese que:

a)  $Og(x) = 0 \iff x$  es maximal. Puede, por tanto, haber puntos maximales en niveles inferiores a  $N_p$ . En el grafo explotado en el ejemplo último hay un maximal en cada nivel y el nivel  $N_1$  es permisible.

b) La condición impuesta a los puntos de niveles inferiores a  $N_p$  significa que el subgrafo inducido en  $\bigcup_{l=0}^p N_l$  es una ramificación



en el sentido definido por Bergé en [B.1].

c) Si llamamos  $\bar{N}_p = \bigcup_{x_p \in N_p} \bar{x}_p$ , la condición anterior no se puede expresar diciendo que el subgrafo inducido  $(\bar{N}_p, G_p^r / \bar{N}_p)$  sea una ramificación, pues obsérvese que en general:

$$\bigcup_{l=0}^p N_l \neq \bar{N}_p$$

Como contraejemplo:



$x \in N_3$ ,  $\bar{N}_3 = \bar{x}$  es una ramificación, sin embargo no todo lo que está por debajo del nivel  $N_3$  cumple la condición aludida.

Supongamos que el grafo reducido  $(X,G)$  tiene el nivel  $N_p$  permisible. Supongamos, también, que  $X$  está etiquetado por un conjunto de etiquetas totalmente ordenado  $E$  y que  $(X,G)$  está  $E$ -ordenado.

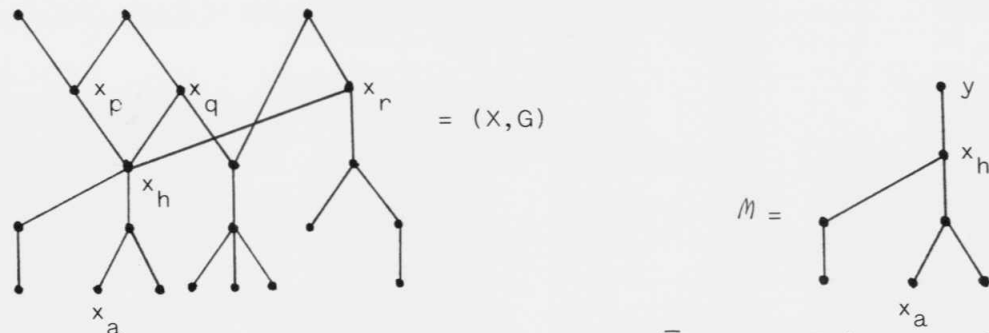
Definición 2.3.8.- (Explosión del nivel  $N_p$ )

Con las hipótesis anteriores, sea  $x_h \in N_p$ ,  $h \in E$ , un punto cualquiera. Se realizará sobre el grafo  $(X,G)$  las siguientes transformaciones:

Si  $Og(x_h) = 0$ ,  $\bar{x}_h$  es una componente conexa de  $(X,G)$  que conservamos invariante. Si  $Og(x_h) \neq 0$  construimos el siguiente modelo:

Modelo 2.3.8.A:

Consideremos el grafo reducido  $\mathcal{M} = (\bar{x}_h \cup \{y\}, G / \bar{x}_h \cup \{(x_h, y)\})$



donde  $y$  es un punto que se crea, y sea  $(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h)$  su topología homóloga por  $g_r$ . Es decir,  $(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h)$  tiene por subbase de cerrados la familia  $\{\bar{x}_i, x_i \in \bar{x}_h \cup \{y\}\}$  donde  $\bar{x}_i = \{x_j / \text{existe un camino en } M \text{ con origen en } x_j \text{ y final en } x_i\} \cup \{x_i\}$ .

De este modo se hacen las:

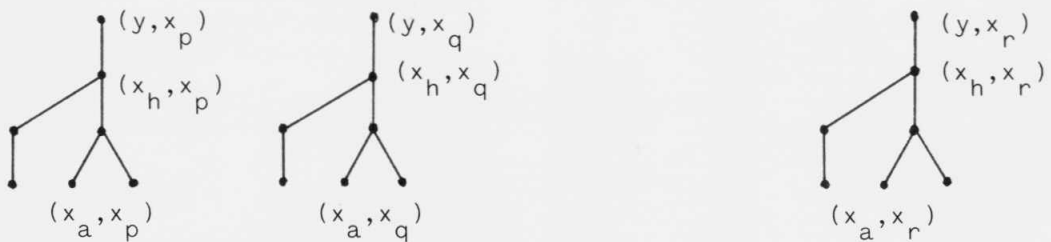
Copias 2.3.8.B:

Sea  $x_h^{-\uparrow} = x_h^{\uparrow} - \{x_h\}$  y  $(x_h^{-\uparrow}, T_d)$  la topología discreta en  $x_h^{-\uparrow}$ .

Construimos la topología producto:

$$(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h) \times (x_h^{-\uparrow}, T_d)$$

que denotaremos simplemente por:  $(\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{-\uparrow}, T_\pi)$ .



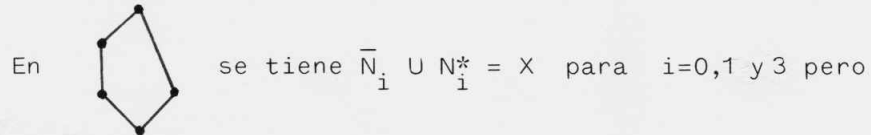
Si  $Og(x_h) = \text{Card}(x_h^{-\uparrow}) = 1$ , la topología producto consta de 1 componentes conexas homeomorfas a  $(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h)$ .

Para conectar estas 1 copias con el resto del grafo debe tenerse en cuenta que, si bien, cada clase  $N_p$  divide al conjunto de puntos  $X$  en dos partes (intuitivamente), sin embargo, no divide igualmente al conjunto de arcos  $G$ . Dicho de otra manera, puede

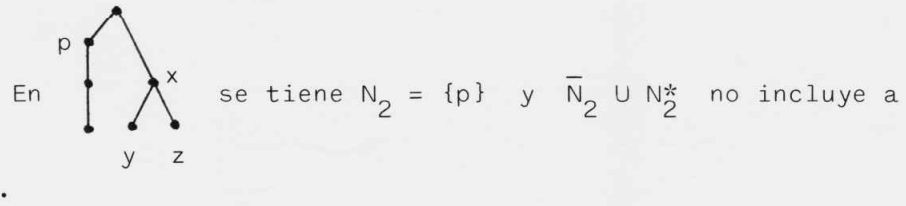
haber en el grafo arcos que "cruzen" el nivel  $N_p$ , lo que tiene como consecuencia que no siempre se pueda escribir  $X = \bar{N}_p \cup N_p^*$  siendo

$$\bar{N}_p = \bigcup_{x_1 \in N_p} \bar{x}_1, \quad N_p^* = \bigcup_{x_1 \in N_p} x_1^*$$

Como ejemplos:



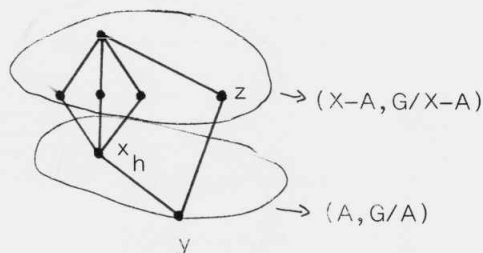
$$\bar{N}_2 \cup N_2^* \neq X.$$



Se pretende que las copias del modelo construidas para  $x_h$  sustituyan a  $\bar{x}_h$  y se conecten con el resto del grafo que, después de lo comentado, habrá que expresar en términos del "subgrafo complementario".

Si  $(X,G)$  es un grafo y  $A \subset X$  se pueden considerar los grafos inducidos  $(A,G/A)$  y  $(X-A, G/X-A)$ , cuyos conjuntos de puntos completan  $X$ , aunque no sucede así con los conjuntos de arcos:

$$G/A \cup G/X-A \neq G.$$



En el grafo de la figura hay cuatro arcos que no están ni en uno ni en otro.

En nuestro contexto, como  $(X, G)$  tiene el nivel  $N_p$  permitido, los puntos inferiores a  $x_h$  tienen out-grado  $\leq 1$  por lo que no se puede presentar la patología  $(y, z) \notin G/A \cup G/X-A$  de la figura. La otra patología, la que afecta a los tres arcos que parten de  $x_h$ , es la que nos ha conducido a incluir el arco  $(x_h, y)$  en el modelo.

La conexión de las copias 2.3.8.B será descrita topológicamente por una identificación:

#### Conexión 2.3.8.C

Se considerarán  $(X - \bar{x}_h, G_p^r / X - \bar{x}_h)$ , el subgrupo inducido en el complementario de  $\bar{x}_h$ , y  $(X - \bar{x}_h, T_c)$ , su espacio topológico homólogo por  $g^r$ .

Sea el conjunto de puntos:  $H = (X - \bar{x}_h) \cup (\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{-\uparrow})$ , es decir, los puntos del complementario junto con los de la topología producto.

Se definen las funciones:

$f_1: (X - \bar{x}_h) \longrightarrow H$  es la función identidad y

$f_2: (\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{-\uparrow}) \longrightarrow H$  es tal que:

$$f_2(x_i, x_j) = (x_i, x_j), \quad \forall x_i \in \bar{x}_h, \quad \forall x_j \in x_h^{-\uparrow}$$

$$f_2(y, x_j) = x_j, \quad \forall x_j \in x_h^{-\uparrow}$$

Se toma en  $H$  la topología final de los espacios topológicos:  $(X - \bar{x}_h, T_c)$  y  $(\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{-\uparrow}, T_\pi)$  y las funciones  $f_1$  y  $f_2$  que denotaremos por  $(H, T_h^f)$ .

Una vez realizadas para cada  $x_h \in N_p$  las construcciones descritas en los apartados A, B, C se obtiene un espacio topológico  $(X', T')$  cuyo grafo reducido asociado le denotaremos por  $(X', G')$  y

le llamaremos el explotado de  $(X,G)$  por los puntos del nivel  $N_p$ .

Como el grafo  $(X,G)$  era  $E$ -ordenado por el conjunto de etiquetas  $E$  totalmente ordenado, su explotado por los puntos del nivel  $N_p$ ,  $(X',G')$ , adquiere un etiquetado por  $E'$ , siendo  $E'$  el conjunto de etiquetas  $E' = E'_1 \cup E'_2$  donde:

$$E'_1 = \{m \in E, x_m \notin \bar{N}_p = \bigcup_{x_1 \in N_p} \bar{x}_1\} \quad y$$

$E'_2 = \{ij / i,j \in E \text{ y existe } x_h \in N_p \text{ tal que } x_i \in \bar{x}_h \text{ y } x_j \in \bar{x}_h\}$  y la biyección  $\underline{x}': E' \rightarrow X'$  es, obviamente,  $\underline{x}'(m) = x_m$  si  $m \in E'_1$  y  $\underline{x}'(ij) = (x_i, x_j)$  si  $ij \in E'_2$ .

Por simplificación y coherencia con las notaciones y razones que expondremos en la observación 2.3.11, en lo sucesivo, denotaremos a los nuevos puntos  $(x_i, x_j)$  del explotado por  $x_{ij}$ , de este modo  $\underline{x}'(ij) = x_{ij}$ .

El conjunto de etiquetas  $E'$  está, además, totalmente ordenado por el siguiente orden lexicográfico: "un elemento es menor que otro en  $E'$  cuando, o bien el primer subíndice en la etiqueta del primero es menor que el primer subíndice en la etiqueta del segundo, o bien los primeros subíndices coinciden (en cuyo caso ambas etiquetas tienen dos subíndices) y, entonces, el segundo subíndice en la etiqueta del primero es menor que el segundo subíndice en la etiqueta del segundo".

Es claro por la construcción, que el grafo  $(X',G')$  queda  $E'$ -ordenado de acuerdo con el orden anterior.

Describiremos la transformación realizada en  $(X,G)$  para obtener su explotado por los puntos del nivel  $N_p$ ,  $(X',G')$ , por la

notación  $(X,G) \xleftarrow{\pi_p} (X',G')$  aludiendo al morfismo suprayectivo de grafos dado por

$$\pi_p : X' \rightarrow X \text{ con } \pi_p(x_m) = x_m \text{ si } m \in E'_1$$
$$\text{y } \pi_p(x_{ij}) = x_i \text{ si } ij \in E'_2.$$

A dicho morfismo le llamaremos explosión de  $(X,G)$  por los puntos del nivel  $N_p$  o más brevemente  $\pi_p$ -explosión de  $(X,G)$ .

Nótese que el grafo no-etiquetado asociado a  $(X',G')$  y el morfismo  $\pi_p$  se pueden construir directamente a partir del grafo no-etiquetado asociado a  $(X,G)$ .

En resumen, se tiene definida la explosión de un grafo reducido no-etiquetado obteniendo otro grafo reducido no etiquetado y si el grafo de partida está etiquetado por el conjunto  $E$  el grafo explotado queda etiquetado por el conjunto  $E'$  construido anteriormente y, finalmente, si  $E$  es un conjunto totalmente ordenado y el grafo está  $E$ -ordenado entonces, también,  $E'$  está totalmente ordenado como se ha dicho y el grafo explotado queda  $E'$ -ordenado.

#### Proposición 2.3.9

Con las notaciones anteriores se tiene que el grafo  $(X',G')$  tiene el nivel  $N_{p+1}$  permitido (si  $p+1 < k = \dim(X',G') = \dim(X,G)$ ).

La demostración se sigue de la construcción de  $(X',G')$  y de la noción de permisibilidad.

Como consecuencia, podemos considerar sucesivas explosiones por los puntos de los sucesivos niveles.

Definición 2.3.10.- (Explosión de un grafo reducido)

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^r$ , donde  $X$  está etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$ , un grafo naturalmente ordenado (es decir,  $E$ -ordenado).  $X$  está clasificado en niveles por  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$  con  $N_r \neq \emptyset$ , siendo  $k = \dim(X,G)$ .

La  $\pi_0$ -explosión de  $(X,G)$  produce un grafo  $(X_1,G_1)$  y el morfismo  $\pi_0: (X_1,G_1) \rightarrow (X,G)$ . Como  $(X_1,G_1)$  tiene el nivel  $N_1$  permitido, la  $\pi_1$ -explosión de este grafo crea  $(X_2,G_2)$  y el morfismo  $\pi_1: (X_2,G_2) \rightarrow (X_1,G_1)$ . En general, recurrentemente, se crea  $(X_{i+1},G_{i+1})$  a partir de  $(X_i,G_i)$  a través de la  $\pi_i$ -explosión obteniéndose, además, el morfismo  $\pi_i: (X_{i+1},G_{i+1}) \rightarrow (X_i,G_i)$ . Llamaremos  $\pi$ -explotado de  $(X,G)$  (o simplemente explotado de  $(X,G)$ ) al grafo  $(\tilde{X},\tilde{G}) = (X_k,G_k)$ , y llamaremos  $\pi$ -explosión de  $(X,G)$  al morfismo

$$\pi = \pi_0 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{k-1}: (\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (X,G)$$

Observación 2.3.11

Se notará que la  $\pi_0$ -explosión es, en realidad, la  $\pi_p$ -explosión para  $p = 0$ , al haber hecho  $(x_i,x_j) = x_{ij}$ , por lo que podríamos haber prescindido de su definición. Se ha dado, sin embargo, porque las notaciones  $x_{ij}$  para los nuevos puntos de  $N_0$  en  $(X_1,G_1)$  son menos confusas y sugirieron una más adecuada notación para los nuevos puntos del  $\pi_p$ -explotado  $(X_{p+1},G_{p+1})$ . La notación  $(x_i,x_j)$  para los nuevos puntos de las copias del modelo fue de gran utilidad en la descripción de la  $\pi_p$ -explosión, pero una vez realizada ésta, aquella notación se cambió por  $x_{ij}$  porque presentaba el gran inconveniente de que si  $p=1$  podría confundirse el punto  $(x_i,x_j) \in N_1$  del grafo  $(X_2,G_2)$  con los arcos de éste. En realidad, esta confusión se

extiende a todos los  $(X_{p+1}, G_{p+1})$ . Por otro lado, los nuevos puntos del nivel  $N_0$  en el  $\pi_2$ -explotado son más exactamente de la forma  $((x_i, x_j), x_k) = (x_{ij}, x_k) = x_{(ij)k}$ , complicándose esta notación en sucesivas explosiones. Se imponen, pues, las siguientes precisiones en el etiquetado del explotado  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ .

Obsérvese que si  $E = E_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  es un conjunto de etiquetas para  $X$  y  $(X, G)$  es un grafo reducido  $E_0$ -ordenado, entonces el grafo  $(X_1, G_1)$  queda etiquetado canónicamente por el conjunto totalmente ordenado  $E_1$  y  $E_1$ -ordenado, como ya se dijo. La aplicación reiterada de las  $\pi_p$ -explosiones proporciona un conjunto de etiquetas totalmente ordenado canónico  $E_{p+1}$  para cada  $(X_{p+1}, G_{p+1})$ , quedando éste  $E_{p+1}$ -ordenado.

Nótese, también, que los elementos de  $E_1$  son sucesiones de uno o dos elementos de  $E_0$  y que cada elemento de  $E_p$  determina una sucesión finita creciente de elementos de  $E_0$ . En particular, si  $F$  es el conjunto de sucesiones finitas crecientes de  $E_0$  se tiene una aplicación inyectiva  $\phi : E_k \rightarrow F$ .

Si denotamos por  $\tilde{E}$  la imagen por  $\phi$  de  $E_k$ , se tiene que la imagen del orden de  $E_k$  en  $\tilde{E}$  coincide con la restricción del orden lexicográfico de  $F$  a  $\tilde{E}$ . En consecuencia, componiendo la aplicación  $E_k \rightarrow \tilde{X}$  que da el etiquetado de  $\tilde{X}$  por  $E_k$  con la biyección entre  $\tilde{E}$  y  $E_k$  inducida por  $\phi$ , se obtiene un etiquetado de  $\tilde{X}$  por  $\tilde{E}$ , que representaremos por  $\tilde{x} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{X}$ , quedando el grafo  $(\tilde{X}, \tilde{G})$   $\tilde{E}$ -ordenado para el orden lexicográfico. De acuerdo con este etiquetado los elementos de  $\tilde{X}$  se denotarán de la forma  $x_{i_1 i_2 \dots i_q}$  donde  $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ . Un etiquetado análogo por elementos de  $F$  se puede dar sobre cada  $(X_p, G_p)$ .



Obsérvese, finalmente, que al efectuar una  $\pi_p$ -explosión los puntos de niveles superiores a  $p$  no cambian la etiqueta  $y$ , de aquí, al efectuar sucesivamente las explosiones  $\pi_0, \dots, \pi_p$  los puntos de niveles superiores a  $p$  conservan la etiqueta que tenían en  $(X, G)$ . La siguiente proposición hace algunas precisiones más.

Proposición 2.3.12

Los dos enunciados siguientes son ciertos para cada  $p=1, \dots, k$ .

a)  $x_i$  es maximal en  $(X, G) \iff x_i$  es maximal en  $(X_p, G_p)$ .

b) Si  $x_i \in N_p$  en  $(X, G)$  entonces los puntos de  $(\pi_0 \circ \dots \circ \pi_{p-1})^{-1}(x_i)$  están en el nivel  $N_p$  en  $(X_p, G_p)$ .

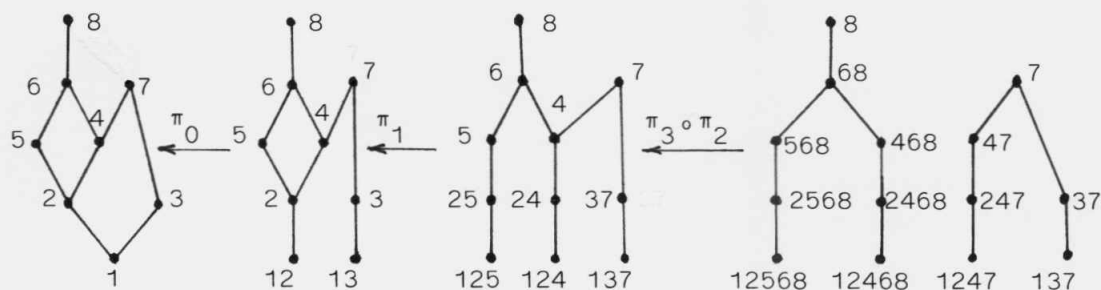
En efecto, a) es claro, pues los puntos de out-grado 0 no se explotan; esto quiere decir que los maximales de  $(X_p, G_p)$ , independientemente del nivel en que se encuentren, conservan las etiquetas que tenían en  $(X, G)$ . En particular,  $(X, G)$  y  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  poseen el mismo conjunto de maximales, al que denotaremos por  $M$ . El enunciado b) debe entenderse en el siguiente sentido: si  $Og(x_i) \geq 1$ , el punto  $x_i$  se multiplica en las sucesivas explosiones a través de las diversas copias que incluyan a  $\bar{x}_i$ , originando una colección de puntos de la forma  $x_{i-i_2 \dots i_q}$  que tienen en común, al menos, el primer subíndice  $i$ ; es decir, los puntos de  $(\pi_0 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{p-1})^{-1}(x_i)$  tienen a  $i$  como primer subíndice y, desde luego, el enunciado es cierto por construcción.

Con esta notación el apartado a) se puede escribir:

$$x_i \in M \iff x_i \text{ conserva su etiqueta en } (X_p, G_p), \text{ (para cada } p) \\ \iff x_i \text{ conserva su etiqueta en } (\tilde{X}, \tilde{G}).$$

Así pues, los maximales son los únicos puntos que conservan su etiqueta en la explosión.

Ejemplo 2.3.13



De la definición de  $\pi$ -explosión y las notaciones establecidas se obtiene:

Proposición 2.3.14

Para cada  $x = x_{i_1 \dots i_q} \in \tilde{X}$

a)  $Og(x) \leq 1$  y  $Og(x) = 0 \iff x \in M$ .

b)  $Card(x^*) = q$

c) Si  $y \in \tilde{X}$  y  $(x, y) \in \tilde{G}$  entonces  $y = x_{i_2 \dots i_q}$ .

Definición 2.3.15

Sea  $(X, G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$  con  $X$  clasificado en niveles por  $X = \bigcup_{p=0}^k N_p$ ,  $N_p \neq \emptyset, \forall p$  y  $k = \dim(X, G)$ . Sea  $s: \{1, \dots, q\} \rightarrow X$  una sucesión de puntos de  $X$ :

Diremos que  $s$  es un camino maximal en  $(X, G)$  si, y sólo si,  $s$  es inyectiva (camino),  $s(1) \in N_0$  y  $s(q) \in M$ .

Diremos que  $s$  es un camino con fin maximal en  $(X, G)$  si, y sólo si,  $s$  es inyectiva y  $s(q) \in M$ .

Por razones de complección de las notaciones admitiremos, en lo que sigue, también, el caso  $q=1$  en las definiciones anteriores. Así, los puntos desconectados corresponderán a caminos maximales y los puntos maximales a caminos con fin maximal.

Utilizaremos los siguientes conjuntos:

$$C_p^M(X,G) = \{ \text{camino } s, \text{ en } (X,G), s(1) \in N_p \text{ y } s(q) \in M \}$$

$$C_0^M(X,G) = \{ \text{camino maximal, } s, \text{ en } (X,G) \}.$$

$$C^M(X,G) = \{ \text{camino con fin maximal, } s, \text{ en } (X,G) \}.$$

Es claro que  $C^M(X,G) = \bigcup_{p=0}^k C_p^M(X,G).$

Teorema 2.3.16

a) Existe una biyección canónica entre los conjuntos  $\tilde{X}$  y  $C^M(X,G).$

b) Las etiquetas de los puntos del nivel  $\tilde{N}_0$  de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  describen el grafo  $(X,G).$

En efecto, a) es consecuencia de la última proposición y definición; nótese que  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \in \tilde{X} \iff s \in C^M(X,G)$  es  $s(1) = x_{i_1}, s(2) = x_{i_2}, \dots, s(q) = x_{i_q}.$  Para b) se tiene  $x_i \in X$  si y sólo si  $i$  es un subíndice en la etiqueta de algún minimal de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  y que  $(x_i, x_j) \in G$  si y sólo si  $i$  y  $j$  son subíndices consecutivos (en este orden) en la etiqueta de algún punto de  $\tilde{N}_0$  en  $(\tilde{X}, \tilde{G}).$

Así, se tendrá:  $X = \bigcup_{x \in \tilde{N}_0} \{x_i / i \text{ es subíndice en la etiqueta de } x \in \tilde{N}_0 \subset \tilde{X}\}$  y

$$G = \{ (x_i, x_j) / \text{ existe } x_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_q} \in \tilde{N}_0 \text{ en } (\tilde{X}, \tilde{G}) \text{ con } i=i_r \text{ y } j=i_{r+1} \}$$

Corolario 2.3.17

Un grafo reducido  $(X,G)$  queda unívocamente descrito por sus caminos maximales,  $C_0^M(X,G).$

Corolario 2.3.18

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^r$  con  $X$  etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  por medio de  $\underline{x}:E \rightarrow X$  y  $(X,G)$  naturalmente ordenado. En estas condiciones  $\tilde{X}$  está etiquetado, también, por el conjunto de etiquetas  $\hat{E}$  formado por aquellos subconjuntos naturalmente ordenados,  $A$ , de  $E$  (es decir, partes de  $E$  provistas del orden inducido por  $E$ ) tales que  $\underline{x}/A$  (es decir, la sucesión de imágenes de elementos de  $A$ ) es un camino de  $C^M(X,G)$ .

La biyección del etiquetado,  $\underline{x}_{-\pi}:\hat{E} \rightarrow \tilde{X}$  viene dada por

$$\underline{x}_{-\pi}(A) = x_{i_1 \dots i_q} \in \tilde{X} \text{ si } A = \{i_1 < \dots < i_q\} \in \hat{E}$$

El apartado a) del teorema 2.3.16 sugiere una definición alternativa de explosión.

Definición 2.3.19

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^r$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  por medio de  $\underline{x}:E \rightarrow X$  y  $(X,G)$  naturalmente ordenado.

Llamaremos  $\pi$ -explotado de  $(X,G)$  al grafo  $(\hat{X},\hat{G})$  donde  $\hat{X} = C^M(X,G)$  y

$$\hat{G} = \{(s,s') \in C^M(X,G) \times C^M(X,G) \text{ tal que } \text{long}(s) \geq 1 \text{ y el camino } s' \text{ es igual al camino } s \text{ menos el primer elemento}\}.$$

Es decir,  $(s,s') \in \hat{G}$  si, y sólo si, siendo  $s:\{1,2,\dots,q\} \rightarrow X$  inyectiva tal que  $s(q) \in M$ , se tiene  $q \geq 2$  y  $s' = s/\{2,\dots,q\}$ .

Un conjunto de etiquetas para  $\hat{X}$  es el conjunto  $\hat{E}$  descrito anteriormente, correspondiendo a cada  $s \in C^M(X,G)$ ,  $s:\{1,2,\dots,q\} \rightarrow X$ , la etiqueta  $\underline{x}^{-1}(s(\{1,2,\dots,q\})) \in E$ . Denotaremos por  $\underline{x}:\hat{E} \rightarrow \hat{X}$  la biyección correspondiente a este etiquetado, es decir  $\underline{x}(\underline{x}^{-1}(s)) = s$ .

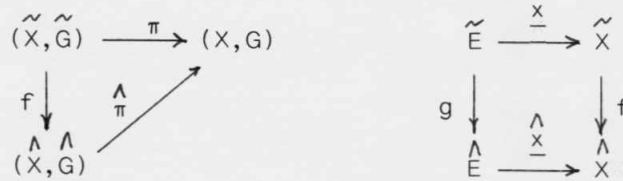
El conjunto  $\hat{E}$  está totalmente ordenado por el orden lexicográfico y con este orden  $(\hat{X}, \hat{G})$  está  $\hat{E}$ -ordenado.

Llamaremos, también,  $\pi$ -explosión al morfismo de grafos  $\pi: (\hat{X}, \hat{G}) \rightarrow (X, G)$  dado por  $\pi(s) = s(1)$ ,  $\forall s \in C^M(X, G)$  y  $s: \{1, \dots, q\} \rightarrow X$ .

Proposición 2.3.20

Las dos definiciones de  $\pi$ -explosión son equivalentes.

El enunciado anterior equivale a decir que existe un isomorfismo de grafos  $f: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{G})$  y una biyección  $g: \tilde{E} \rightarrow \hat{E}$ , isomorfismo de órdenes, tal que los diagramas siguientes son equivalentes



siendo  $\tilde{x}$  y  $\hat{x}$ , respectivamente, las correspondientes aplicaciones de etiquetado.

En efecto, se tienen los siguientes hechos:

a) Las aplicaciones  $f, g$  se pueden construir a partir del hecho de que los conjuntos  $\tilde{X}$  y  $\hat{X}$  tienen un etiquetado por el mismo conjunto  $\hat{E}$ . Así los etiquetados de  $\tilde{X}$  por  $\tilde{E}$  y  $\hat{X}$  difieren en la biyección  $g: \tilde{E} \rightarrow \hat{E}$ , y la aplicación  $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  es la biyección que completa el diagrama cuadrado de la derecha.

b) La aplicación  $f$  es un isomorfismo de grafos  $f: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{G})$  pues si  $(x, y) \in \tilde{G}$  entonces  $x = x_{i_1, \dots, i_q}$ , y  $x_{i_2, \dots, i_q}$  y por tanto  $(f(x), f(y)) \in \hat{G}$  ya que  $f(x)$  es el camino  $x_{i_1} \dots x_{i_q}$  y  $f(y)$  es el camino  $x_{i_2} \dots x_{i_q}$ . Recíprocamente, si  $(f(x), f(y)) \in \hat{G}$  entonces es obvio que  $(x, y) \in \tilde{G}$ .

c) La biyección  $g: \tilde{E} \rightarrow \hat{E}$  es un isomorfismo de órdenes, pues  $g$  asigna a cada elemento de  $\tilde{E}$ , que es una sucesión creciente de elementos de  $E$ , el subconjunto naturalmente ordenado de  $E$  formado por los elementos de dicha sucesión y los órdenes que se consideran son lexicográficos.

Observación 2.3.21

Nótese que el punto  $x_{i_1 \dots i_q}$  de  $\tilde{X}$  se corresponde con el camino  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}$  de  $C^M(X,G) = \hat{X}$ . Por otro lado, por la explosión, un punto no maximal de  $(X,G)$  da lugar a un nuevo punto en el explotado por cada uno de los caminos con fin maximal en  $(X,G)$  que parten de él. Finalmente en el apartado b) de la proposición anterior se indican cuáles son los arcos en el explotado.

El apartado b) del teorema 2.3.16 nos dice cómo las etiquetas del nivel  $\tilde{N}_0$  de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  describen el grafo de partida  $(X,G)$ . Cabe preguntarse: ¿Bajo qué condiciones una colección de etiquetas definen un grafo reducido  $(X,G)$ ? Lo que, una vez precisado el etiquetado de  $\tilde{X}$  por el conjunto de etiquetas  $\hat{E}$  y la biyección  $\hat{x}: \hat{E} \rightarrow \hat{X}$  (salvo el isomorfismo  $f$  de la proposición 2.3.20), puede formularse en los siguientes términos: ¿cuándo  $A \subset \mathcal{P}(E)$  representa o define un grafo reducido, siendo  $A$  el conjunto de etiquetas de los puntos minimales del explotado de dicho grafo?

La respuesta debe buscarse interpretando las etiquetas  $A \in \mathcal{P}(E)$  como los caminos maximales del grafo no explotado.

Teorema 2.3.22.- (Determinación de un grafo por etiquetas)

Sea  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $A \subset \mathcal{P}(E)$ . Supondremos que  $\forall A \in A$ ,  $A$  está ordenado naturalmente. Entonces:

$A$  determina un grafo reducido  $(X,G)$ , siendo  $A$  el conjunto de etiquetas de los puntos minimales de su explotado  $(\tilde{X},\tilde{G})$  si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

$$a) E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

b) Si  $p$  es el primer elemento de  $A$  y  $p \in B$  con  $B \in \mathcal{A}$  entonces  $p$  es el primer elemento de  $B$ .

Si  $m$  es el último elemento de  $A$  y  $m \in B$  con  $B \in \mathcal{A}$  entonces  $m$  es el último elemento de  $B$ .

c) Si  $p, q \in A$  tal que  $q$  no es el siguiente de  $p$  en  $A$  y  $p, q \in B$  con  $B \in \mathcal{A}$  entonces  $q$  no es el siguiente de  $p$  en  $B$ .

En este caso  $X = E$  y  $(p, q) \in G \iff \exists A$  con  $p, q \in A$  tal que  $q$  es el siguiente de  $p$  en  $A$ .

En efecto, las tres condiciones a), b) y c), son claramente necesarias.

Para la condición suficiente veamos que  $\mathcal{A}$  se puede interpretar como una colección de caminos maximales de un grafo  $(X,G)$ .

La notación conjuntista y el orden natural en cada  $A$  permite interpretar a éste como un camino (sucesión inyectiva).

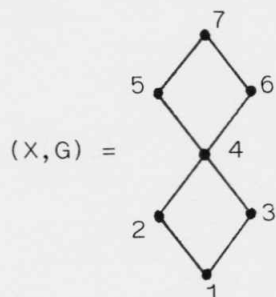
La condición b) hace maximales a los caminos (todos empiezan en el nivel  $N_0$  y acaban en un punto maximal).

La condición c) impone la reducción del grafo. (El grafo es acíclico por el orden natural en los  $A$ ).

### Observación 2.3.23

En las condiciones del teorema anterior  $\mathcal{A}$  no representa todos los caminos maximales de  $(X,G)$ .  $\mathcal{A}$  solamente contiene una colección

de caminos maximales suficiente para "cubrir" a G. Por ejemplo,  $A = \{\{1,2,4,5,7\}, \{1,3,4,6,7\}\}$  representa al grafo:



sin embargo,  $C_0^M(X,G) = A \cup \{\{1,2,4,6,7\}, \{1,3,4,5,7\}\}$ .

En general, hay otros conjuntos de etiquetas  $A'$  que describen el mismo grafo reducido  $(X,G)$ . En cualquier caso, se puede asegurar que  $A' \subset C_0^M(X,G)$  y  $C_0^M(X,G)$ , que es el que interesa, se puede obtener a partir de  $A$  al menos de dos formas; una, construyendo  $(X,G)$  como se ha dicho en el teorema 2.3.22 y extrayendo de éste sus caminos maximales; y otra, directamente. Hacerla directamente equivale a preguntarse por una condición adicional, d), sobre  $A$  que asegurase que sus etiquetas representan a todos los caminos maximales de un grafo  $(X,G)$ . Esta condición puede ser la siguiente:

Sea  $A \subset \mathcal{P}(E)$  que, en las condiciones del teorema 2.3.23, define el grafo  $(X,G)$ . Entonces:

- d) Sea  $N_0 = \{\text{primeros elementos de los conjuntos } A \in A\}$   
 y  $M = \{\text{últimos elementos de los conjuntos } A \in A\}$

Pues bien, si  $B = \{p_1, \dots, p_m\}$  es un subconjunto naturalmente ordenado de  $E$  tal que  $p_1 \in N_0$ ,  $p_m \in M$  y  $\forall j = 1, 2, \dots, m-1, \exists A_j \in A$  con  $p_j, p_{j+1} \in A_j$  y tal que  $p_{j+1}$  es el siguiente a  $p_j$  en  $A_j$ , entonces  $B \in A$ .

Se llega así al siguiente teorema:



Teorema 2.3.24.- (Caracterización de conjuntos de etiquetas de grafos reducidos)

Sea  $E = \{1,2,\dots,n\}$  y  $A$  un subconjunto de partes (naturalmente ordenadas) de  $E$  tal que se verifican para él las propiedades a), b), c) y d). Entonces, existe un, y sólo un, grafo reducido  $(X,G)$  con  $\text{Card}(X) = n$  y un, y sólo un, etiquetado,  $\underline{x}:E \rightarrow X$ , de  $X$  por  $E$  tal que  $(X,G)$  está  $E$ -ordenado y tal que  $A$  es el conjunto de etiquetas del nivel  $N_0$  de su  $\pi$ -explotado.

En efecto, según lo anterior es suficiente ver que todo camino que empieza en el nivel  $N_0$  del grafo construido en el teorema 2.3.22, y acaba en un maximal "es" un elemento de  $A$ . Sea  $B$  el conjunto naturalmente ordenado correspondiente a un tal camino. Es claro que  $B$  satisface las condiciones de d), por tanto se tiene  $B \in A$ .

En todo lo anterior, la colección de etiquetas  $\hat{E}$  y la colección de etiquetas  $A$  de los puntos minimales del  $\pi$ -explotado se han determinado en función de un etiquetado de  $X$  por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  de tal manera que  $X$  está naturalmente ordenado. En la prueba de la proposición 2.2.5, que caracteriza grafos acíclicos por la condición  $(x_i, x_j) \in G \implies i < j$ , y que, por tanto, muestra la existencia de  $E$ -órdenes, se veía de hecho que dichos  $E$ -órdenes se podrían conseguir de una manera concreta: Si  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$  es la descomposición en niveles del grafo reducido  $(X,G)$ , entonces se asignan las etiquetas  $\{1,2,\dots,n_0\}$ , siendo  $n_0 = \text{Card}(N_0)$ , a los puntos de  $N_0$ ; las etiquetas  $\{n_0+1,\dots,n_0+n_1\}$ , siendo  $n_1 = \text{Card}(N_1)$ , a los puntos de  $N_1$ ; etc. Es obvio, que un etiquetado de este tipo es un orden natural sobre  $(X,G)$  pero, en general, el recíproco no es cierto.

Definiciones 2.3.25

Sea  $E$  un conjunto finito totalmente ordenado.

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$ , con  $X$  etiquetado por  $E$ , por  $\underline{x}: E \rightarrow X$ ,  $\underline{x}(i) = x_i$ , un grafo  $E$ -ordenado. Y sea  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$ , con  $k = \dim(X,G)$ , la descomposición en niveles.

Diremos que el grafo  $(X,G)$  está  $E$ -ordenado por niveles si y sólo si  $x_i \in N_p$ ,  $x_j \in N_q$  con  $p < q$  entonces  $i < j$ .

En el caso particular  $E = \{1,2,\dots,n\}$  diremos que  $(X,G)$  está naturalmente ordenado por niveles. Ahora podemos precisar más:

En las condiciones anteriores  $(X,G)$  está naturalmente ordenado por niveles si y sólo si  $\sum_{r=0}^{p-1} n_r < i \leq \sum_{r=0}^p n_r$ , siendo  $n_r = \text{Card}(N_r)$ , para cada  $x_i \in N_p$ ,  $i \in E$ , y para cada  $p = 0, \dots, k$  (entiéndase  $\sum_{r=0}^{p-1} n_r = 0$  cuando  $p=0$ ).

Los etiquetados del grafo de la siguiente figura dan lugar, ambos, a órdenes naturales siendo el primero de ellos un orden natural por niveles, mientras que el segundo no lo es.



Supongamos que  $E = \{1,2,\dots,n\}$  y que el conjunto  $A \subset \mathcal{P}(E)$  verifica las propiedades a), b), c) y d). Entonces,  $\forall i \in E$  llamaremos longitud de  $i$ , y lo denotaremos por  $l(i)$ , al máximo de los lugares que  $i$  ocupa en los conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  que lo contienen. Es claro que el conjunto  $A$  determina un grafo naturalmente ordenado en el que se verifica que  $x_i \in N_p \iff l(i) = p$ .

Teorema 2.3.26.-(Caracterización de etiquetas ordenadas por longitudes)

Sea  $E = \{1,2,\dots,n\}$  y  $A \subset \mathcal{P}(E)$ , con cada  $A \in \mathcal{A}$  naturalmente ordenado.  $\mathcal{A}$  es la colección de etiquetas de los puntos minimales del explotado de un grafo reducido naturalmente ordenado por niveles si, y sólo si,  $\mathcal{A}$  verifica las propiedades a), b), c), d) y e)  $l(i) < l(j) \Rightarrow i < j$ .

En efecto, después del teorema 2.3.24 basta tener en cuenta que la igualdad de longitudes entre los puntos de  $X$  es la relación de equivalencia asociada a la partición en niveles de  $X$ , así

$$x_i \in N_p \iff \text{long}(x_i) = p \quad (\text{ver definición 2.2.4})$$

Los teoremas anteriores permiten rescatar un grafo no-etiquetado a partir de una colección de etiquetas en su  $\pi$ -explotado, sin embargo, el mismo grafo no-etiquetado tendrá, en general, asignados varios de estos conjuntos de etiquetas ya que, en general, existe más de un orden natural sobre un grafo y, más aun, más de un orden natural por niveles. El número de posibles órdenes naturales, órdenes naturales por niveles, o de colecciones de etiquetas según los dos teoremas anteriores se puede estudiar aritméticamente como indicamos a continuación.

Sea  $E = \{1,2,\dots,n\}$  y  $A \subset \mathcal{P}(E)$  verificando las propiedades a), b), c) y d) y sea  $(X,G)$  el grafo no-etiquetado asociado. Denotaremos por  $S_n$  el grupo de las permutaciones de  $E$ . Sea  $B$  el subgrupo de  $S_n$  formado por las permutaciones  $b:E \rightarrow E$  tales que para todo  $A \in \mathcal{A}$  se tiene que si  $A = \{i_1 < \dots < i_q\} \in \mathcal{A}$  entonces  $b(i_1) < \dots < b(i_q)$ . Sea  $B_0 \subset B$  el subgrupo de  $B$  formado por aquellas permutaciones  $b \in B$

tales que  $b(A) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3.27

1) El número de órdenes naturales sobre el grafo no-etiquetado  $(X,G)$  es igual al cardinal de  $B$ .

2) El grupo de automorfismos del grafo no-etiquetado  $(X,G)$  es isomorfo al grupo  $B_0$ . En particular,  $\text{Card}(\text{Aut}(X,G)) = \text{Card}(B_0)$ .

3) El número de colecciones de  $\mathcal{P}(E)$  con las propiedades a), b), c) y d) que determinan el grafo no etiquetado  $(X,G)$  es igual a  $\text{Card}(B)/\text{Card}(B_0)$ .

En efecto, es obvio que si  $\underline{x}:E \rightarrow X$  es un etiquetado que proporciona un orden natural sobre  $(X,G)$  y si  $b \in B$  entonces  $\underline{x} \circ b: E \rightarrow X$  es de nuevo un etiquetado que proporciona un orden natural sobre  $(X,G)$ . Recíprocamente, si  $\underline{x}:E \rightarrow X$ ,  $\underline{x}':E \rightarrow X$  son dos etiquetados que proporcionan órdenes naturales sobre  $(X,G)$  entonces la biyección  $b:E \rightarrow E$  dada por  $b = \underline{x}^{-1} \circ \underline{x}'$  es un elemento de  $B$ . Por tanto, fijada la colección  $\mathcal{A}$  con las propiedades a), b), c) y d) y el etiquetado asociado  $\underline{x}:E \rightarrow X$  (que da lugar a un orden natural sobre  $(X,G)$ ), entonces la correspondencia que a cada orden natural  $\underline{x}':E \rightarrow X$  le asocia el elemento de  $B$ ,  $\underline{x}^{-1} \circ \underline{x}'$  es una biyección. Esto prueba el apartado 1).

El apartado 2) se deduce del hecho de que si  $\underline{x}:E \rightarrow X$  es el etiquetado de  $(X,G)$  correspondiente a la colección  $\mathcal{A}$ , entonces cada automorfismo  $\sigma: (X,G) \rightarrow (X,G)$  determina una biyección  $b:E \rightarrow E$  con la propiedad  $b \in B$  y  $b(A) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ . Recíprocamente, si  $b \in B$

es una permutación con la propiedad  $b(A) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$  entonces  $b$  determina una biyección  $\sigma: X \rightarrow X$  que es, claramente, un automorfismo cuando se considera como aplicación entre grafos  $\sigma: (X, G) \rightarrow (X, G)$ . Puesto que a la composición de dos automorfismos le corresponde la composición de las permutaciones homólogas se tiene que los grupos  $\text{Aut}(X, G)$  y  $B_0$  son isomorfos.

Para probar el apartado 3) basta tener en cuenta que si  $C = \{A \subset \mathcal{P}(E) \text{ que verifican las propiedades a), b), c) y d) y que determinan el mismo grafo } (X, G)\}$ , entonces el grupo  $B$  actúa transitivamente sobre  $C$  y, por tanto, dicha acción tiene una única órbita  $C$ . El grupo de isotropía del elemento  $A \in C$  es  $B_0$ , por lo que  $\text{Card}(C) \cdot \text{Card}(B_0) = \text{Card}(B)$ .

Si se consideran órdenes naturales por niveles se puede probar una proposición similar a la anterior.

Sea, ahora,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$  verificando las propiedades a), b), c), d) y e) y sea  $(X, G)$  el grafo no-etiquetado asociado a  $\mathcal{A}$ . Sea  $C$  el subgrupo de  $S_n$  formado por aquellos  $b \in S_n$  tales que  $\forall A \in \mathcal{A}$ , si  $A = \{i_1 < \dots < i_q\}$  se tiene  $b(i_1) < \dots < b(i_q)$  y además  $\forall i \in E$ ,  $l(i) = l(b(i))$ . Y sea  $C_0$  el subgrupo de  $C$  formado por aquellos  $b \in C$  tales que  $b(A) \in \mathcal{A}$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ . Entonces se tiene:

#### Proposición 2.3.28

1) El número de órdenes naturales por niveles sobre el grafo no-etiquetado  $(X, G)$  es igual al Cardinal de  $C$ .

2) Los grupos  $\text{Aut}(X, G)$  y  $C_0$  son isomorfos. En particular,  $\text{Card}(\text{Aut}(X, G)) = \text{Card}(C_0)$ .

3) El número de colecciones de  $\mathcal{P}(E)$  con las propiedades a), b), c), d) y e) que determinan el mismo grafo no-etiquetado  $(X,G)$  es igual a  $\text{Card}(C)/\text{Card}(C_0)$ .

La demostración es idéntica a la de la proposición anterior.

Observación 2.3.29

Si  $X = \bigcup_{r=0}^k N_r$  es la descomposición en niveles del grafo no etiquetado  $(X,G)$  y si  $n_p = \text{Card}(N_p)$  entonces se tiene, obviamente, que  $C$  es isomorfo al grupo  $S_{n_0} \times \dots \times S_{n_k}$  y, en particular,  $\text{Card}(C) = n_0! \dots n_k!$

2.4. PROPIEDAD UNIVERSAL DE LA EXPLOSION. APLICACIONES Y MORFISMOS BIRRACIONALES

Si  $(X,G)$  es un grafo reducido, el procedimiento seguido en la sección anterior nos indica que el grafo explotado  $(\tilde{X},\tilde{G})$  y el morfismo explosión  $\pi:(\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  no dependen de las etiquetas de  $X$ , es decir, a partir de  $(X,G)$  se puede construir directamente el grafo  $(\tilde{X},\tilde{G})$  junto con el morfismo de grafos  $\pi$ . Es claro, también, que los grafos intermedios  $(X_i,G_i)$ , obtenidos explotando niveles sucesivos, y los morfismos parciales  $\pi_i$  se pueden construir del mismo modo a partir de grafos no etiquetados. En esta sección consideraremos los grafos libres de etiquetas.

En primer lugar indicaremos que el grafo reducido  $(\tilde{X},\tilde{G})$  es un bosque en el sentido que se precisa a continuación.

Definición 2.4.1

Diremos que el grafo  $(X,G)$  es un árbol si cumple alguna de las condiciones equivalentes:

- a)  $(X,G)$  es acíclico y existe  $y \in X$  tal que  $Og(y) = 0$  y  $\forall x \neq y, Og(x) = 1$ .
- b)  $(X,G)$  es conexo y existe  $y \in X$  tal que  $Og(y) = 0$  y  $\forall x \neq y, Og(x) = 1$ .
- c) En  $(X,G)$  existe  $y \in X$  tal que  $Og(y) = 0$  y  $\forall x \neq y$  existe un único camino  $x_1, \dots, x_q$  con  $x_1 = x, x_q = y$ .

Al punto  $y$  le llamaremos máximo o maximal del árbol. Nótese que dicho punto es único y que un árbol es un grafo reducido.

Diremos que el grafo  $(X,G)$  es un bosque si cada una de sus componentes conexas es un árbol.

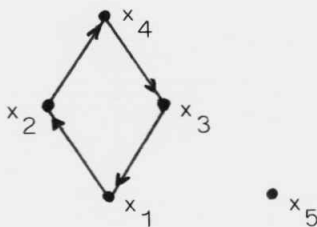
NOTA: Algunos autores llaman "arborescencia" y "ramificación" a lo que aquí hemos llamado "árbol" y "bosque" respectivamente; reservando estos nombres para los conceptos homólogos en grafos no-dirigidos. Estos autores suelen utilizar el término "raíz" para designar a nuestro maximal; también hablan de "árbol con raíz". |K.1| y |B.1|.

Demostración de la equivalencia:

$a \Rightarrow b$  y  $a \Rightarrow c$

Si  $x \neq y$ , como  $Og(x) = 1$  existe  $x_1 \in X$  con  $(x, x_1) \in G$ . Si  $x_1 = y$ , el camino  $xx_1$  conecta  $x$  con  $y$ . Si  $x_1 \neq y$ , existe  $x_2 \in X$  tal que  $(x_1, x_2) \in G$ . Si  $x_2 = y$ , el camino  $xx_1x_2$  conecta  $x$  con  $y$ . Si  $x_2 \neq y$  se continúa el proceso. Como el grafo es acíclico, cada uno de los puntos  $x_1, x_2, x_3, \dots$  es distinto de todos sus anteriores y como el grafo es finito alguno de ellos es necesariamente  $y$ , lo que prueba que el grafo es conexo y que existe un camino  $xx_1 \dots x_r y$ . La unicidad de este camino se desprende de que  $Og(x) = 1$  y  $Og(x_i) = 1$ .

Las condiciones "acíclico" y "conexo" son ineludibles; el grafo



cumple la condición  $Og(x_5) = 0$  y  $Og(x_i) = 1$ , para  $i=1,2,3,4$ .

$b \Rightarrow a$

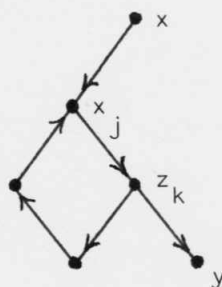
Si existe un ciclo  $x_1x_2 \dots x_m x_1$ , todos sus puntos tienen out-grado 1 luego  $y$  no está entre ellos.

Sea  $c(y) = \{x \mid \text{existe un camino } z_1 \dots z_r \text{ con } x=z_1, y=z_r\}$ .

Se tiene  $c(y) \neq \emptyset$ , pues estamos en un grafo conexo, y  $Og(y) = 0$ . El



ciclo y  $c(y)$  son disjuntos, pues si tuvieran un punto común  $x_j$ , entonces existiría un camino  $z_1 \dots z_r$  con  $x_j = z_1$  y  $y = z_r$ . Como  $y$  no está en el ciclo, entonces existe un punto  $z_k$ , común al ciclo y al camino, tal que  $z_{k+1}$  no está en el ciclo y por tanto  $Og(z_k) \geq 2$ . Luego  $(X,G)$  no es conexo.



c  $\Rightarrow$  b

$Og(x) = 1, \forall x \neq y$  pues, en caso contrario, o no habría camino  $x_1 \dots x_r$  con  $x_1 = x, x_r = y$  (si  $Og(x) = 0$ ) o habría más de un tal camino (si  $Og(x) > 1$ ).

Como todos los puntos de  $X$  se conectan con  $y$  por medio de un camino, el grafo es conexo.

Después de esta definición y de los resultados obtenidos anteriormente podemos afirmar que:

Proposición 2.4.2

a) Si  $(X,G)$  es un grafo reducido, entonces su explotado  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es un bosque con  $m$  árboles, siendo  $m = \text{Card}(M)$  y  $M$  el conjunto de maximales de  $(X,G)$ .

b)  $(X,G)$  es un bosque si y sólo si  $(X,G)$  es un grafo reducido isomorfo a su explotado.

En efecto, para probar b) obsérvese que si  $(X,G)$  es un bosque entonces es un grafo reducido sin puntos singulares por lo

que su explotado es él mismo. Recíprocamente, un grafo reducido  $(X,G)$  isomorfo a su explotado es necesariamente un grafo reducido sin puntos singulares (pues la explosión en un punto singular aumenta el número de puntos) y esto es, según la definición, un bosque.

#### Observación 2.4.3

Como consecuencia del resultado anterior los bosques son precisamente aquellos grafos reducidos que no tienen puntos singulares en el sentido de la definición 2.3.1. El proceso de explosiones sucesivas por niveles muestra como la explosión del nivel  $N_0$  elimina los puntos singulares del nivel  $N_0$ , a continuación la explosión del nivel  $N_1$  elimina los puntos singulares de este nivel y así sucesivamente hasta llegar al grafo sin puntos singulares  $(\tilde{X},\tilde{G})$ . Desde este punto de vista, y en analogía con la geometría, al morfismo explosión  $\pi: (\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  se le puede llamar desingularización y al grafo  $(\tilde{X},\tilde{G})$  el desingularizado de  $(X,G)$ . La proposición anterior nos dice entonces que un grafo reducido es un bosque si y sólo si coincide con su desingularizado. (Son iguales como grafos no-etiquetados).

A continuación establecemos una propiedad universal que satisface la desingularización de un grafo reducido. Para ello necesitaremos el concepto de morfismo dominante que introducimos a continuación:

#### Definición 2.4.4

Sean  $(X,G)$  y  $(X',G')$  dos grafos reducidos y  $\psi: (X,G) \rightarrow (X',G')$  un morfismo de grafos. Sean  $M$  y  $M'$ , respectivamente, los conjuntos

de puntos maximales de  $(X,G)$  y  $(X',G')$ .

Diremos que  $\psi$  es un morfismo dominante si  $\forall x \in M$  se tiene  $\psi(x) \in M'$ .

Observación 2.4.5

a) La terminología "morfismo dominante" es análoga a la correspondiente geométrica ya que los puntos  $x \in M$  ( $x' \in M'$ ) son los puntos genéricos de las componentes irreducibles (cerrados irreducibles maximales) del espacio topológico  $T_0$  asociado al grafo reducido  $(X,G)$  (respectivamente  $(X',G')$ ). Que el morfismo  $\psi$  sea dominante es equivalente a que  $\psi$  transforme puntos genéricos de componentes irreducibles de  $(X,G)$  en puntos genéricos de componentes irreducibles de  $(X',G')$ .

b) La explosión de un grafo reducido y la explosión del nivel  $N_p$  de un grafo reducido con nivel  $N_p$  permisible son ejemplos de morfismos dominantes.

c) Si  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  y  $\psi:(X',G') \rightarrow (X'',G'')$  son morfismos dominantes de grafos reducidos, entonces

$\psi \circ \psi:(X,G) \rightarrow (X'',G'')$  es un morfismo dominante.

Teorema 2.4.6

Sea  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  un morfismo dominante de grafos reducidos y sean  $\pi:(\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  y  $\pi':(\tilde{X}',\tilde{G}') \rightarrow (X',G')$  las desingularizaciones respectivas de  $(X,G)$  y  $(X',G')$ . Entonces, existe un único morfismo dominante de grafos  $\tilde{\psi}:(\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}',\tilde{G}')$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, G) & \xrightarrow{\psi} & (X', G') \\
 \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\
 (\tilde{X}, \tilde{G}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (\tilde{X}', \tilde{G}')
 \end{array}$$

La demostración se sigue del hecho de que los puntos del grafo explotado se corresponden con los caminos con fin maximal del grafo de partida. Así, para construir  $\tilde{\psi}$ , nótese que si "c" es punto de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  que representa un camino con fin maximal,  $x_1 x_2 \dots x_q$ , en  $(X, G)$  entonces, puesto que  $\psi$  es un morfismo de grafos y por tanto  $(\psi(x_i), \psi(x_{i+1})) \in G'$  o  $\psi(x_i) = \psi(x_{i+1})$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq q-1$ , eliminando los elementos repetidos de la sucesión  $\psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_q)$  se obtiene un camino en  $(X', G')$  cuyo fin  $\psi(x_q)$  es maximal al ser  $\psi$  dominante. El camino con fin maximal  $\psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_q)$  en  $(X', G')$  está representado por un punto  $c'$  de  $(\tilde{X}', \tilde{G}')$ . Haremos, entonces,  $\tilde{\psi}(c) = c'$ .

De esta manera  $\tilde{\psi}$  aplica "caminos con fin maximal de  $(X, G)$ " en "caminos con fin maximal de  $(X', G')$ ". (En realidad la aplicación es entre puntos que representan a estos caminos).

La aplicación  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  es, por construcción, un morfismo. Es claro, también por construcción que el diagrama del enunciado es conmutativo y que el morfismo  $\tilde{\psi}$  es dominante.

Probaremos ahora la unicidad de  $\tilde{\psi}$ . Sea  $\Psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  otro morfismo tal que  $\psi \circ \pi = \pi' \circ \Psi$ . Sea  $c \in \tilde{X}$  que representa al camino  $x_1 x_2 \dots x_q$  de  $(X, G)$ . Si  $q=1$  entonces  $\psi \circ \pi(c) = \psi(x_q) = \pi' \circ \Psi(c) = \Psi(c)$  y como también  $\psi \circ \pi = \pi' \circ \tilde{\psi}$  entonces  $\psi(x_q) = \tilde{\psi}(c)$  luego  $\Psi(c) = \tilde{\psi}(c)$ . Si  $q > 1$ , sea  $d \in \tilde{X}$  el punto que representa al camino  $x_2 \dots x_q$  de  $(X, G)$ ,

en cuyo caso, por hipótesis de inducción  $\Psi(d) = \tilde{\Psi}(d)$ .

Como  $(c,d) \in \tilde{G}$  entonces  $(\Psi(c), \Psi(d)) \in \tilde{G}'$  o bien  $\Psi(c) = \Psi(d)$  y  $\Psi(c)$  representa el camino con fin maximal  $a.\Psi(x_2) \dots \Psi(x_q)$  (pues  $\Psi(d) = \tilde{\Psi}(d)$ ). Como por otro lado  $\Psi \circ \pi(c) = \pi' \circ \Psi(c) = \psi(x_1)$  entonces  $\Psi(c)$  representa un camino que empieza en  $\psi(x_1)$  y por tanto  $\Psi(c)$  representa al camino  $\psi(x_1).\Psi(x_2) \dots \Psi(x_q)$ , es decir  $\Psi(c) = c' = \tilde{\Psi}(c)$ .

Corolario 2.4.7.- (Propiedad universal de la explosión)

Sea  $(X,G)$  un grafo reducido y  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  su explosión. Entonces, para todo bosque  $(Z,H)$  y todo morfismo dominante  $\psi: (Z,H) \rightarrow (X,G)$  existe un único morfismo  $\psi': (Z,H) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{G})$  tal que  $\pi \circ \psi' = \psi$ . El morfismo  $\psi'$  es también dominante.

El resultado se obtiene del teorema anterior sin más que tener en cuenta que  $(Z,H) = (\tilde{Z}, \tilde{H})$ , al tratarse de un bosque, y que su desingularización es la identidad:

El diagrama se escribiría ahora:

$$\begin{array}{ccc}
 (Z,H) & \xrightarrow{\psi} & (X,G) \\
 \uparrow \text{Id} & & \uparrow \pi \\
 (\tilde{Z}, \tilde{H}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (\tilde{X}, \tilde{G})
 \end{array}$$

y en consecuencia en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (Z,H) & \xrightarrow{\psi} & (X,G) \\
 & \searrow \tilde{\psi} & \uparrow \pi \\
 & & (\tilde{X}, \tilde{G})
 \end{array}$$

basta hacer  $\tilde{\psi} = \psi'$  para obtener  $\pi \circ \psi' = \psi$ .

Observación 2.4.8

Los resultados anteriores presentan propiedades análogas de los grafos con las curvas algebraicas. Si  $\psi: C \rightarrow C'$  es un morfismo

dominante de curvas algebraicas (singulares en general) y  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ ,  $\pi': \tilde{C}' \rightarrow C'$  son sus respectivas desingularizaciones, entonces existe un único morfismo  $\tilde{\psi}: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$  tal que  $\psi \circ \pi = \pi' \circ \tilde{\psi}$ . El modelo no singular  $\tilde{C}$  de una curva  $C$  cumple la propiedad universal análoga a la del corolario anterior y se obtiene o bien componiendo las explosiones en los sucesivos puntos singulares o bien directamente normalizando la curva. Para el desingularizado de un grafo reducido  $(X, G)$  se tienen también dos formas de obtener  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ : componiendo explosiones en puntos singulares (respetando el orden de los niveles) o tomando el grafo de las cadenas con fin maximal.

En geometría se manejan también aplicaciones racionales y muy especialmente las aplicaciones birracionales. Una aplicación racional  $z: C \rightarrow C'$  entre dos curvas  $C$  y  $C'$  está determinada por una aplicación regular (morfismo algebraico)  $V \rightarrow C'$  donde  $V$  es un abierto no vacío de  $C$ . La aplicación racional  $z$  es dominante cuando lo sea el morfismo  $V \rightarrow C'$ . Para cada  $p \in C$  la aplicación racional  $z$  determina su imagen  $z[p]$  que es un subconjunto finito de  $C'$ . Se tiene  $\text{Card } z[p] \geq 1, \forall p \in C$  y  $\text{Card } z[p] = 1, \forall p \in V$  donde  $V$  es el máximo abierto para el que existe un morfismo  $V \rightarrow C'$  que determina  $z$ . Los puntos de  $C-V$  se llaman puntos de indeterminación de  $z$ .

Para eliminar los puntos de indeterminación se utilizan las desingularizaciones. Así se tiene que si  $Z: C \rightarrow C'$  es una aplicación racional dominante existe un único morfismo (dominante)  $\tilde{\psi}: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$  tal que  $\pi' \circ \tilde{\psi} = Z \circ \pi$ . Recíprocamente, todo morfismo dominante entre las curvas desingularizadas induce una aplicación racional dominante entre las curvas  $C$  y  $C'$ .

Las observaciones anteriores permiten establecer el análogo de las aplicaciones racionales entre grafos reducidos.

Definición 2.4.9

Llamaremos aplicación racional dominante entre dos grafos reducidos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  a todo morfismo dominante entre sus desingularizados  $\Psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$ . Una aplicación racional dominante define una correspondencia  $Z: (X,G) \rightarrow (X',G')$  como sigue: Si  $x \in X$ , entonces  $Z[x]$  es el conjunto de puntos de  $X'$  que son extremos iniciales de algún camino  $\Psi(x_1 x_2 \dots x_q)$  siendo  $x_1 x_2 \dots x_q$  un camino con fin maximal en  $(X,G)$  y con  $x_1 = x$ . Dicho de otra manera, puesto que  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  y  $\pi': (\tilde{X}', \tilde{G}') \rightarrow (X',G')$  llevan cada camino con fin maximal en su punto inicial, si llamamos, para cada  $x \in X$ ,  $\pi^{-1}(x) = \{\text{caminos de } (X,G) \text{ con fin maximal, que empiezan en } x\}$  entonces  $Z[x] = \pi' \circ \Psi[\pi^{-1}(x)]$ . Obsérvese el diagrama

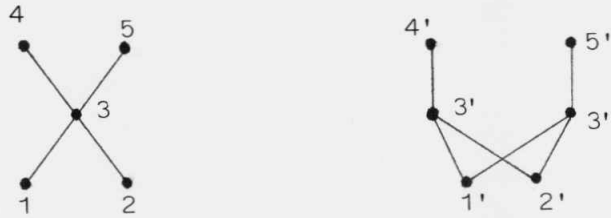
$$\begin{array}{ccc}
 (X,G) & \xrightarrow{Z} & (X',G') \\
 \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\
 (\tilde{X}, \tilde{G}) & \xrightarrow{\Psi} & (\tilde{X}', \tilde{G}')
 \end{array}$$

Se tiene  $\text{Card } Z[x] \geq 1, \forall x \in X$  y llamaremos puntos de indeterminación de  $Z$  a los puntos  $x \in X$  para los que  $\text{Card } Z[x] > 1$ .

Los puntos maximales no son puntos de indeterminación por lo que el conjunto  $A = \{x \in X, \text{Card } Z[x] = 1\}$ , sobre el que  $Z$  define una verdadera aplicación, contiene a  $M$ . Si se toma la topología  $T_0$  asociada al grafo  $(X,G)$  se tiene que  $M$  es abierto denso y de aquí que  $A$  contiene a un abierto denso.

Observación 2.4.10

Una misma correspondencia  $Z: (X,G) \rightarrow (X',G')$  puede provenir de dos aplicaciones racionales distintas como se indica en el ejemplo de la figura:



Aquí la correspondencia  $Z$  dada por  $Z[5] = 5'$ ,  $Z[4] = 4'$ ,  $Z[3] = \{3', 3''\}$ ,  $Z[1] = Z[2] = \{1', 2'\}$  es la correspondencia entre puntos asociada a dos aplicaciones racionales distintas entre  $(X, G)$  y  $(X', G')$  ya que los puntos 1 y 2 tienen la misma imagen y existe un automorfismo de  $(X, G)$  que deja fijos los puntos 3, 4, 5 e intercambia 1 por 2; automorfismo que se levanta a  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . (Nótese que ambos grafos tienen el mismo desingularizado).

La caracterización de las aplicaciones racionales dominantes en términos de los grafos  $(X, G)$ ,  $(X', G')$  y no de sus desingularizados se puede hacer aunque en este caso es necesario referirse también a los caminos con fin maximal. En efecto, si  $\psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  es un morfismo dominante, y por tanto una aplicación racional, asociado a cada cadena con fin maximal  $c = x_1 x_2 \dots x_q$  en  $(X, G)$  hay un elemento determinado  $Z(c) \in Z[x_1]$  y, recíprocamente, cada elemento de  $Z[x_1]$  es de la forma  $Z(c)$  para alguna cadena con fin maximal que comienza en  $x_1$ . Por otro lado, si  $(x_0, x_1)$  es un arco de  $G$  entonces la cadena  $b = x_0 x_1 x_2 \dots x_q$ , siendo  $c = x_1 x_2 \dots x_q$ , cumple que  $Z(b) = Z(c)$  o bien  $(Z(b), Z(c)) \in G'$ . Estas propiedades caracterizan a las aplicaciones racionales dominantes como mostramos a continuación.

Teorema 2.4.11

Sean  $(X, G)$  y  $(X', G')$  dos grafos reducidos y sea  $Z$  una correspondencia entre ellos de forma que a cada  $x \in X$  le asigna el conjunto  $Z[x] \subset X'$  y a cada camino  $c = x_1 x_2 \dots x_q$  con fin maximal le asigna



un elemento  $Z(c) \in Z[x_1]$ .

Si la correspondencia  $Z$  verifica las condiciones:

1)  $\forall x \in X, \text{Card } Z[x] \geq 1$  y  $\forall x \in M, \text{Card } Z[x] = 1$  y  $Z[x] \in M$ .

2) Todo elemento de  $Z[x]$  es del tipo  $Z(c)$  para algún camino con fin maximal  $c$  que comienza en  $x$ .

3) Si  $(x_0, x_1) \in G$  y designamos por  $b$  y  $c$ , respectivamente, a las cadenas con fin maximal  $x_0 x_1 \dots x_q$  y  $x_1 \dots x_q$  entonces  $Z(b) = Z(c)$  o bien  $(Z(b), Z(c)) \in G'$ ,

Entonces, existe una única aplicación racional dominante  $\Psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  que induce la correspondencia  $Z$ , es decir los valores  $Z[x]$  y  $Z(c)$  dados inicialmente.

En efecto, las asignaciones  $Z(c)$  dadas y la propiedad 3) permiten construir un morfismo dominante de grafos  $\psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X', G')$  y el Corolario 2.4.7 nos levanta el morfismo  $\psi$  a un morfismo (único) dominante entre sus desingularizados  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$ . La aplicación racional buscada es, entonces,  $\Psi = \tilde{\psi}$ .

Por otro lado, como todo morfismo dominante  $\psi: (X, G) \rightarrow (X', G')$  induce un morfismo dominante entre sus desingularizados  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  se puede decir que los morfismos dominantes entre sus grafos reducidos son un caso particular de aplicaciones racionales dominantes. De hecho los morfismos dominantes son exactamente aquellas aplicaciones racionales dominantes sin puntos de indeterminación, de forma que  $\forall x \in X, \text{Card } Z[x] = 1$ . Nótese que, en este caso, la asignación  $Z(c)$  es el único elemento de  $Z[x]$  por lo que no es necesario indicarla.

Observación 2.4.12

Si  $(X,G)$ ,  $(X',G')$  y  $(X'',G'')$  son grafos reducidos y  $Z:(X,G) \rightarrow (X',G')$  y  $Z':(X',G') \rightarrow (X'',G'')$  son aplicaciones racionales dominantes, entonces se tiene una aplicación racional dominante  $Z' \circ Z:(X,G) \rightarrow (X'',G'')$  dada por la composición de los correspondientes morfismos dominantes entre los desingularizados.

Se tiene, de hecho, una categoría cuyos objetos son los grafos reducidos y cuyos morfismos son las aplicaciones racionales dominantes. Los isomorfismos de dicha categoría se denominarán aplicaciones birracionales. Con precisión, se tienen los siguientes conceptos:

Definición 2.4.13

Llamaremos aplicación birracional entre los grafos reducidos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  a todo isomorfismo de grafos  $\psi:(\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}',\tilde{G}')$ . Las aplicaciones birracionales que son morfismos de grafos reducidos los llamaremos morfismos birracionales.

Como los morfismos birracionales son morfismos de grafos reducidos, a la vista del teorema 2.4.6 y de la definición anterior, un morfismo birracional puede verse indistintamente como un morfismo de grafos  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  o como el isomorfismo inducido en sus desingularizados  $\tilde{\psi}:(\tilde{X},\tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}',\tilde{G}')$ .

Observación 2.4.14

Las explosiones del nivel  $N_0$  o del nivel  $N_p$ , si este es permisible, y las explosiones (totales) de un grafo reducido son ejemplos de morfismos birracionales. Las inversas de dichas explosiones (totales o parciales) no son morfismos pero sí aplicaciones birracionales.

El siguiente resultado proporciona una propiedad muy útil de los morfismos birracionales.

Proposición 2.4.15

Sean  $(X,G)$  y  $(X',G')$  grafos reducidos y  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  un morfismo birracional. Entonces se tiene:

a) La aplicación  $\psi$  es suprayectiva.

b)  $\psi$  induce una aplicación suprayectiva  $\bar{\psi}: G \rightarrow G'$  entre los conjuntos de arcos.

En efecto, si  $x' \in X'$  no fuera imagen de algún punto de  $X$  entonces cualquier camino con fin maximal que comience en  $x'$  no podría ser la imagen de ningún camino con fin maximal en  $(X,G)$  lo que contradice la biyectividad de  $\tilde{\psi}$ . Por otro lado, si  $(x,y) \in G$  entonces no puede ser  $\psi(x) = \psi(y)$ , pues se contradiría nuevamente la biyectividad de  $\tilde{\psi}$ , y, de este modo, se tiene asociado a cada arco  $(x,y) \in G$  un arco  $(\psi(x), \psi(y)) \in G'$ . Esta aplicación entre arcos,  $\bar{\psi}$ , es también suprayectiva pues si un arco  $(x',y') \in G'$  no fuere imagen por  $\bar{\psi}$  de algún arco de  $G$ , cualquier camino con fin maximal que contuviera al arco  $(x',y')$  en  $(X',G')$  no podría estar en la imagen de  $\tilde{\psi}$ .

Corolario 2.4.16

Si  $(X,G)$  y  $(X',G')$  son grafos reducidos y existen morfismos birracionales  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  y  $\psi':(X',G') \rightarrow (X,G)$ , entonces  $\psi$  y  $\psi'$  son, ambos, isomorfismos de grafos.

En efecto, la proposición anterior nos asegura que  $\text{Card}(X) \geq \text{Card}(X')$  y  $\text{Card}(X') \geq \text{Card}(X)$  y, por tanto, que  $\text{Card}(X) = \text{Card}(X')$ . Por la misma razón  $\text{Card}(G) = \text{Card}(G')$ . Si  $\psi$  y  $\psi'$  son morfismos de grafos suprayectivos entre grafos con igual número de

puntos y de arcos, entonces son isomorfismos.

Este corolario permite dar una relación de orden entre los grafos reducidos no-etiquetados que tienen igual desingularizado. Recordemos que un grafo no-etiquetado es una clase de equivalencia de grafos isomorfos.

Definición 2.4.17

Sea  $(Z,H)$  un bosque no-etiquetado y sean  $(X,G)$  y  $(X',G')$  grafos reducidos no-etiquetados que se desingularizan en  $(Z,H)$ .

Diremos que  $(X,G)$  es menor o igual que  $(X',G')$ , y escribiremos  $(X,G) \leq (X',G')$ , si existe un morfismo birracional

$$\psi: (X',G') \rightarrow (X,G).$$

Esta relación  $\leq$  es, claramente, reflexiva y transitiva y por el corolario anterior es, también, antisimétrica, por tanto el conjunto de grafos no-etiquetados que tienen a  $(Z,H)$  como desingularizado queda ordenado por  $\leq$ .

En el próximo capítulo estudiaremos este conjunto ordenado. Es obvio que tiene un elemento máximo, el propio  $(Z,H)$ , pero, en general, tendrá varios minimales. Probaremos la existencia de un grafo reducido minimal canónico con un número mínimo de puntos.

Por otro lado, a este conjunto ordenado se le puede asociar, como vimos en el capítulo anterior, un espacio topológico  $T_0$  y, por tanto, un grafo transitivo y antisimétrico y, también, su grafo reducido, teniendo todos estos objetos la misma información. La estructura de grafo reducido podría describirse cómodamente.

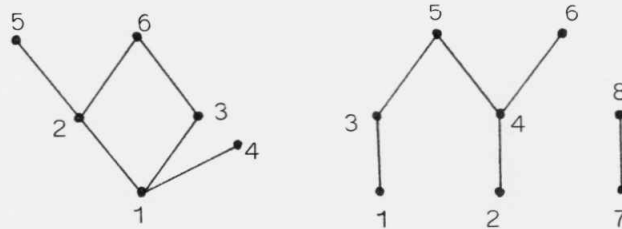
CAPITULO III

CONTRACCION DE UN BOSQUE

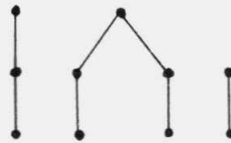
CAPITULO III

CONTRACCION DE UN BOSQUE

Grafos reducidos no-isomorfos pueden tener explotados isomorfos, como muestra el ejemplo siguiente:



tienen por explotado grafos de la misma clase de isomorfía:



La relación de isomorfismo entre grafos explotados clasifica a los grafos de procedencia. Obsérvese que en una misma clase pueden encontrarse grafos reducidos con distinto número de puntos.

Nuestro propósito en este capítulo es, por un lado, recuperar a partir del grafo explotado, un grafo reducido que se explote en él y, por otro lado, encontrar, para cada clase de grafos reducidos con igual explotado, un representante canónico con un mínimo número de puntos.

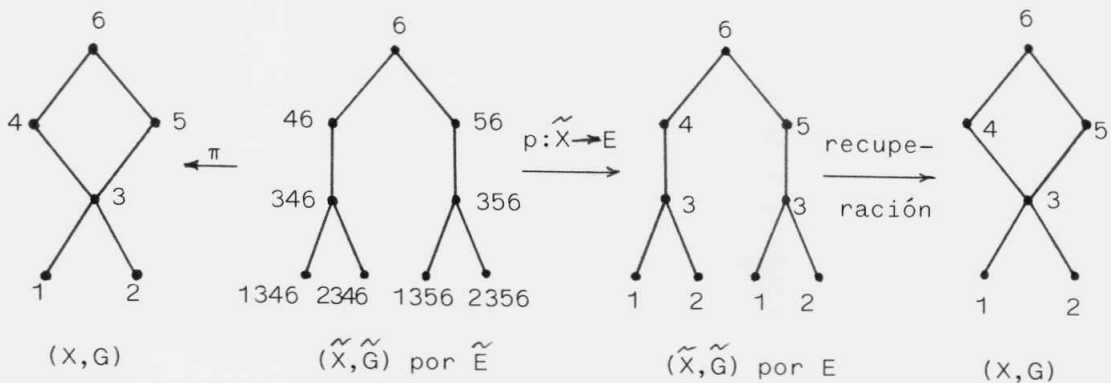
3.1. PRE-ETIQUETADO DE UN BOSQUE

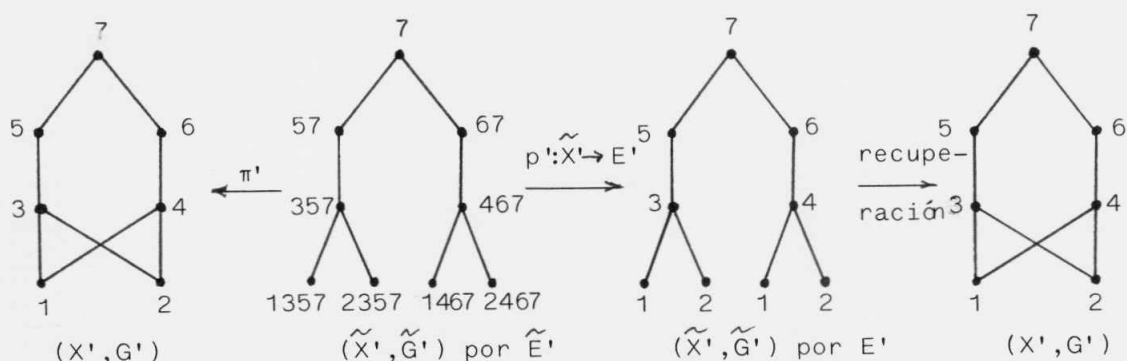
Consideremos un grafo reducido  $(X,G)$  y su explotado el bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$ . En esta sección veremos cómo un etiquetado de  $X$  induce un etiquetado de  $\tilde{X}$  por el mismo conjunto de etiquetas (al que llamaremos pre-etiquetado) a partir del cual se puede recuperar la estructura de  $(X,G)$ .

Observación 3.1.1

Si el grafo reducido  $(X,G)$  está etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  entonces <sup>los puntos</sup> del bosque explotado  $(\tilde{X},\tilde{G})$  son sucesiones (crecientes, si el grafo está naturalmente ordenado) de números naturales de  $E$ . Como  $(\tilde{X},\tilde{G})$  es un bosque, cada punto no maximal de  $\tilde{X}$  tiene un siguiente y la sucesión que representa la etiqueta de éste no es más que la sucesión que representa la etiqueta de aquel excepto el primer término. Por tanto, si asignamos a cada punto de  $\tilde{X}$  el elemento de  $E$  que es el primer término de la sucesión que representa su etiqueta queda definida una aplicación suprayectiva  $p:\tilde{X} \rightarrow E$  que determina completamente el etiquetado de  $\tilde{X}$  por  $\tilde{E}$ , y en consecuencia, el grafo reducido  $(X,G)$  es recuperable, también, a partir de  $p:\tilde{X} \rightarrow E$ .

En el ejemplo de la figura se muestra, para dos grafos reducidos etiquetados distintos,  $(X,G)$  y  $(X',G')$ , con explotados isomorfos, el efecto de la aplicación suprayectiva  $p:\tilde{X} \rightarrow E$  sobre el etiquetado del bosque y la recuperación del grafo reducido de procedencia.





La aplicación  $p: \tilde{X} \rightarrow E$  supone un cambio de "etiquetado" en el bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  que determina el etiquetado por  $\tilde{E}$ , dado que los caminos con fin maximal en un bosque son únicos, y desde el cual es recuperable el grafo de procedencia  $(X, G)$  por simple descripción conjuntista:  $X$  y  $G$  son, respectivamente, el conjunto de puntos y de arcos de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  "etiquetado" por  $E$ .

El defecto formal de esta observación radica en que  $E$  no es, en general, un conjunto de etiquetas para  $\tilde{X}$  pues  $\text{Card}(\tilde{X}) \geq \text{Card}(E)$ . Todo ello justifica la siguiente definición.

Definición 3.1.2

Sea  $X$  un conjunto finito y  $E$  un conjunto no-vacío de pre-etiquetas, llamaremos pre-etiquetado de  $X$  por  $E$  a toda aplicación suprayectiva  $p: X \rightarrow E$ . A la imagen de cada  $x \in X$  la llamaremos pre-etiquetado de  $x$ .

Si  $(X, G)$  es un bosque, diremos que  $(X, G)$  es un bosque pre-etiquetado por  $E$  si su conjunto de puntos  $X$  está pre-etiquetado por  $E$ .

De la observación y definiciones anteriores se deduce:



Proposición 3.1.3

Sea  $(X,G)$  un grafo reducido etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$ , con  $\underline{x}(i) = x_i$ ,  $\forall i \in E$ . Sea  $(\tilde{X},\tilde{G})$  su bosque explotado etiquetado por  $\tilde{E}$ .

a) La aplicación  $p:\tilde{X} \rightarrow E$  tal que  $p(x_{i_1 \dots i_q}) = i_1$ , para cada  $x_{i_1 \dots i_q} \in \tilde{X}$ , es un pre-etiquetado de  $(\tilde{X},\tilde{G})$  por  $E$ .

b) Sea  $K$  el conjunto de arcos sobre puntos de  $E$  dado por

$$K = \{(i,j) \in E \times E, \text{ existe } (x,y) \in \tilde{G} \text{ con } p(x) = i, p(y) = j\}$$

Entonces la biyección del etiquetado  $\underline{x}:E \rightarrow X$  es un isomorfismo de grafos entre  $(E,K)$  y  $(X,G)$ .

La definición 2.3.4 de grafo  $E$ -ordenado y naturalmente ordenado, así como la 2.3.25 de  $E$ -ordenado por niveles y naturalmente ordenado por niveles, se pueden extender a los pre-etiquetados de los bosques pudiéndose, entonces, hablar de bosque  $E$ -ordenado y naturalmente ordenado, así como de  $E$ -ordenado por niveles y naturalmente ordenado por niveles, por el conjunto de pre-etiquetas  $E$ .

Se tienen, entonces, las siguientes versiones del apartado a) del teorema anterior.

Corolario 3.1.4

Sea  $(X,G)$  un grafo reducido naturalmente ordenado (por niveles), con  $\underline{x}(i) = x_i$ .

Sea  $(\tilde{X},\tilde{G})$ , su bosque explotado  $\tilde{E}$ -ordenado (por niveles). Entonces, la aplicación  $p:\tilde{X} \rightarrow E$  es un pre-etiquetado de  $(\tilde{X},\tilde{G})$  naturalmente ordenado (por niveles).

### 3.2. CONTRACCION DE UN BOSQUE EN UN GRAFO REDUCIDO

El problema de encontrar grafos reducidos que tengan por explotado un bosque dado (salvo isomorfismos) supone aplicaciones cocientes en los puntos y arcos del bosque que puede traducirse en lo siguiente:

Dado un bosque no-etiquetado trataremos de dar etiquetas a sus puntos (no necesariamente distintas y que, por tanto, llamaremos pre-etiquetas) de forma que la igualdad entre ellas permita, por paso al cociente, encontrar el grafo reducido que busquemos. Esto equivale a definir un pre-etiquetado sobre los puntos del bosque. Obviamente no vale cualquiera. La siguiente definición precisa nuestro objetivo e impone condiciones al preetiquetado.

#### Definición 3.2.1

Sea  $(Z,H)$  un bosque pre-etiquetado por  $E$  mediante la aplicación suprayectiva  $p:Z \rightarrow E$ .

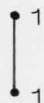
Sea  $k = \{(i,j) \in E \times E, \text{ existe } (x,y) \in H \text{ con } p(x) = i, p(y) = j\}$

Diremos que la aplicación suprayectiva  $p$  es una aplicación contactiva del bosque  $(Z,H)$  si, y sólo si,  $(E,K)$  es un grafo reducido etiquetado por  $E$  cuyo explotado  $(\tilde{E},\tilde{K})$  pre-etiquetado por  $E$  es el bosque  $(Z,H)$ ; es decir,  $(\tilde{E},\tilde{K})$  y  $(Z,H)$  son bosques isomorfos por un isomorfismo que respeta los pre-etiquetados por  $E$  de ambos bosques. En este caso, diremos que  $(E,K)$  es el grafo contraído por  $p$  del bosque  $(Z,H)$  o, más brevemente, que  $(E,K)$  es la  $p$ -contracción de  $(Z,H)$ .

Como ya vimos en la proposición 3.1.3, el pre-etiquetado de  $(\tilde{E},\tilde{K})$  por  $E$  es mediante la aplicación  $p':\tilde{E} \rightarrow E$  tal que  $p'(i_1 \dots i_q) = i_1$ ,  $\forall i_1 \dots i_q \in \tilde{E}$ . Esta misma proposición no sólo nos proporciona ejemplos de

p-contracciones sino que afirma que todo grafo reducido etiquetado por E es la p-contracción de su explotado para la aplicación contractiva  $p(x_{i_1 \dots i_q}) = i_1$ ; es decir, un bosque admite tantas p-contracciones como grafos reducidos que le tienen por explotado.

Obsérvese que dado  $(Z,H)$  y la aplicación suprayectiva  $p:Z \rightarrow E$  el par  $(E,K)$  no tiene por qué explotarse en  $(Z,H)$ , ni tiene por qué ser reducido, incluso pudiera no ser grafo como muestra la siguiente figura:

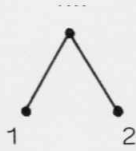


Trataremos, aquí, de decir bajo qué condiciones un pre-etiquetado de un bosque conduce, según la definición anterior, a una p-contracción. Observaremos, en primer lugar, relaciones entre un grafo reducido y su explotado con objeto de hallar condiciones necesarias para este pre-etiquetado. Es decir, si seguimos representando por  $(X,G)$  y  $(\tilde{X},\tilde{G})$  al grafo reducido y su bosque explotado, estudiaremos las condiciones que un etiquetado de  $(X,G)$  por E impone al pre-etiquetado de  $(\tilde{X},\tilde{G})$  por E asociado, dado en la proposición 3.1.3.

Observaciones 3.2.2

1) Cada árbol del bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$  es la explosión de un  $(\bar{x},G/\bar{x})$  siendo x un punto maximal de  $(X,G)$ . En el bosque explotado hay tantos árboles como puntos maximales en el grafo reducido, en consecuencia, los maximales del bosque deberán tener pre-etiquetas distintas. Distintas entre si y distintas a las de los demás puntos no maximales.

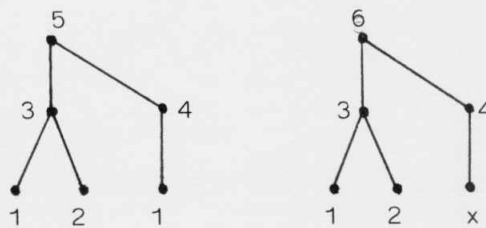
2) Si dos puntos en el bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  tiene el mismo siguiente, entonces tendrán pre-etiquetas distintas:



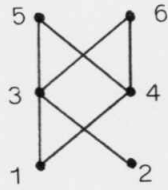
3) Como la explosión se hace ordenadamente por niveles y los "puntos explotados" de un punto singular conservan su longitud, nos interesará tener clasificado el bosque en niveles y estudiar posteriormente las identificaciones posibles en cada nivel.

4) Como la explosión de un punto singular  $x$  da lugar a diversas copias de  $(\bar{x}, G/\bar{x})$  no-conexas entre sí en el bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ , convendrá clasificar en el bosque los subgrafos inducidos isomorfos no-conexos. En consecuencia: "puntos que en el bosque tengan distinta clausura deberán portar pre-etiquetas distintas."

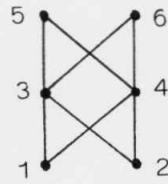
5) Parece ser que, si dos puntos en el bosque tienen la misma clausura pueden tener la misma pre-etiqueta, siempre que no tengan el mismo siguiente y ninguno de ellos sea maximal. Sin embargo, esto no es suficiente para que dos puntos puedan tener iguales pre-etiquetas. Por ejemplo, en el bosque de la figura:



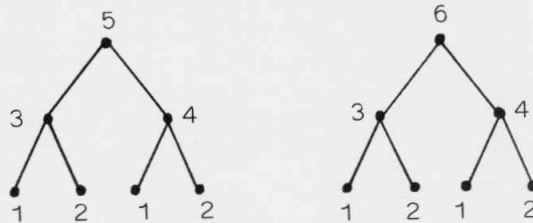
sólo falta por etiquetar el punto  $x$ , el cual admite, en principio, las etiquetas 1 y 2; pero para que el reducido cociente se explote en este bosque es necesario que  $x$  sea 1. Obsérvese que, si  $x=1$ , por paso al cociente (identificando), se obtiene el grafo contraído:



que se explota en el bosque original, mientras que si  $x=2$  el contraído es:

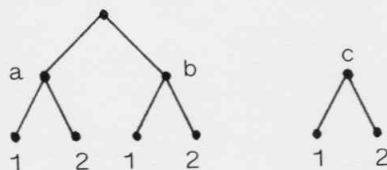


que se explota en el bosque, distinto del original :



Es necesaria, pues, también, la siguiente "condición global". "Si  $x, y$  son puntos del bosque a los que se asigna la misma pre-etiqueta entonces  $\bar{x}-\{x\}$  y  $\bar{y}-\{y\}$  deberá tener el mismo pre-etiquetado (mismo conjunto de pre-etiquetas que se preserva por el isomorfismo)". Es decir, los puntos con igual etiqueta deberán tener derivados (en el sentido topológico) con el mismo pre-etiquetado. (Nótese que  $\bar{x}-\{x\} = \{x\}^d$ ).

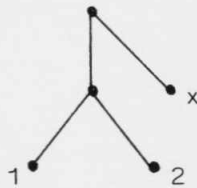
Obsérvese que la "condición global" no es una condición suficiente para que  $x$  e  $y$  tengan la misma pre-etiqueta, pues estos puntos están sometidos a las condiciones de las observaciones 1 y 2. Por ejemplo en el bosque:



los puntos a, b, y c, a pesar de tener derivados con el mismo pre-etiquetado, deben portar pre-etiquetas distintas. Sí se puede decir, sin embargo,

"x,y tienen la misma pre-etiqueta  $\iff \bar{x},\bar{y}$  tienen el mismo pre-etiquetado"

6) Como el grafo cociente ha de ser reducido, en el bosque de la figura:



debemos dar a x una etiqueta distinta de 1 y 2, pues, en caso contrario obtendríamos, al contraer, el grafo no reducido.



Describiremos esta situación diciendo que x "cubre" a 1 y 2, en el sentido de que el siguiente de x es mayor (en el sentido del orden) que 1 y 2. (Observar que 1 y 2 se cubren mutuamente).

Las condiciones descritas en las observaciones anteriores son condiciones sobre un bosque no-etiquetado  $(Z,H)$  y vienen impuestas por el hecho de que  $(Z,H)$  es el explotado de un cierto grafo reducido  $(X,G)$  y de que el pre-etiquetado de  $(Z,H)$  viene inducido por un etiquetado de dicho grafo. Estas condiciones pueden recopilarse y resumirse en los siguientes términos:

1. Puntos maximales tienen pre-etiquetas distintas.
2. Puntos con mismo siguiente tienen pre-etiquetas distintas.
3. Puntos de distinto nivel tienen pre-etiquetas distintas.
4. Puntos de distinta clausura tienen pre-etiquetas distintas.
5. Condición global.
6. Puntos que se cubren (uno al otro) tienen pre-etiquetas distintas.

La condición 1 es independiente de las demás. La condición 2 es, con una adecuada definición de la relación "cubrir" que daremos a continuación, más débil que la condición 6. La condición 3, que es más fuerte que la condición 4, sugiere identificar sólo puntos de igual nivel y queda, entonces, sumergida en la condición 5: "condición global". Así pues, parece que todas estas condiciones se pueden resumir en la siguiente:

#### Observación (sintética) 3.2.3

Dado el bosque explotado  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  y observados en él dos subgrafos inducidos isomorfos no-conexos entre sí,  $(\bar{x}, \tilde{G}/\bar{x})$  y  $(\bar{y}, \tilde{G}/\bar{y})$ , es claro que, los puntos de  $\bar{x}-\{x\}$  y  $\bar{y}-\{y\}$  pueden tener las mismas pre-etiquetas (mismo conjunto de pre-etiquetas preservado por el isomorfismo). En tal caso, los puntos  $x$  e  $y$  sólo podrán tener la misma pre-etiqueta si no son maximales y si uno no "cubre" al otro.

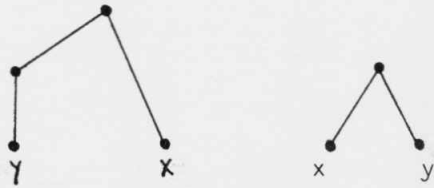
Una vez hechas estas observaciones describiremos bajo qué condiciones un bosque pre-etiquetado determina un grafo reducido que lo tiene por explotado. Antes precisaremos la relación "cubrir":

Definición 3.2.4

Sea  $(Z, H)$  un bosque y  $M$  el conjunto de sus maximales.

$\forall x, y \in Z - M$  diremos que  $x$  cubre a  $y$ , y lo indicaremos por  $x^c y$ , si y sólo si existe un camino que conecta  $y$  con el siguiente a  $x$ ,  $x^- \uparrow$ . Es decir,  $x^c y \iff y < x^- \uparrow$ , donde el signo  $<$  indica menor estricto en el sentido del orden.

Esta relación es, claramente, un pre-orden aunque no es ni simétrica ni antisimétrica como muestran, respectivamente, los ejemplos de la siguiente figura:



Proposición 3.2.5

$\forall x, y \in Z - M$ , se tiene  $x^- \uparrow = y^- \uparrow \iff x^c y \text{ y } y^c x$

En efecto, es claro que dos puntos con el mismo siguiente se cubren mutuamente. El recíproco también es cierto, pues al existir los caminos  $yy_1 \dots y_n x^- \uparrow$  y  $xx_1 \dots x_m y^- \uparrow$ , como los siguientes son únicos se tiene  $x^- \uparrow = x_1$  y  $y^- \uparrow = y_1$  luego existe el camino  $yy_1 \dots y_n x_1 \dots x_m y_1$  y, como un bosque es acíclico, entonces  $y_1 = x_1$ , y de aquí  $x^- \uparrow = y^- \uparrow$ .

Teorema 3.2.6

Si  $(Z, H)$  es un bosque  $E$ -pre-etiquetado por  $p: Z \rightarrow E$  y  $k = \{(i, j) \in E \times E, \text{ existe } (x, y) \in H \text{ con } p(x) = i, p(y) = j\}$  entonces  $(E, K)$  es la  $p$ -contracción de  $(Z, H)$  si y sólo si  $\forall x, y \in Z$  con  $p(x) = p(y)$  se verifican las siguientes condiciones:



- 1)  $x$  e  $y$  no son maximales.
- 2) Ni  $x$  cubre a  $y$ , ni  $y$  cubre a  $x$ .
- 3) Existe un isomorfismo de grafos  $\psi: (\bar{x}, H/\bar{x}) \rightarrow (\bar{y}, H/\bar{y})$  tal  $p(z) = p(\psi(z)), \forall z \in \bar{x}$ .

Que estas condiciones son necesarias ya se ha dicho en la observación sintética 3.2.3. No es necesario añadir aquí que los grafos inducidos en  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sean no-conexos entre si, pues esta condición es necesaria en un bosque para que  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  puedan ser isomorfos, siendo  $x \neq y$ . Recíprocamente:

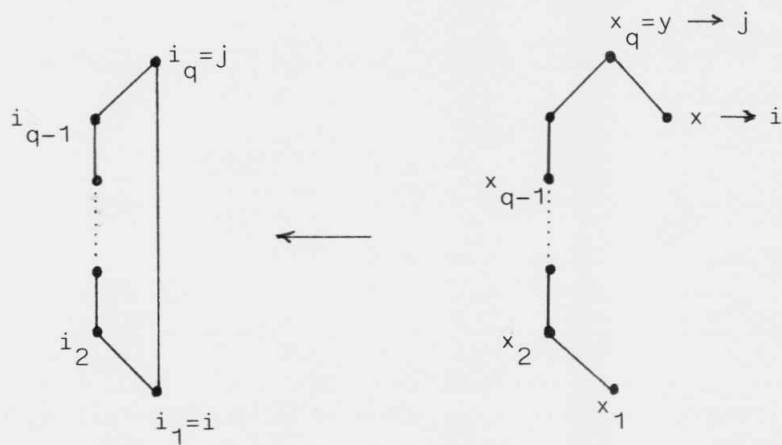
a) (E,K) es un grafo:

En efecto, veamos que  $k \subset E \times E - \Delta$ . Si  $p(x) = p(y) = i$  entonces  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son isomorfos y por tanto  $(x,y)$  no es un arco de  $H$ , luego  $(i,i) \notin k$ .

b) (E,K) es reducido:

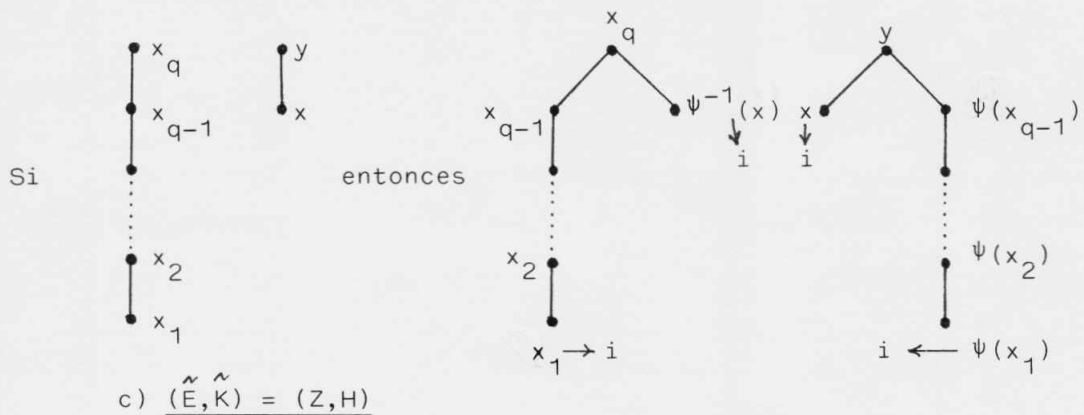
Si no lo fuera, habría un arco  $(i,j) \in k$ , que procede de un arco  $(x,y) \in H$  con  $p(x) = i, p(y) = j$ , y habría también un camino  $i_1 i_2 \dots i_q$  en  $(E,K)$  con  $i_1 = i, i_q = j$  y  $q > 2$ . En este camino, el arco  $(i_{q-1}, i_q)$  procede de  $(x_{q-1}, x_q) \in H$  con  $p(x_{q-1}) = i_{q-1}$  y  $p(x_q) = i_q$  y el arco  $(i_{q-2}, i_{q-1})$  procede de  $(y_{q-2}, y_{q-1}) \in H$  con  $p(y_{q-2}) = i_{q-2}$  y  $p(y_{q-1}) = i_{q-1}$ , en consecuencia,  $\bar{x}_{q-1} \stackrel{\psi}{\cong} \bar{y}_{q-1}$  y por tanto el punto  $x_{q-2} = \psi^{-1}(y_{q-2})$  es tal que  $p(x_{q-2}) = i_{q-2}$ , luego hay un camino  $x_{q-2} x_{q-1} x_q$  en  $(Z,H)$  pre-etiquetado por el camino  $i_{q-2} i_{q-1} i_q$  de  $(E,K)$ . Este razonamiento se extiende recurrentemente para los arcos  $(i_{q-3}, i_{q-2}), \dots, (i_1, i_2)$  obteniendo un camino  $x_1 x_2 \dots x_q$  en  $(Z,H)$  pre-etiquetado por el camino  $i_1 i_2 \dots i_q$  con  $p(x_k) = i_k, \forall k=1, \dots, q$ .

Si  $x_q = y$ , entonces  $x$  cubre a  $x_1$  en contra de que  $p(x) = p(x_1) = i$ , como muestra la siguiente figura:

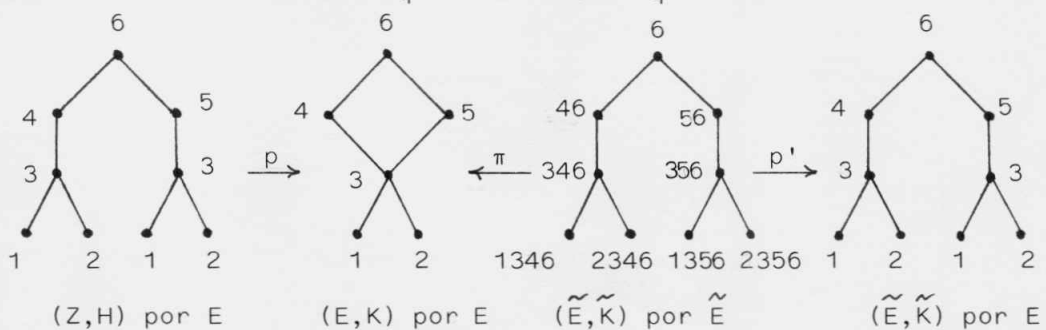


Si  $x_q \neq y$ , como tienen la misma pre-etiqueta  $j$  entonces  $\bar{x}_q \approx \bar{y}$  por un cierto  $\psi$ . Como  $x_1 \in \bar{x}_q$ , su homólogo  $\psi(x_1) \in \bar{y}$  y  $p(x_1) = p(\psi(x_1)) = i$ , luego en  $\bar{y}$  hay dos puntos,  $x$  y  $\psi(x_1)$ , con la misma pre-etiqueta  $i$  y tal que  $x$  cubre a  $\psi(x_1)$  en contra de la condición 2.

La siguiente figura ilustra esta parte de la prueba.



Antes de dar la prueba de este último apartado veamos en la siguiente figura las relaciones entre el bosque  $(Z, H)$  pre-etiquetado por  $E$ , su  $p$ -contracción  $(E, K)$ , el explotado de éste  $(\tilde{E}, \tilde{K})$  etiquetado por  $\tilde{E}$  y su asociado  $(\tilde{E}, \tilde{K})$  pre-etiquetado por medio de  $p': \tilde{E} \rightarrow E$  donde  $p'(i_1 \dots i_q) = i_1, \forall i_1 \dots i_q \in \tilde{E}$ .



Como en un bosque los caminos con fin maximal son únicos para cada punto del bosque y estos caminos con fin maximal en un grafo reducido representan los puntos de su explotado, bastará probar que la aplicación  $p$  induce un morfismo birracional. Pero esto es claro, pues, por la definición,  $p:(Z,H) \rightarrow (E,K)$  es un morfismo dominante de grafos y, por tanto, induce un morfismo  $\tilde{p}$  entre los bosques  $(\tilde{Z},\tilde{H}) = (Z,H)$  y  $(\tilde{E},\tilde{K})$ . El morfismo  $\tilde{p}$  es suprayectivo, pues, cada camino en  $(E,K)$  induce, al menos, un camino en  $(Z,H)$  como hemos visto en b). El morfismo  $\tilde{p}$  es, también, inyectivo, pues, si  $x_1 \dots x_q$  y  $x'_1 \dots x'_q$  son dos caminos de igual longitud con fin maximal que llevan la misma sucesión  $i_1, \dots, i_q$  de pre-etiquetas, entonces, se verifica  $x_j = x'_j$  para todo  $j = 1, 2, \dots, q$ . En efecto,  $x_q$  y  $x'_q$  son maximales con igual etiqueta luego  $x_q = x'_q$ ;  $x_{q-1}$  y  $x'_{q-1}$  tienen igual siguiente e igual pre-etiqueta luego  $x_{q-1} = x'_{q-1}$  y así sucesivamente. Finalmente,  $\tilde{p}$  es un isomorfismo de grafos por construcción ya que la correspondencia entre arcos asociada a  $\tilde{p}$  es, obviamente, una biyección.

### 3.3. CONTRACCION CANONICA MINIMAL DE UN BOSQUE

#### 3.3.A OBSERVACIONES PREVIAS Y DESCRIPCION

##### Observaciones generales 3.3.A.1

Hemos señalado anteriormente cómo distintos grafos reducidos pueden tener explotados isomorfos y cómo, en consecuencia, la relación de isomorfismo entre grafos explotados clasifica los grafos de procedencia. Hemos visto, también, cómo cada grafo reducido define una  $p$ -contracción de su bosque explotado. Nuestro objetivo, ahora, es, encontrar un representante canónico con un mínimo número de puntos para cada una de estas clases; es decir, trataremos de definir en el bosque un pre-etiquetado por  $E$  mediante una aplicación contractiva canónica y con  $\text{Card}(E)$  mínimo. Por tanto, el grafo contraído será minimal para el orden definido en 2.4.17.

En el apartado anterior estudiábamos bajo qué condiciones un pre-etiquetado dado en un bosque dado definía una  $p$ -contracción. Como ahora buscamos un  $p$ -contracción particular tendremos que construir tanto el conjunto de pre-etiquetas  $E$  como la aplicación suprayectiva  $p$ .

Por lo visto en el apartado anterior, los puntos del bosque no-etiquetado  $(Z,H)$ , para el que buscamos  $E$  y  $p:Z \rightarrow E$ , se distinguen por:

- a) El nivel en que se encuentran.
- b) Su clausura (lo que hay por debajo de él).
- c) Su siguiente, si existe (lo que hay por encima de él).
- d) Las pree-tiquetas dadas a los puntos de "características análogas" en otros lugares del bosque.

Las peculiaridades a) y b) comportan dos relaciones de equivalencia independientes y se expresarán, en relación con la contracción, aportando dos índices distintivos a cada pre-etiqueta.

En c) contemplamos dos condiciones independientes de a) y b).

$c_1$ ) Ser o no maximal.

$c_2$ ) Cubrir o no a otros puntos en igualdad de condiciones a) y b).

Como los maximales no se identifican entre sí y se han de distinguir de los otros no-maximales, los pre-etiquetaremos por separado. En lo sucesivo, nos referiremos, entonces, sólo a puntos no-maximales.

$c_2$ ) es una condición de signo contrario a las condiciones a) y b). Dicho de otra manera: dos puntos con la misma pre-etiqueta serán del mismo nivel, tendrán la misma clausura, pero sus siguientes son distintos y los niveles en que se encuentran (sus siguientes) son prácticamente arbitrarios, incluso, como uno no cubre al otro, se encuentran adyacentes a cadenas distintas. Posteriormente veremos cómo esta condición influye en las pre-etiquetas.

La condición d), que no es otra que la "condición global" tratada en el apartado anterior, se reducirá a una condición sobre el orden de las pre-etiquetas compatible con el orden de los niveles.

Estas condiciones descritas hasta ahora vienen impuestas (teorema 3.2.6) por el hecho de que el pre-etiquetado defina una p-contracción. Buscamos, a continuación, condiciones para que la contracción sea canónica y  $\text{Card}(E)$  mínimo. Esto requiere entrar más detalladamente en el pre-etiquetado por niveles.

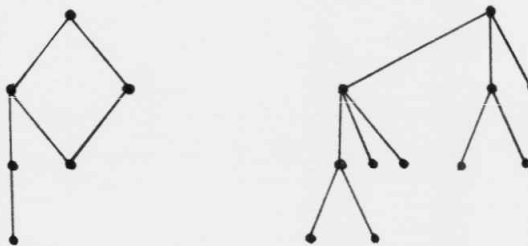
Observaciones 3.3.A.2.- (Sobre el pre-etiquetado del nivel  $N_0$ )

Supondremos que los puntos del bosque no-etiquetado  $(Z,H)$  están ya clasificados en niveles y centraremos, ahora, nuestra atención en el pre-etiquetado de  $N_0$ .

Al dibujar un grafo acíclico, en general, situaremos los puntos de igual nivel a la misma altura en el dibujo. De este modo, dibujaremos

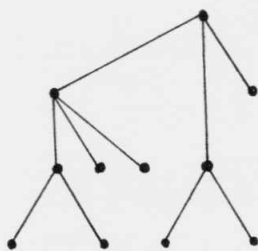


en lugar de



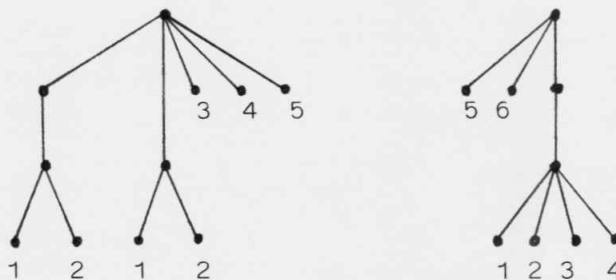
Los puntos del nivel  $N_0$  tienen la particularidad de poseer la misma clausura y sólo se distinguen por sus siguientes; aunque, como ya hemos visto, esta clasificación no es adecuada para el pre-etiquetado. Sí puede ser adecuado, sin embargo, distinguirlas por los niveles en que se encuentran sus siguientes, pues, el orden de los niveles nos proporciona un orden en los puntos de  $N_0$  que puede ser útil para su pre-etiquetado.

Para representar mejor este rasgo distintivo exceptuaremos a los puntos de  $N_0$  de la regla de dibujo anterior y dibujaremos estos puntos unidos a sus siguientes por un arco de "longitud uno". Así, el árbol dibujado más arriba se representará por



Como buscamos un grafo cociente con un número mínimo de puntos, tendremos que pensar aquí en cuál es el mínimo número de pre-etiquetas necesarias en el nivel  $N_0$ .

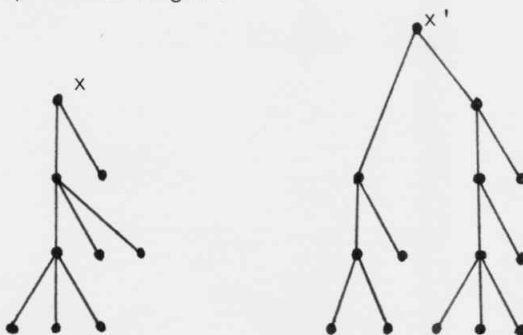
En el bosque de la figura



al primer árbol le bastan 5 pre-etiquetas; al segundo 6. Los dos no necesitan, entonces, más de 6 pre-etiquetas distintas.

Surgen aquí dos problemas. Por un lado, cómo decir cual es el número de pre-etiquetas necesarias y, por otro, cómo hacer la identificación, es decir, cual es la parte del bosque que soporta el pre-etiquetado del resto.

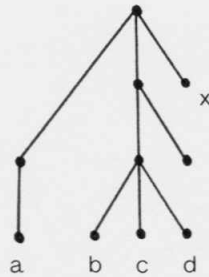
Por lo que respecta al primero, nótese que el número  $\max \{ \text{Card}(\bar{x} \cap N_0), x \in M \}$  no da el número de pre-etiquetas necesarias en el nivel  $N_0$ : Así, en la figura



$\text{Card}(\bar{X} \cap N_0) = 6$  y  $\bar{X}$  necesita 6 pre-etiquetas para sus puntos de  $N_0$ .  
 $\text{Card}(\bar{X}' \cap N_0) = 8$ , sin embargo,  $\bar{X}'$  sólo necesita 5 pre-etiquetas para sus puntos de  $N_0$ .

Obsérvese, también, que un problema referido a un bosque no se puede restringir a un árbol del bosque al objeto de simplificar o atomizar su solución, pues todo bosque se convierte en un árbol en cuanto unamos sus puntos maximales por un mismo siguiente.

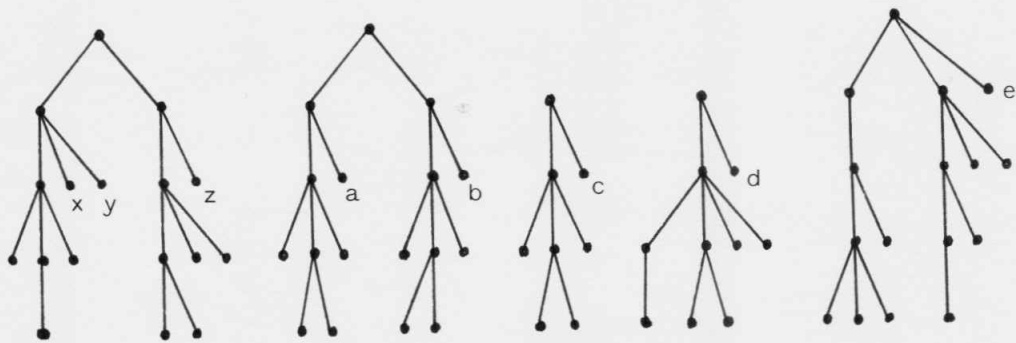
Si  $x \in N_0$ , el análisis del conjunto de puntos de  $N_0$  que están cubiertos por  $x$  tampoco proporciona un buen criterio para buscar las pre-etiquetas necesarias, pues en la figura



Los puntos de  $N_0$  cubiertos por  $x$  son 6, sin embargo, sólo se requieren 5 etiquetas. El punto  $a$  se debe identificar con uno cualquiera de los puntos  $b, c, d$ . Parece, pues, que entre los puntos cubiertos por  $x$  sólo hay que contar aquellos que "distan" un solo arco de la cadena que "soporta" las etiquetas distinguibles  $b, c, d$ . El problema será cómo definir esta cadena.

En el siguiente ejemplo todos los puntos pre-etiquetados cubren al mismo número de puntos de  $N_0$  que requieren pre-etiquetas distintas, 5 en este caso.



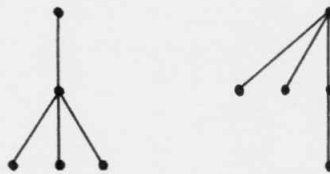


Los problemas son: ¿Cómo definir este número de pre-etiquetas? ¿Cómo elegir la "rama" con pre-etiquetado soporte para todas las demás?. Daremos más adelante las respuestas.

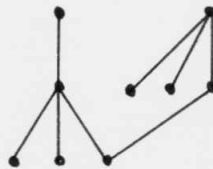
Una vez que hayamos establecido el número de pre-etiquetas necesarias nos quedará pendiente cómo realizar la identificación.

Una identificación que conserve los niveles de los siguientes no sería adecuada, pues requeriría más pre-etiquetas de las necesarias.

Con esta filosofía el grafo

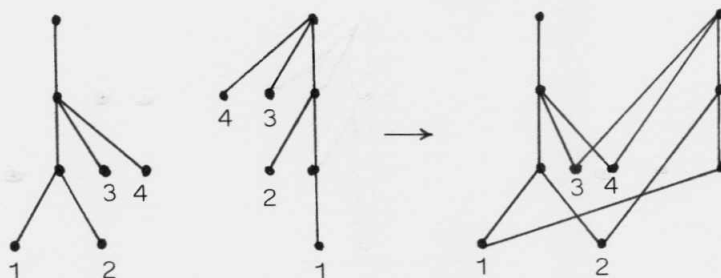


se contraería en

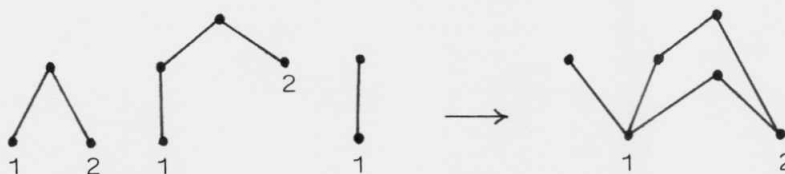


que necesitaría 5 pre-etiquetas, siendo sólo 3 las suficientes.

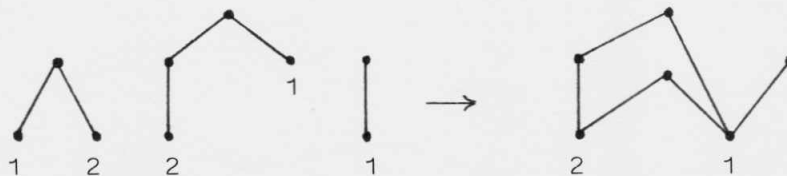
Como tendremos que identificar puntos con siguientes en distinto nivel, podemos hacerlo de un modo ordenado; por ejemplo, ordenamos las pre-etiquetas necesarias en  $N_0$ , para cada "rama" del bosque, según los niveles de sus siguientes y después hacemos la identificación conservando este orden. La figura adjunta muestra el procedimiento.



Esto no es sólo una idea bien intencionada; es necesario para que el contraído del bosque sea canónico; por ejemplo



mientras que

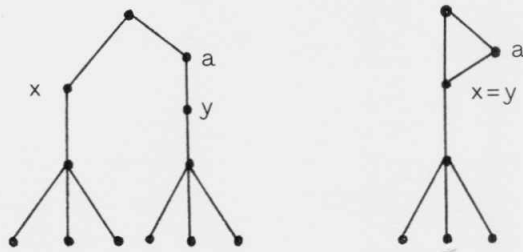


Elegir como canónico uno u otro supone fijar un orden en los puntos de cada "rama" que se conserve en las identificaciones.

Una vez puestas de manifiesto las dificultades en el pre-etiquetado de  $N_0$ , pensemos momentáneamente en los otros niveles  $N_p$ .

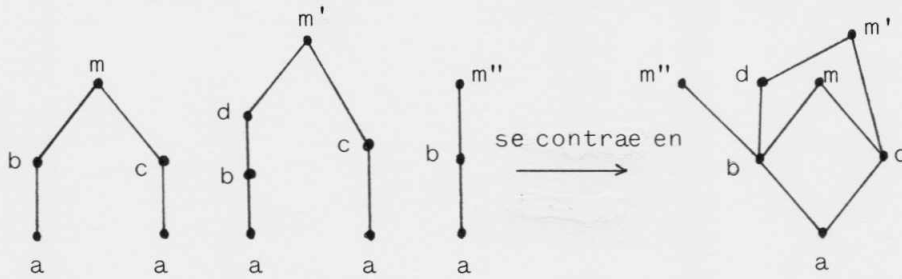
Observaciones 3.3.A.3.- (Sobre el pre-etiquetado del nivel  $N_p$ ).

Ahora, los puntos de  $N_p$  pueden tener distinta clausura y, en consecuencia, en su pre-etiqueta habrá un índice que indique la clase de clausura a la que pertenece. Los puntos de  $N_p$  que tengan la misma clausura sólo se distinguen por sus siguientes, por lo que su pre-etiquetado presenta, al menos, las mismas dificultades que las encontradas en  $N_0$ . En el ejemplo:

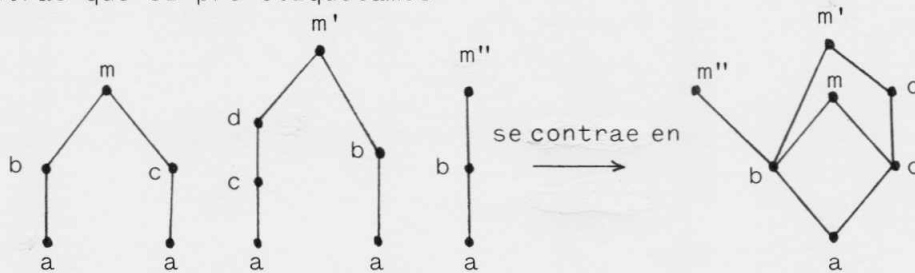


los puntos  $x, y$  son del mismo nivel y misma clausura; no tienen el mismo siguiente, pero si se identifican dan lugar a un grafo no-reducido, pues  $x$  "cubre" a  $y$ .

Algo análogo sucede con la canonicidad del contraído.

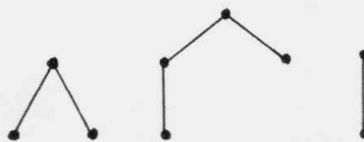


mientras que si pre-etiquetamos

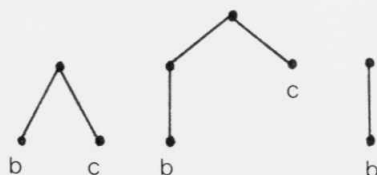


Los reducidos obtenidos no son isomorfos y nada parece indicar el orden en que las pre-etiquetas  $b, c \in N_1$  del primer árbol deben asignarse al segundo. Sin embargo, este orden es esencial. Como  $b$  y  $c$  tienen la misma clausura, podríamos reducir el bosque suprimiendo  $N_0$  y observar cómo se resuelve este problema ahora que  $b, c \in N_0$  en el inducido  $(x-N_0, G/x-N_0)$ .

El bosque inducido es

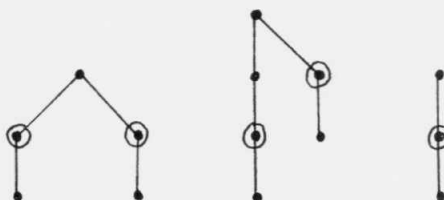


y aquí no hay ambigüedad en el pre-etiquetado si previamente se ha fijado un orden en los puntos a pre-etiquetar. Si consideramos el sugerido anteriormente pondríamos



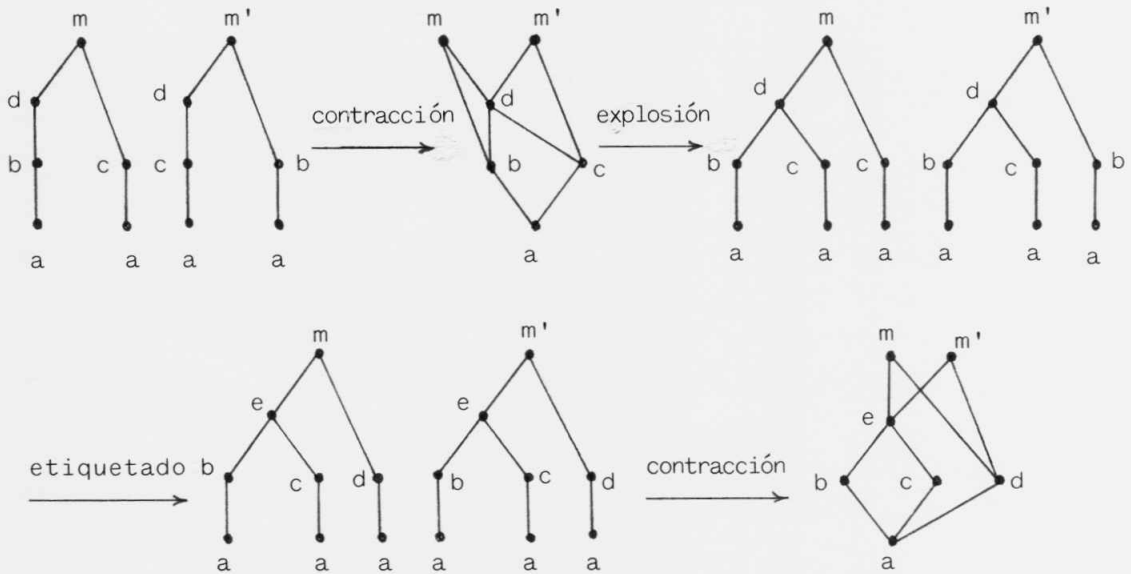
y una vez recuperado el nivel  $N_0$  obtendríamos como contraído el primero de los mostrados arriba.

Es el dibujo lo que ha creado esta ambigüedad. Para pre-etiquetar los puntos de  $N_0$  los dibujábamos colgando de su siguiente y esto mismo debe hacerse ahora. Si  $x \in N_p$ ,  $\bar{x}$  debe colgar (unido por un arco de "longitud uno") de su siguiente. El dibujo más adecuado sería

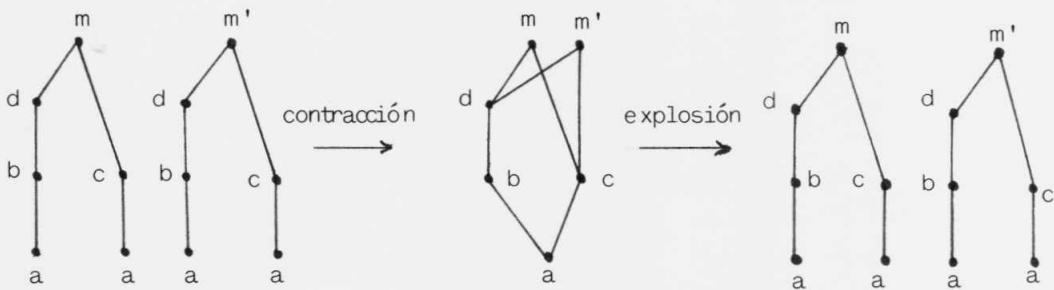


Precisar un orden en las pre-etiquetas de  $N_0$  para cada una de las "ramas" que las soportan no sólo es necesario para poder hacer las identificaciones respetando este orden y obtener como resultado del cociente un grafo reducido canónico, sino que es fundamental, también, para que el explotado de este grafo contraído sea el bosque no-etiquetado del que se parte.

Veamos un ejemplo:



Como puede observarse, casi todo funciona mal. La contracción no es un grafo reducido, su explosión (que será estudiada en el capítulo siguiente) no es el bosque original y el etiquetado que hereda no es el que le corresponde, en consecuencia, su contracción tampoco coincide con la anterior. Sin embargo, si hacemos:



todo va bien.

En el bosque de arriba lo que ha sucedido, al alterar el orden adecuado de las pre-etiquetas, es que se ha roto la "condición global" según la cual, si dos puntos  $m$  y  $m'$  tienen la misma clausura, entonces  $\bar{m} - \{m\}$  y  $\bar{m}' - \{m'\}$  deben tener el mismo pre-etiquetado.

Que el orden de las pre-etiquetas conserve el orden de los niveles de los siguientes y este orden sea el mismo para todas las ramas asegura la "condición global", como veremos más adelante.

En consecuencia, el procedimiento para pre-etiquetar los puntos de  $N_p$  sería: Clasificamos  $N_p$  por igualdad de clausura y para cada una de estas clases se considera el bosque inducido que se obtiene al "implotar" cada una de sus clausuras iguales en su punto maximal. A continuación se pre-etiqueta este bosque con el criterio que se establezca para  $N_0$ . Repitiéndose la operación para cada clase y todo el proceso para  $p=1, \dots, k-1$ . La etapa  $p = k = \dim(Z, H)$  corresponde a los maximales.

#### Descripción 3.3.A.4

Haremos aquí una descripción del método que permite definir el número mínimo de pre-etiquetas suficientes para  $N_0$ , las ramas soporte del grafo contraído, el orden del pre-etiquetado y la identificación.

Llamaremos ramas del bosque no-etiquetado a los caminos cuyos extremos son un minimal y un maximal. Es decir, ramas son lo que anteriormente, y por otras razones, hemos llamado caminos maximales. Llamaremos ramas principales a las ramas cuyo minimal tiene su siguiente en el nivel  $N_1$ .

A cada rama principal le añadimos los puntos de  $N_0$  cuyo siguiente está en dicha rama; puntos que se llamarán brotes de la rama principal.

El minimal de una rama principal se puede considerar también

como un brote de la misma rama. Nótese también que dos ramas principales distintas pueden dar lugar a la misma rama principal con brotes, esto pasa precisamente cuando ambas ramas principales coinciden en todos sus puntos excepto en los respectivos minimales.

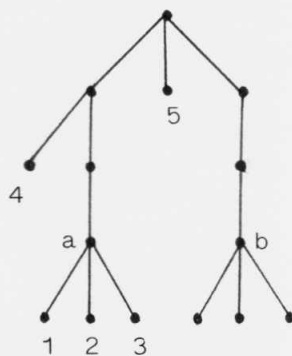
Cada rama principal con brotes posee al menos un brote que cubre a todos los demás, aquel cuyo siguiente está en el más alto nivel (puede haber varios brotes con esta propiedad). Puesto que este brote cubre a todos los demás, todos ellos han de portar pre-etiquetas distintas.

El máximo de los números de brotes de las ramas principales es el número de pre-etiquetas suficientes y necesarias para  $N_0$ .

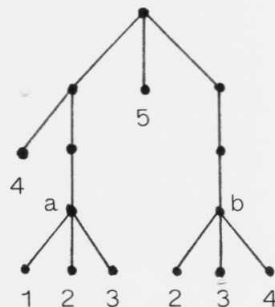
Este número  $n$  es único, sin embargo, puede haber varias ramas principales con  $n$  brotes. Sea cual fuere el orden establecido entre su  $n$  etiquetas, todas estas ramas se enlazan entre sí en el nivel  $N_0$  constituyéndose en soporte del grafo contraído.

Estas  $n$  pre-etiquetas podemos ordenarlas de 1 a  $n$  y asignarlas a los brotes de cada rama principal soporte respetando el orden de sus siguientes.

Para cada  $h$ ,  $1 \leq h < n$ , puede haber varias ramas principales con  $h$  brotes. Algunos de estos brotes estarán ya pre-etiquetados por ser comunes a los de alguna rama principal soporte. Estos brotes comunes son siempre los que tienen siguiente en los niveles superiores del bosque, y les corresponden, por tanto, las últimas pre-etiquetas. Sin embargo, este orden de asignación de pre-etiquetas a los  $h$  brotes (de arriba hacia abajo) es el contrario del que sugiere la condición global. En el grafo de la figura



hay tres ramas principales con 5 brotes pre-etiquetados de 1 a 5. Hay otras tres ramas principales con 4 brotes. Uno de ellos (el 5) es común. Si conservamos el orden descendente tendríamos que etiquetar como sigue



pero como  $\bar{a} = \bar{b}$  no se verifica la condición global, condición que, por el contrario, sugiere conservar el orden ascendente en la asignación de pre-etiquetas.

Esto nos obliga a distinguir en las ramas con  $h$  brotes entre comunes con otras ramas y propios, y a realizar la identificación en sentido descendente para las clases de ramas de  $h$  brotes desde  $h=n$  a  $h=1$ . La identificación quedará así finalizada pues los brotes de las ramas principales cubren a  $N_0$ .

Antes de definir el pre-etiquetado canónico y la contracción del bosque no-etiquetado  $(Z,H)$  conviene recordar que este bosque es un grafo reducido y entonces se pueden usar las notaciones indicadas en el segundo capítulo:



$x \leq y \iff$  existe un camino que une  $x$  con  $y$  ó  $x = y$ .

$x^+ = \{y \in Z, (x,y) \in H\} \cup \{x\}$

$x^- = x^+ - \{x\}$ .

En un bosque existen puntos  $z$  tal que  $Og(z) = 0$  (son los puntos maximales) y  $\forall x \in X - M$ , existe un único  $z \in M$  (su maximal) y un único camino que une  $x$  con  $z$ . Como  $Og(x) = 1$ , el siguiente,  $y$ , de  $x$  es único, entonces,  $x^+ = \{x,y\}$ ,  $x^- = \{y\}$ .

Como los caminos en un bosque son únicos, están caracterizados por sus extremos. Al camino  $xx_1 \dots x_n z$  lo denotaremos abreviadamente por  $[x,z]$ . La longitud de un camino es el número de arcos que contiene y la representaremos por  $l[x,z]$ .

### 3.3.B PRE-ETIQUETADO CANONICO DE UN BOSQUE

Supondremos clasificado el bosque  $(Z,H)$  en niveles que indicaremos por  $N_p$ , es decir  $Z = \bigcup_{p=0}^k N_p$ , con  $N_p \neq \emptyset$ ,  $\forall p = 0, \dots, k$  y  $k = \dim(Z,H)$ .

#### Notación 3.3.B.1

La partición de  $Z$  en niveles induce una partición en los maximales y clasifica, también, a los puntos de cada nivel  $N_p$  por los niveles de sus siguientes. De este modo denotaremos por  $M_p = M \cap N_p$  al conjunto de los maximales del nivel  $N_p$ . A los puntos del nivel  $N_p$  con siguiente en el nivel  $N_q$  los denotaremos por  $N_p^q = \{x \in N_p, x^- \in N_q\}$ , y esto para cada  $p = 0, 1, \dots, k-1, q > p$ .

Eventualmente, puede suceder que  $M_p$  ó  $N_p^q$  pueda ser vacío, para algún  $p$  o algunos  $p$  y  $q$ .

#### Definición 3.3.B.2

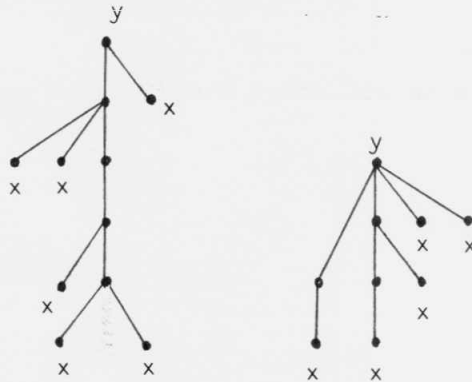
Llamaremos rama del bosque  $(Z,H)$  a todo camino maximal, es decir,  $[x,y]$  es una rama  $\iff [x,y] \in C_0^M(X,G)$   
 $\iff [x,y]$  es camino, con  $x \in N_0$  e  $y \in M$ .

Diremos que una rama  $[x,y]$  es principal si  $x \in N_0^1$ , es decir si  $x^- \in N_1$ .

Llamaremos brotado de una rama  $[x,y]$  al conjunto:  
 $br[x,y] = \{z \in N_0, z^- \in [x,y]\}$ . Llamaremos brotos a los puntos de  $br[x,y]$ .

Diremos que  $z$  es un brote de nivel  $N_q$  si  $z^- \in N_q$ , en cuyo caso  $z \in N_0^q$ .

Ejemplo 3.3.B.3



En el bosque de la figura todos los caminos  $[x,y]$  son ramas. Sólo dos, en cada árbol, son principales. Cada una de las dos ramas principales del primer árbol tiene 6 brotes, los puntos señalados con  $x$ ; las dos tienen el mismo brotado. En el segundo árbol, una rama principal tiene tres brotes y la otra cuatro. Se observa, pues, que dos ramas distintas pueden tener brotes comunes e incluso pueden tener el mismo brotado.

Proposición 3.3.B.4

- a) Toda rama tiene al menos un brote.
- b) Dos ramas distintas con brotes comunes están en el mismo árbol.
- c) Si dos ramas distintas tienen un brote común, entonces tienen en común todos los brotes de igual o superior nivel.
- d) En cada rama hay, al menos, un brote que cubre a todos los demás.
- e) Para cada rama  $[x,y]$  existe una rama principal  $[z,y]$  tal que  $br[x,y] \subset br[z,y]$ .
- f) Los puntos de  $N_0 - M_0$  son brotes de ramas principales. En efecto, es evidente, pues:

a)  $x \in \text{br}[x,y]$

b) Si  $[x,y]$ ,  $[u,v]$  son dos ramas y  $z \in \text{br}[x,y] \cap \text{br}[u,v]$ , existen los caminos  $[z^{-\uparrow}, y]$  y  $[z^{-\uparrow}, v]$ . Como en un bosque sólo hay un camino con fin maximal que parta de  $z^{-\uparrow}$  se tendrá  $y = v$ . Por tanto el árbol  $\bar{y}$  es el mismo que el árbol  $\bar{v}$  y contiene a las dos ramas  $[x,y]$  y  $[u,v]$ .

c) Con las notaciones de b), como los caminos son únicos,  $[z^{-\uparrow}, y]$  y  $[z^{-\uparrow}, v]$  son el mismo camino y, en consecuencia, tienen el mismo brotado.

d) Sea  $q$  el máximo natural tal que existe  $z \in \text{br}[x,y]$  con  $z^{-\uparrow} \in N_q$ , entonces para todo  $v \in \text{br}[x,y]$  se tiene  $v^{-\uparrow} \leq z^{-\uparrow}$  y, por tanto,  $z \stackrel{c}{v}$ .

e) Si  $[x,y]$  es principal, basta con hacer  $z = x$ . Si  $[x,y]$  no es principal entonces  $x \in N_0^q$  con  $q > 1$ , es decir,  $x^{-\uparrow} \in N_q$ , con  $q > 1$ , luego existe un camino de longitud  $q$  que parte de un punto  $z \in N_0^1$  y termina en  $x^{-\uparrow}$ . Es claro que  $[z,y]$  es una rama principal. Por otro lado, si  $u \in \text{br}[x,y]$  entonces  $u^{-\uparrow} \in [x,y]$  y  $u^{-\uparrow} \neq x$  luego  $u^{-\uparrow} \in [x^{-\uparrow}, y]$  y, en particular,  $x$  es brote de  $[z,y]$ .

f) Las ramas, pues son caminos maximales, cubren  $Z-M_0$ ; en particular, todo punto de  $N_0-M_0$  es un brote en alguna rama y el resultado se sigue de e).

Definición 3.3.B.5

Sea  $[x,y]$  una rama, llamaremos rama brotada al subgrafo inducido  $([x,y]_b, G/[x,y]_b)$  donde  $[x,y]_b = [x,y] \cup \text{br}[x,y]$ .

De la proposición anterior y esta definición se deduce:

Corolario 3.3.B.6

a) Para cada rama  $[x,y]$ , existe una rama principal  $[z,y]$ , tal que  $[x,y]_b \subset [z,y]_b$ . Es decir, toda rama brotada es un subgrafo de una rama principal brotada.

b) El bosque  $(Z,H)$  es unión de sus ramas principales brotadas y del conjunto de sus puntos desconectados.

Pues, salvando los puntos de  $M_0$ , ya sabemos que el bosque como grafo acíclico es unión de sus cadenas maximales, por tanto es unión de todas sus ramas y, en consecuencia, unión de sus ramas principales brotadas. Esta unión no es disjunta (ni en los puntos ni en los arcos). Nótese también, que puede ser  $[x,y]_b = [u,v]_b$  siendo  $[x,y] \neq [u,v]$ ; esto pasa si  $y=v$  y  $x^- \uparrow = u^- \uparrow$ .

Definición y notaciones 3.3.B.7

Llamaremos dimensión del nivel  $N_0$  en el bosque  $(Z,H)$ , y lo denotaremos por  $n_0$  y por  $\dim(N_0)$ , al número

$$n_0 = \dim(N_0) = \max\{\text{Card}(\text{br}[x,y]), [x,y] \text{ es una rama de } (Z,H)\}$$

Después de la proposición anterior,  $n_0$  es el cardinal del brotado de, al menos, una rama principal. Nótese que varias ramas principales pueden tener brotado de cardinal  $n_0$ .

En general, habrá también ramas principales con brotado de cardinal  $h$ ,  $1 \leq h \leq n_0$ .

Sea  $P$  el conjunto de ramas principales y sea

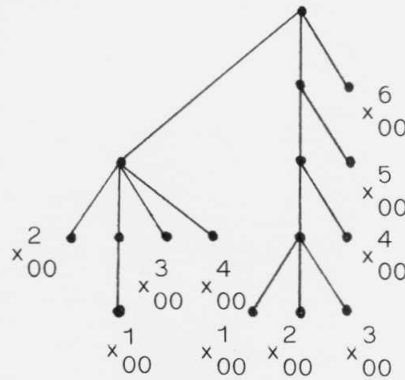
$$P_h = \{[x,y] \in P, \text{Card}(\text{br}[x,y]) = h\}, \text{ para cada } h, 1 \leq h \leq n_0.$$

Definición y notaciones 3.3.B.8.- (Pre-etiquetado del nivel  $N_0$ )

1) Si  $[x,y] \in P_{n_0}$ , los puntos de  $br[x,y]$  se pre-etiquetan con:  $x_{00}^1, x_{00}^2, \dots, x_{00}^{n_0}$  donde los subíndices indican que se trata de puntos del bosque de nivel  $N_0$  y que, por tanto, carecen de anteriores. Los superíndices distinguen los  $n_0$  brotes de esta rama y definen un orden entre las pre-etiquetas que conserva el orden de los niveles de los siguientes de los  $n_0$  brotes. Es decir:

$\forall z, z' \in br[x,y], z \in N_0^p, z' \in N_0^q$ , si  $p < q$  entonces la pre-etiqueta de  $z$  es menor que la pre-etiqueta de  $z'$ , o dicho de otro modo si  $z = x_{00}^i$  y  $z' = x_{00}^j$ , entonces  $p < q \Rightarrow i < j$ .

Puede suceder, como en el grafo de la siguiente figura, que distintas ramas de  $P_{n_0}$  tengan algunos de sus brotes en común. Después de la proposición 3.3.B.4. c), es claro que estos brotes poseen una pre-etiqueta única, exactamente las  $q$  últimas, siendo  $q$  el número de brotes comunes.



Los brotes de las ramas de  $P_{n_0}$  no cubren, en general,  $N_0 - M_0$ , por lo que quedan brotes del bosque sin pre-etiquetar. Para estos procederemos ordenadamente:

2) Se pre-etiquetan a continuación los brotes de las ramas  $[x,y] \in P_{n_0-1}$ , (si las hay). Considerada una rama cualquiera  $[x,y] \in P_{n_0-1}$

se observa que algunos de sus brotes están ya pre-etiquetados por pertenecer a  $br[u,v]$  para alguna rama  $[u,v] \in P_{n_0}$ ; quedan en esta rama  $p$  brotes sin pre-etiquetar a los que se les asignan las pre-etiquetas  $x_{00}^1 \dots x_{00}^p$  conservando el orden mencionado anterioremente.

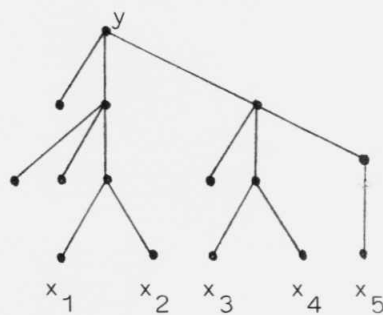
En consecuencia las  $n_0 - 1$  etiquetas de la rama  $[x,y]$  son

$$x_{00}^1 \dots x_{00}^p x_{00}^{p+2} \dots x_{00}^{n_0}$$

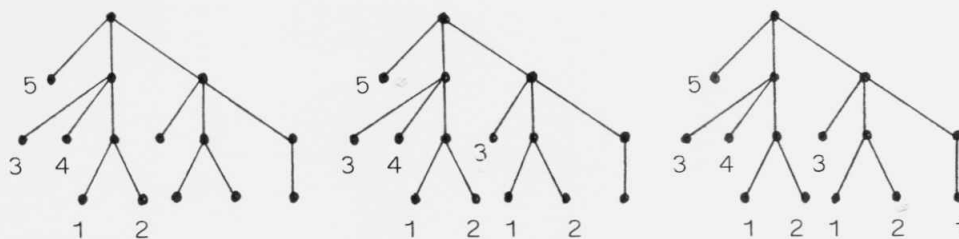
3) Se procede de la misma manera sobre las ramas de  $P_{n_0-2}$  y así sucesivamente, de manera que, de un modo general, se puede describir el etiquetado de los brotes de  $P_h$  con  $1 \leq h < n_0$ , así: si los brotes de las ramas de  $P_{n_0}, P_{n_0-1}, \dots, P_{h+1}$  han sido pre-etiquetados en este orden y  $[x,y] \in P_h$ , quedan, en  $[x,y]_b$  un número  $p$  de brotes sin pre-etiquetar a los que se les asigna las etiquetas  $x_{00}^1 \dots x_{00}^p$  conservando el orden mencionado en 1). De este modo las  $h$  etiquetas de  $[x,y]$  son:

$$x_{00}^1 \dots x_{00}^p x_{00}^{p_1} \dots x_{00}^{p_{h-p}} \quad \text{donde } p_1, p_2, \dots, p_{h-p} \text{ es una sub-}$$

sucesión de  $p+2, p+3, \dots, n_0$ . Por ejemplo, en el grafo de la figura:



$n_0 = 5$  y hay dos ramas  $[x_1,y], [x_2,y] \in P_5$  y hay otras dos  $[x_3,y], [x_4,y] \in P_4$  y una  $[x_5,y] \in P_3$  que se etiquetan ordenadamente como indicamos en la figura:



de modo que las ramas de  $P_5$  portan pre-etiquetas  $x_{00}^1 x_{00}^2 x_{00}^3 x_{00}^4 x_{00}^5$ , las ramas de  $P_4$ ,  $x_{00}^1 x_{00}^2 x_{00}^3 x_{00}^5$ , y la rama de  $p_3$ ,  $x_{00}^1 x_{00}^3 x_{00}^5$ .

4) Los puntos de  $M_0$ , puntos desconectados, los distinguiremos, con etiquetas  $x_{00}^{-1}, \dots, x_{00}^{-m_0}$ , siendo  $m_0 = \text{Card}(M_0)$  e interpretando el signo como que se trata de un punto que no tiene siguiente.

Observación 3.3.B.9

El etiquetado de  $N_0$  es único salvo automorfismos. Los automorfismos actúan sobre los brotes que tienen el mismo siguiente y también sobre los puntos de  $M_0$ . Clasificando los puntos de  $N_0$  por la relación "tener el mismo siguiente o, bien, ser maximal", si las clases constan respectivamente de  $n_1, n_2, \dots, n_r, m_0$  puntos, hay un número de automorfismos que conservan el tipo de pre-etiquetado de  $N_0$  igual a  $n_1! n_2! \dots n_r! m_0!$ , donde es claro que  $n_1 + n_2 + \dots + n_r + m_0 = \dim(N_0)$ , dándose la igualdad sólo en el caso de que el bosque conste de una sola rama principal.

Definición y notaciones 3.3.B.10.- (Pre-etiquetado del nivel  $N_1$ )

Antes de asignar pre-etiquetas a los puntos de  $N_1$  debemos clasificarlos por medio de sus clausuras.

Para  $x, y \in N_1$  diremos que  $x$  e  $y$  tienen clausuras isomorfas si los árboles inducidos  $(\bar{x}, Z/\bar{x}), (\bar{y}, Z/\bar{y})$  son grafos isomorfos. A las clases de equivalencia de elementos de  $N_1$  módulo la relación "tener clausuras isomorfas" las denotaremos por  $[x_{11}], [x_{12}], \dots, [x_{1r_1}]$ .



Aunque es anecdótico para nuestros propósitos podemos representar estas clases por árboles no-etiquetados del tipo:



y, si se prefiere, los subíndices se pueden elegir ordenados conforme al número de caminos de longitud uno que aparecen en el árbol no-etiquetado que define cada clase.

Para cada clase  $[x_{1i}]$ ,  $i=1, \dots, r_1$  consideramos el subgrafo inducido por  $(Z, H)$  en  $G_{1i} = \bigcup_{x \in [x_{1i}]} x^*$ , es decir, el bosque  $[x_{1i}]^* = (G_{1i}, H/G_{1i})$ .

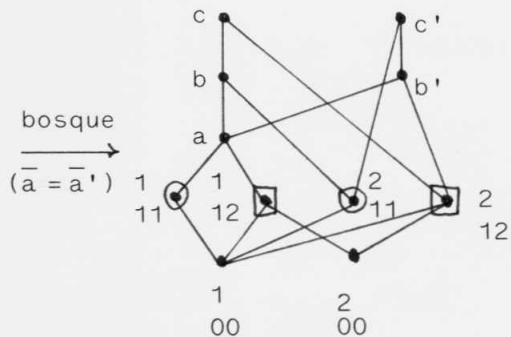
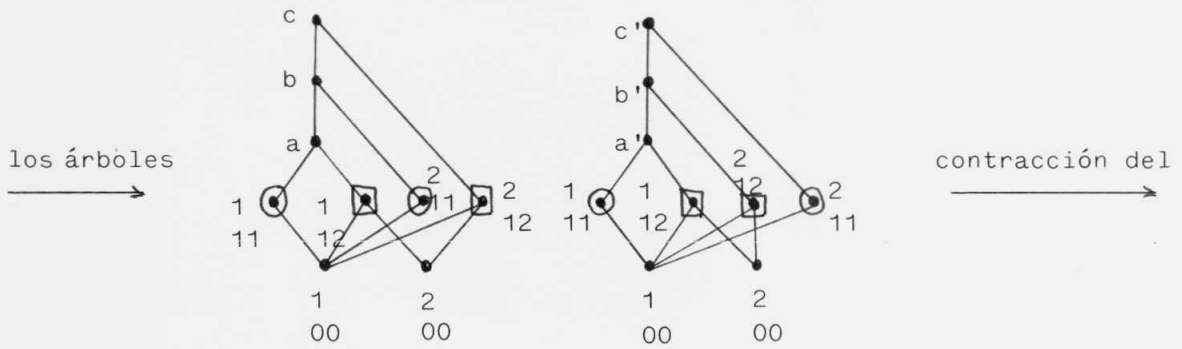
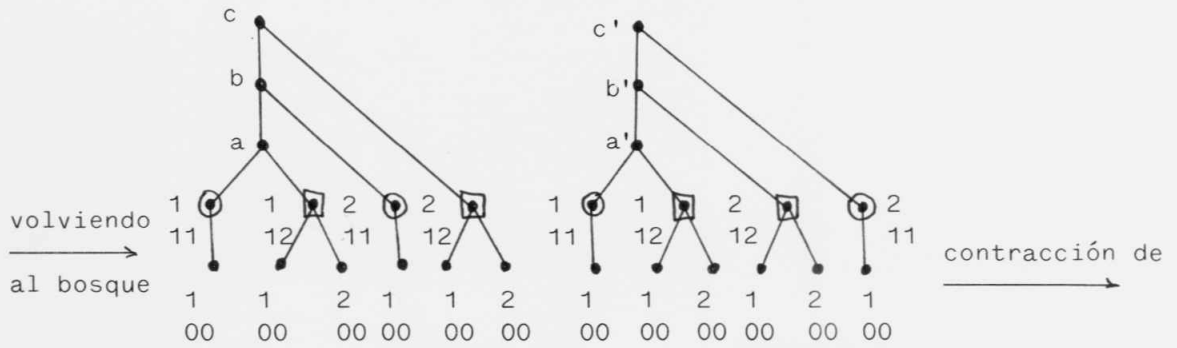
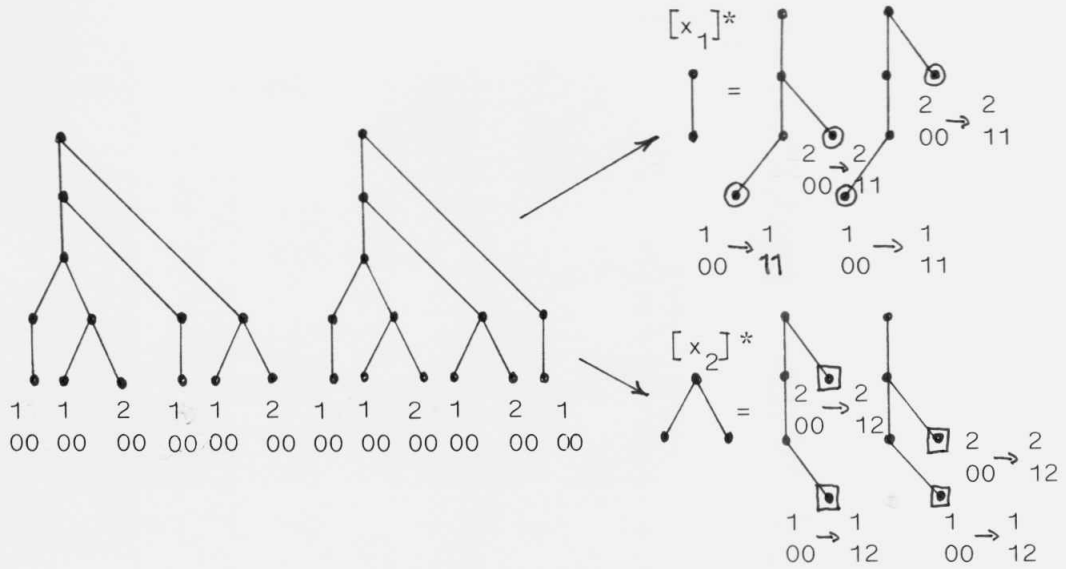
El nivel  $N_0$  en  $[x_{1i}]^*$ , (sus puntos minimales), son exactamente los puntos de la clase  $[x_{1i}]$  en  $(Z, H)$ . Los maximales de  $(Z, H)$  que están en  $[x_{1i}]$  son puntos desconectados en  $[x_{1i}]^*$ , estos son exactamente  $M \cap [x_{1i}] = M_1 \cap [x_{1i}]$  y los denotaremos por  $M_{1i}$ .

Sea  $n_{1i}$  la dimensión de  $N_0$  en  $[x_{1i}]^*$  y sea  $m_{1i} = \text{Card}(M_{1i})$ . Pre-etiquetamos el nivel  $N_0$  de  $[x_{1i}]^*$  por el procedimiento descrito en la definición y notaciones 3.3.B.8, utilizando ahora las pre-etiquetas  $x_{1i}^1, x_{1i}^2, \dots, x_{1i}^{n_{1i}}$  para los no-maximales y  $x_{1i}^{-1}, \dots, x_{1i}^{-m_{1i}}$  para los puntos desconectados de  $[x_{1i}]^*$  (maximales en  $(Z, H)$ ), sustituyendo, así, la notación  $x_{00}^j$  de  $[x_{1i}]^*$  por la que le corresponde como punto del nivel  $N_1$  en  $(Z, H)$ , la pre-etiqueta  $x_{1i}^j$ .

Llamaremos dimensión de  $N_1$  al número  $n_1 = \sum_{i=1}^{r_1} n_{1i}$ ; análogamente, denotaremos por  $m_1$  al número  $m_1 = \sum_{i=1}^{r_1} m_{1i} = \text{Card}(M_1)$ .

### Ejemplo 3.3.B.11

En la siguiente figura se ilustran los pre-etiquetados del nivel  $N_0$  y  $N_1$  de un bosque en el que se hacen algunas contracciones

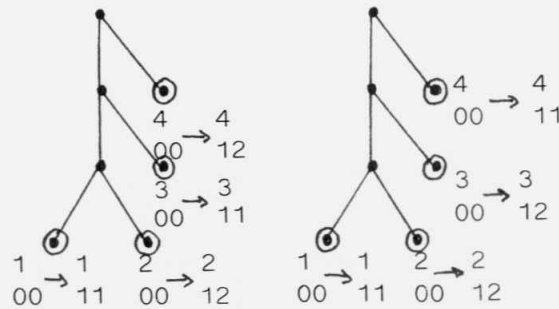


Los puntos (cuatro) del nivel  $N_1$ , en ambos árboles, se han fundido entre sí. Es de presuponer que también  $a = a'$ .

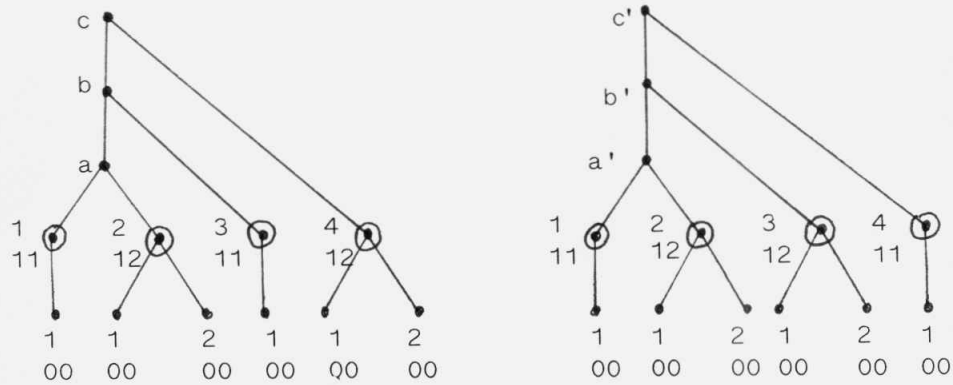
Observación 3.3.B.12

Pre-etiquetar por separado cada clase  $[x_{1i}]$  es esencial. Una vez pre-etiquetado el nivel  $N_0$  de  $(Z,H)$  no debemos pensar en el pre-etiquetado de los minimales de  $(Z-N_0, H/Z-N_0)$  como recurso para pre-etiquetar el nivel  $N_1$  de  $(Z,H)$ , pues en este caso, la pre-etiqueta  $x_{00}^j$  habría que traducirla por  $x_{1i}^j$  donde ahora  $i$  no es fijo y habría que definir qué clase  $1i$  hereda cada etiqueta  $x_{00}^j$ . Incluso, subsanada esta dificultad surgirían otras nuevas y éstas ya irremediables.

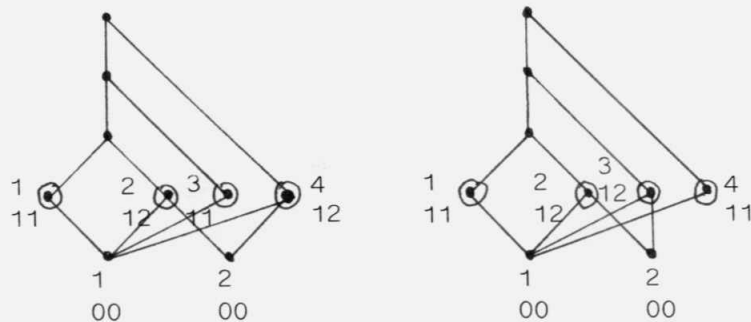
En el ejemplo anterior,  $(Z-N_0, Z/Z-N_0)$  sería



volviendo al bosque



contracción de los árboles



Hasta aquí las cosas van bien, pues estos árboles son isomorfos a los del ejemplo anterior. Sin embargo, en estos árboles hay 6 puntos en el nivel  $N_1$  con pre-etiquetas distintas por lo que la contracción del bosque no es minimal. Conseguir una contracción minimal por este procedimiento exigiría, no sólo definir el paso  $00 \rightarrow 1i$  en los subíndices, sino también definir una traducción,  $j \rightarrow k$ , del superíndice ( $3 \rightarrow 4$  y  $4 \rightarrow 3$  en nuestro ejemplo) que alteraría el orden de los siguientes y como consecuencia, en general, no obtendríamos un contraído canónico ni, lo que es peor, un contraído que se explote en el bosque de partida. Precisamente el ejemplo de arriba pone ésto de manifiesto: los puntos de la clase



en los dos árboles se deben poder identificar, pues son isomorfos con distinto siguiente, mientras que el tener siguiente en distinto nivel impide conservar este orden en el pre-etiquetado por este procedimiento.

Definición y notaciones 3.3.B.13.- (Pre-etiquetado del nivel  $N_p$ )

El procedimiento seguido para etiquetar los puntos del nivel  $N_1$  se extiende sin dificultad al resto de los niveles  $N_p$ , para  $p=1, \dots, k$ .

Como antes para cada  $x, y \in N_p$  diremos que  $x$  e  $y$  tienen clausuras isomorfas cuando los grafos inducidos  $(x, Z/\bar{x})$  e  $(\bar{y}, Z/\bar{y})$  son isomorfos. Esta relación de equivalencia divide a  $N_p$  en clases que designaremos por  $[x_{p1}], \dots, [x_{pr_p}]$ .

La representación gráfica de estas clases no es tan trivial como en 3.3.B.10, tampoco es tan sencillo ordenarlas, aunque esto

no impide etiquetar.

Los puntos de cada clase,  $[x_{pi}]$ , para  $i=1, \dots, r_p$ , se pre-etiquetan, considerados como brotes del bosque inducido  $[x_{pi}]^* = (G_{pi}, H/G_{pi})$ , donde  $G_{pi} = \bigcup_{x \in [x_{pi}]} x^*$ ; por el procedimiento descrito en 3.3.B.8, obteniendo las etiquetas  $x_{pi}^1, x_{pi}^2, \dots, x_{pi}^{n_{pi}}$  para los puntos conectados y  $x_{pi}^{-1}, \dots, x_{pi}^{-m_{pi}}$  para los desconectados, siendo:

$$n_{pi} = \dim(N_0) \text{ en } [x_{pi}]^* \text{ y } m_{pi} = \text{Card}(M \cap [x_{pi}])$$

$$\text{tambi\u00e9n denotaremos por } M_{pi} \text{ a } M \cap [x_{pi}] = M_p \cap [x_{pi}]$$

(Cada notaci\u00f3n  $x_{00}^j$  en 3.3.B.8 se traduce, como punto de nivel  $N_p$  y de la clase de clausura  $[x_{pi}]$ , por la pre-etiqueta  $x_{pi}^j$ ).

Llamaremos dimensi\u00f3n de  $N_p$ , y lo indicaremos por  $\dim(N_p)$  y por  $n_p$ , al n\u00famero  $n_p = \dim(N_p) = \sum_{i=1}^{r_p} n_{pi}$  que representa el n\u00famero m\u00ednimo de etiquetas necesarias para el nivel  $N_p$ . Tambi\u00e9n denotaremos por  $m_p = \sum_{i=1}^{r_p} m_{pi} = \text{Card}(M_p)$ .

El etiquetado es \u00fanico salvo automorfismos. Los automorfismos act\u00faan en cada  $[x_{pi}]^*$  por la igualdad de siguiente en los brotes y en los maximales.

Observaci\u00f3n 3.3.B.14

Obs\u00e9rvese que pudi\u00e9ramos haber pre-etiquetado los maximales de  $(Z, H)$  por separado, sin contemplar su clase de clausura en cada nivel, lo que les clasifica, y sin necesidad de contemplar tampoco los niveles. De haberlo hecho as\u00ed hubi\u00e9ramos obtenido un mayor n\u00famero de posibilidades para las preetiquetas, pues, si  $m = m_0 + m_1 + \dots + m_k$  entonces se tiene  $m! \geq m_0! \cdot m_1! \cdot \dots \cdot m_k!$  y si  $m_p = \sum_{i=1}^{r_p} m_{pi}$  entonces  $m_p! \geq \prod_{i=1}^{r_p} m_{pi}!$ .

En nuestro pre-etiquetado sobre los maximales actúa un número mínimo de automorfismos.

Nótese, también, que si  $p=k$ ,  $N_k$  son los puntos maximales de  $(Z,H)$  y por tanto, para cada clase  $[x_{ki}]$  de  $N_k$ ,  $[x_{ki}]^*$  es un grafo totalmente desconectado y sus pre-etiquetas son  $x_{ki}^{-j}$  con  $j=1,2,\dots,m_{ki}$ .

El número de etiquetas utilizado es  $n+m$ , siendo:

$$n = n_0 + \sum_{p=1}^{k-1} n_p = n_0 + \sum_{p=1}^{k-1} \left( \sum_{i=1}^{r_p} n_{pi} \right) = \sum_{p=0}^{k-1} \dim(N_p)$$

y

$$m = m_0 + \sum_{p=1}^k m_p = m_0 + \sum_{p=1}^k \left( \sum_{i=1}^{r_p} m_{pi} \right) = \text{Card}(M)$$

En el siguiente cuadro se recogen las etiquetas creadas y las condiciones que las caracterizan.

Recopilación de etiquetas 3.3.B.15

El bosque  $(Z,H)$  queda pre-etiquetado por niveles como sigue:

Nivel  $N_0$

$x_{00}^1, x_{00}^2, \dots, x_{00}^{n_0}$  ;  $n_0 = \dim(N_0)$  en  $(Z,H) = \max\{\text{Card}(\text{br}[x,y]), [x,y]$  es una rama de  $(Z,H)\}$

$x_{00}^{-1}, x_{00}^{-2}, \dots, x_{00}^{-m_0}$  ;  $m_0 = \text{Card}(M_0)$ , (puntos desconectados).

Nivel  $N_1$ : clases  $[x_{11}], [x_{12}], \dots, [x_{1r_1}]$  y para cada clase  $[x_{1i}]$ :

$x_{1i}^1, x_{1i}^2, \dots, x_{1i}^{n_{1i}}$  ;  $n_{1i} = \dim(N_0)$  en  $[x_{1i}]^* = (G_{1i}, H|G_{1i})$  con  $G_{1i} = \bigcup_{x \in [x_{1i}]} x^*$

$x_{1i}^{-1}, x_{1i}^{-2}, \dots, x_{1i}^{-m_{1i}}$  ;  $m_{1i} = \text{Card}(M_{1i}) = \text{Card}(M \cap [x_{1i}])$

con  $i = 1, \dots, r_1$

$$n_1 = \dim(N_1) = \sum_{i=1}^{r_1} n_{1i} \quad \text{y} \quad m_1 = \sum_{i=1}^{r_1} m_{1i} = \text{Card}(M_1)$$

Nivel  $N_p$  ; en general, para  $p = 1, 2, \dots, k-1$ .

clases  $[x_{p1}], [x_{p2}], \dots, [x_{pr_p}]$ , y para cada clase  $[x_{pi}]$ :

$$x_{pi}^1, x_{pi}^2, \dots, x_{pi}^{n_{pi}} ; \quad n_{pi} = \dim(N_0) \text{ en } [x_{pi}]^* = (G_{pi}, H/G_{pi}) \text{ con } G_{pi} = \bigcup_{x \in [x_{pi}]} x^*$$

$$x_{pi}^{-1}, x_{pi}^{-2}, \dots, x_{pi}^{-m_{pi}} ; \quad m_{pi} = \text{Card}(M_{pi}) = \text{Card}(M \cap [x_{pi}]).$$

con  $i = 1, \dots, r_p$

$$n_p = \dim(N_p) = \sum_{i=1}^{r_p} n_{pi} \quad \text{y} \quad m_p = \sum_{i=1}^{r_p} m_{pi} = \text{Card}(M_p)$$

Nivel  $N_k$  ; clases  $[x_{k1}], [x_{k2}], \dots, [x_{kr_k}]$  y para cada clase  $[x_{ki}]$ :

$$x_{ki}^{-1}, x_{ki}^{-2}, \dots, x_{ki}^{-m_{ki}} ; \quad m_{ki} = \text{Card}(M_{ki}) = \text{Card}(M \cap [x_{ki}])$$

con  $i = 1, \dots, r_k$

$$m_k = \sum_{i=1}^{r_k} m_{ki} = \text{Card}(M_k)$$

Finalmente:

$$n = n_0 + \sum_{p=1}^{k-1} n_p = \sum_{p=0}^{k-1} \dim(N_p)$$

$$m = \text{Card}(M)$$

Definición 3.3.B.16.- (Pre-etiquetado canónico de un bosque)

Denotaremos por E el conjunto de las  $n+m$  pre-etiquetas asignadas a los puntos del bosque  $(Z, H)$ , bajo las condiciones precisadas en las definiciones anteriores, que han sido recopiladas en el

cuadro anterior. Denotaremos por  $c:Z \rightarrow E$  la aplicación suprayectiva que asigna a cada punto del bosque,  $x \in Z$ , su pre-etiqueta  $x_{pi}^j \in E$  (bajo las condiciones mencionadas) y escribiremos  $c(x) = x_{pi}^j$ .

El pre-etiquetado de  $(Z,H)$  por  $E$  mediante la aplicación  $c$  es canónico por construcción (dada la unicidad (salvo automorfismo) en la asignación de pre-etiquetas a los puntos del bosque).

Teorema 3.3.B.17

La aplicación  $c:Z \rightarrow E$  del pre-etiquetado del bosque  $(Z,H)$  por  $E$  es una aplicación contractiva.

Probaremos las tres condiciones para aplicaciones contractivas dadas en el teorema 3.2.6. Si  $x,y \in Z$  son puntos con la misma pre-etiqueta, entonces, es obvio, por la construcción, que ni son maximales ni uno cubre al otro y, por tanto, se cumplen las dos primeras condiciones. Para la tercera es claro, también, que si  $x$  e  $y$  tienen la misma pre-etiqueta,  $c(x) = c(y)$ , los grafos inducidos en sus clausuras  $(\bar{x},H/\bar{x})$  y  $(\bar{y},H/\bar{y})$  son isomorfos. Pues bien, construiremos un isomorfismo  $\psi: (\bar{x},H/\bar{x}) \rightarrow (\bar{y},H/\bar{y})$  para el que  $c(z)=c(\psi(z)) \forall z \in \bar{x}$ .

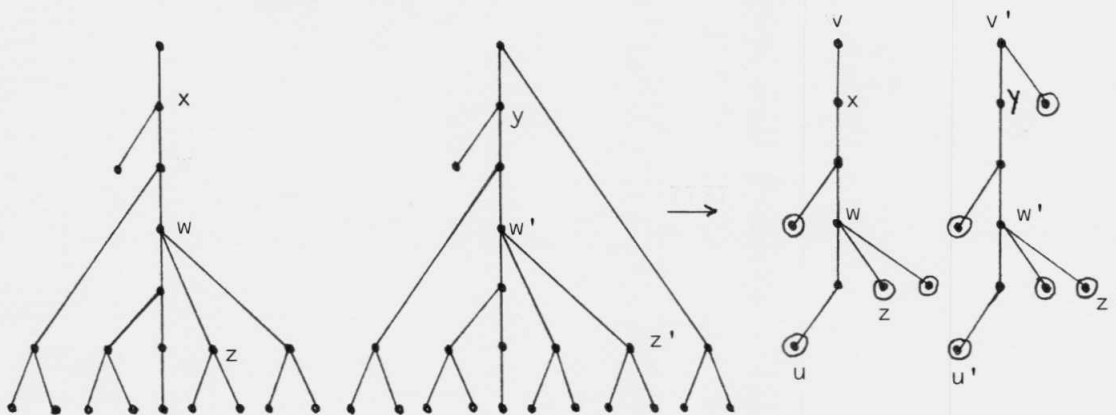
a) Si  $x,y \in N_1$  entonces  $\bar{x}-\{x\} \quad \bar{y}-\{y\} \subset N_0^1$ . Como estos puntos son brotes con siguiente en  $N_1$  no pueden ser comunes a ninguna otra rama principal y, en consecuencia, reciben las  $p$  primeras pre-etiquetas de las  $n_0$  necesarias en  $N_0$ , siendo  $p = \text{Card}(\bar{x}-\{x\}) = \text{Card}(\bar{y}-\{y\})$ . Estas pre-etiquetas son  $x_{00}^1, \dots, x_{00}^p$  tanto para los puntos de  $\bar{x}-\{x\}$  como para los de  $\bar{y}-\{y\}$ . Cualquier biyección entre  $\bar{x}-\{x\}$  y  $\bar{y}-\{y\}$  es un isomorfismo, pues los puntos son desconectados, en cuyo caso tomaremos la aplicación  $\psi: \bar{x}-\{x\} \rightarrow \bar{y}-\{y\}$  que identifica las pre-etiquetas de ambos conjuntos.



b) Si  $x, y \in N_q$ ,  $q > 1$  y  $z \in \bar{x}$  sea  $\psi: \bar{x} \rightarrow \bar{y}$  un isomorfismo cualquiera y  $\psi(z) = z' \in \bar{y}$  el homólogo de  $z$  por  $\psi$ .

Sean  $c(z) = x_{pi}^j$  y  $c(z') = x_{p'i}^{j'}$ , las pre-etiquetas de  $z$  y  $z'$ . Como  $\psi$  es un isomorfismo de grafos conserva la relación de adyacencia y, por tanto,  $\psi/\bar{z}$  es un isomorfismo entre los grafos inducidos en  $\bar{z}$  y  $\bar{z}'$ . Es decir,  $\bar{z}$  y  $\bar{z}'$  son de la misma clase de clausura y, en consecuencia,  $i=i'$  y, por ello,  $p=p'$  (nótese que si tienen igual clausura son del mismo nivel). Denotaremos esta clase de clausura por  $[x_{pi}]$ .

La siguiente figura nos servirá de guía en la prueba, que damos a continuación, de que  $j=j'$ .



En  $[x_{pi}]^*$ ,  $z, z' \in N_0$  y tienen pre-etiquetas  $x_{00}^j, x_{00}^{j'}$  respectivamente.

Como  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son árboles disjuntos, entonces  $\bar{x} \cap [x_{pi}]^*$  e  $\bar{y} \cap [x_{pi}]^*$  son disjuntos. Si  $z$  y  $z'$  son brotes, respectivamente, de las ramas principales  $[u, v] \in P_h$  y  $[u', v'] \in P_{h'}$ , con (presumiblemente)  $h \neq h'$ , entonces  $\bar{x} \cap [x_{pi}]^*$  y  $\bar{y} \cap [x_{pi}]^*$  son partes inferiores isomorfas de las ramas  $[u, v]$  y  $[u', v']$ , luego si  $z^{-\uparrow} \in N_q$  también  $z'^{-\uparrow} \in N_q$  y hay el mismo número de brotes con siguientes en niveles inferiores a  $N_q$  en las dos ramas y, por tanto, salvo el automorfismo que actúa sobre los brotes con siguientes en  $N_q$ ,  $z$  y  $z'$  ocupan

el mismo lugar entre los brotes de  $[x_{pi}]^*$ , luego  $j=j'$ .

c) Los índices  $j$  y  $j'$  coinciden salvo el automorfismo que actúa sobre los brotes de  $[x_{pi}]^*$  con siguiente en el nivel  $N_q$ . Esto exige corregir el isomorfismo  $\Psi$ , de forma que identifique las pre-etiquetas de los brotes mencionados con los de sus imágenes, mediante una permutación adecuada de dichos brotes. Y esto hay que realizarlo para cada par de puntos homólogos  $z$  y  $z'$  de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , de un modo ordenado por niveles y de abajo hacia arriba. Con más precisión: fijado un punto  $w \in N_l$ ,  $1 < q$ , para cada clase de clausura  $[x_{pi}]$ , con  $p < l$  e  $i$  cualquiera, se considera el conjunto  $A_{pi} = \{t \in [x_{pi}], t^{-1} = w\}$  y el  $A'_{pi} = \{t' \in [x_{pi}], t'^{-1} = w' = \Psi(w)\}$ .  $A_{pi}$  y  $A'_{pi}$  reciben el mismo conjunto de pre-etiquetas  $x_{pi}^{k+1} \dots x_{pi}^{k+a}$  siendo  $a = \text{Card}(A_{pi}) = \text{Card}(A'_{pi})$  y existe una permutación  $p : A_{pi} \rightarrow A'_{pi}$  tal que  $\Psi/A_{pi} \circ p$  identifica las etiquetas de los puntos de  $A_{pi}$  con las de sus imágenes en  $A'_{pi}$ . Esta operación se realiza para cada  $p < l$  y cada  $i$  tal que  $[x_{pi}]$  es una clase de clausura con siguiente en  $z$ . La operación se extiende a todos los puntos  $w$  del mismo nivel  $N_l$  y se recorren ordenadamente los niveles desde  $l=1$  hasta  $l=q-1$ . De todas estas correcciones resulta el isomorfismo  $\psi$  buscado.

Definición 3.3.B.18.- (Contracción canónica de un bosque)

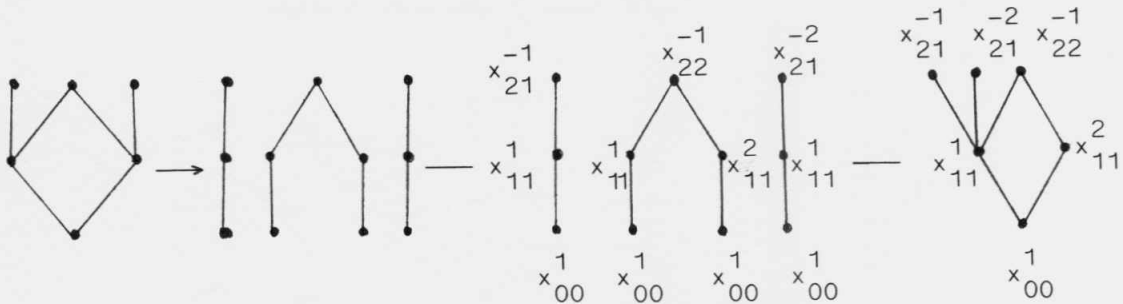
Sea  $(Z,H)$  un bosque pre-etiquetado canónicamente por  $E$  mediante la aplicación contractiva  $c:Z \rightarrow E$  de la definición 3.3.B.16

Sea  $K = \{(i,j) \in E \times E, (x,y) \in H \text{ y } c(x) = i, c(y) = j\}$ . El grafo  $(E,K)$  es, entonces, la  $c$ -contracción del bosque  $(Z,H)$  y le llamaremos contracción canónica de  $(Z,H)$ . El grafo  $(E,K)$  está, obviamente, etiquetado por  $E$ .

Observación 3.3.B.19

La construcción del pre-etiquetado canónico asegura que el grafo contraído  $(E,K)$  es un grafo con un mínimo número de puntos y arcos entre los grafos reducidos que se explotan en  $(Z,H)$ . Sin embargo, existen, otros grafos reducidos con el mismo número mínimo de puntos y arcos que también se explotan en  $(Z,H)$ .

La siguiente figura muestra un grafo reducido, su bosque explotado, este mismo bosque con el pre-etiquetado canónico y su contracción canónica, también, etiquetada.



Los dos grafos reducidos (no-bosques) de la figura tienen el mismo número de puntos y de arcos y son distintos.

Diremos, entonces, que la contracción canónica de un bosque es una contracción canónica minimal.

Observación 3.3.B.20

a) Si se ordenan en cadena los elementos,  $x_{pi}^j$ , de  $E$  (lo que podría conseguirse ordenando léxico gráficamente las ternas  $(p,i,j)$ , en este orden) dispondremos de un etiquetado natural del grafo contraído de tal manera que dicho grafo queda naturalmente ordenado. Si la ordenación se hace como se ha sugerido este paréntesis obtendremos, incluso, un grafo naturalmente ordenado por niveles.

b) El posible orden lexicográfico de las ternas  $(p,i,j)$  puede precisarse mucho más. El orden para la primera coordenada  $p$  es claramente el natural de 0 a  $k = \dim(Z,H)$ . El orden para la coordenada  $j$  es también natural, pues en igualdad de índices  $p$  e  $i$  se tienen las pre-etiquetas  $x_{pi}^{-m_{pi}}, \dots, x_{pi}^{-2}, x_{pi}^{-1}, x_{pi}^1, x_{pi}^2, \dots, x_{pi}^{n_{pi}}$  siendo  $m_{pi} = \text{Card}(M \cap [x_{pi}])$  y  $n_{pi} = \dim(N_0)$  en  $[x_{pi}]^*$ .

El orden para la coordenada  $i$  no es tan inmediato. Obsérvese que en igualdad de la coordenada  $p$  el índice  $i$  representa cualquier clase de clausura de longitud  $p$  lo que es tanto como decir que se trata de cualquier árbol de longitud  $p$ .

Una ordenación (total) de un conjunto de árboles se puede hacer como sigue:

1) Se clasifican los árboles por igualdad de longitudes.  $[n]$  puede representar los árboles de longitud  $n$ . Las clases  $[n]$  se ordenan naturalmente.

2) Hay un único árbol de longitud 0 que puede ser el primer elemento si está en el conjunto.

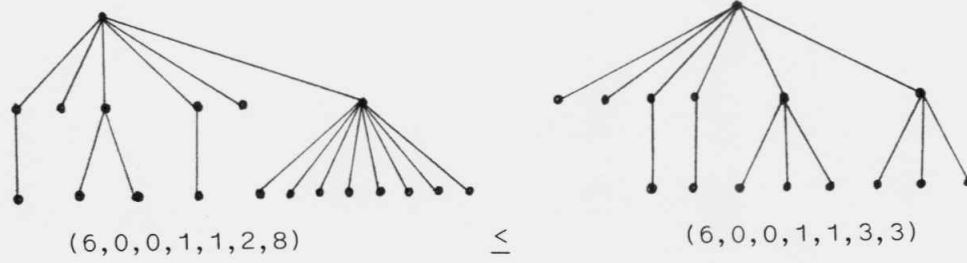
3) Los árboles de  $[1]$  se pueden ordenar según el orden natural de sus ingradados.

4) Para cada árbol de  $[2]$ , si  $x$  es su maximal y  $x^- \downarrow = \{x_1, \dots, x_r\}$  siendo  $r$  el ingrado de  $x$ , se puede tomar la  $r+1$ -upla  $(r, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  con  $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_r$ . Ahora podemos ordenar estas  $r+1$ -uplas lexicográficamente; donde los órdenes para las coordenadas  $\bar{x}_i$  son los de  $[1]$ .

5) Para cada árbol de  $[3]$ , si  $x$  es su maximal y  $x^- \downarrow = \{x_1, \dots, x_r\}$  siendo  $r$  el ingrado de  $x$  se toma la  $r+1$ -upla  $(r, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  con  $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_r$  y se ordenan éstas lexicográficamente; los órdenes para los  $\bar{x}_i$  son ahora los de  $[2]$ .

6) Se procede recurrentemente.

En la siguiente figura el árbol de la izquierda es menor que el de la derecha.



### 3.4. ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE GRAFOS REDUCIDOS ISO-EXPLORADOS

Retomamos aquí el orden definido (2.4.17) sobre el conjunto de grafos reducidos no-etiquetados que tienen el mismo desingularizado  $(Z,H)$ . Recordemos que  $(X,G) \leq (X',G')$  si existe un morfismo birracional  $\psi: (X',G') \rightarrow (X,G)$ . Hemos estudiado en este capítulo bajo qué condiciones una aplicación suprayectiva  $p: Z \rightarrow E$  (un pre-etiquetado) define una  $p$ -contracción de  $(Z,H)$  en  $(E,K)$ , es decir, bajo qué condiciones la aplicación  $p$ , llamada contractiva, es un morfismo birracional entre los grafos reducidos  $(Z,H)$  y  $(E,K)$ . También hemos dado un procedimiento constructivo para determinar canónicamente un elemento minimal del conjunto ordenado aludido anteriormente.

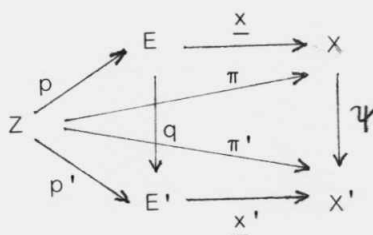
A este conjunto ordenado se le asocia por los procedimientos descritos en el capítulo I un grafo transitivo y antisimétrico y, en consecuencia, también su grafo reducido. El siguiente teorema aporta información sobre la estructura de este grafo reducido, al que denotaremos por  $\text{Iso}(Z,H)$ . Nótese que  $\text{Iso}(Z,H)$  tiene un sólo elemento si, y sólo si,  $(Z,H)$  no admite contracciones, es decir, si, y sólo si, es un bosque formado por un solo árbol en el que los puntos de  $N_0^1$  tienen el mismo siguiente.

#### Teorema 3.4.1

Si  $\psi: (X,G) \rightarrow (X',G')$  es un morfismo birracional de grafos reducidos, con  $\text{Card}(X) = m$  y  $\text{Card}(X') = n$ , entonces para cada  $p$ , con  $n < p < m$ , existe un grafo reducido  $(X'',G'')$ , con  $\text{Card}(X'') = p$ , y morfismos birracionales  $\psi_1: (X,G) \rightarrow (X'',G'')$  y  $\psi_2: (X'',G'') \rightarrow (X',G')$  tales que  $\psi_2 \circ \psi_1 = \psi$ .

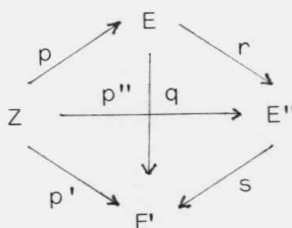
Bastará probarlo para el caso  $p = n+1$  ya que el caso general se deduce de éste usando recurrencia.

Sean  $\underline{x}:E \rightarrow X$  y  $\underline{x}':E' \rightarrow X'$ , respectivamente, etiquetados para los grafos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  que tienen por desingularización común un bosque  $(Z,H)$ . Dichos etiquetados inducen pre-etiquetados  $p:Z \rightarrow E$  y  $p':Z \rightarrow E'$  sobre el bosque  $(Z,H)$ . La aplicación  $\psi$  induce una aplicación suprayectiva  $q:E \rightarrow E'$  tal que  $q \circ p = p'$ . Podemos representar estas aplicaciones en el siguiente diagrama:

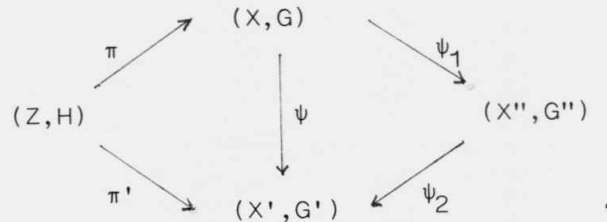


donde  $\pi = \underline{x} \circ p$  y  $\pi' = \underline{x}' \circ p'$  son los morfismos explosión que inducen los pre-etiquetados  $p$  y  $p'$ .

Se tiene en particular que dos puntos de  $Z$  que tengan igual pre-etiqueta relativa a  $E$  también tienen igual pre-etiqueta relativa a  $E'$ . Tomemos un par de puntos,  $x, y$ , en el máximo nivel posible de  $(Z,H)$  tales que tengan igual pre-etiqueta relativa a  $E'$ , es decir  $p'(x) = p'(y)$ , pero distinta pre-etiqueta relativa a  $E$ , es decir  $p(x) \neq p(y)$ . Sea  $E''$  el conjunto cociente de  $E$  obtenido identificando las pre-etiquetas, relativas a  $E$ ,  $p(x)$  y  $p(y)$ . La aplicación  $q:E \rightarrow E'$  factoriza a través de  $E''$ , es decir se tiene un diagrama:



Por construcción, es obvio que  $p'' = r \circ p$  es un pre-etiquetado contractivo (teorema 3.2.6) y, en consecuencia, tenemos el diagrama de grafos y morfismos birracinales:



De la estructura del grafo reducido  $\text{Iso}(Z,H)$  ya sabemos que tiene un único punto maximal, el bosque  $(Z,H)$ , y que pueden existir, sin embargo, varios puntos minimales con el mismo número de puntos. (Observación 3.3.B.19). Del teorema anterior se deducen inmediatamente las siguientes conclusiones.

Corolario 3.4.2

Para cada grafo reducido  $(X,G) \in \text{Iso}(Z,H)$ , con  $\text{Card}(X) = n$  y  $\text{Card}(Z) = m$ :

- a) Existe, al menos, un camino con fin maximal que empieza en  $(X,G)$  de longitud  $m-n$ .
- b) Todos los caminos con fin maximal que empiezan en  $(X,G)$  son de longitud  $m-n$ .

Corolario 3.4.3

Si  $(E,K)$  es el grafo contracción canónica minimal del bosque  $(Z,H)$  y  $\text{Card}(E) = n$  y  $\text{Card}(Z) = m$ , entonces  $m-n$  es la dimensión de  $\text{Iso}(Z,H)$ .



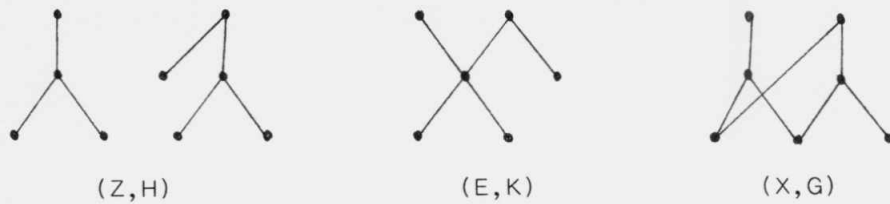
Corolario 3.4.4

a) Los arcos del grafo dual de  $\text{Iso}(Z,H)$  unen puntos que se encuentran en niveles consecutivos.

b) En el grafo dual de  $\text{Iso}(Z,H)$  los puntos de un mismo nivel son grafos del mismo cardinal (de puntos). Con más precisión, si  $(X,G) \in \text{Iso}(Z,H)$  es un grafo de nivel  $N_p$  en el dual de  $\text{Iso}(Z,H)$ , con  $\text{Card}(Z) = m$ , entonces  $\text{Card}(X) = m-p$ .

Observación 3.4.5

No se puede asegurar, sin embargo, que todos los minimales del grafo  $\text{Iso}(Z,H)$  tengan el mismo número de puntos. En el siguiente ejemplo se muestra un bosque, su contracción canónica minimal y una contracción minimal (no canónica) del bosque con distinto número de puntos que la contracción canónica minimal.



Ejemplo 3.4.6

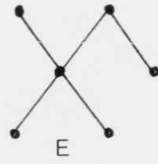
Para el bosque de la observación anterior se obtienen dos contracciones con 8 puntos:



otras dos contracciones con 7 puntos; una de ellas minimal:

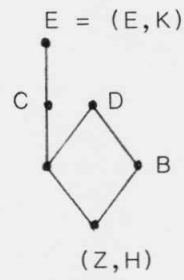
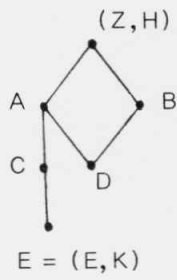


y una contracción con 6 puntos, la canónica minimal:



En la siguiente figura se muestra el grafo reducido  $\text{Iso}(Z,H)$

y su dual.





CAPITULO IV

EXPLOSIONES DE UN GRAFO ACICLICO



CAPITULO IV

EXPLOSIONES DE UN GRAFO ACICLICO

Nos proponemos extender el concepto de explosión de un grafo reducido dado en el capítulo II a grafos acíclicos para obtener, en particular, la explosión de un grafo transitivo y antisimétrico que puede ser considerado como un objetivo central en este trabajo.

En la explosión de un grafo reducido fue de vital importancia poder clasificar sus puntos en niveles para explotar punto a punto sin ambigüedades. Esta propiedad, en realidad, caracteriza a los grafos acíclicos (proposición 2.2.1 y definición 2.2.2) y será utilizada para explotarlos, también, punto a punto, por niveles. De ella se deduce la posibilidad de etiquetar ordenadamente sus puntos respetando el orden de los niveles, en cuyo caso los caminos son crecientes en las etiquetas de sus puntos, lo que también caracteriza a los acíclicos (proposición 2.2.5). Esta última propiedad fue utilizada en grafos reducidos para dar una cómoda definición alternativa, esta vez global, de explosión. Su importancia no se reduce a la comodidad de esta definición sino que, como vimos a continuación (teorema 2.3.22), nos permitió representar un grafo reducido, a través de sus caminos maximales, por una colección de etiquetas. En el fondo de esta cuestión lo que subyace verdaderamente importante es la representación de un grafo reducido por sus caminos maximales (corolario 2.3.17). Una extensión de esta representación a grafos acíclicos nos permitirá explotarlos globalmente.

Finalmente se da un concepto de explosión de un grafo acíclico en un punto con independencia de su nivel y de la forma del grafo en niveles inferiores y se establecen relaciones con los otros conceptos de explosión. Al resultado de aplicar sucesivas explosiones puntuales le llamaremos "explosión geométrica" debido a la conexión con los procesos geométricos dados en la introducción.

Una vez introducido el concepto de explosión geométrica, la desingularización de un grafo acíclico consistirá en una terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  donde  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es un bosque y  $\bar{G}$  da una estructura cúbica sobre dicho bosque. El nombre estructura cúbica se debe a la aparición, en general, de numerosos cubos de distintas dimensiones en el grafo  $(\tilde{X}, \bar{G})$ . De hecho, propiamente hablando, una estructura cúbica dará lugar a un complejo celular cuyas células son cubos, es decir un complejo cúbico, cuya estructura se detallará al final del capítulo.

La desingularización de un grafo acíclico se caracterizará mediante una cierta propiedad universal resultando, a grosso modo, la mínima estructura cúbica que se puede superponer, en un cierto sentido, al grafo acíclico de partida. La relación de equivalencia birracional geométrica, es decir aquella cuyas clases son los grafos acíclicos con igual desingularizado, se podrá analizar mediante los conceptos apropiados de aplicaciones y morfismos birracionales y birracionales geométricos.

#### 4.1. BOSQUE DE LAS CADENAS DE UN GRAFO ACICLICO

En la definición de explosión por niveles de un grafo reducido (definición 2.3.8) utilizamos el espacio topológico asociado u homólogo al grafo reducido que es, también, homólogo al grafo transitivo de éste. Como tanto el grafo reducido  $(X, G^r)$  como su transitivo y antisimétrico  $(X, G^t)$  representan a la clase de grafos acíclicos (definición 2.1.11) que son grafos parciales de  $(X, G^t)$ , el espacio topológico asociado  $(X, T)$  representa a toda la clase como vemos a continuación.

##### Proposición 4.1.1

Sea  $(X, G)$  un grafo acíclico,  $(X, G^t)$  el grafo transitivo representante de su clase,  $(X, G^r)$  su grafo reducido y  $(X, T)$  el espacio topológico asociado.

La familia  $\{\bar{x}, x \in X\}$ , donde  $\bar{x} = \{y, \text{hay un camino en } (X, G) \text{ que une } y \text{ con } x\} \cup \{x\}$  tomada como subbase de cerrados define en  $(X, G)$  el espacio topológico  $(X, T)$ .

Esto es claro, pues, dos puntos están unidos por un camino en  $(X, G^r)$  si, y sólo si, lo están en  $(X, G)$ , por lo que la familia  $\{\bar{x}, x \in X\}$  coincide con la que define  $(X, T)$  como espacio topológico asociado a  $(X, G^r)$ .

La unicidad de los representantes  $(X, G^t)$  y  $(X, G^r)$  para cada clase de acíclicos es lo que permite recuperar estos grafos a partir de su espacio topológico homólogo  $(X, T)$  por medio de las aplicaciones  $f$  y  $f^r$  (notaciones 1.2.4 y 2.3.3). Lamentablemente, los otros acíclicos distintos de estos no podrán ser recuperados a partir del espacio  $(X, T)$ , pues hay información en cada acíclico no representada en el espacio topológico, concretamente, todos aquellos



caminos que no están en el reducido. Esto nos obligará a introducir alguna variante en la definición de explosión por niveles de un acíclico.

En la definición de explosión de un grafo acíclico que daremos a continuación seguiremos paso a paso la definición de explosión de un grafo reducido, de este modo obviaremos las observaciones que sean comunes a ambas y señalaremos sólo aquellas que las distinguan.

En la observación 2.2.6 se ponía de manifiesto que si  $(X,G)$  es un grafo transitivo y antisimétrico todos sus grafos parcialmente reducidos tienen la misma partición en niveles. Es decir, dado un grafo acíclico, su partición en niveles coincide con la del grafo reducido representante de su clase.

#### Notaciones 4.1.2

Sea  $(X,G)$  un grafo acíclico,  $(X,G^t)$  su grafo transitivo y  $(X,G^r)$  su grafo reducido. Sean las aplicaciones  $t: \mathcal{G}_X^{Ac} \rightarrow \mathcal{G}_X^{TA}$  y  $r: \mathcal{G}_X^{Ac} \rightarrow \mathcal{G}_X^r$  que llevan cada acíclico en su transitivo y reducido, respectivamente. Si denotamos por  $g^a$  la aplicación que asocia a cada grafo acíclico el espacio topológico descrito en la proposición anterior,

$$g^a: \mathcal{G}_X^{Ac} \rightarrow \mathcal{T}_X^0 \text{ tal que } g^a(X,G) = (X,T),$$

es claro que  $g^a = g \circ t = g^r \circ r$ .

Supondremos que los puntos de  $(X,G)$  están etiquetados por  $E = \{1,2,\dots,n\}$ , siendo  $n = \text{Card}(X)$ , y que el grafo  $(X,G)$  está ordenado naturalmente. La clasificación de  $X$  en niveles quedará

descrita por  $X = \bigcup_{p=0}^k N_p$ , con  $N_p \neq \emptyset$ ,  $p = 0, 1, \dots, k$ , siendo  $k = \dim(X, G)$

Definición 4.1.3.- (Explosión del nivel  $N_0$ )

Llamaremos explotado del grafo acíclico  $(X, G)$  por los puntos del nivel  $N_0$  al grafo  $(X_1, G_1)$  dado por:

$$X_1 = (X - N_0) \cup \{x_{ij}, x_i \in N_0 \text{ y } (x_i, x_j) \in G\} \cup M_0$$

donde  $M_0$  son los maximales del grafo en  $N_0$ .

$$G_1 = (G - \{(x_i, x_j) \in G, x_{ij} \in X_1\}) \cup \{(x_{ij}, x_j), x_{ij} \in X_1\}$$

Describiremos esta transformación con la notación

$(X, G) \xleftarrow{\pi_0} (X_1, G_1)$  donde  $\pi_0$  representa al morfismo suprayectivo de grafos dado por

$\pi_0: X_1 \rightarrow X$  con  $\pi_0(x_{ij}) = x_i$  si  $x_i \in N_0 - M_0$  y  $(x_i, x_j) \in G$ , y  $\pi_0(x_i) = x_i$ ,  $\forall x_i \notin N_0 - M_0$ . A este morfismo le llamaremos explosión de  $(X, G)$  por los puntos del nivel  $N_0$ .

Definición 4.1.4.- (Explosión del nivel  $N_p$ )

Supondremos, ahora, que el grafo acíclico  $(X, G)$  es permisible en el nivel  $N_p$  con  $p < k$ , es decir, que el subgrafo inducido en  $\bigcup_{r=0}^p N_r$  es un bosque.

Sea  $x_h \in N_p$  un punto cualquiera sobre el que realizamos las siguientes transformaciones: si  $Og(x_h) = 0$ ,  $\bar{x}_h$  es una componente conexa de  $(X, G)$  que conservamos invariante; si  $Og(x_h) \neq 0$  construiremos un

Modelo 4.1.4.A

$M = (\bar{x}_h \cup \{y\}, G/\bar{x}_h \cup \{(x_h, y)\})$  que es reducido y sea  $(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h)$  su topología homóloga por  $g^r$ . De este modelo se

hacen las

Copias 4.1.4.B

Sea  $x_h^{\bar{\uparrow}} = x_h^{\uparrow} - \{x_h\}$  y  $(x_h^{\bar{\uparrow}}, T_d)$  la topología discreta en  $x_h^{\bar{\uparrow}}$ .  
 Construimos el espacio topológico producto  $(\bar{x}_h \cup \{y\}, T_h) \times (x_h^{\bar{\uparrow}}, T_d)$   
 que denotaremos por  $(\bar{x}_h \cup \{y\}_x \times x_h^{\bar{\uparrow}}, T_\pi)$ .

Conexión 4.1.4.C

Sea  $(X - \bar{x}_h, G/X - \bar{x}_h)$  el subgrafo inducido en el complementario de  $\bar{x}_h$  y sea  $(X - \bar{x}_h, T_c)$  su espacio topológico homólogo por  $g^a$ . Obsérvese que este grafo inducido es acíclico pero no reducido ni transitivo, en general.

Sea el conjunto de puntos  $H = (X - \bar{x}_h) \cup (\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{\bar{\uparrow}})$ , es decir, los puntos del complementario junto con los de la topología producto.

Se definen las funciones:

$f_1: (X - \bar{x}_h) \rightarrow H$  es la función identidad y

$f_2: (\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{\bar{\uparrow}}) \rightarrow H$  es tal que:

$$f_2(x_i, x_j) = (x_i, x_j), \quad \forall x_i \in \bar{x}_h, \quad \forall x_j \in x_h^{\bar{\uparrow}}$$

y

$$f_2(y, x_j) = x_j, \quad \forall x_j \in x_h^{\bar{\uparrow}}.$$

Se toma en  $H$  la topología final de los espacios topológicos  $(X - \bar{x}_h, T_c)$  y  $(\bar{x}_h \cup \{y\} \times x_h^{\bar{\uparrow}}, T_\pi)$  y las funciones  $f_1$  y  $f_2$ , espacio que denotaremos por  $(H, T_h^f)$ .

Obsérvese que a partir de este espacio topológico  $(H, T_h^f)$  no se recupera mediante  $f^r$  la parte no-reducida del grafo complementario de  $\bar{x}_h$ , por lo que tendremos que recurrir al siguiente artificio.

Recuperación del grafo 4.1.4.D

Denotaremos por  $(X_H, G_h)$  el grafo reducido asociado, mediante  $f^r$ , al espacio topológico  $(H, T_h^f)$ .

La recuperación de la parte no reducida se hace adjuntando a este grafo las cadenas suprimidas en la reducción.

Sea el grafo  $(X_H, G_h \cup G/X - \bar{x}_h)$  al que denotaremos, más abreviadamente, por  $(X_H, G_H)$  y al que llamaremos explotado de  $(X, G)$  por el punto  $x_h$  del nivel  $N_p$ .

Una vez realizadas estas transformaciones para todos los puntos  $x_h \in N_p$ , obtendremos como resultado final un grafo acíclico que denominaremos por  $(X', G')$  y que es independiente del orden en que se hayan tomado los puntos  $x_h$  del nivel  $N_p$ . Diremos que  $(X', G')$  es el explotado de  $(X, G)$  por los puntos del nivel  $N_p$ .

Si  $E$  es un conjunto totalmente ordenado que etiqueta a  $X$  y el grafo  $(X, G)$  está  $E$ -ordenado entonces su explotado por los puntos del nivel  $N_p$ ,  $(X', G')$ , queda  $E'$ -ordenado siendo  $E' = E'_1 \cup E'_2$  donde  $E'_1 = \{m \in E, x_m \notin \bar{N}_p = \bigcup_{x_1 \in N_p} \bar{x}_1\}$  y  $E'_2 = \{ij | i, j \in E \text{ y existe } x_h \in N_p \text{ tal que } x_i \in \bar{x}_h \text{ y } x_j \in \bar{x}_h^{\uparrow}\}$  y la biyección  $\underline{x}': E' \rightarrow X'$  es, obviamente,  $\underline{x}'(m) = x_m$  si  $m \in E'_1$  y  $\underline{x}'(ij) = (x_i, x_j)$  si  $ij \in E'_2$ .  $E'$  está totalmente ordenado por el orden lexicográfico y  $(X', G')$  está  $E'$ -ordenado. Los nuevos puntos  $(x_i, x_j)$  del explotado  $(X', G')$  les denotaremos en lo sucesivo por  $x_{ij}$ , de este modo  $\underline{x}'(ij) = x_{ij}$ .

La transformación que pasa del grafo acíclico  $(X, G)$  a su explotado por los puntos de nivel  $N_p$ ,  $(X', G')$ , es la explosión de  $(X, G)$  por los puntos de nivel  $N_p$  que describiremos con la notación

$(X,G) \xleftarrow{\pi_p} (X',G')$  aludiendo al morfismo suprayectivo de grafos  $\pi_p: X' \rightarrow X$  dado por  $\pi_p(x_m) = x_m$  si  $m \in E'_1$  y  $\pi_p(x_{ij}) = x_i$  si  $ij \in E'_2$ .

Nótese que el grafo no-etiquetado asociado a  $(X',G')$  y el morfismo  $\pi_p$  se pueden construir directamente a partir del grafo no-etiquetado asociado a  $(X,G)$ .

El grafo  $(X',G')$  es acíclico pero no reducido, en general, aunque sí es permisible en el nivel  $N_{p+1}$  por lo que podemos explotar por recurrencia en los niveles  $N_p$  para  $p=1, \dots, k-1$ .

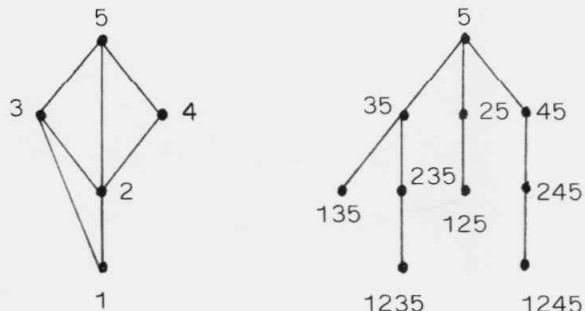
Definición 4.1.5.- (Bosque de las cadenas de un grafo acíclico)

Sea  $(X,G)$  un grafo acíclico ordenado naturalmente por  $E = \{1,2, \dots, n\}$ .  $X$  está clasificado en niveles por  $X = \bigcup_{p=0}^k N_p$  siendo  $k = \dim(X,G)$ . La  $\pi_0$ -explosión de  $(X,G)$  produce un grafo  $(X_1, G_1)$  y el morfismo  $\pi_0: (X_1, G_1) \rightarrow (X,G)$ . Y para cada  $i=1, \dots, k-1$ , la  $\pi_i$ -explosión produce, a partir de  $(X_i, G_i)$ , el grafo  $(X_{i+1}, G_{i+1})$  y el morfismo  $\pi_i: (X_{i+1}, G_{i+1}) \rightarrow (X_i, G_i)$ .

Llamaremos  $\pi$ -explotado o bosque de las cadenas del grafo acíclico  $(X,G)$ , y lo representaremos por  $(\tilde{X}, \tilde{G}) = (X_k, G_k)$ , al grafo resultante de la composición de explosiones sucesivas por los puntos de nivel  $N_p$  para  $p = 0, 1, \dots, k-1$ . Al correspondiente morfismo,  $\pi = \pi_0 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_{k-1} : (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  le llamaremos  $\pi$ -explosión de  $(X,G)$ .

Nótese que al igual que en la explosión de grafos reducidos el grafo  $\pi$ -explotado  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  está  $\tilde{E}$ -ordenado, donde las etiquetas de  $E$  son sucesiones crecientes de puntos de  $E$  y, en consecuencia, los puntos de  $X$  se denotarán de la forma  $x_{i_1 i_2 \dots i_q}$  donde  $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ .

En el siguiente ejemplo mostramos un grafo acíclico y su explotado con las correspondientes notaciones para sus puntos:



Siguiendo paralelamente lo obtenido en la explosión de un reducido podemos enunciar los siguientes resultados.

Proposición 4.1.6

a)  $x_i$  es maximal en  $(X, G)$  si y sólo si  $x_i$  es maximal en  $(X_p, G_p)$ , para cada  $p=1, \dots, k$ .

b) Si  $x_i \in N_p$  en  $(X, G)$  entonces los puntos de  $(\pi_0 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{p-1})^{-1}(x_i)$  están en el nivel  $N_p$  de  $(X_p, G_p)$ , para cada  $p=1, \dots, k$ .

c) Para cada  $x = x_{i_1 \dots i_q} \in \tilde{X}$  se tiene que:

$c_1)$   $Og(x) \leq 1$  y  $Og(x) = 0 \iff x \in M$  ( $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es un bosque)

$c_2)$   $Card(x^*) = q$ .

$c_3)$  Si  $y \in \tilde{X}$  y  $(x, y) \in \tilde{G}$  entonces  $y = x_{i_2 \dots i_q}$ .

Teorema 4.1.7

a) Existe una biyección canónica entre los puntos de  $\tilde{X}$  y los caminos con fin maximal de  $(X, G)$ .

b) Las etiquetas de los puntos del nivel  $\tilde{N}_0$  de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  describen el grafo  $(X, G)$  como sigue:

$$X = \{x_i \mid i \text{ es subíndice en la etiqueta de algún } x \in \tilde{N}_0 \subset \tilde{X}\}$$

$$G = \{(x_i, x_j) \mid \text{existe } x_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_q} \in \tilde{N}_0 \text{ en } (\tilde{X}, \tilde{G}) \text{ con } i=i_r \text{ y } j=i_{r+1}\}$$

En consecuencia, un grafo acíclico  $(X,G)$  queda unívocamente descrito por sus caminos maximales.

c)  $\tilde{X}$  está etiquetado, también, por el conjunto de etiquetas  $\hat{E}$  formado por aquellos subconjuntos naturalmente ordenados,  $A$ , de  $E$  tales que  $\underline{x}/A$  es un camino con fin maximal de  $(X,G)$ . La biyección del etiquetado  $\underline{x}_\pi: \hat{E} \rightarrow \tilde{X}$  viene dada por  $\underline{x}_\pi(A) = x_{i_1 \dots i_q} \in \tilde{X}$  si  $A = \{i_1, \dots, i_q\} \in \hat{E}$ .

Como ya vimos en la explosión de grafos reducidos, el apartado c) del teorema anterior sugiere la siguiente definición global, alternativa, de  $\pi$ -explosión y de bosque de las cadenas del grafo acíclico  $(X,G)$ .

Definición 4.1.8

Sea  $(X,G) \in \mathcal{G}_X^{AC}$  ordenado naturalmente por  $E = \{1, \dots, n\}$

siendo  $\underline{x}: E \rightarrow X$  la biyección del etiquetado.

· Llamaremos, también, bosque de las cadenas de  $(X,G)$  al grafo  $(\hat{X}, \hat{G})$  donde  $\hat{X} = C^M(X,G)$  y

$$\hat{G} = \{(s, s') \in C^M(X,G) \times C^M(X,G) \text{ tal que } \text{long}(s) \geq 1 \text{ y el camino } s' \text{ es igual al camino } s \text{ menos el primer elemento}\}$$

Es decir,  $(s, s') \in \hat{G}$  si, y sólo si, siendo  $s = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q} \in \hat{X}$  se tiene  $q \geq 2$  y  $s' = x_{i_2} \dots x_{i_q}$ .

El conjunto  $\hat{E}$  del teorema anterior es un conjunto de etiquetas para  $\hat{X}$ , la biyección  $\hat{x}:\hat{E} \rightarrow \hat{X}$  es  $\hat{x}(\{i_1, \dots, i_q\}) = x_{i_1} \dots x_{i_q}$  y el grafo  $(\hat{X}, \hat{G})$  está  $\hat{E}$ -ordenado.

Al morfismo de grafos  $\hat{\pi}:(\hat{X}, \hat{G}) \rightarrow (X, G)$  dado por  $\hat{\pi}(s) = x_{i_1}$  siendo  $s = x_{i_1} \dots x_{i_q}$  le llamaremos  $\hat{\pi}$ -explosión de  $(X, G)$ .

Nótese que el punto  $x_{i_1 i_2 \dots i_q}$  de  $\tilde{X}$  se corresponde con el camino  $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \dots x_{i_q}$  de  $C^M(X, G) = \tilde{X}$ .

Como también vimos en la explosión de grafos reducidos se puede determinar un grafo acíclico por un conjunto de etiquetas y se pueden caracterizar los conjuntos de etiquetas de los grafos acíclicos como vemos a continuación.

Teorema 4.1.9

Sea  $E = \{1, \dots, n\}$  y  $A \subset \mathcal{P}(E)$ . Supondremos para todo  $A \in \mathcal{A}$ , que  $A$  está ordenado naturalmente. Entonces  $\mathcal{A}$  determina un grafo acíclico  $(X, G)$  para el cual  $\mathcal{A}$  es el conjunto de etiquetas de los puntos de  $\tilde{N}_0$  de su bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

- a)  $E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
- b) Si  $p$  es el primer elemento de  $A$  y  $p \in B$  con  $B \in \mathcal{A}$ , entonces  $p$  es el primer elemento de  $B$ . Y si  $m$  es el último elemento de  $A$  y  $m \in B$  con  $B \in \mathcal{A}$ , entonces  $m$  es el último elemento de  $B$ .

En este caso  $X = E$  y  $(p, q) \in G$  si, y sólo si, existe  $A$  con  $p, q \in A$  tal que  $q$  es el siguiente a  $p$  en  $A$ .



La condición c) del teorema 2.3.22 que imponía la reducción del grafo no es necesaria aquí.

Si  $E$  y  $A$  descritos en el teorema anterior verifican las condiciones a), b) y la siguiente condición:

c) Si  $N_0 = \{\text{primeros elementos de los conjuntos } A \in A\}$  y  $M = \{\text{últimos elementos de los conjuntos } A \in A\}$  y si  $B = \{p_1, \dots, p_m\}$  es un subconjunto naturalmente ordenado de  $E$  tal que  $p_1 \in N_0$  y  $p_m \in M$  y para cada  $j = 1, 2, \dots, m-1$ , existe  $A_j \in A$  con  $p_j, p_{j+1} \in A_j$  y tal que  $p_{j+1}$  es el siguiente a  $p_j$  en  $A_j$ , entonces  $B \in A$ ,

entonces, existe un, y sólo un, grafo reducido  $(X, G)$  con  $\text{Card}(X) = n$  y un, y sólo un, etiquetado  $\underline{x}: E \rightarrow X$  tal que  $(X, G)$  está  $E$ -ordenado y tal que  $A$  es el conjunto de etiquetas de  $\tilde{N}_0$  en el bosque de las cadenas  $(X, G)$ .

De un modo análogo a como se hizo para grafos reducidos en el teorema 2.3.26 podríamos dar una caracterización de etiquetas ordenadas por longitudes que representarían a los puntos del nivel  $\tilde{N}_0$  del bosque de las cadenas de un grafo acíclico naturalmente ordenado por niveles.

Los  $\pi$ -explotados de grafos acíclicos son la misma clase de objetos que obteníamos al explotar grafos reducidos, bosques aquí llamados bosques de las cadenas. Los puntos del bosque de las cadenas representan, como hemos visto y al igual que en la explosión de grafos reducidos, caminos con fin maximal del grafo acíclico de partida. Esta es la razón por la que, también, disponemos aquí de una propiedad universal para la  $\pi$ -explosión y por la que, también, podemos hablar de aplicaciones y morfismos birracionales.

Diremos, al igual que en grafos reducidos, que el bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es el desingularizado del grafo acíclico  $(X, G)$ . El concepto de morfismo dominante se extiende, obviamente, a grafos acíclicos. Se tiene entonces:

Teorema 4.1.10

Si  $\psi: (X, G) \rightarrow (X', G')$  es un morfismo dominante de grafos acíclicos y  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X, G)$  y  $\pi': (\tilde{X}', \tilde{G}') \rightarrow (X', G')$  son sus desingularizaciones respectivas, entonces existe un único morfismo de grafos  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} (X, G) & \xrightarrow{\psi} & (X', G') \\ \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\ (\tilde{X}, \tilde{G}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (\tilde{X}', \tilde{G}') \end{array}$$

siendo el morfismo  $\tilde{\psi}$ , también, dominante.

La construcción de  $\tilde{\psi}$  es igual que en el teorema 2.4.6

Corolario 4.1.11.- (Propiedad universal)

Si  $(X, G)$  es un grafo acíclico y  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X, G)$  su explosión, entonces para todo bosque  $(Z, H)$  y todo morfismo  $\psi: (Z, H) \rightarrow (X, G)$  existe un único morfismo  $\psi': (Z, H) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{G})$  tal que  $\pi \circ \psi' = \psi$ . El morfismo  $\psi'$  es, también, dominante.

Las aplicaciones racionales dominantes entre grafos acíclicos seguirán siendo los morfismos dominantes antes sus desingularizados, aunque podrán caracterizarse en términos de los acíclicos haciendo referencia a los caminos con fin maximal.

Teorema 4.1.12

Si  $(X,G)$ ,  $(X',G')$  son grafos acíclicos y  $Z$  es una correspondencia tal que para cada  $x \in X$ ,  $Z[x] \subset X'$  y para cada camino con fin maximal en  $(X,G)$ ,  $c = x_1x_2 \dots x_q$  se tiene  $Z(c) \in Z[x_1]$ , que cumple las propiedades

1)  $\text{Card } Z[x] \geq 1 \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall x \in M, \text{Card } Z[x] = 1 \text{ y } Z[x] \in M'$ .

2) Todo elemento de  $Z[x]$  es del tipo  $Z(c)$  para algún camino con fin maximal  $c$  que comience en  $x$ .

3) Si  $(x_0, x_1) \in G$  y  $c = x_1x_2 \dots x_q$  es un camino con fin maximal en  $(X,G)$  entonces, llamando  $c'$  al camino  $x_0x_1 \dots x_q$ , se tiene  $Z(c') = Z(c)$  o bien  $(Z(c'), Z(c)) \in G'$ , entonces, existe una única aplicación racional

$$\Psi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}') \text{ que induce la correspondencia } Z.$$

Los morfismos dominantes se pueden ver, entonces, como aplicaciones racionales dominantes sin puntos de indeterminación.

Los isomorfismos de la categoría de grafos acíclicos y aplicaciones racionales dominantes les llamaremos aplicaciones birracionales y cuando éstas sean morfismos les llamaremos morfismos birracionales.

Obviamente, los morfismos birracionales entre grafos acíclicos son suprayectivos en los puntos y en los arcos, lo que permite definir una relación de orden entre los grafos acíclicos que tienen el mismo bosque de las cadenas.

Definición 4.1.13

Sea  $(Z,H)$  un bosque no etiquetado y sean  $(X,G)$  y  $(X',G')$  grafos no-etiquetados que se desingularizan en  $(Z,H)$ . Diremos que

$(X,G) \leq (X',G')$  si existe un morfismo birracional  $\psi:(X',G') \rightarrow (X,G)$ .

En la explosión de un grafo reducido el etiquetado no era necesario para la obtención del bosque explotado. Hay una relación estrictamente morfológica entre un grafo reducido y su explotado, lo que permitió hablar de contracciones de un bosque. Ahora un bosque puede ser visto como el bosque de las cadenas de un grafo acíclico y puede ser contraído como tal, de un modo análogo a como hicimos con los grafos reducidos. Después de las observaciones realizadas en la sección 3.2 y con los conceptos allí precisados podemos enunciar la siguiente réplica al teorema 3.2.6 de caracterizaciones de p-contracciones.

Como en el capítulo anterior, si  $(Z,H)$  es un bosque pre-etiquetado por  $E$  mediante la aplicación suprayectiva  $p:Z \rightarrow E$  y  $K = \{(i,j) \in ExE, \text{ existe } (x,y) \in H \text{ con } p(x) = i, p(y) = j\}$ , diremos que  $p$  es una aplicación contractiva acíclica del bosque  $(Z,H)$  si, y sólo si,  $(E,K)$  es un grafo acíclico etiquetado por  $E$  cuyo bosque de las cadenas  $(\tilde{E},\tilde{K})$  pre-etiquetado por  $E$  es el bosque  $(Z,H)$ . También diremos que  $(E,K)$  es la p-contracción acíclica del bosque  $(Z,H)$ .

#### Teorema 4.1.14

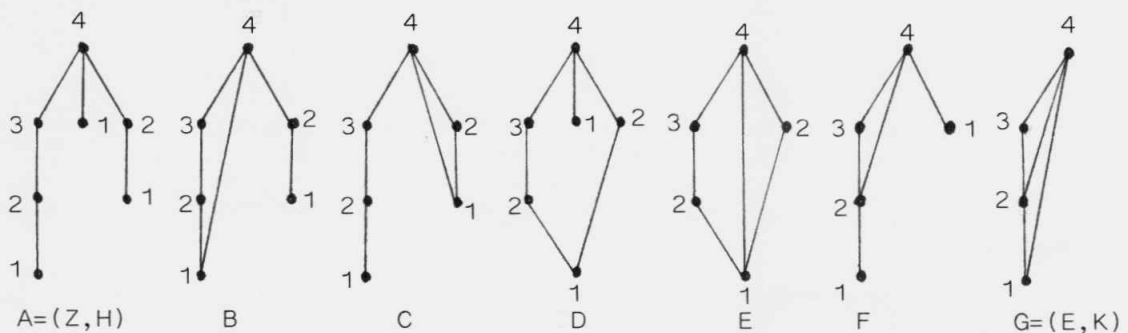
Si  $(Z,H)$  es un bosque  $E$ -pre-etiquetado por  $p:Z \rightarrow E$  y  $K$  el conjunto de arcos dado arriba, entonces  $(E,K)$  es la  $p$ -contracción acíclica de  $(Z,H)$  si, y sólo si,  $\forall x,y \in Z$  con  $p(x) = p(y)$  se verifican las siguientes condiciones:

- 1)  $x$  e  $y$  no son maximales.
- 2)  $x$  e  $y$  no tienen el mismo siguiente.

3) Existe un isomorfismo de grafos  $\psi:(\bar{x},H/\bar{x}) \rightarrow (\bar{y},H/\bar{y})$  tal que  $p(z) = p(\psi(z)), \forall z \in \bar{x}$ .

Se ha modificado la condición 2) del teorema 3.2.6, "ni  $x$  cubre a  $y$ , ni  $y$  cubre a  $x$ ", que caracterizaba la reducción del grafo contraído, por esta condición 2) necesaria para la contracción. Las condiciones 1) y 3) siguen siendo necesarias para que el grafo contraído  $(E,K)$  se explote en el bosque  $(Z,H)$ .

En la siguiente figura se muestra un bosque y todas sus posibles contracciones como bosque de las cadenas de un grafo acíclico. El pre-etiquetado mostrado en el bosque de partida da lugar a la  $p$ -contracción representada por el último de los grafos acíclicos mostrados,  $G$ . Los demás "pre-etiquetados" son caprichosos:



Obsérvese que, a excepción del propio bosque de las cadenas,  $A$ , sólo el grafo del centro,  $D$ , es reducido, los demás son acíclicos no reducidos.

Este teorema de caracterización de  $p$ -contracciones acíclicas de un bosque nos va a permitir describir con más precisión la estructura de orden del conjunto de grafos acíclicos con un mismo desingularizado definida en 4.1.13.

La construcción de un grafo acíclico canónico y con un mínimo número de puntos que tenga por desingularizado un bosque dado

(Z,H) es más sencilla que la realizada para grafos reducidos. La contracción debe seguir haciéndose por niveles identificando puntos de la misma clausura bajo la condición global expresada como condición 3) en el teorema 4.1.14 (necesaria para que el contraído se explote en el bosque dado) a excepción de los puntos maximales (que deben tener pre-etiquetas distintas) y de los puntos con el mismo siguiente, condición esta última que simplifica notablemente la construcción del contraído minimal. Al no tener que considerar la condición "ni x cubre a y, ni y cubre a x" que aseguraba que el contraído fuera reducido, nos evitamos el tener que hablar de brotes y de ramas brotadas para caracterizar el número mínimo de pre-etiquetas necesarias en el nivel  $N_0$ . Ahora basta clasificar los puntos del nivel  $N_0$  por la relación "tener el mismo siguiente" y entonces  $t_0 =$  máximo de los cardinales de las clases de equivalencia de la relación "tener el mismo siguiente" es el número mínimo de pre-etiquetas para los puntos del nivel  $N_0$ . Estas pre-etiquetas pueden ser  $x_{00}^1, x_{00}^2, \dots, x_{00}^{t_0}$  como puntos de nivel  $N_0$  y de clase de clausura 0. Si  $p \leq t_0$  y hay p puntos de  $N_0$  con el mismo siguiente (independientemente de cuál sea éste) se les asignan las p primeras etiquetas  $x_{00}^1, x_{00}^2, x_{00}^p$ . En niveles  $N_p$ , con  $p \geq 1$ , se clasifican sus puntos por clausuras isomorfas como hicimos para la contracción canónica reducida. Para cada clase  $[x_{pi}]$  se considera igualmente el subgrafo inducido por (Z,H) en  $G_{pi} = \bigcup_{x \in [x_{pi}]} x^*$ , es decir, el bosque  $[x_{pi}]^* = (G_{pi}, H/G_{pi})$ . El nivel  $N_0$  del bosque  $[x_{pi}]^*$  son exactamente los puntos de la clase  $[x_{pi}]$  en (Z,H), y puede clasificarse por la relación "tener el mismo siguiente". Podemos llamar  $t_{pi}$  al número de pre-etiquetas necesarias para los puntos de la

clase de clausura  $[x_{pi}]$  y denotarlos por  $x_{pi}^1, x_{pi}^2, \dots, x_{pi}^{t_{pi}}$ . Los máximos, como hicimos con la contracción reducida, se pre-etiquetan por separado de la misma manera. De este modo disponemos del siguiente cuadro de pre-etiquetas:

Recopilación de pre-etiquetas 4.1.15

El bosque  $(Z, H)$  queda pre-etiquetado por:

Nivel  $N_0$ :

$x_{00}^1, \dots, x_{00}^{t_0}$  ;  $t_0 =$  máximo número de puntos de  $N_0$  con igual siguiente.

$x_{00}^{-1}, \dots, x_{00}^{-m_0}$  ;  $m_0 = \text{Card}(M_0)$ .

Para cada  $p = 1, 2, \dots, k-1$  se tiene:

Nivel  $N_p$  : clases de clausura  $[x_{p1}], \dots, [x_{pr_p}]$  y para cada  $[x_{pi}]$ :

$x_{pi}^1, \dots, x_{pi}^{t_{pi}}$  ;  $t_{pi} =$  máximo número de puntos de  $N_0$  en  $[x_{pi}]^*$  con igual siguiente.

$x_{pi}^{-1}, \dots, x_{pi}^{-m_{pi}}$ ,  $m_{pi} = \text{Card}(M_{pi}) = \text{Card}(M \cap [x_{pi}]^*)$

con  $i = 1, \dots, r_p$

$$t_p = \sum_{i=1}^{r_p} t_{pi} \quad \text{y} \quad m_p = \sum_{i=1}^{r_p} m_{pi} = \text{Card}(M_p)$$

Nivel  $N_k$  : clases de clausura  $[x_{k1}], \dots, [x_{kr_k}]$  y para cada  $[x_{ki}]$ :

$x_{ki}^{-1}, \dots, x_{ki}^{-m_{ki}}$  ;  $m_{ki} = \text{Card}(M_{ki}) = \text{Card}(M \cap [x_{ki}])$

con  $i = 1, \dots, r_k$

$$m_k = \sum_{i=1}^{r_k} m_{ki} = \text{Card}(M_k)$$

Finalmente,  $t = t_0 + \sum_{p=1}^{k-1} t_p$  y  $m = \text{Card}(M)$

Estas pre-etiquetas son, en su descripción genérica, las mismas que las recopiladas en 3.3.B.15 para la contracción canónica reducida, solamente cambia el significado de los  $t_0$  y  $t_{pi}$ .

Si denotamos por  $E$  el conjunto de estas  $t+m$  pre-etiquetas la aplicación  $c:Z \rightarrow E$  que asigna a cada punto del bosque,  $x \in Z$ , su pre-etiqueta,  $x_{pi}^j \in E$ , es un pre-etiquetado sobre  $Z$  (por ser suprayectiva) y es canónico por construcción (salvo los automorfismos que actúan sobre los puntos de la misma clase de clausura con igual siguiente).

#### Teorema 4.1.16

La aplicación  $c:Z \rightarrow E$  mencionada anteriormente es una aplicación contractiva.

Probaremos las tres condiciones para aplicaciones contractivas acíclicas dadas en el teorema 4.1.14 siguiendo la prueba del teorema homólogo para grafos reducidos dada en 3.3.B.17. Si  $x, y \in Z$  tienen la misma pre-etiqueta, entonces, por construcción, ni son maximales ni tienen igual siguiente.

Como  $c(x) = c(y)$ , los grafos inducidos en sus clausuras son isomorfos. Construiremos un isomorfismo  $\psi: (\bar{x}, H/\bar{x}) \rightarrow (\bar{y}, H/\bar{y})$  para el que  $c(z) = c(\psi(z))$ ,  $\forall z \in \bar{x}$ .

a) Si  $x, y \in N_1$ , cualquier biyección entre  $\bar{x} - \{x\}$  e  $\bar{y} - \{y\}$  es un isomorfismo y basta tomar la aplicación  $\psi: \bar{x} - \{x\} \rightarrow \bar{y} - \{y\}$  que identifica las pre-etiquetas de ambos conjuntos.

b) Si  $x, y \in N_q$ ,  $q > 1$  y  $z \in \bar{x}$ , sea  $\psi: \bar{x} \rightarrow \bar{y}$  un isomorfismo cualquiera y  $\psi(z) = z' \in \bar{y}$ . Sean  $c(z) = x_{pi}^j$  y  $c(z') = x'_{pi}^j$  (pues es obvio que  $z$  y  $z'$  son del mismo nivel y misma clase de clausura),



probaremos que  $j=j'$ . Pero esto es claro, pues en  $[x_{pi}]^*$ ,  $z, z' \in N_0$  y tienen siguientes respectivos  $w$  y  $w'$  (ver figura en 3.3.B.17). Como los subgrafos inducidos en  $\bar{w}$  y  $\bar{w}'$  son isomorfos, hay el mismo número de puntos de la clase  $[x_{pi}]$  con siguiente en  $w$ , que con siguiente en  $w'$  y, en consecuencia, salvo los automorfismos que actúan sobre estos puntos, a  $z$  y  $z'$  se les asigna el mismo superíndice:  $j=j'$ . En el apartado c) de 3.3.B.17 está construido con precisión el isomorfismo  $\psi$  como producto de sucesivas correcciones del isomorfismo  $\psi: \bar{x} \rightarrow \bar{y}$  de partida para cada  $x, y \in N_q$ .

Definición 4.1.17.-(Contracción acíclica canónica de un bosque)

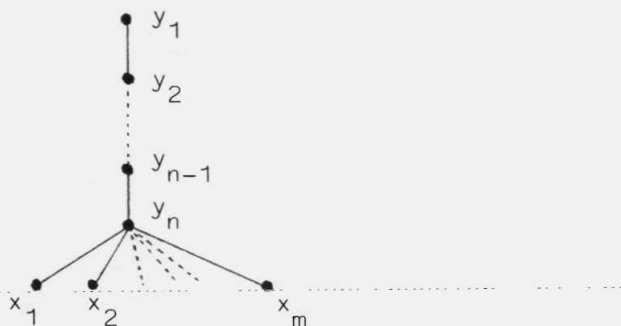
Si  $(Z, H)$  es un bosque pre-etiquetado canónicamente por la aplicación contractiva  $c: Z \rightarrow E$  definida anteriormente y  $K = \{(i, j) \in E \times E, (x, y) \in H \text{ y } c(x) = i, c(y) = j\}$ , llamaremos contracción acíclica canónica de  $(Z, H)$  al grafo  $(E, K)$ .

Por construcción,  $\text{Card}(E) = t+m$  es mínimo para todas las posibles contracciones de  $(Z, H)$ , sin embargo hay otros grafos acíclicos con el mismo número de puntos y de arcos que  $(E, K)$  que también se explotan en  $(Z, H)$  como ya vimos en la observación 3.3.B.19.

Estamos ya en condiciones de describir con más precisión la estructura de orden del conjunto de grafos acíclicos con un mismo desingularizado  $(Z, H)$ . Como en el caso de los reducidos, a este conjunto ordenado se le asocia un espacio topológico  $T_0$  y un grafo acíclico y transitivo y, en consecuencia, también, su grafo reducido al que denotaremos por  $\text{Iso}_A(Z, H)$ .

Es claro que  $\text{Iso}(Z, H) \subset \text{Iso}_A(Z, H)$ . Ahora,  $\text{Iso}_A(Z, H)$  tiene un sólo elemento, el propio  $(Z, H)$ , si, y sólo si,  $(Z, H)$  no admite

contracciones acíclicas, es decir, si, y sólo si, es un bosque formado por un solo árbol con todos sus brotes con el mismo siguiente en el nivel  $N_1$ . Es decir, es de la forma



Como en grafos reducidos, se puede enunciar el siguiente teorema que aporta gran cantidad de información sobre la estructura del conjunto  $\text{Iso}_A(Z, H)$ .

Teorema 4.1.18

Si  $(X, G) \rightarrow (X', G')$  es un morfismo birracional de grafos **acíclicos**, con  $\text{Card}(X) = m$  y  $\text{Card}(X') = n$ , entonces para cada  $p$ , con  $n < p < m$ , existe un grafo **acíclico**  $(X'', G'')$  con  $\text{Card}(X'') = p$ , y existen morfismos birracionales  $\psi_1 : (X, G) \rightarrow (X'', G'')$  y  $\psi_2 : (X'', G'') \rightarrow (X', G')$  tales que  $\psi_2 \circ \psi_1 = \psi$ .

De este teorema y de los resultados descritos anteriormente se obtienen las siguientes conclusiones:

Corolarios 4.1.19

- a) El bosque  $(Z, H)$  es el único punto maximal de  $\text{Iso}_A(Z, H)$ .
- b) Para cada grafo acíclico  $(X, G) \in \text{Iso}_A(Z, H)$ , con  $\text{Card}(X) = n$  y  $\text{Card}(Z) = m$ , se tiene:
  - $b_1$ ) Existe, al menos, un camino con fin maximal que empieza en  $(X, G)$  de longitud  $m - n$ .

b<sub>2</sub>) Todos los caminos con fin maximal que empiezan en  $(X,G)$  son de la misma longitud  $m-n$ .

c) Si  $(E,K)$  es la contracción acíclica canónica minimal del bosque  $(Z,H)$  y  $\text{Card}(E) = n$  y  $\text{Card}(Z) = m$ , entonces  $m-n$  es la dimensión de  $\text{Iso}_A(Z,H)$ .

d) En el grafo dual de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  los puntos de un mismo nivel son grafos con el mismo número de puntos. Además, si  $(X,G) \in \text{Iso}_A(Z,H)$  es un grafo de nivel  $N_p$  en el dual de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  y  $\text{Card}(Z) = m$ , entonces  $\text{Card}(X) = m-p$ .

#### Observación 4.1.20

a) Es claro que  $\text{Iso}(Z,H)$ , e  $\text{Iso}_A(Z,H)$  son grafos conexos, pues tienen un único maximal  $(Z,H)$ .  $\text{Iso}(Z,H)$  es, entonces, un subgrafo conexo de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  con el mismo maximal. No se puede decir, sin embargo, que  $\text{Iso}(Z,H)$  sea un grafo parcial pero si que es un subgrafo inducido de  $\text{Iso}_A(Z,H)$ . En general, el cardinal de la contracción acíclica canónica minimal de  $(Z,H)$  es menor que el de la contracción canónica minimal reducida.

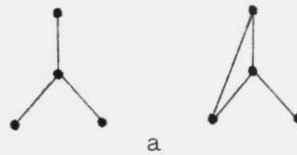
b) Si  $(X,G) \in \text{Iso}_A(Z,H)$  es un grafo no-reducido y  $\psi: (X,G) \rightarrow (X',G')$  es un morfismo birracional, entonces  $(X',G')$  es un grafo no-reducido, ya que  $\psi$  conserva los niveles de los puntos. En consecuencia, en  $\text{Iso}_A(Z,H)$  no hay arcos  $(x,y)$  con  $x$  reducido e  $y$  no reducido y, por tanto, si hay un camino en  $\text{Iso}_A(Z,H)$  que une dos grafos reducidos, todos los puntos del camino son grafos reducidos. Esta propiedad la referiremos diciendo que el subconjunto  $\text{Iso}(Z,H)$  es un subconjunto continuo de  $\text{Iso}_A(Z,H)$ . Como por otro lado  $\text{Iso}(Z,H)$  es un subgrafo inducido de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  diremos, también, que es un subgrafo inducido continuo.

Estas observaciones se ponen de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.21

En el ejemplo 3.4.7 se da un  $\text{Iso}(Z,H)$  para el bosque  $(Z,H)$  de la observación 3.4.6. Los puntos de  $\text{Iso}(Z,H)$  han sido descritos con letras mayúsculas. Construimos, a continuación, otros grafos no-reducidos de  $\text{Iso}_A(Z,H)$ , que designaremos por letras minúsculas, y, finalmente, dibujamos el grafo  $\text{Iso}_A(Z,H)$ .

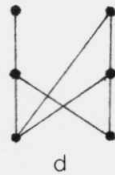
Hay un grafo no-reducido con 8 puntos:



dos grafos no-reducidos con 7 puntos



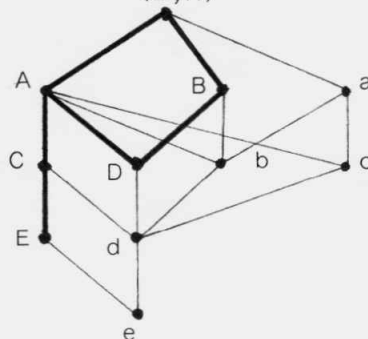
un grafo no-reducido con 6 puntos



y un grafo no-reducido con 5 puntos, el contraído acíclico canónico minimal



El grafo  $\text{Iso}_A(Z,H)$  es, entonces,  $(Z,H)$



Hay, obviamente, bosques  $(Z,H)$  para los que  $\text{Iso}(Z,H)$  e  $\text{Iso}_A(Z,H)$  son el mismo grafo. De los teoremas 3.2.6 y 4.1.14, que caracterizan las  $p$ -contracciones reducidas y acíclicas, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 4.1.22

Dado un bosque  $(Z,H)$ ,  $\text{Iso}(Z,H) = \text{Iso}_A(Z,H)$  si, y sólo si, no existen dos puntos  $x, y \in Z$  cumpliendo las condiciones:

- a)  $x$  e  $y$  no son maximales.
- b)  $x^{-\uparrow} \neq y^{-\uparrow}$  pero uno de ellos cubre al otro.
- c)  $(\bar{x}, H/\bar{x}) \cong (\bar{y}, H/\bar{y})$ .

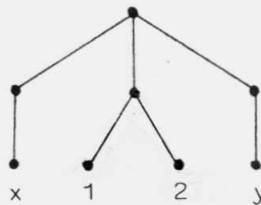
Observación 4.1.23

Hemos visto cómo no todos los puntos minimales de  $\text{Iso}(Z,H)$  son grafos con el mismo número de puntos. La razón de esto es que se pueden hacer contracciones de un bosque  $(Z,H)$  que identifican brotes de ramas principales distintas no respetando el orden indicado en la contracción canónica minimal, lo que puede impedir que sea posible la identificación de puntos de nivel superior sin destruir la reducción del contraído. En el ejemplo 3.4.6, el bosque  $(Z,H)$  se puede contraer en el grafo  $B$  (en contra de los criterios para la contracción canónica minimal) y este grafo  $B$  sólo se puede contraer en un grafo reducido, el  $D$ . En este grafo  $D$  no se pueden identificar los puntos del nivel  $N_1$  conservando la reducción (a pesar de que estos puntos cumplen las condiciones para una contracción reducida dadas en el teorema 3.2.6), por lo que este grafo  $D$  es minimal en  $\text{Iso}(Z,H)$  pero no en  $\text{Iso}_A(Z,H)$ .

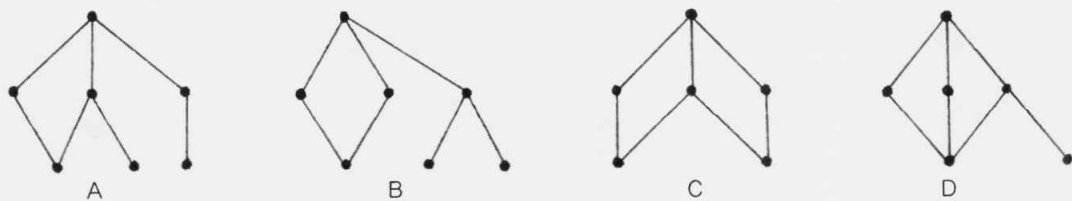
Parece que la condición de reducción es la responsable de que los puntos minimales de  $\text{Iso}(Z,H)$  no sean, en general, grafos con el mismo número de puntos, lo que nos podría hacer pensar que en  $\text{Iso}_A(Z,H)$  los minimales son del mismo cardinal y, en consecuencia, que dos puntos de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  están en el mismo nivel si, y sólo si, los grafos que representan son del mismo cardinal.

Pero no sólo la reducción es responsable de esta anomalía. El orden señalado en la contracción canónica minimal con que se identifican los puntos de la misma clausura es determinante para la obtención de este minimal y este orden también afecta a la contracción acíclica canónica minimal. Recuérdese que si  $n$  puntos tienen etiquetas  $x_{p_i}^1, \dots, x_{p_i}^n$ , a  $q$  puntos de la misma clase y mismo siguiente se les dan etiquetas  $x_{p_i}^1, \dots, x_{p_i}^q$  y no otras, lo que no sólo determina la canonicidad del contraído sino también el número mínimo de puntos.

El bosque  $(Z,H)$  de la siguiente figura

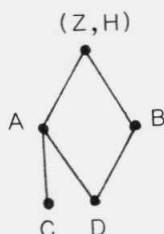


admite dos contracciones (A y B) con 7 puntos y otras dos (C y D) con 6 puntos



El grafo D es el contraído canónico y C es, también, minimal.

El grafo  $\text{Iso}(Z,H)$ , que coincide con  $\text{Iso}_A(Z,H)$  pues el bosque  $(Z,H)$  verifica las condiciones de la proposición anterior, es:

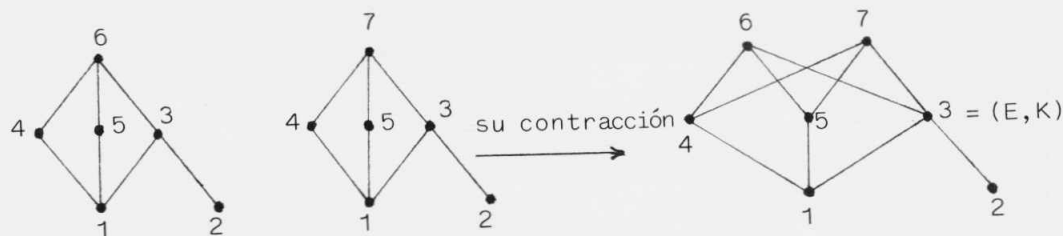


En el bosque anterior, los puntos x e y deben portar la pre-etiqueta 1 para contraerse canónicamente; si se hace  $x=1$  e  $y=2$  el orden en la identificación se altera, lo que conduce a la contracción en C.

Si, ahora, tomamos el bosque  $(Z',H')$  consistente en dos copias de  $(Z,H)$  y una la contraemos en el grafo C y la otra en el grafo D, la contracción de estos dos por la identificación dada en la siguiente figura es, claramente, minimal en  $\text{Iso}_A(Z,H)$ , como se muestra a continuación.



La contracción minimal canónica de  $(Z',H')$  es la contracción de dos copias de D, como muestra la figura siguiente:



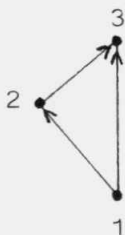
Este grafo  $(E,K)$  tiene un número de puntos menor que el minimal anterior. Como  $\text{Iso}(Z',H') = \text{Iso}_A(Z',H')$  es, pues, un ejemplo para esta observación.

4.2. EXPLOSION COMPLETADA DE GRAFOS ACICLICOS

Hasta aquí hemos transformado el grafo acíclico  $(X,G)$  en un bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$  de un modo paralelo a como explotamos grafos reducidos. El bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$  es explotado común de diversos grafos acíclicos, reducidos o no; en él hay disuelta una gran cantidad de información que poseen los grafos acíclicos de procedencia y que se pierde en la separación de las cadenas. En el concepto de explosión que finalmente queremos dar, y que llamaremos explosión completada, deseamos conservar una buena parte de la estructura de cada grafo acíclico.

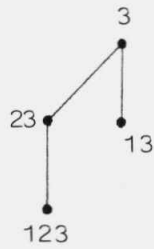
Obsérvese que en un grafo reducido  $(X,G)$  si  $x$  es un punto singular, los puntos de  $x^{-\uparrow}$  pueden encontrarse en niveles arbitrarios superiores al de  $x$  pero, en cualquier caso, el grafo  $(x^{-\uparrow},G/x^{-\uparrow})$  es, siempre, totalmente desconectado. Sin embargo, si  $(X,G)$  es un grafo acíclico no-reducido el grafo  $(x^{-\uparrow},G/x^{-\uparrow})$  posee arcos (en general). Cada punto singular  $x$  se explota en tantos puntos como  $\text{Card}(x^{-\uparrow})$ , pero el defecto de la  $\pi$ -explosión que acabamos de exponer radica en que los puntos explotados de  $x$  no heredan las relaciones orden de su ascendente de referencia, el grafo  $(x^{-\uparrow},G/x^{-\uparrow})$ .

El ejemplo más sencillo de lo que queremos hacer nos lo proporciona el grafo acíclico  $(X,G)$  de la figura:



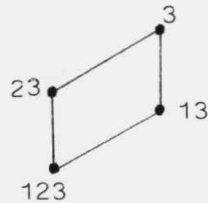
Su bosque de las cadenas es



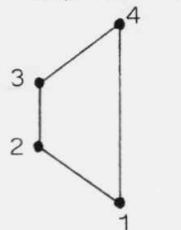


donde el punto 1 se explota en  $\{123,13\}$  y  $1^{-\uparrow} = \{2,3\}$ .

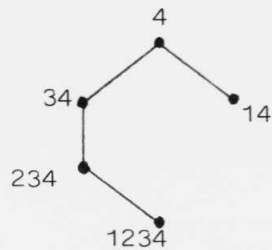
El grafo inducido en  $1^{-\uparrow}$  es  $(\{2,3\}, \{(2,3)\})$  que, conservado isomorficamente en la explosión de 1, nos proporciona el nuevo arco  $(123,13)$  por lo que finalmente el grafo explotado completo va a ser:



Por esta razón, el explotado completo del grafo



dado que  $1^{-\uparrow} = \{2,4\}$  y el grafo inducido en él es totalmente desconectado, será:



Daremos dos versiones alternativas del concepto de explosión completada. En la primera se pondrá de manifiesto que el explotado completo de un grafo acíclico  $(X,G)$  contendrá al bosque de las cadenas de éste,  $(\tilde{X},\tilde{G})$ , como grafo parcial y se obtendrá a partir de él cuando éste esté convenientemente etiquetado. Desde este

punto de vista, podremos decir que el explotado completo es el resultado de una explosión completada por niveles del acíclico. Como disponemos de un procedimiento alternativo global para obtener el bosque de las cadenas,  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  esto nos permitirá dar otra versión de explosión completada global del acíclico  $(X, G)$ .

Definición 4.2.1.- (Explosión completada de un grafo acíclico)

Sea  $(X, G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente.  $X$  está clasificado en niveles por  $X = \bigcup_{p=0}^k N_p$ , con  $N_p \neq \emptyset$  y  $k = \dim(K, G)$ . Sea  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  el bosque de las cadenas de  $(X, G)$  descrito en la definición 4.1.5. Llamaremos explotado completo de  $(X, G)$  al grafo sobre  $\tilde{X}$  cuyo conjunto de arcos, que denotaremos por  $\bar{G}$ , es el conjunto de arcos  $(x, y)$  con  $x = x_{i_1 \dots i_q}$ ,  $y = x_{j_2 \dots j_q}$  siendo  $\{j_2, \dots, j_q\} \subset \{i_1, \dots, i_q\}$ . Llamaremos explosión completada de  $(X, G)$  al morfismo de grafos  $\pi: (\tilde{X}, \bar{G}) \rightarrow (X, G)$  dado por

$$\pi(x_{i_1 \dots i_q}) = x_{i_1}.$$

Se ha visto, teorema 4.1.7, cómo un grafo acíclico  $(X, G)$  queda unívocamente descrito por sus caminos maximales,  $C_0^M(X, G)$ . Como en un ciclo no se puede hablar de puntos "maximales" y se tienen, en él, caminos de la longitud que se desee, podemos afirmar, además, que los grafos acíclicos constituyen la clase más amplia de grafos caracterizables por sus caminos maximales.

Como los puntos del bosque de las cadenas de un grafo acíclico  $(X, G)$  representan los caminos con fin maximal,  $\hat{X} = C_0^M(X, G)$ , podemos dar una definición alternativa de explosión completada de un grafo acíclico en términos del grafo  $(\hat{X}, \hat{G}) \simeq (\tilde{X}, \tilde{G})$ .

Definición 4.2.2

Sea  $(X,G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  por medio de  $\underline{x}:X \rightarrow E$  y con  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente. Llamaremos explotado completo de  $(X,G)$  al grafo  $(\hat{X},\bar{G})$  donde:  
 $\bar{G} = \{(s,s') \in C^M(X,G) \times C^M(X,G), \text{long}(s) \geq 1 \text{ y } s' \text{ es igual al camino } s \text{ menos uno cualquiera de sus elementos}\}$

Es decir,  $(s,s') \in \bar{G}$  si y sólo si siendo  $s:\{1,2,\dots,q\} \rightarrow X$  inyectiva y con  $s(q) \in M$ , se tiene  $q \geq 2$  y  $s' = s/\{1,2,\dots,q\}-\{j\}$  con  $1 \leq j < q$ .

Un conjunto de etiquetas para  $\hat{X}$  es el conjunto  $\hat{E}$  formado por aquellos subconjuntos ordenados,  $A$ , de  $E$  tales que  $\underline{x}/A$  es un camino de  $C^M(X,G)$ . La biyección que define el etiquetado es  $\hat{\underline{x}}:\hat{E} \rightarrow \hat{X}$  tal que si  $s:\{1,2,\dots,q\} \rightarrow X$  y  $\underline{x}^{-1}(s(\{1,2,\dots,q\})) \in \hat{E}$ , entonces  $\hat{\underline{x}}(\hat{\underline{x}}^{-1}(s)) = s$ .  $\hat{E}$  está totalmente ordenado por el orden lexicográfico y  $(\hat{X},\bar{G})$  está  $\hat{E}$ -ordenado.

Llamaremos explosión completada al morfismo de grafos  $\pi:(\hat{X},\bar{G}) \rightarrow (X,G)$  dado por  $\pi(s) = s(1)$ , para todo  $s \in \hat{X}$  y  $s:\{1,\dots,q\} \rightarrow X$ .

Obviamente, ambas explosiones son equivalentes, basta identificar el punto  $x = x_{i_1 \dots i_q}$  del explotado  $(\tilde{X},\bar{G})$  con el punto  $s = x_{i_1} \dots x_{i_q}$ , es decir,  $s = \{i_1, \dots, i_q\} \rightarrow X$ , de  $(\hat{X},\bar{G})$ . No hay ambigüedad en la designación de ambos conjuntos de arcos por la misma notación  $\bar{G}$  siempre que se precise cuál es el conjunto de puntos,  $\tilde{X}$  o  $\hat{X}$ , entre los que se establecen los arcos.

Proposición 4.2.3

El grafo  $(\tilde{X},\bar{G})$ , explotado completo del grafo acíclico  $(X,G)$ , es reducido.

En efecto, si  $x_1 \dots x_{p+1}$  es un camino de longitud  $p > 1$  en  $(\tilde{X}, \bar{G})$ , cada punto  $x_i$  de este camino representa un camino con fin maximal en  $(X, G)$  y difiere de su siguiente  $x_{i+1}$  exactamente en un subíndice de su etiqueta por lo que  $x_1$  difiere de  $x_{p+1}$  exactamente en  $p > 1$  subíndices y por tanto  $(x_1, x_{p+1})$  no es un arco de  $\bar{G}$ .

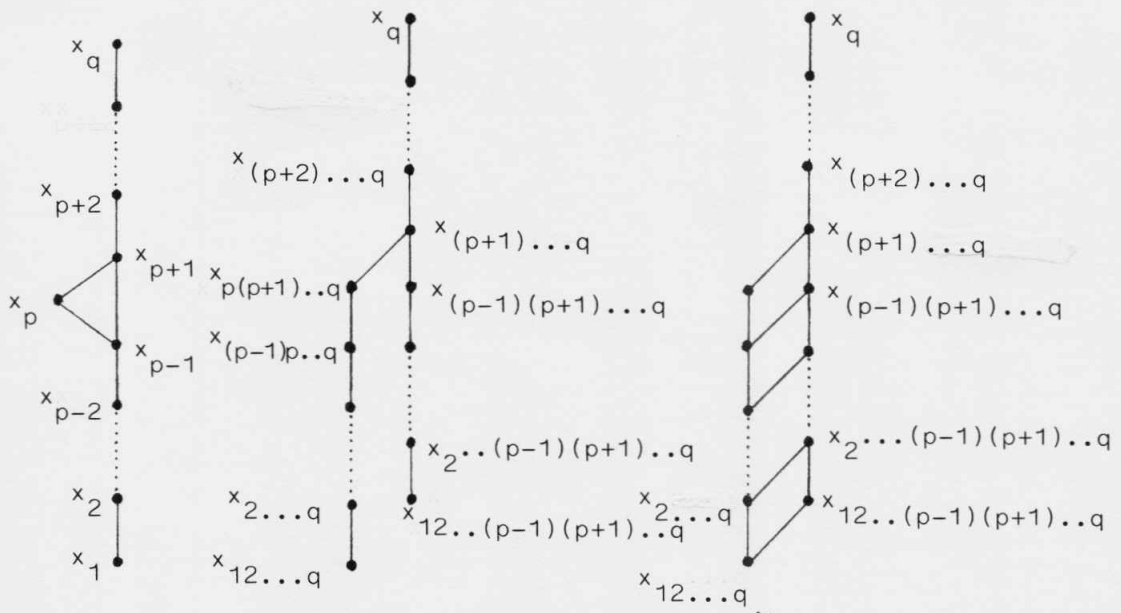
Observación 4.2.4

Obsérvese que si  $(x, y) \in \bar{G}$  y  $x = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}$  con  $i_j \in E$ , entonces  $y = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q}$  donde  $1 \leq p < q$  (si  $p = q$ , entonces  $x_{i_p}$  y  $x_{i_{p-1}}$  serían ambos maximales, en cuyo caso  $x = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p} \notin \tilde{X}$ ).

El caso  $p=1$  significa que  $(x, y) \in \tilde{G}$  (por tanto  $\tilde{G} \subset \bar{G}$ ), es decir,  $x$  e  $y$  son puntos consecutivos de un camino del bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . El caso  $p > 1$  significa que  $(x, y) \in \bar{G} - \tilde{G}$ , es decir el arco  $(x, y)$  une puntos que se encuentran en caminos distintos del bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . Llamaremos a estos arcos de  $\bar{G} - \tilde{G}$  arcos transversales. En este caso, estos mismos caminos están unidos, también, por otros arcos transversales. Más explícitamente se tiene

$$(x_{i_j \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}, x_{i_j \dots i_{p-1} \dots i_q}) \in \bar{G} - \tilde{G}, \text{ para todo } j < p.$$

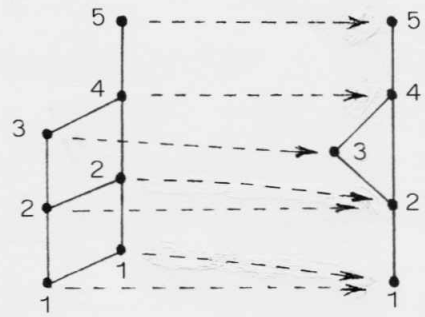
La siguiente figura ilustra esta observación:



Obsérvese, también, que el morfismo  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X, G)$  viene dado por  $\pi(x_{i_1 \dots i_q}) = x_{i_1}$  y entonces si  $(x, y) \in \tilde{G}$  con  $x = x_{i_1 \dots i_q}$ ,  $y = x_{j_2 \dots j_q}$  y  $\{j_2, \dots, j_q\} \subset \{i_1, \dots, i_q\}$  se tiene:

a) Si  $(x, y) \in \tilde{G}$ , es decir  $j_k = i_k, \forall k = 2, \dots, q$ , entonces  $y = x_{i_2 \dots i_q}$  y  $(\pi(x), \pi(y)) = (x_{i_1}, x_{i_2}) \in G$ . Por tanto, el morfismo  $\pi$  aplica los arcos de los caminos con fin maximal de  $(X, G)$ , es decir, los arcos del bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ , en arcos del grafo  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ .

b) Si  $(x, y) \in \tilde{G} - \tilde{G}$ , entonces  $i_1 = j_2$ , y por tanto  $\pi(x) = \pi(y) = x_{i_1}$ . Luego, el morfismo  $\pi$  aplica los arcos transversales del explotado completo en puntos de  $(X, G)$ . La siguiente figura muestra este fenómeno:



La siguiente proposición muestra cómo el concepto de explosión completada de un grafo acíclico es una extensión del concepto de explosión de un grafo reducido.

Proposición 4.2.5

Si  $(X,G)$  es un grafo reducido, su  $\pi$ -explotado como reducido coincide con su bosque de las cadenas y con su explotado completo como acíclico.

En efecto, la primera afirmación es evidente y para la segunda, si dos puntos  $x,y \in \tilde{X}$  están en caminos distintos del bosque de las cadenas  $(\tilde{X},\tilde{G})$ , entonces, por ser  $(X,G)$  reducido, los subíndices de la etiqueta de uno cualquiera de los puntos no son, todos ellos, subíndices de la etiqueta del otro, por lo que  $(x,y) \notin \overline{G-G}$  es decir, no hay arcos transversales, y, en consecuencia,  $\overline{G} = \tilde{G}$ .

Por otro lado, es claro que el bosque en que se explota un grafo reducido es sumergible en el bosque de las cadenas de cualquiera de los grafos acíclicos de la clase que representa. Cada uno de estos bosques de las cadenas es sumergible en el explotado completo del correspondiente acíclico y los explotados completos de todos los acíclicos de una misma clase son sumergibles en el explotado completo del transitivo que representa a la clase.

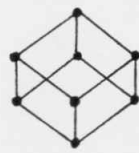
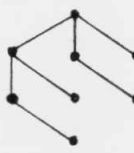
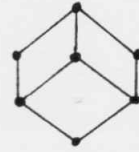
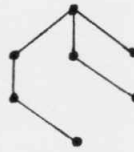
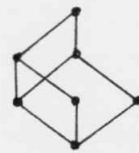
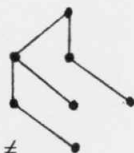
¿Qué relaciones hay entre el bosque de las cadenas y el explotado completo de los acíclicos de una misma clase? En el siguiente ejemplo se describen el bosque de las cadenas y el explotado completo de cada uno de los grafos acíclicos de la clase representada por un camino de longitud tres. En la figura se puede observar cómo dos grafos acíclicos distintos de la misma clase pueden tener distinto bosque de las cadenas e igual explotado completo.

Ejemplo 4.2.6

$(X, G) \in \mathcal{G}_X^{Ac}$

$(\tilde{X}, \tilde{G})$

$(\tilde{X}, \bar{G})$



$\neq$

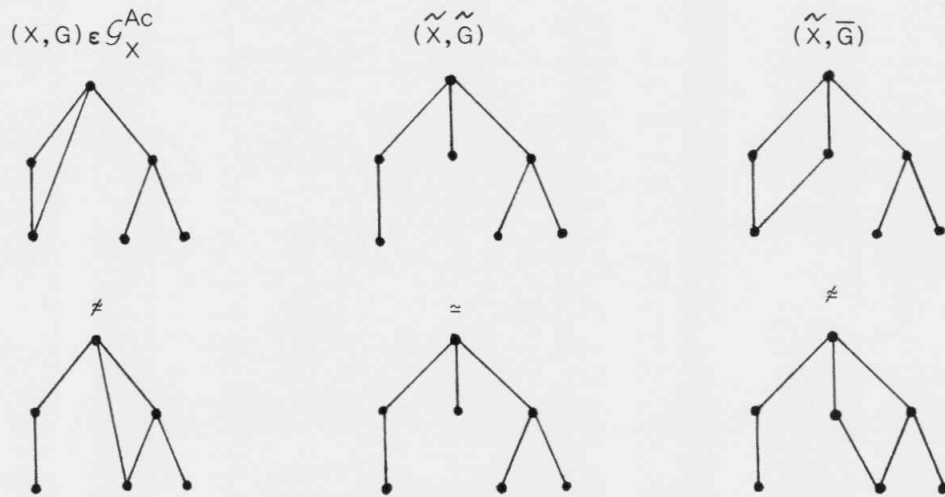
$\neq$

$\approx$

$\approx$

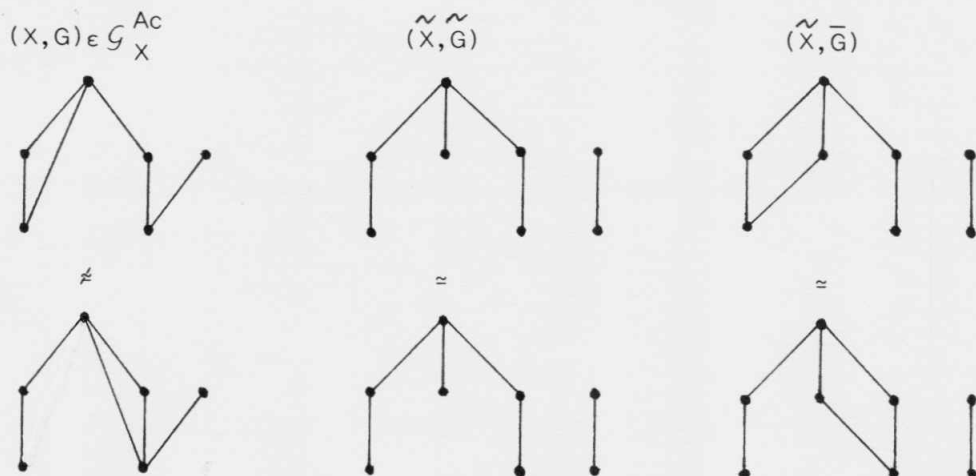
Recíprocamente a lo observado en el ejemplo anterior, en el siguiente se muestra cómo dos grafos acíclicos distintos de la misma clase, es decir, con el mismo reducido y mismo transitivo, pueden tener el mismo bosque de las cadenas y distinto explotado completo.

Ejemplo 4.2.7



También es posible dar un par de grafos acíclicos distintos de la misma clase con el mismo bosque de las cadenas y el mismo explotado completo, lo que se muestra en el siguiente

Ejemplo 4.2.8





Observación 4.2.9

En la explosión de un grafo acíclico el etiquetado no es necesario para la obtención del bosque de las cadenas. Esto es lo que ha hecho posible que podamos hablar, también en este caso, de p-contracciones acíclicas de un bosque. Desde este punto de vista podemos decir que hay una relación estrictamente morfológica entre un bosque y sus contracciones. Los objetos que se obtienen en la explosión completada de un acíclico se podrán describir, a grosso modo, como "configuraciones de cadenas y semiciclos de cuatro arcos" (esto requerirá algunas precisiones) y su obtención a partir del grafo acíclico de partida, o del bosque de las cadenas como paso intermedio, requiere necesariamente de las etiquetas. Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto el poco sentido que tienen hablar de contracciones para estas "configuraciones" no-etiquetadas. Desde luego, hay una relación morfológica entre el grafo acíclico y el explotado completo dado que el bosque de las cadenas de aquel está sumergido en éste conteniendo todos sus puntos, pero hay también una relación sintáctica (a través de las etiquetas) sin la cual no es posible recuperar ni el bosque de las cadenas ni el grafo acíclico de partida. Para empezar, una "configuración" no etiquetada admite múltiples bosques de cadenas no etiquetados sumergidos en ella y cubriendo todos sus puntos (ejemplo 4.2.6); además, "configuraciones distintas pueden albergar sumergido el mismo bosque de las cadenas (ejemplo 4.2.7) y para terminar, la igualdad de los bosques de las cadenas y del explotado completo no es suficiente para determinar el grafo acíclico de procedencia (ejemplo 4.2.8). Y hasta ahora nos hemos referido, en los ejemplos, solamente a grafos acíclicos de la misma clase; si liberamos a los grafos acíclicos de

procedencia de la condición de ser de la misma clase el interés por la contracción decrece notablemente.

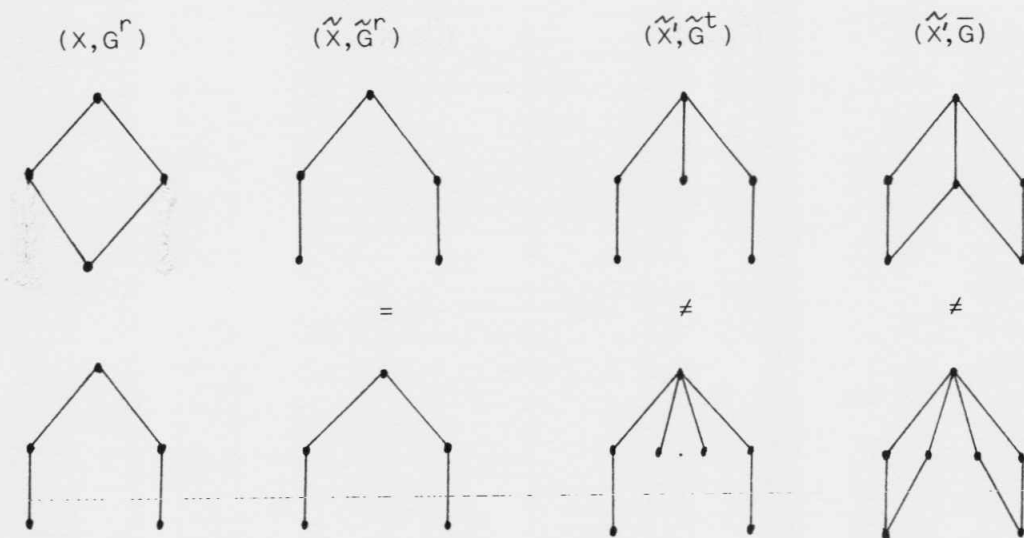
Los siguiente ejemplos abundan en las escasas relaciones morfológicas entre un grafo acíclico o su bosque de las cadenas y la "configuración" de su explotado completo y señalan la vinculación sintáctica entre unos y otros.

Deseamos, también, poner de manifiesto que la explosión de un grafo acíclico no es una extensión trivial de la explosión de un reducido. Los ejemplos señalan, también, esta diferencia. Como entre los grafos acíclicos tienen especial relevancia los grafos transitivos que representan a cada clase, en los ejemplos, hemos tratado sólo con grafos transitivos por lo que se señalan aún más las observaciones anteriormente hechas.

En cada ejemplo se dibuja, en cada fila y para cada uno de los dos grafos transitivos contemplados, el grafo reducido, el  $\pi$ -explotado de este grafo reducido, el bosque de las cadenas del transitivo y el explotado completo del transitivo.

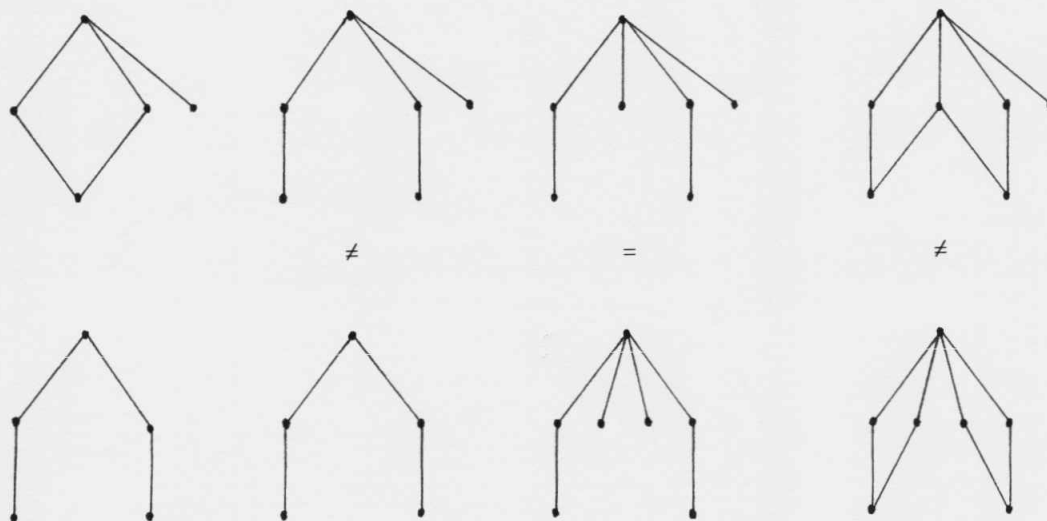
Ejemplo 4.2.10

Dos grafos acíclicos y transitivos distintos pueden tener igual explotado de su reducido, distinto bosque de las cadenas y distinto explotado completo.



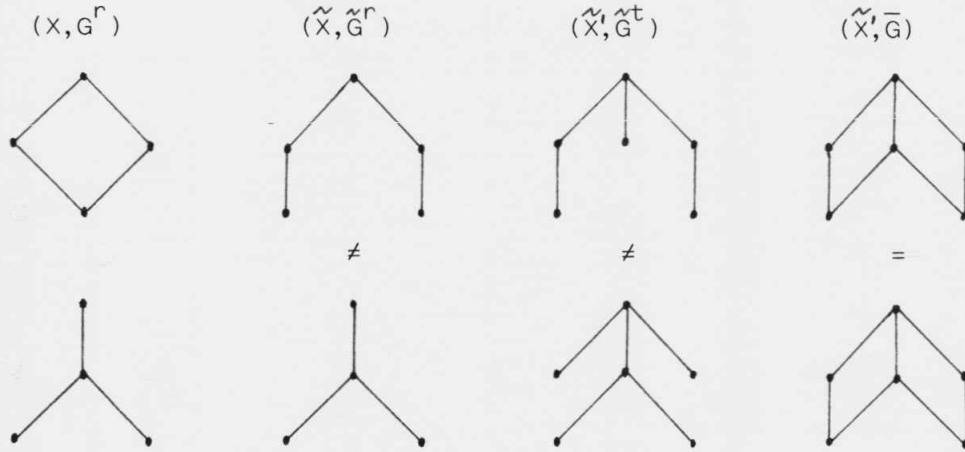
Ejemplo 4.2.11

Dos grafos acíclicos y transitivos distintos pueden tener distinto explotado de su reducido, igual bosque de las cadenas y distinto explotado completo.



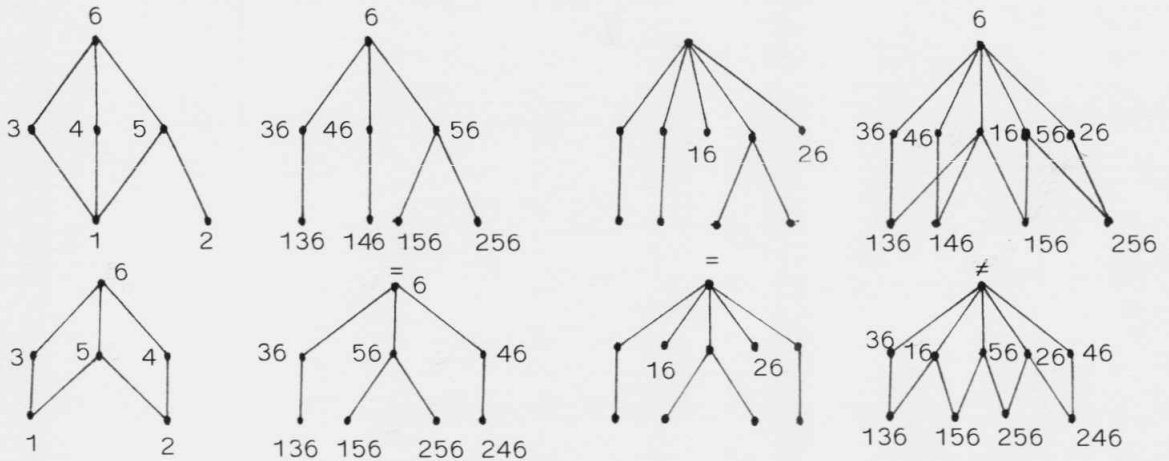
Ejemplo 4.2.12

Dos grafos acíclicos y transitivos distintos pueden tener distinto explotado de su reducido, distinto bosque de las cadenas e igual explotado completo.



Ejemplo 4.2.13

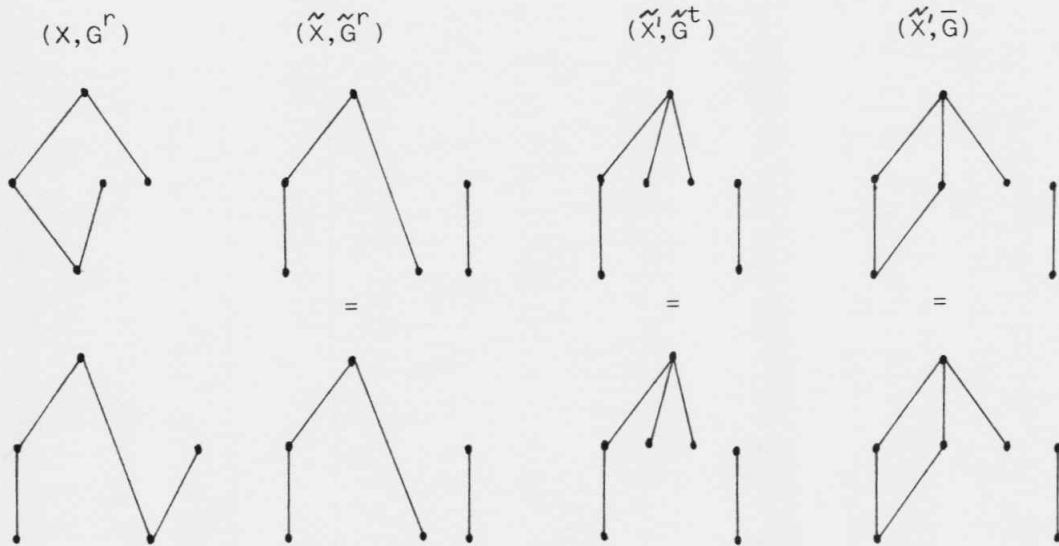
Dos grafos acíclicos y transitivos distintos pueden tener igual explotado de su reducido, igual bosque de las cadenas y distinto explotado completo.



Este ejemplo es el de mayor interés al mostrar como tener igual explotado del reducido e igual bosque de las cadenas no determina el explotado completo estando éste sólo determinado por aquellos a través de sus etiquetados.

Ejemplo 4.2.14

Dos grafos acíclicos y transitivos distintos pueden tener igual explotado de su reducido, igual bosque de las cadenas e igual explotado completo.



En realidad, hay ejemplos triviales de este caso como: cualquier par de grafos reducidos de dimensión uno con igual  $\pi$ -explotado. Aquí se muestra el ejemplo más simple de entre los no triviales, es decir con  $\dim(X, G) \geq 2$ . (Es el único par de grafos conexos distintos con menos de seis puntos para el que las tres explosiones son iguales).

#### 4.3. EXPLOSION GEOMETRICA DE UN GRAFO ACICLICO

En este parágrafo daremos una definición de explosión de un grafo acíclico en un punto arbitrario del mismo y veremos que explotando sucesivamente el grafo en sus puntos de una manera ordenada obtenemos el grafo explotado completo. Esta definición puntual de explosión está sugerida por el concepto habitual de explosión en la geometría tal y como hemos indicado en la introducción y, por esta razón, utilizaremos el calificativo "geométrico" en las explosiones que aparezcan en esta sección.

##### Definición y notaciones 4.3.1

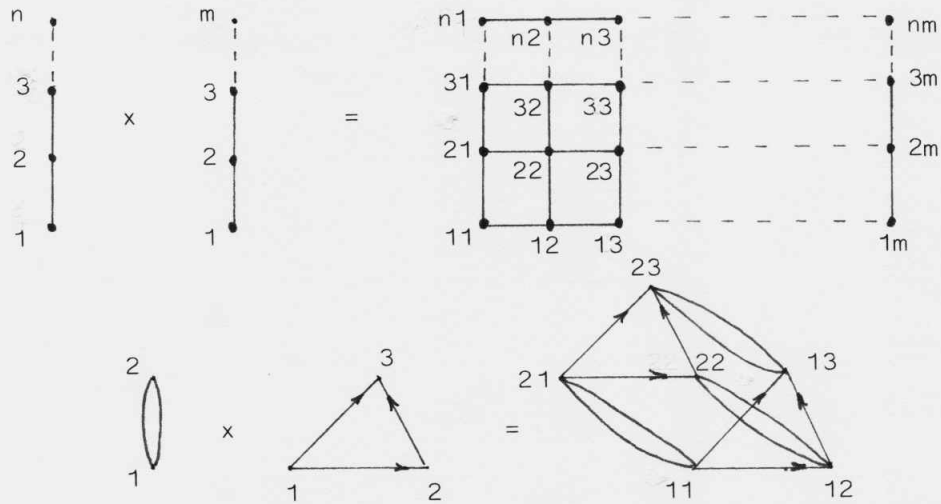
Llamaremos suma de dos grafos  $(X,G)$  y  $(X',G')$ , y lo denotaremos por  $(X,G)x(X',G')$ , al grafo cuyo conjunto de puntos es  $XxX$  y que tiene por conjunto de arcos a

$$\{(x,x'),(y,y')\} \in GxG', (x=y \text{ y } (x',y') \in G') \text{ ó } ((x,y) \in G \text{ y } x'=y')$$

También escribiremos  $(X,G) x (X',G') = (X x X', G x G')$  denotando abusivamente por  $G x G'$  al conjunto de arcos del grafo suma.

Nota: No hay acuerdo entre los diversos autores en la denominación del grafo que acabamos de definir como "suma". Esta denominación es la dada por Berge en [B1] pag.304 y por Cvetković en [C.D.S.] pag. 65. Sin embargo, Harary en [H.1] pag. 22 llama "producto" a lo que aquí hemos llamado suma.

Ejemplo y observaciones 4.3.2



Nótese que si  $\text{Card}(X) = n$ ,  $\text{Card}(G) = p$ ,  $\text{Card}(X') = m$  y  $\text{Card}(G') = q$  entonces  $\text{Card}(X \times X') = n \cdot m$  y  $\text{Card}(G \times G') = n \cdot q + m \cdot p$ .

Obsérvese, también, que la suma es conmutativa aunque no lo sea el producto cartesiano de sus conjuntos de puntos. Si los grafos sumandos son etiquetados, la suma es conmutativa (salvo el isomorfismo  $\psi(x_{ij}) = x_{ji}$ ) y, por esta razón, si no son etiquetados el grafo suma no depende del orden en que se sumen.

Definición 4.3.3

Sea  $(X, G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , siendo  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente. Sea  $x_h$  un punto de nivel  $N_0$ . Llamaremos  $x_h$ -explotado puntual de  $(X, G)$  al grafo  $(X_h, G_h)$  donde:

$$X_h = (X - \{x_h\}) \cup \{x_{hj}, (x_h, x_j) \in G\} \quad y$$

$$G_h = (G - \{(x_h, x_j), x_{hj} \in X_h\}) \cup \{(x_{hj}, x_j), x_{hj} \in X_h\} \cup \{(x_{hi}, x_{hj}), (x_i, x_j) \in G\}$$

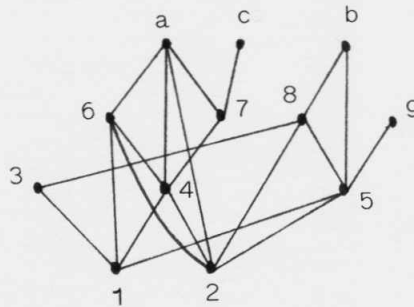
Llamaremos  $x_h$ -explosión puntual al morfismo

$$\pi_h : (X_h, G_h) \rightarrow (X, G) \text{ dado por } \pi_h(x_i) = x_i, \forall x_i \in X - \{x_h\} \text{ y } \pi_h(x_{hj}) = x_h,$$

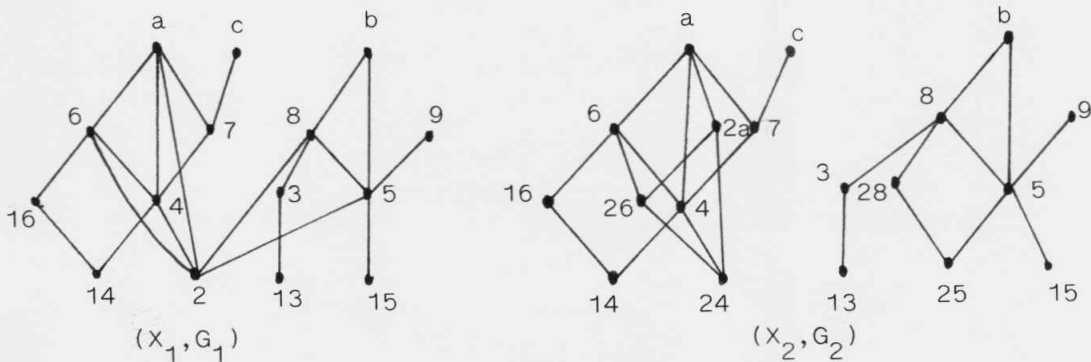
si  $(x_h, x_j) \in G$ . Obsérvese que  $\pi_h$  conserva los arcos de  $G - \{(x_h, x_j), x_{hj} \in X_h\}$ , aplica los arcos de  $\{(x_{hj}, x_j), x_{hj} \in X_h\}$  en los arcos  $\{(x_h, x_j), x_{hj} \in X_h\}$  y reduce los arcos de  $\{(x_{hi}, x_{hj}), (x_i, x_j) \in G\}$  al punto  $x_h$  que se está explotando.

Llamaremos puntos excepcionales de la  $\pi_h$ -explosión puntual a los puntos de  $\pi_h^{-1}(x_h)$ . Estos puntos se encuentran en niveles arbitrarios del grafo  $(X_h, G_h)$ . Los puntos no excepcionales de la  $\pi_h$ -explosión conservan el nivel que tenían en  $(X, G)$ .

Como ejemplo, si  $(X, G)$  es el grafo acíclico de la figura



El grafo  $(X_1, G_1)$ ,  $\pi_1$ -explotado puntual de  $(X, G)$ , y el grafo  $(X_2, G_2)$ ,  $\pi_2$ -explotado puntual de  $(X_1, G_1)$ , son respectivamente:



Como puede observarse en estos ejemplos, los puntos excepcionales de  $\pi_1: (X_1, G_1) \rightarrow (X, G)$  están en  $N_0 \cup N_1$  de  $(X_1, G_1)$ . Sin embargo, los puntos excepcionales de  $\pi_2: (X_2, G_2) \rightarrow (X_1, G_1)$  están en  $N_0 \cup N_1 \cup N_2$ .



Definición 4.3.4.- (Explosión puntual de un grafo acíclico)

Sea  $(X,G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$ , siendo  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente. Sea  $x_h$  un punto cualquiera de  $X$ . Llamaremos  $x_h$ -explotado puntual de  $(X,G)$  al grafo  $(X_h, G_h)$  donde:

a) Si  $x_h$  es maximal, entonces  $(X_h, G_h) = (X, G)$ .

b) Si  $x_h$  no es maximal, entonces, sean:

$$\bar{\Phi}_h = \{s \in C^M(X, G), s: \{1, \dots, q\} \rightarrow X, s(1) \in \bar{x}_h \text{ y } s(q) \notin x_h^*\}$$

y

$$A_h = \{s: \{1, \dots, q\} \rightarrow X, s \text{ es un camino con } s(1) \in \bar{x}_h, s(q) \in x_h^{-\dagger} \\ s(i) \notin \bar{x}_h, \forall i > 1 \text{ y } s(i) \notin x_h^{-\dagger}, \forall i < q\}$$

y con estas notaciones llamaremos:

$$X_h = (X - \bar{x}_h) \cup \{x_{ij}, x_i \in \bar{x}_h \text{ y } x_j \in x_h^{-\dagger}\} \cup \{s(1), \forall s \in \bar{\Phi}_h\}$$

$$G_h = (G - \{(x_h, x_j), x_{hj} \in X_h\} - G/\bar{x}_h) \cup \{(x_{hj}, x_j), x_{hj} \in X_h\} \cup$$

$$\cup (G/\bar{x}_h \times G/x_h^{-\dagger}) - \{(x_i, x_k), \text{ existe } s \in A_h \text{ con } s(1) = x_i \text{ y } \\ s(2) = x_k\} \cup \{(x_{ij}, x_k), \text{ existe } s \in A_h \text{ con } s(1) = x_i, \\ s(2) = x_k \text{ y } s(q) = x_j\}.$$

Donde las operaciones de unión y diferencia anteriores se supone que se realizan sucesivamente de una forma ordenada. Eventualmente, para  $s \in A_h$  puede ser  $q=2$  en cuyo caso  $s(2)=x_k=x_j \in x_h^{-\dagger}$ . Llamaremos  $\pi_h$ -explosión puntual de  $(X,G)$  al morfismo  $\pi_h$ :

$(X_h, G_h) \rightarrow (X, G)$  dado por  $\pi(x_i) = x_i$ , si  $x_i \in X \cap X_h$  y  $\pi(x_{ij}) = x_i$  si  $x_{ij} \in \bar{x}_h \times x_h^{-\dagger}$ . Obviamente, se verifica que si  $(x, y) \in G_h$  entonces  $\pi(x) = \pi(y)$  o bien  $(\pi(x), \pi(y)) \in G$ , por lo que  $\pi$  es un morfismo de grafos. El grafo explotado puntual es acíclico por construcción.

Llamaremos puntos excepcionales de la  $x_h$ -explosión puntual a los puntos  $\pi^{-1}(x_h)$ , es decir, los puntos del grafo suma  $\bar{x}_h \times \bar{x}_h^\dagger$  junto con los puntos de  $\{s(1), \forall s \in \bar{\Phi}_h\}$ . Obviamente, estos puntos excepcionales se encuentran en niveles arbitrarios de  $(X_h, G_h)$ . Los puntos no-excepcionales conservan el nivel en la  $x_h$ -explosión puntual.

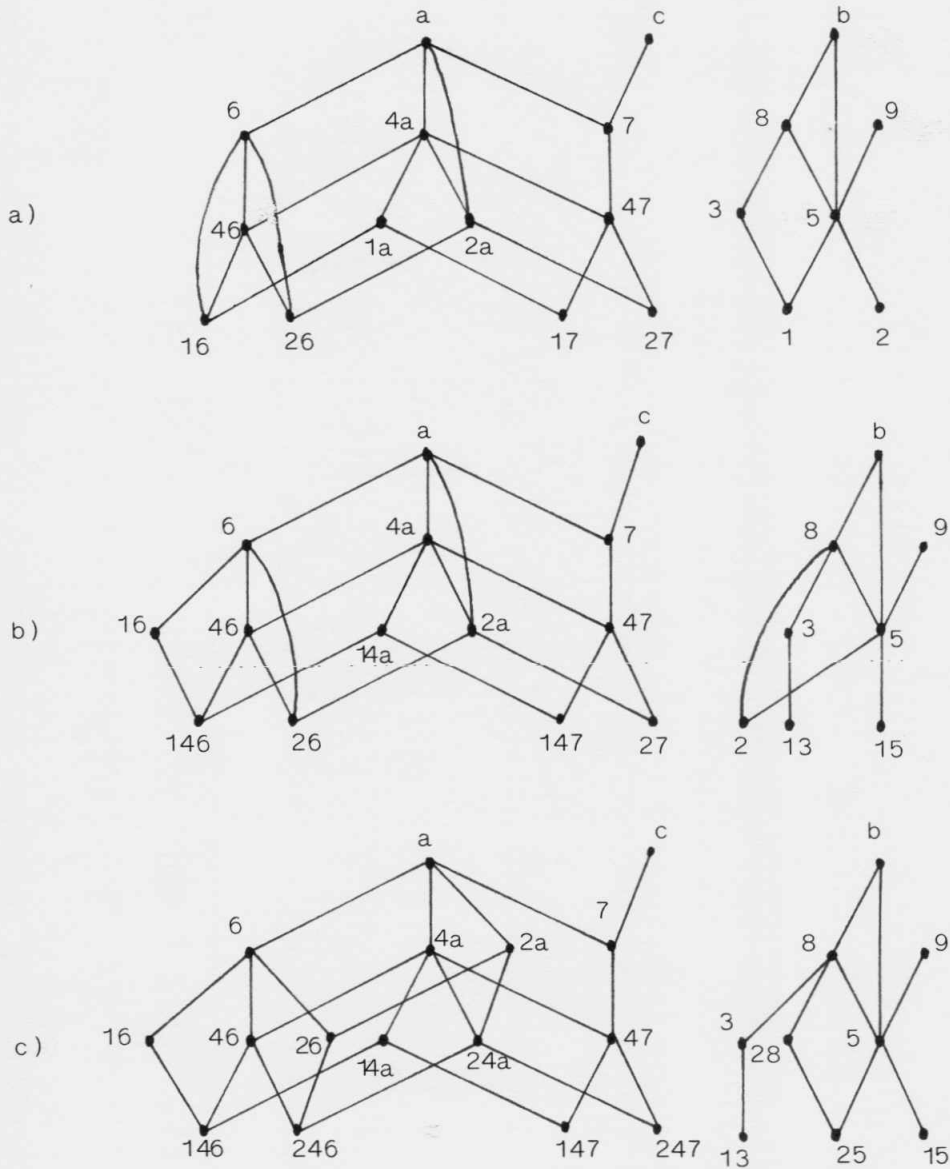
En la definición de  $X_h$  se han sustituido los puntos de  $\bar{x}_h$  por los de su suma con  $x_h^\dagger$ , aunque se conservan aquellos puntos de  $\bar{x}_h$  de los que partan caminos con fin maximal no conectado con  $x_h$ , y que por tanto no pasan por ningún punto de  $x_h^\dagger$ . Estos son los puntos de  $\bar{\Phi}_h$ . Obsérvese que estos puntos hay que conservarlos porque se han conservado los arcos de los caminos que los definen, pues no hay ninguna referencia a ellos en la descripción de  $G_h$ . No obstante, la presencia de este conjunto de puntos  $\bar{\Phi}_h$  en la definición de  $x_h$ -explosión puntual es puramente formal e incluso anecdótica dentro del marco de nuestros propósitos pues, como veremos más adelante, en una explosión puntual sucesiva y ordenada de  $(X, G)$  por los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  los sucesivos conjuntos  $\bar{\Phi}_h$  son vacíos.

#### Observación 4.3.5

La definición de  $x_h$ -explosión puntual para  $x_h \in N_0$  es un caso particular de la  $x_h$ -explosión puntual para  $x_h \in X$  de nivel arbitrario. También las  $\pi$ -explosiones de un grafo reducido o acíclico por puntos de nivel  $N_0$  son un caso particular de explosión puntual.

#### Ejemplos 4.3.6

Se dan a continuación las  $x_4$ -explosiones de los grafos a)  $(X, G)$ , b)  $(X_1, G_1)$  y c)  $(X_2, G_2)$  de la definición 4.3.3. Son respectivamente:



En el grafo de a),  $x_4$ -explosión puntual de  $(X,G)$  de la definición 4.2.19, se observa cómo la parte del grafo  $(X,G)$  que no conecta  $\bar{x}_4$  con  $x_4^\uparrow$  no juega ningún papel en la explosión puntual, simplemente se conserva como un grafo separado de la componente conexa en la que se realiza la explosión. En este caso  $\bar{\Phi}_4 = \{1,2\}$

En el grafo de b) se muestra el resultado de haber explotado  $(X,G)$  sucesivamente por los puntos  $x_1$  y  $x_4$ . Ahora  $\bar{\Phi}_4 = \{2\}$  y la explosión puntual opera sobre la parte del grafo que conecta  $\bar{x}_4$  con  $x_4^\uparrow$ , el resto se conserva invariable.

El grafo de c) se ha obtenido después de realizar explosiones en los puntos  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_4$ . Cuando se ha ido a explotar  $x_4$  ya estaba explotado el grafo en los puntos de  $\bar{x}_4 - \{x_4\}$  por lo que todos los caminos que parten de  $x_4$  tienen fin maximal en  $x_4$ . En este caso  $\bar{\Phi}_4$  es vacío.

Definición 4.3.7

Sea  $(X,G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1,2,\dots,n\}$  y  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente por niveles, es decir, si  $x_i \in N_p$ ,  $x_j \in N_q$  y  $p < q$  entonces  $i < j$  (definición 2.3.25).

Llamaremos explotado geométrico de  $(X,G)$  al grafo resultante de las sucesivas explosiones puntuales de  $(X,G)$  por los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Es decir, si llamamos  $(X_1, G_1)$  al  $\pi_{x_1}$ -explotado puntual de  $(X,G)$  y si, para cada  $i=2, \dots, n$ , llamamos  $(X_i, G_i)$  al  $\pi_{x_i}$ -explotado puntual de  $(X_{i-1}, G_{i-1})$ , entonces llamaremos explotado geométrico de  $(X,G)$  al grafo  $(X_n, G_n)$ .

Cada  $\pi_{x_i}$ -explotado puntual lleva asociado el morfismo  $\pi_i: (X_i, G_i) \rightarrow (X_{i-1}, G_{i-1})$  descrito en la definición 4.3.4. Pues bien, llamaremos explosión geométrica de  $(X,G)$  al morfismo  $\pi: (X_n, G_n) \rightarrow (X,G)$  donde  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n$ , siendo  $\pi_1: (X_1, G_1) \rightarrow (X,G)$  el morfismo correspondiente a la  $\pi_1$ -explosión puntual.

Consideraremos, también, para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , las explosiones geométricas parciales  $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_i: (X_i, G_i) \rightarrow (X,G)$  y diremos que  $(X_i, G_i)$  es el explotado geométrico parcial  $i$ -ésimo.

Este concepto es relativo a la ordenación de los elementos de  $X$ . El explotado geométrico  $(X_n, G_n)$  y, también, cada explotado geométrico parcial  $(X_i, G_i)$ , con  $i < n$ , es un grafo acíclico por construcción.

Para cada explosión geométrica parcial  $i$ -ésima llamaremos puntos excepcionales de  $(X_i, G_i)$  a los puntos de  $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(\{x_1, x_2, \dots, x_i\})$ . Estos puntos se encuentran en niveles arbitrarios de  $(X_i, G_i)$ ; los puntos no-excepcionales,  $x_{i+1}, \dots, x_n$ , conservan el nivel en la explosión geométrica parcial, los puntos excepcionales de  $(X_n, G_n)$  son el propio  $X_n$  dado que el morfismo  $\pi$  es suprayectivo.

Observación 4.3.8

a) Si  $x_1, \dots, x_g$  son puntos consecutivos del nivel  $N_0$  y  $(x_{s(1)}, \dots, x_{s(g)})$  es una permutación cualquiera de estos puntos, entonces, el explotado geométrico  $g$ -ésimo  $(X_g, G_g)$  resulta, también, de las  $g$   $x_h$ -explosiones puntuales sucesivas según los puntos  $x_{s(1)}, \dots, x_{s(g)}$ .

Si  $x_{j+1}, \dots, x_l$  son puntos consecutivos del nivel  $N_p$  y  $(x_{s(j+1)}, \dots, x_{s(l)})$  es una permutación cualquiera de estos puntos, entonces, el explotado geométrico parcial  $l$ -ésimo  $(X_l, G_l)$  resulta, también, de las  $l$   $x_h$ -explosiones puntuales sucesivas según los puntos  $x_1, \dots, x_j, x_{s(j+1)}, \dots, x_{s(l)}$ . En consecuencia, si  $X$  está clasificado en niveles por  $X = \bigcup_{p=0}^k N_p$  con  $k = \dim(X, G)$ , el explotado geométrico  $(X_n, G_n)$  resulta, también, de las  $n$   $x_h$ -explosiones puntuales sucesivas según los puntos  $x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}$  siendo  $(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$  una permutación de  $(x_1, \dots, x_n)$  que conserva el orden de los niveles, es decir, si  $x_{s(i)} \in N_p$ ,  $x_{s(j)} \in N_q$  y  $p < q$  entonces  $s(i) < s(j)$ .

b) El explotado geométrico parcial  $(X_{i+1}, G_{i+1})$  es el  $x_{i+1}$ -explotado puntual del explotado geométrico parcial  $(X_i, G_i)$ . En esta  $x_{i+1}$ -explosión puntual, el conjunto  $\bar{\Phi}_{i+1} = \{s \in C^M(X, G), \text{ tal que}$

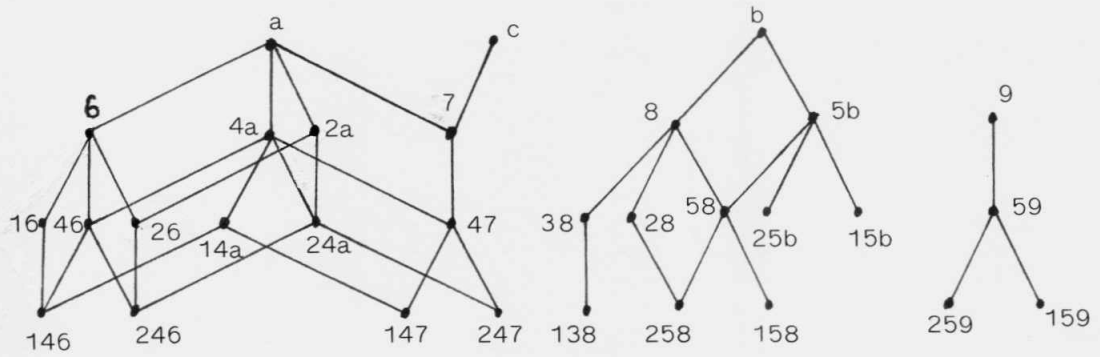
$s : \{1, \dots, q\} \rightarrow X$ ,  $s(1) \in \bar{x}_{i+1}$  y  $s(q) \notin x_h^*$  es vacío dado que en  $X_i$  no hay puntos de  $X$  inferiores a  $x_{i+1}$ , es decir,  $X \cap X_i$  carece de puntos. Dicho de otra manera, los puntos de  $\bar{x}_{i+1}$  en  $(X_i, G_i)$  son todos ellos, salvo el propio  $x_{i+1}$ , puntos excepcionales de  $(X_i, G_i)$  y los caminos con fin maximal que parten de estos puntos excepcionales pasan por  $x_{i+1}^- \uparrow$  o conectan  $x_{i+1}$  con el maximal y, en consecuencia,  $\bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}$ .

c) Como consecuencia de lo anterior, en cada una de las  $x_h$ -explosiones puntuales, con  $h = 1, \dots, n$ , que componen la explosión geométrica, los puntos excepcionales son exactamente  $\pi_h^{-1}(\bar{x}_h) = \bar{x}_h \times x_h^- \uparrow$ .

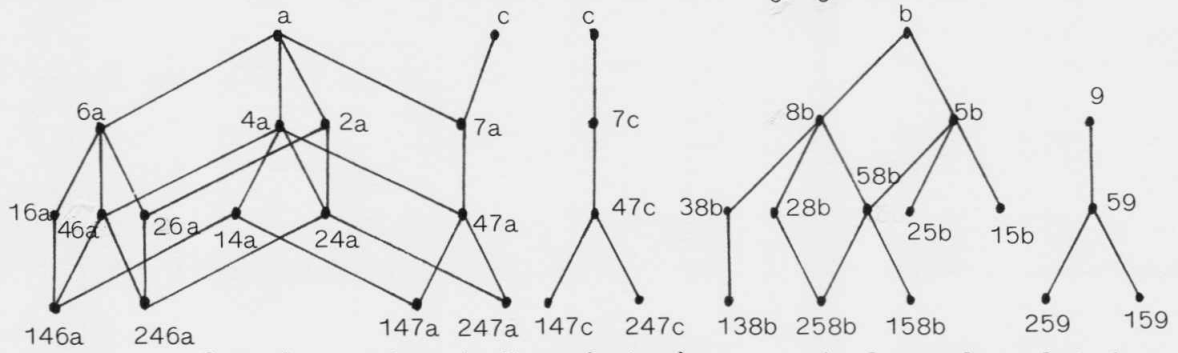
#### Ejemplo 4.3.9

Mostramos, a continuación, la explosión geométrica del grafo  $(X, G)$  de la definición 4.3.3 obtenida a través de sus sucesivas explosiones geométricas parciales.

En la definición 4.3.3 se mostraron el grafo de partida  $(X, G)$  y las explosiones geométricas parciales  $(X_1, G_1)$  y  $(X_2, G_2)$  según los puntos de  $\{1, 2\} = N_0$ . Por lo que respecta a los puntos del nivel  $N_1 = \{3, 4, 5\}$ , en el ejemplo 4.3.6 apartado c) se mostró la  $x_4$ -explosión de  $(X_2, G_2)$ . Si a continuación hacemos la  $x_3$ -explosión de éste sólo cambia la notación del camino 13-3-8. La  $x_5$  explosión da el explotado geométrico parcial  $(X_5, G_5)$  que mostramos a continuación.



Para  $N_2 = \{6,7,8,9\}$ , las explosiones puntuales según los puntos 6 y 8, como tienen un único siguiente, a y b respectivamente, cambian las etiquetas de algunos puntos pero no la estructura del grafo de procedencia. El punto 9 es maximal y no se modifica nada en la  $x_9$ -explosión puntual. Haciendo la  $x_7$ -explosión puntual, obtenemos el explotado geométrico parcial  $(X_9, G_9)$  siguiente:



Como los puntos de  $N_3 = \{a,b,c\}$  son maximales, el explotado geométrico de  $(X,G)$  coincide con el grafo explotado parcial  $(X_9, G_9)$  que acabamos de mostrar.

Probaremos a continuación que la explosión completada y la explosión geométrica de un grafo acíclico son conceptos equivalentes. Para ello necesitaremos los siguientes resultados previos.

Nótese que la explosión puntual proporciona etiquetas para el grafo explotado en función de las etiquetas del grafo de partida y, por ello, partiendo de un etiquetado naturalmente ordenado por niveles de  $(X,G)$  se obtiene un etiquetado sobre  $(X_n, G_n)$ .

Lema 4.3.10

Sea  $(X,G)$  un grafo acíclico, con  $X$  etiquetado por  $E=\{1,\dots,n\}$  siendo  $n = \text{Card}(X)$  y  $(X,G)$  ordenado naturalmente por niveles. Sea  $(X_n, G_n)$  la explosión geométrica de  $(X,G)$ . Se tiene:

a) Si  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}$  es un camino con fin maximal de  $(X,G)$  entonces  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \in X_n$ ,  $(x_{i_p i_{p+1} \dots i_q}, x_{i_{p+1} \dots i_q}) \in G_n$ , para cada  $p = 1, \dots, q-1$  y, en consecuencia,  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \cdot x_{i_2 \dots i_q} \dots x_{i_{q-1} i_q} x_{i_q}$  es un camino con fin maximal en  $(X_n, G_n)$ .

b) Recíprocamente, si  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \in X_n$ , entonces, para todo  $k$ , con  $1 \leq k \leq q$  se tiene  $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) \in G$ .  $x_{i_q}$  es un maximal de  $X$ . En consecuencia,  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}$  es un camino con fin maximal en  $(X,G)$

En efecto:

a) Sea  $(X_{i_1-1}, G_{i_1-1})$  el explotado geométrico parcial previo a la realización de la  $x_{i_1}$ -explosión puntual. Como el camino  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_q}$  está ordenado naturalmente, podemos asegurar que  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}\} \subset X_{i_1-1}$  pues son puntos no-excepcionales de este grafo. Al hacer la  $x_{i_1}$ -explosión puntual de  $(X_{i_1-1}, G_{i_1-1})$ , como  $x_{i_2} \in \overline{x_{i_1}}$ , se crea el punto  $x_{i_1 i_2} \in X_{i_1}$  y el arco  $(x_{i_1 i_2}, x_{i_2}) \in G_{i_1}$ . Si  $i_1+1 = i_2$  haríamos, a continuación, la  $x_{i_2}$ -explosión creándose por la misma razón, el punto  $x_{i_1 i_2 i_3} \in X_{i_1+1}$  y los arcos  $(x_{i_1 i_2 i_3}, x_{i_2 i_3})$  y  $(x_{i_2 i_3}, x_{i_3})$  de  $G_{i_1+1}$ . Por el contrario, si  $m+1 \neq n$ , en cualquiera de las  $x_h$ -explosiones puntuales con  $i_1+1 \leq h < i_2$  se tiene  $x_{i_1 i_2} \notin \overline{x_h}$  por lo que no se transformarán ni los puntos  $x_{i_1 i_2}$



y  $x_{i_2}$  ni el arco que los une y esto independientemente de que  $x_{i_1}$  esté o no en  $\bar{x}_{i_2}$  y de que  $x_{i_2}$  esté o no en  $\bar{x}_h$  como se desprende de la definición de  $x_h$ -explosión puntual. Este razonamiento puede extenderse sucesivamente hasta la  $x_{i_{q-1}}$ -explosión puntual, creándose la cadena  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \cdot x_{i_2 \dots i_q} \dots x_{i_{q-1} i_q} \cdot x_{i_q}$  en  $(X_{i_{q-1}}, G_{i_{q-1}})$ . Esta cadena no se transforma en las  $x_h$ -explosiones puntuales, para  $i_q \leq h \leq n$ , ya que ninguno de los puntos que la componen está en ninguno de los  $\bar{x}_h$ , salvo para  $h = i_q$  que tampoco transforma nada pues  $x_{i_q}$  es maximal.

b) Ahora,  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \in X_n$ . Si para algún  $k$ ,  $1 \leq k < q$ , se tiene  $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}) \notin G$ , como  $x_{i_k i_{k+1}}$  se crea en el producto cartesiano del conjunto de puntos del grafo suma  $\bar{x}_h \times \bar{x}_h$ , existe un  $x_h \in X$  tal que  $x_{i_k} \in \bar{x}_h$  y  $x_{i_{k+1}} \in \bar{x}_h$ , en cuyo caso existe un camino  $x_{i_k} \dots x_h \dots x_{i_{k+1}}$  en  $(X, G)$  y las  $x_h$ -explosiones puntuales por puntos intermedios  $x_{i_k} < x_h < x_{i_{k+1}}$  impedirían que  $i_k$  e  $i_{k+1}$  fueran índices consecutivos en algún punto de  $X_n$ .

Como consecuencia de lo anterior  $x_{i_1 i_2 \dots i_q}$  es un camino en  $(X, G)$ . Si  $x_{i_q}$  no fuera maximal, la  $x_{i_q}$ -explosión puntual sustituiría el punto  $x_{i_1 i_2 \dots i_q} \in X_{i_q-1}$  por el punto  $x_{i_1 i_2 \dots i_q i_r}$  siendo  $x_{i_r} \in \bar{x}_{i_q} \neq \emptyset$  impidiendo que  $i_q$  sea el último índice en alguna etiqueta de punto de  $X_n$ . Es claro que los maximales de  $(X, G)$  son los únicos puntos que no cambian de etiqueta en la explosión geométrica.

Lema 4.3.11

Sea  $(X, G)$  un grafo acíclico en las condiciones del Lema anterior y sea  $(X_n, G_n)$  su explotado geométrico.

Si  $(x, y) \in G_n$  y  $x = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}$  entonces  
 $y = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q}$ , para algún  $p$  con  $1 \leq p \leq q$ . En efecto; en  
 cada  $x_h$ -explosión puntual se crean arcos de la forma  $(x_{hj}, x_j)$ , don-  
 de  $x_j \in x_h^-$ , que cumplen la condición del lema para  $p=1$ , y también,  
 se crean los arcos de  $G/\bar{x}_h \times G/x_h^- = \{(x_{ij}, x_{rs})$ , con  $x_i = x_r$  y  
 $(x_j, x_s) \in G/x_h^-$  o bien  $(x_i, x_r) \in G/\bar{x}_h$  y  $x_j = x_s\}$  y, que por tanto,  
 son arcos de la forma  $(x_{ij}, x_{is})$  con  $(x_j, x_s) \in G/x_h^-$  o bien  $(x_{ij}, x_{rj})$   
 con  $(x_i, x_r) \in G/\bar{x}_h$  que, claramente, no cumplen la condición del lema.  
 Veamos, sin embargo, que el lema se cumple cuando se realizan suce-  
 sivamente las explosiones puntuales por los puntos  $x_1, \dots, x_n$ .

En primer lugar, contemplamos los arcos de la forma  $(x_{ij}, x_{is})$   
 con  $(x_j, x_s) \in G/x_h^-$  creados en la  $x_h$ -explosión puntual.

Debemos tener en cuenta que previamente se han realizado  
 las explosiones puntuales en  $x_1, x_2, \dots, x_{h-1}$  por lo que la etiqueta  
 de  $x_i \in \bar{x}_h$  es, en realidad, de la forma  $x_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}$  con  $i_{p-1} = h$   
 y por tanto aquí estamos tratando con el arco  $(x_{ij}, x_{is}) =$   
 $= (x_{i_1 \dots i_{p-1} j}, x_{i_1 \dots i_{p-1} s})$  donde  $(x_j, x_s) \in G/x_h^-$ . Las explosiones  
 puntuales en puntos comprendidos entre  $x_h$  y  $x_j$ , exclusivos, no mo-  
 difican las etiquetas de  $x_{i_1 \dots i_{p-1} j}$  y  $x_{i_1 \dots i_{p-1} s}$  pues estos  
 puntos no se encuentran en  $\bar{x}_h$  para  $h < k < j$ . En la  $x_j$ -explosión, como  
 $x_{ij} \in \bar{x}_j$  y  $x_s \in x_j^-$  el punto  $x_{ij} = x_{i_1 \dots i_{p-1} j}$  se transforma en el  
 punto  $x_{ijs} = x_{i_1 \dots i_{p-1} js}$  y el punto  $x_{is} = x_{i_1 \dots i_{p-1} s}$ , que no está  
 en  $x_j$ , no cambia de etiqueta, así pues  $(x_{i_1 \dots i_{p-1} j}, x_{i_1 \dots i_{p-1} s}) \in$   
 $\in (X_j, G_j)$ . Obsérvese que el camino  
 $x_{i_1 \dots i_{p-1} j} x_{i_1 \dots i_{p-1} s} x_{i_2 \dots i_{p-1} s} \dots x_{i_{p-1} s} x_s$  es único y es tal que  
 empieza en  $\bar{x}_j$ , acaba en  $x_j^-$  y los puntos intermedios no están ni en  
 uno ni en otro.

Las explosiones puntuales en puntos  $x_k$  comprendidos entre  $x_j$  y  $x_s$ , exclusivas, no afectan a nuestros puntos  $x_{ijs}$  y  $x_{is}$  al no estar en  $\bar{x}_k$ . La  $x_s$ -explosión puntual, y de modo análogo las siguientes, modifican de la misma manera las etiquetas de  $x_{ijs}$  y  $x_{is}$  pues ambas están en  $\bar{x}_q$ , para cada  $x_q \in x_s^- \uparrow$ , en cuyo caso se transforman en  $x_{ijsq}$  y  $x_{isq}$ . En resumidas cuentas, el arco  $(x_{ij}, x_{is})$  de la  $x_h$ -explosión puntual tiene en el explotado geométrico la forma  $(x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}, x_{i_1, \dots, i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q})$  donde hemos hecho  $j = i_p$ ,  $s = i_{p+1}$  y los siguientes coinciden en ambos.

Finalmente, contemplamos los arcos de la forma  $(x_{ij}, x_{rj})$  con  $(x_i, x_r) \in G/\bar{x}_h$  creados en la  $x_h$ -explosión puntual. Como en el caso anterior, las etiquetas reales de estos puntos, después de las  $h-1$  primeras explosiones puntuales, tienen un aspecto muy diferente. Si  $x_a \dots x_i \dots x_r \dots x_h$  es un camino maximal en  $(\bar{x}_h, G/\bar{x}_h)$  es claro después del Lema anterior que los puntos transformados de  $x_i$  y  $x_r$  en el explotado geométrico parcial  $(X_{h-1}, G_{h-1})$  están etiquetados, respectivamente por  $x_{ir \dots h}$  y  $x_{r \dots h}$  y, en consecuencia, nuestro arco  $(x_{ij}, x_{rj})$  es de la forma  $(x_{ir \dots hj}, x_{r \dots hj})$  verificando el enunciado de este Lema para  $i_p = i$ .

#### Teorema 4.3.12

Sea  $(X, G)$ , con  $X$  etiquetado por  $E = \{1, \dots, n\}$  siendo  $n = \text{Card}(X)$ , un grafo acíclico ordenado naturalmente por niveles. Si  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es el bosque de las cadenas,  $(\hat{X}, \bar{G})$  es el explotado completo y  $(X_n, G_n)$  es el explotado geométrico, entonces  $(\tilde{X}, \bar{G})$  y  $(X_n, G_n)$  son grafos isomorfos por un isomorfismo compatible con los correspondientes morfismos de explosión.

En efecto, el Lema 4.3.10 nos proporciona  $\tilde{X} = X_n$  y  $\tilde{G} \subset G_n$ . Si  $(x,y) \in \overline{G-\tilde{G}}$ , es un arco transversal, entonces  $x = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}$  e  $y = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q}$ . Como  $x, y \in X_n$  sus etiquetas representan caminos con fin maximal en  $(X,G)$ , en consecuencia,  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p-1}}$  es un camino en  $(\bar{x}_{i_{p-1}}, G/\bar{x}_{i_{p-1}})$  y  $(x_{i_p}, x_{i_{p+1}})$  es un arco de  $G/x_{i_{p-1}}^{-1} \uparrow y$ , por tanto,  $(x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p}, x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1}})$  es un arco del explotado geométrico parcial  $(X_{i_{p-1}}, G_{i_{p-1}})$ . Las sucesivas explosiones puntuales en los puntos  $x_{i_p}, \dots, x_{i_q}$  transforman las etiquetas de los puntos de este arco en  $(x_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_q}, x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q})$  con lo que  $(x,y) \in G_n$  y por tanto, también,  $\overline{G-\tilde{G}} \subset G_n$  luego  $\tilde{G} \subset G_n$ . La otra inclusión,  $G_n \subset \tilde{G}$ , nos la proporciona el Lema anterior, luego ambos grafos tienen también, el mismo conjunto de arcos.

Finalmente, tanto la explosión completada como la explosión geométrica aplican cada punto  $x_{i_1 \dots i_q}$  en el punto  $x_{i_1}$  de  $(X,G)$  por lo que ambos morfismos explosión son coincidentes.

Corolario 4.3.13

Un etiquetado para el explotado geométrico  $(X_n, G_n)$  está descrito en el teorema 4.1.7 y, en versión alternativa a través de  $\hat{\Lambda}(X, \tilde{G})$ , en la definición 4.2.2.

4.4. EQUIVALENCIA BIRRACIONAL GEOMETRICA. PROPIEDAD UNIVERSAL DE LA EXPLOSION COMPLETADA

Sea  $(X,G)$  un grafo acíclico,  $(\tilde{X},\tilde{G})$  su bosque de las cadenas y  $(\tilde{X},\bar{G})$  su explotado completo. La aplicación  $\pi:\tilde{X} \rightarrow X$  dada por  $\pi(x_{i_1 \dots i_q}) = x_{i_1}$  es un morfismo dominante de grafos, tanto para  $(\tilde{X},\tilde{G})$  como para  $(\tilde{X},\bar{G})$ . Además, si se conoce el morfismo  $\pi:(\tilde{X},\bar{G}) \rightarrow (X,G)$  se puede recuperar  $(\tilde{X},\tilde{G})$  pues, como comentábamos en la observación 4.2.4,  $\tilde{G} = \{(x,y) \in \bar{G}, \pi(x) \neq \pi(y)\}$ . Llamábamos transversales a los arcos de  $\bar{G}-\tilde{G}$ .

Definición 4.4.1

Llamaremos desingularizado completo del grafo acíclico  $(X,G)$  a la terna  $(\tilde{X},\tilde{G},\bar{G})$  y desingularización completada de  $(X,G)$  al morfismo  $\pi:(\tilde{X},\bar{G}) \rightarrow (X,G)$ .

Nótese, que según la observación del párrafo anterior, el desingularizado completo contiene sólo una parte de la información que hay en la desingularización completada. Nótese, también, que estos conceptos son una extensión de los de desingularizado y desingularización dados para grafos reducidos en la sección 2.4 ya que para un grafo reducido  $(X,G)$  se tiene  $\tilde{G}=\bar{G}$ .

El siguiente resultado muestra la functorialidad de la desingularización completada.

Proposición 4.4.2

Sea  $(X,G)$  y  $(X',G')$  dos grafos acíclicos,  $\pi:(\tilde{X},\bar{G}) \rightarrow (X,G)$  y  $\pi':(\tilde{X}',\bar{G}') \rightarrow (X',G')$  las correspondientes desingularizaciones completadas, y  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$  un morfismo dominante. Entonces, existe un único morfismo  $\tilde{\psi}:(\tilde{X},\bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}',\bar{G}')$  tal que  $\psi \circ \pi = \pi' \circ \tilde{\psi}$ . Dicho morfismo es dominante.

La construcción de  $\tilde{\Psi}$  es igual a la realizada en el teorema 2.4.6 para grafos reducidos y como ya se comentó en el teorema 4.1.10 es un morfismo dominante entre los bosques de las cadenas  $\tilde{\Psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$ . Ahora bien,  $\tilde{\Psi}$  es también morfismo entre los grafos explotados completos pues si se considera un arco transversal  $(x, y) \in \bar{G}$  se tiene  $x = x_{i_1} \dots x_{i_q}$ ,  $y = x_{j_2} \dots x_{j_q}$  con  $\{j_2, \dots, j_q\} \subset \{i_1, \dots, i_q\}$ ; por tanto,  $\tilde{\Psi}(x)$  y  $\tilde{\Psi}(y)$  son los caminos  $\Psi(x_{i_1}) \dots \Psi(x_{i_q})$  y  $\Psi(x_{j_2}) \dots \Psi(x_{j_q})$  en los que se han eliminado los términos repetidos en las sucesiones. Como dichas sucesiones o bien tienen los mismos puntos o bien la primera tiene un punto más que la segunda se sigue que  $\tilde{\Psi}(x) = \tilde{\Psi}(y)$  ó  $(\tilde{\Psi}(x), \tilde{\Psi}(y)) \in G'$ .

Como el desingularizado completo de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  no es, en general, él mismo, no puede deducirse de esta proposición una propiedad universal para la desingularización completa como obtuvimos para grafos reducidos en el corolario 2.4.7.

#### Observación 4.4.3

Se puede considerar la categoría cuyos objetos son las ternas  $(Y, L, \bar{L})$  tales que  $(Y, L)$  es un grafo parcial del grafo  $(Y, L)$  y cuyos morfismos son las aplicaciones  $\Psi: Y \rightarrow Y'$  que son morfismos de grafos tanto para la primera estructura como para la segunda.

Desde este punto de vista, la proposición anterior muestra que si  $\psi: (X, G) \rightarrow (X', G')$  es un morfismo dominante de grafos acíclicos, entonces,  $\tilde{\Psi}$  es un morfismo de ternas entre  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  y  $(\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$ . Esta situación motiva conceptos análogos a los dados en la sección 2.4. para grafos reducidos.

Definición 4.4.4

Llamaremos aplicación racional dominante geométrica (o completa) entre dos grafos acíclicos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  a todo morfismo dominante entre sus desingularizados completos  $\Psi: (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$  que conserve arcos transversales, es decir, tales que si  $(x,y) \in \bar{G} - \tilde{G}$  entonces, o bien  $\Psi(x) = \Psi(y)$  o bien  $(\Psi(x), \Psi(y)) \in \bar{G}' - \tilde{G}'$ .

Observaciones 4.4.5

a) La observación anterior muestra que todo morfismo dominante de grafos acíclicos, puesto que induce un morfismo dominante entre sus desingularizados completos, es una aplicación racional dominante geométrica sin puntos de indeterminación.

b) En términos de los grafos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  una aplicación racional dominante geométrica consiste en una aplicación racional dominante (es decir, dos correspondencias  $x \rightarrow Z[x]$  y  $c \rightarrow Z(c)$  con las propiedades del teorema 4.1.12) teniendo la propiedad adicional.

Si  $c = x_{i_1} \dots x_{i_q}$  y  $c' = x_{i_1} \dots x_{i_{p-1}} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$  son caminos en  $(X,G)$ , entonces, o bien  $Z(c) = Z(c')$  o bien  $(Z(c'), Z(c)) \in G'$  siendo en este caso  $Z(c) \neq Z(c'')$  con  $c'' = x_{i_p} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$ , lo que asegura que el arco  $(Z(c'), Z(c))$  es transversal.

c) Como la composición de morfismos dominantes (entre desingularizados) es un morfismo dominante, se tiene una nueva categoría cuyos objetos son los grafos acíclicos y cuyos morfismos son las aplicaciones racionales dominantes geométricas. Los isomorfismos de dicha categoría serán las aplicaciones birracionales geométricas; con más precisión.

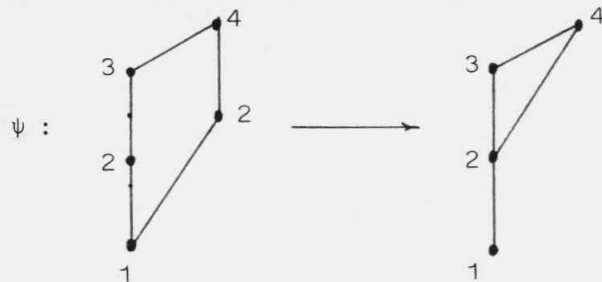
Definición 4.4.6

Llamaremos aplicación birracional geométrica entre dos grafos acíclicos  $(X,G)$  y  $(X',G')$  a todo isomorfismo entre sus desingularizados completos  $\psi: (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$ . A las aplicaciones birracionales geométricas que sean morfismos de grafos acíclicos,  $\psi: (X,G) \rightarrow (X',G')$ , les llamaremos morfismos birracionales geométricos; en este caso, el morfismo inducido  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$  es el isomorfismo de ternas que le define como aplicación birracional geométrica.

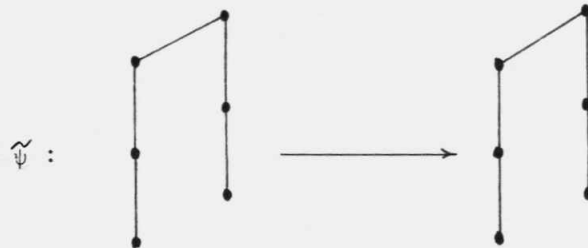
Ejemplos 4.4.7

Todo morfismo birracional geométrico (isomorfismo entre ternas) es, obviamente, un morfismo birracional (isomorfismo entre los bosques de las cadenas), pero no todo morfismo birracional es geométrico como mostramos a continuación.

El morfismo de grafos de la figura

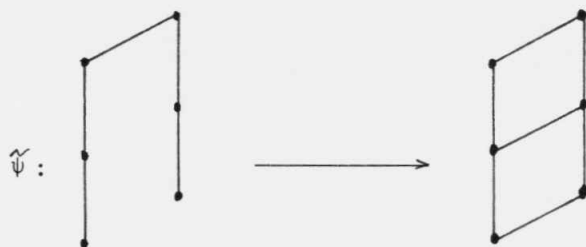


induce un isomorfismo entre sus desingularizados (bosques de las cadenas).



que no es un isomorfismo entre sus desingularizados completos





es, entonces, un morfismo birracional no geométrico.

Por ejemplo, si  $(X,G)$  es un grafo acíclico para el que  $\tilde{G} \neq \bar{G}$  entonces el morfismo explosión  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  es birracional pero no geométrico. Obviamente, si  $\tilde{G} = \bar{G}$  todo morfismo birracional es geométrico independientemente de que  $(X,G)$  sea reducido o no.

El siguiente resultado establece una cómoda relación entre las propiedades de morfismo birracional y morfismo birracional geométrico.

Proposición 4.4.8

Sea  $\psi: (X,G) \rightarrow (X',G')$  un morfismo birracional de grafos acíclicos y sea  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}')$  el isomorfismo entre sus desingularizados. Entonces,

a)  $\tilde{\psi}$  induce una aplicación inyectiva  $\bar{\psi}: \bar{G} \rightarrow \bar{G}'$ , por lo que  $\text{Card}(\bar{G}) \leq \text{Card}(\bar{G}')$ .

b)  $\psi$  es un morfismo birracional geométrico si y sólo si  $\text{Card}(\bar{G}) = \text{Card}(\bar{G}')$ .

En efecto,  $\psi$  induce el morfismo dominante de ternas

$\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$  que es el isomorfismo entre los bosques.

Si  $(x,y) \in \bar{G}$ , entonces  $\tilde{\psi}(x) \neq \tilde{\psi}(y)$  y por tanto podemos definir  $\bar{\psi}: \bar{G} \rightarrow \bar{G}'$  como  $\bar{\psi}(x,y) = (\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)) \in \bar{G}'$ .  $\bar{\psi}$  es inyectiva por serlo  $\tilde{\psi}$ . El resto de la demostración es evidente.

Corolario 4.4.9

Sean  $\psi:(X,G) \rightarrow (X',G')$ ,  $\psi':(X',G') \rightarrow (X'',G'')$  morfismos birracionales entre grafos acíclicos. Si  $\psi' \circ \psi$  es un morfismo birracional geométrico, entonces,  $\psi$  y  $\psi'$  son, también, geométricos.

En efecto, pues  $\text{Card}(\bar{G}) \leq \text{Card}(\bar{G}') \leq \text{Card}(\bar{G}'')$  y  $\text{Card}(\bar{G}) = \text{Card}(\bar{G}'')$  luego  $\text{Card}(\bar{G}) = \text{Card}(\bar{G}') = \text{Card}(\bar{G}'')$ .

Definición 4.4.10

Diremos que dos grafos acíclicos  $(X,G), (X',G')$  son birracionalmente equivalentes si existe una aplicación birracional entre ellos, es decir, si tienen el mismo bosque de las cadenas. Diremos que son geométrico birracionalmente equivalentes si existe una aplicación birracional geométrica entre ambos, es decir si tienen el mismo desingularizado completo.

Observaciones 4.4.11

El corolario anterior muestra que si  $(Z,H)$  es un bosque y si  $(X,G), (X',G'), (X'',G'') \in \text{Iso}_A(Z,H)$  son tales que  $(X,G) \geq (X',G') \geq (X'',G'')$  y si  $(X,G)$  y  $(X'',G'')$  son grafos geométrico-birracionalmente equivalentes, entonces, también, lo son con  $(X',G')$ .

Sea  $(Z,H)$  un bosque e  $\text{Iso}_A(Z,H)$  el conjunto de grafos acíclicos con igual bosque de las cadenas  $(Z,H)$  con la estructura de grafo reducido. Los puntos de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  se clasifican en clases de grafos geométrico-birracionalmente equivalentes (con igual  $\bar{G}$ ). Los morfismos birracionales geométricos entre los grafos de cada clase definen una estructura de grafo acíclico y transitivo (un orden) cuyo reducido es exactamente el inducido por  $\text{Iso}_A(Z,H)$  y al que denotaremos por  $\text{Iso}(Z,H, |\bar{H}|)$ .

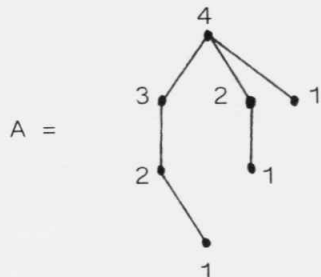
Cada uno de estos subgrafos inducidos tiene la propiedad de ser continuo en el sentido de que si un camino en  $\text{Iso}_A(Z,H)$  tiene sus extremos en el subgrafo inducido entonces todos los puntos intermedios están en dicho subgrafo (véase observación 4.1.20).

Una clase particular es la que contiene al propio  $(Z,H)$ , clase que se caracteriza por ser el conjunto de grafos del  $\text{Iso}_A(Z,H)$  geométrico-birrationalmente equivalentes y sin arcos transversales, es decir, grafos  $(X,G)$  de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  para los que  $\tilde{G} = \bar{G}$ . Denotaremos este subgrafo por  $\text{Iso}(Z,H, |H|)$ .

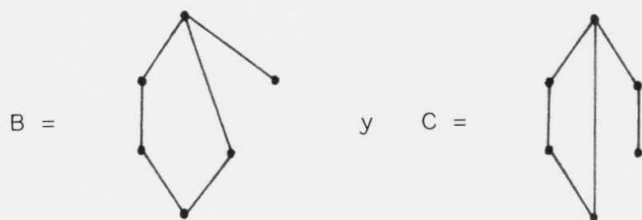
Obsérvese que  $\text{Iso}(Z,H)$ , que es el subgrafo inducido por  $\text{Iso}_A(Z,H)$  en el subconjunto de reducidos, es, también, un subgrafo inducido por  $\text{Iso}(Z,H, |H|)$ .  $\text{Iso}(Z,H)$ ,  $\text{Iso}(Z,H, |H|)$  e  $\text{Iso}_A(Z,H)$  tienen el mismo maximal  $(Z,H)$ .

Ejemplo 4.4.12

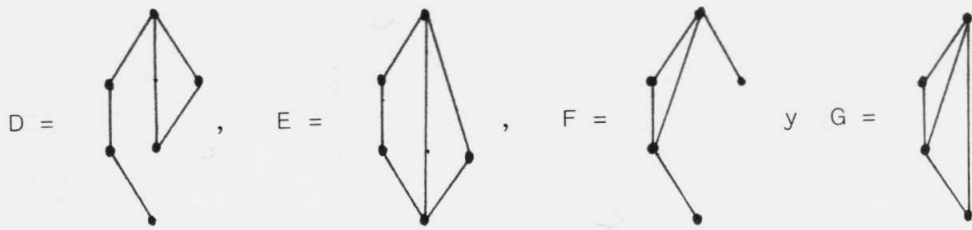
El bosque  $A = (Z,H)$  de la figura



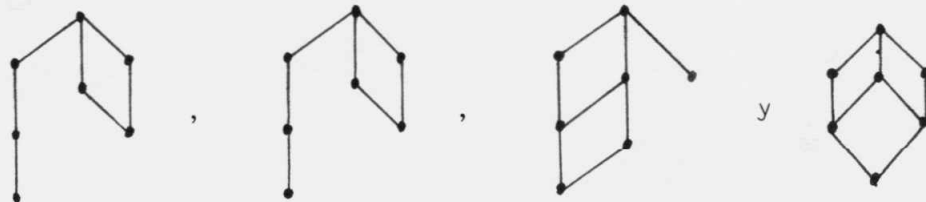
admite los contraídos sin arcos transversales siguientes



admite otros cuatro contraídos no reducidos

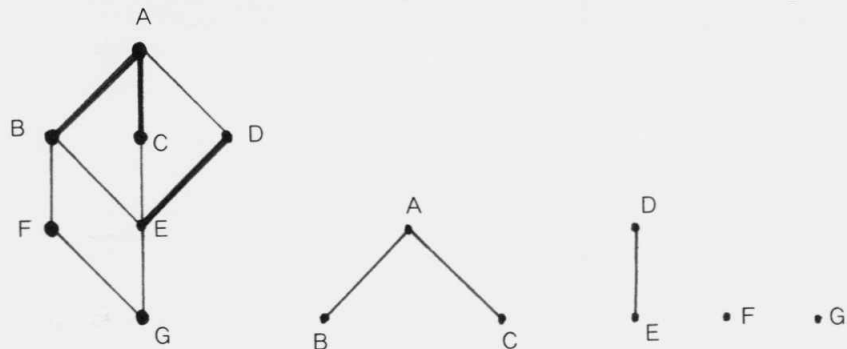


cuyos desingularizados completos son respectivamente:



Por lo que las clases de grafos de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  geométrico-birracionalmente equivalentes son; en primer lugar  $\{A,B,C\}$  cuyo subgrafo inducido es  $\text{Iso}(Z,H,|H|)$  y que, en particular, contiene a  $\text{Iso}(Z,H)$ , el subgrafo inducido en  $\{A,B\}$ ; por otro lado,  $\{E,D\}$  y finalmente,  $F$  y  $G$  están en clases distintas. El grafo  $\text{Iso}_A(Z,H)$  y sus subgrafos inducidos aludidos se pueden observar en la siguiente

figura:



La figura de arriba muestra cómo estas clases de equivalencia birracional geométrica son una partición del conjunto de puntos de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  pero no así de su conjunto de arcos.

Pasamos, a continuación, a estudiar la estructura de una terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  (objeto que caracteriza cada clase de equivalencia) y a caracterizar  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  a partir de  $(X,G)$  mediante una propiedad universal.

Proposición 4.4.13

Sea  $(X,G)$  un grafo acíclico,  $(\tilde{X},\tilde{G},\bar{G})$  su desingularizado completo y  $\pi:(\tilde{X},\bar{G}) \rightarrow (X,G)$  su desingularización completada. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

a) Si  $(x,y) \in \bar{G}-\tilde{G}$ , entonces  $x$  e  $y$  están en el mismo árbol del bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$ .

b) Si  $(x,y) \in \bar{G}-\tilde{G}$  el símbolo  $\bar{\uparrow}$  denota el siguiente en el bosque  $(\tilde{X},\tilde{G})$ , entonces existen  $x^{-\bar{\uparrow}}$  e  $y^{-\bar{\uparrow}}$  y  $(x^{-\bar{\uparrow}},y^{-\bar{\uparrow}}) \in \bar{G}$ .

c) Si  $(x,y) \in \bar{G}-\tilde{G}$ , entonces los subgrafos inducidos  $(\bar{x},G/\bar{x})$  e  $(\bar{y},G/\bar{y})$  son isomorfos mediante un isomorfismo  $\bar{\Phi}$  que tiene la propiedad  $(z,\bar{\Phi}(z)) \in \bar{G}-\tilde{G}$  (o equivalentemente  $(z,\bar{\Phi}(z)) \in G$ ) para todo  $z \in \bar{x}$ .

d) Si  $x$  e  $y$  se pueden unir por un semicamino (definición 1.1.10) formado por arcos transversales, entonces  $x^{-\bar{\uparrow}} \neq y^{-\bar{\uparrow}}$ . Con más precisión, para cada sucesión inyectiva  $s:\{1,\dots,q\} \rightarrow X$ , con  $(s(i),s(i+1)) \in \bar{G}-\tilde{G}$  o  $(s(i+1),s(i)) \in \bar{G}-\tilde{G} \quad \forall i < q$ , se tiene  $s(1)^{-\bar{\uparrow}} \neq s(q)^{-\bar{\uparrow}}$ .

e) Si  $(x,y) \in \bar{G}-\tilde{G}$ , entonces  $\pi(x) = \pi(y)$ .

La demostración se apoya en el hecho de que si  $(x,y) \in \bar{G}-\tilde{G}$ , entonces  $x = x_{i_1 \dots i_p \dots i_q}$ ,  $y = x_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_q}$  con  $1 < p < q$ .

Las propiedades a), b) y e) son evidentes. Para c) basta tener en cuenta que los árboles  $(\bar{x},G/\bar{x})$  e  $(\bar{y},G/\bar{y})$  son, ambos, isomorfos al bosque de las cadenas  $(\bar{x}_{i_1}, G/\bar{x}_{i_1})$ . Para d), como los arcos del semicamino son transversales, entonces, según e)  $\pi(x) = \pi(y)$  luego  $x^{-\bar{\uparrow}} \neq y^{-\bar{\uparrow}}$ .

Las propiedades anteriores motivan la siguiente definición:

Definiciones 4.4.14

Llamaremos bosque con estructura cúbica a una terna  $(Z, H, \bar{H})$  donde  $(Z, H)$  es un bosque que es grafo parcial del grafo  $(Z, \bar{H})$ , de forma que si  $(x, y) \in \bar{H} - H$ , entonces  $(x, y)$  verifica las propiedades análogas a a), b), c) y d) de la proposición anterior.

Si  $(Z, H, \bar{H})$  es un bosque con estructura cúbica y  $(X, G)$  es un grafo acíclico, llamaremos morfismo geométrico a todo morfismo dominante de grafos  $\psi: (Z, \bar{H}) \rightarrow (X, G)$  tal que si  $(x, y) \in \bar{H} - H$ , entonces  $\psi(x) = \psi(y)$ .

Proposición 4.1.15

Si  $(Z, H, \bar{H})$  es un bosque con estructura cúbica, entonces

- a) Si  $(x, y) \in \bar{H}$  y  $c$  y  $c'$  son respectivamente, los caminos con fin maximal de  $x$  e  $y$  en  $(Z, H)$ , entonces  $l(c) = l(c') + 1$ .
- b) El grafo  $(Z, \bar{H})$  es reducido.
- c) Los grafos  $(Z, H)$  y  $(Z, \bar{H})$  tienen el mismo conjunto de maximales.

En efecto:

a) Si  $(x, y) \in H$ ,  $x$  e  $y$  son puntos consecutivos del mismo camino con fin maximal y la propiedad es evidente. Si  $(x, y) \in \bar{H} - H$ , por b)  $(x^{-1}, y^{-1}) \in \bar{H}$ . Si  $(x^{-1}, y^{-1}) \in H$  estamos en el caso anterior y en caso contrario existen otros siguientes unidos por un arco en  $\bar{H}$ . Por recurrencia y en un número finito de pasos se alcanza un arco de  $H$  o un maximal (en cuyo caso, también, el último arco es de  $H$ ). Luego  $l(c) = l(c') + 1$ .

b) Si en  $(Z, \bar{H})$  hay un ciclo  $z_1 z_2 \dots z_k z_1$ , con  $k \geq 2$ , como cada  $(z_i, z_{i+1}) \in \bar{H}$ , entonces  $l(c_i) = l(c_{i+1}) + 1$ , siendo  $c_i$  el camino

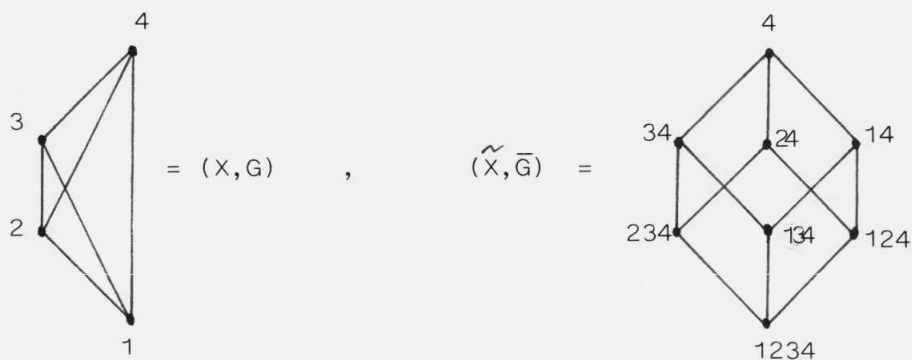
con fin maximal en  $(Z,H)$  que empieza en  $z_i$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ . En consecuencia, de  $z_1$  parten dos caminos con fin maximal cuyas longitudes difieren en  $k$  unidades, en contra de la existencia del ciclo. También, se deduce de a) que todos los caminos de  $(Z, \bar{H})$  que unen dos puntos son de la misma longitud y, por tanto, dos puntos unidos por un camino de longitud mayor o igual que dos no pueden estar unidos por un arco, lo que prueba la reducción de  $(Z,H)$ .

c) Se deduce inmediatamente de la propiedad a) de la proposición 4.4.13.

Observaciones 4.4.16

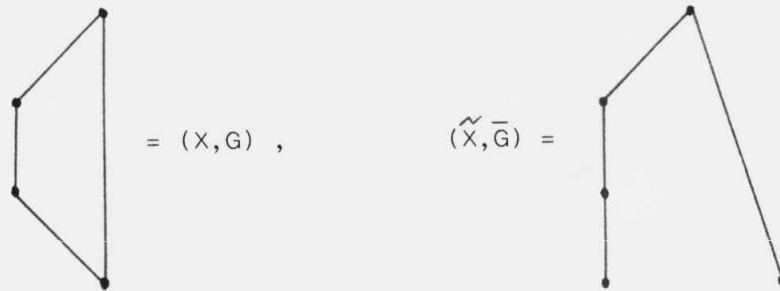
Si  $(X,G)$  es un grafo acíclico, entonces la terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  es un bosque con estructura cúbica y  $\pi: (\tilde{X}, \bar{G}) \rightarrow (X,G)$  es un morfismo geométrico.

El nombre bosque con estructura cúbica está justificado por el significado gráfico de las propiedades a), b), c) y d). Así, si  $(X,G)$  es el grafo de la figura entonces  $(\tilde{X}, \bar{G})$  es el cubo de la figura:



En general, el grafo acíclico transitivo cuyo reducido es un camino de longitud  $n$  se desingulariza (como completado) en un  $n$ -cubo.

Ya hemos tenido ocasión de observar en el ejemplo 4.4.12 que existen bosques con estructura cúbica sin arcos transversales por lo que son simplemente un bosque. Esto sucede siempre con el desingularizado completo de un grafo reducido pero, también, puede suceder que  $\tilde{G} = \bar{G}$  para grafos acíclicos no reducidos. El ejemplo más sencillo de esto lo proporciona el grafo de la figura siguiente



Se puede, claramente, afirmar que:

Proposición 4.4.17

Si  $(X, G)$  es un grafo acíclico,  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  su bosque con estructura cúbica y  $\pi: (\tilde{X}, \bar{G}) \rightarrow (X, G)$  su morfismo geométrico, las condiciones siguientes son equivalentes:

- a) En  $(X, \bar{G})$  no hay semiciclos de longitud tres.
- b) En  $(\tilde{X}, \bar{G})$  no hay semiciclos.
- c)  $\bar{G} = \tilde{G}$ .

En cuyo caso, podremos decir que  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  se reduce al bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . La demostración sólo requiere recordar la definición en 1.1.10.

Teorema 4.4.18.- (Propiedad universal de la explosión geométrica o completada)

Sea  $(X, G)$  un grafo acíclico,  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  su desingularizado completo y  $\pi: (\tilde{X}, \bar{G}) \rightarrow (X, G)$  la desingularización completada. Para



todo bosque con estructura cúbica  $(Z, H, \bar{H})$  y para todo morfismo geométrico  $\psi: (Z, \bar{H}) \rightarrow (X, G)$  existe un único morfismo de ternas  $\tilde{\psi}: (Z, H, \bar{H}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  tal que  $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$ .

En efecto, como  $\psi: (Z, \bar{H}) \rightarrow (X, G)$  es un morfismo dominante,  $\psi: (Z, H) \rightarrow (X, G)$  es, también, morfismo dominante, pues  $(Z, H)$  y  $(Z, \bar{H})$  tienen el mismo conjunto de maximales. La propiedad universal del bosque de las cadenas  $(X, G)$  (Corolario 4.1.) nos proporciona un morfismo dominante único  $\tilde{\psi}: (Z, H) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{G})$  tal que  $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$ . Para ver que  $\tilde{\psi}: (Z, H, \bar{H}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  es un morfismo de ternas con  $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$  sólo hace falta comprobar que  $\tilde{\psi}: (Z, \bar{H}) \rightarrow (\tilde{X}, \bar{G})$  es un morfismo. Para ello, tomamos  $(x, y) \in \bar{H}-H$ . Las propiedades a) y b) de la proposición 4.4.13 nos permiten asegurar que los caminos con fin maximal de los puntos  $x$  e  $y$  en el bosque  $(Z, H)$  son, respectivamente, del tipo  $z_1 \dots z_p \dots z_q$  y  $z'_1 \dots z'_{p-1} z_{p+1} \dots z_q$ , con  $z_1 = x$  y  $z'_1 = y$ . Además, se tiene que  $(z_i, z'_i) \in \bar{H}-H$ , para  $1 \leq i \leq p-1$ . Por ser  $\psi$  geométrico se tiene  $\psi(z_i) = \psi(z'_i)$ , para  $1 \leq i \leq p-1$  y, por tanto, los elementos  $\tilde{\psi}(x)$  y  $\tilde{\psi}(y)$  de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  representan caminos con fin maximal de  $(X, G)$  que o bien son iguales (si  $\psi(z_{p-1}) = \psi(z_p)$  o si  $\psi(z_p) = \psi(z_{p+1})$ ) o difieren sólo en el elemento  $\psi(z_p)$ . Se tiene, entonces, que o bien  $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(y)$  o bien  $(\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)) \in \bar{G}$  lo cual determina la demostración. Las figuras de la observación 4.2.4 dan una ilustración de esta prueba.

#### Observaciones 4.4.19

Las propiedades c) y d) de la proposición 4.4.13 no han sido utilizadas hasta el momento. En particular, la propiedad universal anterior también es cierta si se toman ternas  $(Z, H, \bar{H})$  con las propiedades a) y b).

Las propiedades c) y d) servirán para establecer que todo bosque con estructura cúbica es el desingularizado completo de algún grafo acíclico.

Teorema 4.4.20

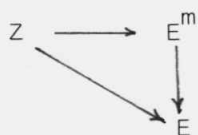
Si  $(Z, H, \bar{H})$  es un bosque con estructura cúbica, entonces existe un grafo acíclico  $(X^m, G^m)$  cuyo desingularizado completo es isomorfo (como terna) a  $(Z, H, \bar{H})$  y con la propiedad de que para cualquier otro grafo acíclico  $(X, G)$  cuyo desingularizado completo sea isomorfo a  $(Z, H, \bar{H})$  existe un único morfismo birracional geométrico  $\psi: (X^m, G^m) \rightarrow (X, G)$ .

El resultado es consecuencia de la caracterización de las  $p$ -contracciones acíclicas dada en el teorema 4.1.14. En efecto, para construir el grafo acíclico  $(X^m, G^m)$  basta dar un pre-etiquetado a  $(Z, H, \bar{H})$  que sea una  $p$ -contracción acíclica. Para ello basta dar pre-etiquetas iguales a los puntos unidos por arcos transversales. Con más precisión: Dos puntos  $x, y \in Z$  tienen la misma pre-etiqueta si y sólo si existe un semicamino formado por arcos transversales que une  $x$  con  $y$ .

Según b) los arcos que conectan a un punto maximal no son transversales por lo que los maximales portan pre-etiquetas distintas. Según d) dos puntos con igual pre-etiqueta no pueden tener igual siguiente. Finalmente y según c), se cumple la propiedad global de las  $p$ -contracciones por lo que el pre-etiquetado es una  $p$ -contracción acíclica.

Si, ahora,  $(X, G)$  es otro grafo acíclico que tiene a  $(Z, H, \bar{H})$  como desingularizado completo entonces se tienen dos pre-etiquetados de  $(Z, H)$ : uno  $p^m: Z \rightarrow E^m$  que corresponde a  $(X^m, G^m)$  y otro  $p: Z \rightarrow E$

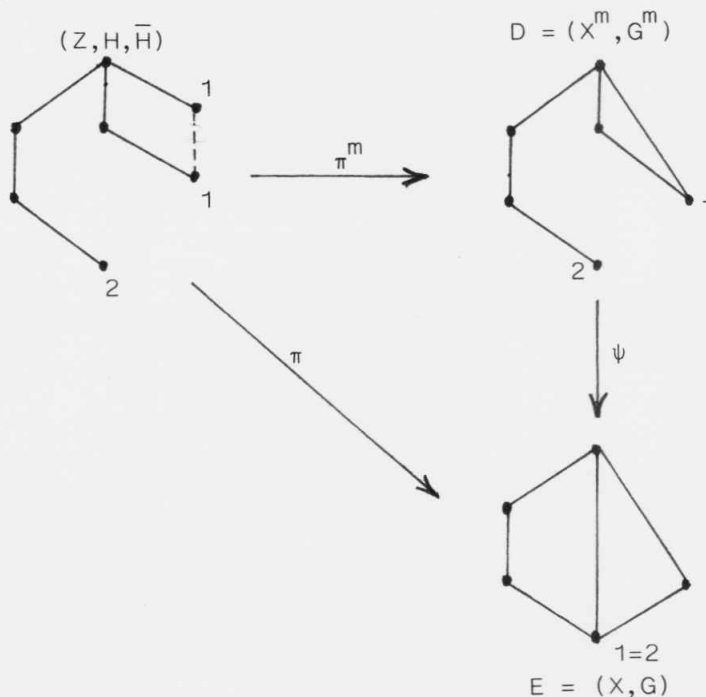
que corresponde a  $(X,G)$ . Como la desingularización completa de  $(X,G)$  es un morfismo geométrico se sigue que si dos puntos de  $Z$  tienen igual pre-etiqueta por  $E^m$ , entonces, también la tienen por  $E$  y, por tanto, se tiene el diagrama conmutativo



Este diagrama define un morfismo birracional  $\psi: (X^m, G^m) \rightarrow (X, G)$ . Como  $\text{Card}(\bar{G}^m) = \text{Card}(\bar{G}) = \text{Card}(H)$  se sigue de la proposición 4.4.8 que  $\psi$  es un morfismo birracional geométrico.

Ejemplo 4.4.21

Los grafos  $D$  y  $E$  del ejemplo 4.4.12 son "contracciones" distintas del bosque con estructura cúbica  $(Z, H, \bar{H})$  allí mostrado. La siguiente figura, que ilustra el teorema anterior, muestra cómo  $D$  es el grafo  $(X^m, G^m)$  construido arriba identificando los puntos que pueden unirse por semicaminos transversales y muestra, también, el morfismo birracional geométrico  $\psi: D \rightarrow E$ . (Los arcos transversales se dibujan a trazos).



Como consecuencia del teorema anterior se pueden hacer algunas precisiones más sobre el grafo  $\text{Iso}_A(Z,H)$  y los subgrafos inducidos  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$  que dividen su conjunto de puntos.

Corolario 4.4.22

a) Cada subgrafo inducido  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$  tiene un máximo, el grafo  $(X^m, G^m)$ .

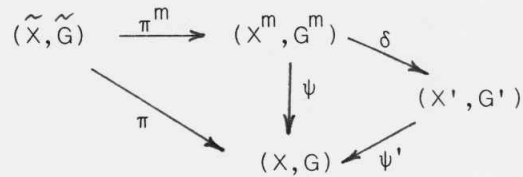
b) El conjunto cociente dado por la partición de  $\text{Iso}_A(Z,H)$  en las clases de equivalencia  $\text{Iso}(Z,H,|\bar{H}|)$  queda ordenado por la relación de orden entre los maximales de las clases.

Observación 4.4.23

Si  $(X,G)$  es un grafo acíclico y  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  es su explotado completo, el teorema anterior nos proporciona el máximo  $(X^m, G^m)$  de la clase  $\text{Iso}(\tilde{X}, \tilde{G}, |\bar{G}|)$ . Como  $(X^m, G^m)$  es una p-contracción acíclica del bosque de las cadenas  $(X,G)$  para un pre-etiquetado  $p: \tilde{X} \rightarrow E$  que está bien definido por el bosque con estructura cúbica  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$ , el morfismo explosión  $\pi: (\tilde{X}, \tilde{G}) \rightarrow (X,G)$  factoriza a través de  $(X^m, G^m)$ , es decir se tiene un morfismo  $\psi: (X^m, G^m) \rightarrow (X,G)$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, \tilde{G}) & \xrightarrow{\pi^m} & (X^m, G^m) \\
 & \searrow \pi & \downarrow \psi \\
 & & (X, G)
 \end{array}$$

El morfismo  $\psi$  es birracional geométrico y es el máximo posible en el sentido de que si  $\psi': (X', G') \rightarrow (X, G)$  es un morfismo birracional geométrico entonces existe un único  $\delta: (X^m, G^m) \rightarrow (X', G')$  tal que  $\psi' \circ \delta = \psi$ , como se puede ver en el siguiente diagrama:



Todo lo cual sugiere la siguiente definición:

Definición 4.4.24

Dado un grafo acíclico  $(X, G)$ , si  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  es su explotado completo, llamaremos explotado birracional geométrico de  $(X, G)$  al máximo  $(X^m, G^m)$  de la clase  $\text{Iso}(\tilde{X}, \tilde{G}, |\bar{G}|)$ . Al morfismo birracional geométrico  $\psi: (X^m, G^m) \rightarrow (X, G)$  le llamaremos explosión birracional geométrica.

En el ejemplo 4.4.21 el explotado birracional geométrico del grafo E es el grafo D. En definitiva, el máximo  $(X^m, G^m)$  de cada clase  $\text{Iso}(\tilde{X}, \tilde{G}, |\bar{G}|)$  es el explotado birracional geométrico de todos los grafos de la clase. En particular, el bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  es el explotado birracional geométrico para todos los grafos acíclicos cuyos explotados completos carecen de arcos transversales.

El interés de la explosión birracional geométrica radica en que permite eliminar los puntos de indeterminación de las aplicaciones racionales geométricas tal y como se indica a continuación.

Proposición 4.4.25

Sean  $(Z, H, \bar{H})$  y  $(Z', H', \bar{H}')$  bosques con estructura cúbica y  $\pi^m: (Z, H) \rightarrow (X^m, G^m)$ ,  $\pi'^m: (Z', H') \rightarrow (X'^m, G'^m)$  las contracciones acíclicas correspondientes a  $\bar{H}$  y  $\bar{H}'$  respectivamente. Si

$\psi: (Z, H, \bar{H}) \rightarrow (Z', H', \bar{H}')$  es un morfismo de ternas, que conserva arcos transversales en el sentido de la definición 4.4.4., entonces, se tiene un único morfismo de grafos  $\psi^m: (X^m, G^m) \rightarrow (X'^m, G'^m)$  tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (Z, H, \bar{H}) & \xrightarrow{\Psi} & (Z', H', \bar{H}') \\
 \downarrow \pi^m & & \downarrow \pi'^m \\
 (X^m, G^m) & \xrightarrow{\Psi^m} & (X'^m, G'^m)
 \end{array}$$

En efecto, para cada  $x \in X^m$ ,  $(\pi^m)^{-1}(x)$  es un conjunto de puntos de  $Z$  que constituyen un semicamino transversal en  $(Z, \bar{H})$ . La imagen por  $\Psi$  de este semicamino transversal es un semicamino transversal en  $(Z', \bar{H}')$  que es llevado por  $\pi'^m$ , al ser morfismo geométrico, en un único punto  $y \in X'^m$ . La aplicación  $\Psi^m(x) = y$  es, obviamente, un morfismo de grafos que hace conmutativo el diagrama.

Corolario 4.4.26

Si  $(X, G)$  y  $(X', G')$  son grafos acíclicos y  $Z: (X, G) \rightarrow (X', G')$  es una aplicación racional dominante geométrica (4.4.5), entonces existe un morfismo  $h: (X^m, G^m) \rightarrow (X', G')$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (X^m, G^m) & & \\
 \downarrow \psi & \searrow h & \\
 (X, G) & \xrightarrow{Z} & (X', G')
 \end{array}$$

es decir,  $\psi$  elimina los puntos de indeterminación de  $Z$ .

En efecto,  $Z$  corresponde a un morfismo de ternas  $\psi: (\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}', \bar{G}')$  que, por la proposición anterior, induce el morfismo de grafos  $\psi^m: (X^m, G^m) \rightarrow (X'^m, G'^m)$ . Basta, entonces, tomar  $h = \psi' \circ \psi^m$  siendo  $\psi': (X'^m, G'^m) \rightarrow (X', G')$  (ver teorema 4.4.23 y proposición 4.4.25).

Observación 4.4.27

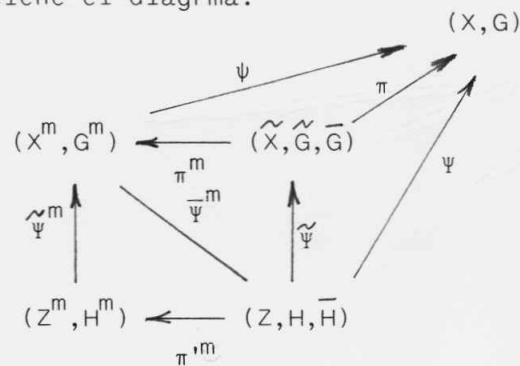
Si  $(X, G)$  es un grafo acíclico cuyo explotado completo carece de arcos transversales entonces  $(X^m, G^m) = (\tilde{X}, \tilde{G})$  luego la indeterminación de las aplicaciones racionales dominantes (son todas

geométricas) se resuelve a través de  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . Si  $(X, G)$  posee explotado completo con arcos transversales las indeterminaciones de las aplicaciones racionales dominantes también las resuelve  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  pero, con más precisión, las resuelve el grafo intermedio  $(X^m, G^m)$  si las aplicaciones racionales dominantes son geométricas.

Corolario 4.4.28. - (Propiedad universal de la explosión birracional)

Sea  $(X, G)$  un grafo acíclico y  $\psi : (X^m, G^m) \rightarrow (X, G)$  su explosión birracional geométrica. Entonces, para todo bosque con estructura cúbica  $(Z, H, \bar{H})$  y todo morfismo geométrico  $\Psi : (Z, \bar{H}) \rightarrow (X, G)$  existe un único morfismo  $\bar{\Psi}^m : (Z, \bar{H}) \rightarrow (X^m, G^m)$  tal que  $\psi \circ \bar{\Psi}^m = \Psi$ .

En efecto se tiene el diagrama:



que se construye como sigue: por la propiedad universal para la explosión geométrica (4.4.18)  $\Psi$  induce el morfismo de ternas  $\tilde{\Psi}$  que conserva arcos transversales (por construcción de  $\tilde{\Psi}$ ), por tanto, según el teorema anterior, queda inducido un morfismo

$\tilde{\Psi}^m : (Z^m, H^m) \rightarrow (X^m, G^m)$ , siendo  $(Z^m, H^m)$  el contraído maximal del bosque con estructura cúbica  $(Z, H, \bar{H})$  y  $\bar{\Psi}^m$  se obtiene entonces como diagonal de este último diagrama. En realidad, para probar que  $\psi \circ \bar{\Psi}^m = \Psi$  basta considerar que  $\pi \circ \tilde{\Psi} = \Psi$  (4.4.18), que  $\psi \circ \pi^m = \pi$  por la observación 4.4.23 y la definición  $\bar{\Psi}^m = \pi^m \circ \tilde{\Psi}$  en cuyo caso

$$\Psi = \pi \circ \tilde{\Psi} = \psi \circ \pi^m \circ \tilde{\Psi} = \psi \circ \bar{\Psi}^m.$$

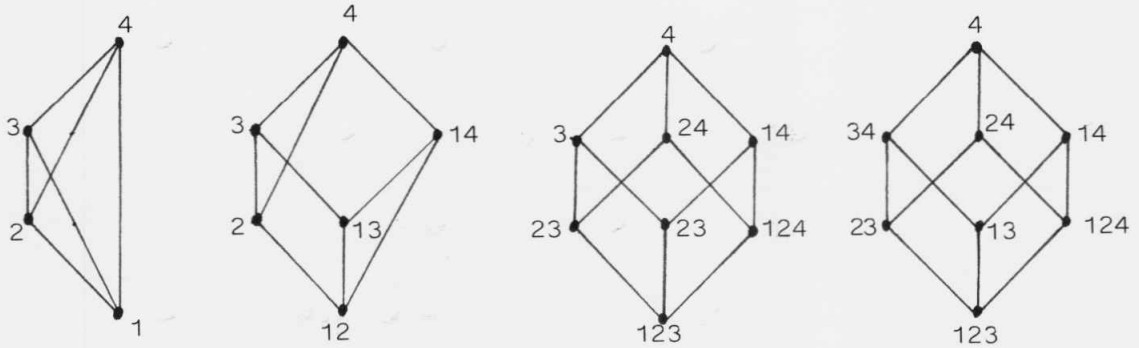
#### 4.5. GRAFOS ACICLICOS TRANSITIVOS

En cada clase de grafos acíclicos asociada a cada espacio topológico  $T_0$  hay un único grafo transitivo representante, por tanto, de la clase y cada uno de estos grafos transitivos contiene, inmersos en él, a todos los grafos acíclicos de su clase. Lo mismo puede decirse de sus explotados y de sus explotados completos. Por otro lado, generalmente, los "lugares" geométricos, o de otra índole, en los que la aplicación de las técnicas descritas anteriormente pueda tener interés: desingularización en geometría, espectros de anillos, conjuntos ordenados, espacios topológicos  $T_0$ , son transitivos. La explosión de grafos acíclicos y transitivos tiene, pues un interés especial.

En la  $\pi_p$ -explosión (por niveles) de un grafo reducido se ha visto cómo los sucesivos grafos explotados resultaban, también, reducidos. La explosión por niveles de un grafo acíclico (transitivo) proporciona, sucesivamente, grafos acíclicos no reducidos (no transitivos), y reducidos en los niveles ya explotados) salvo en las dos últimas etapas (nivel  $N_{k-1}$  y  $N_k$ , siendo  $k$  la dimensión del grafo) de las que resulta un grafo reducido, el bosque de las cadenas. La explosión completada se construye globalmente sobre el bosque de las cadenas produciendo un grafo reducido: el bosque con estructura cúbica. Este puede obtenerse, también, como explosión geométrica del grafo acíclico (transitivo) de partida, lo que se hace explotando por puntos de un modo ordenado. En la primera explosión puntual geométrica de un grafo acíclico (transitivo) se obtiene un grafo acíclico (no transitivo). En las sucesivas explosiones puntuales se va "reduciendo" la condición de acíclico (y de transitivo) de modo que una vez explotados los puntos de los  $p$  primeros



niveles resulta un grafo que es reducido en sus  $p$  primeros niveles y acíclico (no necesariamente transitivo) en los  $k-p$  últimos niveles. La siguiente figura ilustra este último comentario



El  $\pi_1$ -explotado puntual no es transitivo. El  $\pi_2$ -explotado ya es reducido. (La explosión de los  $N_{k-2}$  primeros niveles es reducida). El  $\pi_3$ -explotado es morfológicamente igual al anterior, pero no sintácticamente.

En esta sección representaremos por  $(X^t, G^t)$  a un grafo acíclico transitivo y por  $(X^r, G^r)$  a su reducido. Denotaremos, entonces, por  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$  al explotado del reducido, por  $(\hat{X}^t, \hat{G}^t)$  al explotado, como acíclico, del transitivo y por  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$  al explotado completo del transitivo. Son obvias las relaciones siguientes:  $X^r = X^t$ ,  $G^r \subset G^t$ ;  $\tilde{X}^r \subset \hat{X}^t$  y  $\tilde{G}^r \subset \hat{G}^t \subset \tilde{G}^t$ .  $(X^r, G^r)$  es un grafo parcial de  $(X^t, G^t)$  y  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$  es el subgrafo inducido por  $(\hat{X}^t, \hat{G}^t)$  en  $\tilde{X}^r$  pues  $\tilde{G}^r = \tilde{G}^t \cap (\tilde{X}^r \times \tilde{X}^r)$ .

En los ejemplos de la sección 4.2 se mostró la dependencia sintáctica entre un explotado completo y los explotados del reducido y acíclico de procedencia incluso en el caso de grafos acíclicos y transitivos. Concretamente el ejemplo 4.2.13 muestra dos grafos acíclicos transitivos distintos con el mismo explotado de su reducido, igual bosque de las cadenas, pero distinto bosque con

estructura cúbica por lo que ésta no está determinada por las anteriores. En las siguientes proposiciones mostramos hasta que punto el conocimiento de dos de estas tres estructuras,  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$ ,  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$  y  $(\tilde{X}^t, \bar{G}^t)$ , determina la tercera en el caso de grafos acíclicos y transitivos.

Proposición 4.5.1

Sea  $(X^r, G^r)$  un grafo reducido y  $(X^t, G^t)$  su transitivo, entonces con las notaciones anteriores, se tiene que:

Si se conoce la terna  $(\tilde{X}, \tilde{G}^t, \bar{G}^t)$ , también se conoce el grafo  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$ . Como  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$  es un subgrafo inducido por  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$  bastará determinar el conjunto  $\tilde{X}^r$ . En la siguiente figura



se observa cómo si un arco,  $(x,z)$ , no está en el reducido entonces  $x'$ , el explotado de  $x$  en el acíclico por el camino más corto, es extremo superior de un arco transversal, por lo que los puntos de  $\tilde{X}^t - \tilde{X}^r$  se caracterizan por ser extremos superiores de los arcos transversales de  $\bar{G}^t$ . En efecto, veamos que

$\tilde{X}^r = \{x \in \tilde{X}^t / \nexists y \in \tilde{X}^t, (y,x) \in \bar{G}^t - \tilde{G}^t\}$ . Por una parte, si  $x \in \tilde{X}^r$  entonces  $x = x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$  en  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$  y si  $(y,x) \in \bar{G}^t - \tilde{G}^t$  entonces

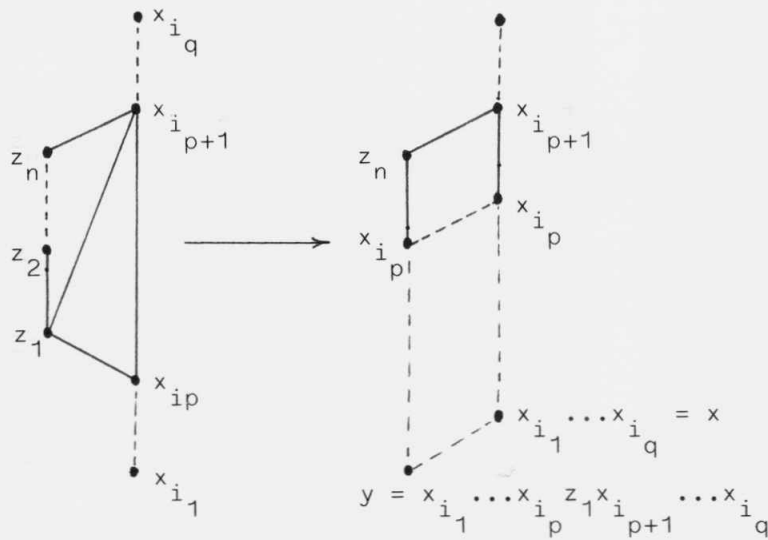
$y = x_{i_1} \dots x_{i_p} z x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$ , con  $1 \leq p < q$ , en  $(X^t, G^t)$  luego

$(x_{i_p}, z) \in G^t$  y  $(z, x_{i_{p+1}}) \in G^t$  en contra de que  $(x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in \tilde{G}^r$ . Por

la otra, si  $x \notin \tilde{X}^r$  y  $x = x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$ , entonces hay algún

arco  $(x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \notin \tilde{G}^r$  y hay un camino  $x_{i_p} z_1 \dots z_n x_{i_{p+1}}$  en  $(X^t, G^t)$ , en cuyo caso,  $(x_{i_p}, z_1) \in G^t$  y  $(z_1, x_{i_{p+1}}) \in G^t$  (por la transitividad). En consecuencia, hay un camino  $y = x_{i_{-1}} \dots x_{i_p} z_1 x_{i_{p+1}} \dots x_{i_q}$  en  $(X^t, G^t)$  y por tanto  $(y, x) \in \overline{G}^t - \tilde{G}^t$  contra la descripción de  $\tilde{X}^r$ .

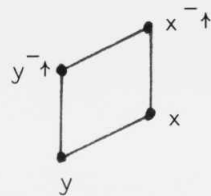
La siguiente figura ilustra la segunda parte de la demostración anterior



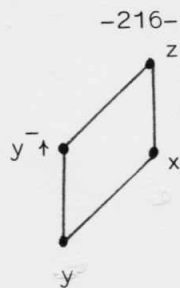
Lema 4.5.2

Con las notaciones señaladas anterioremente para esta sección, sea  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t, \overline{G}^t)$  el bosque con estructura cúbica de  $(X^t, G^t)$ . Entenderemos por  $\overline{\uparrow}$  el siguiente en  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$ .

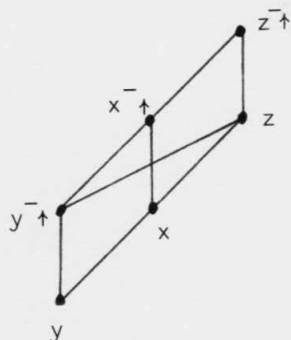
Si  $x$  e  $y$  son puntos de  $\tilde{X}^t$  tales que  $(y, x) \in \overline{G}^t$  e  $y^{-\uparrow} \neq x$  entonces el siguiente semiciclo de longitud cuatro es único:



En efecto, la propiedad b) de la proposición 4.4.13 nos asegura la existencia del arco  $(y^{-\uparrow}, x^{-\uparrow}) \in \overline{G}^t$  que cierra el semiciclo. Para la unicidad, si existiera, para otro punto  $z \neq x^{-\uparrow}$ , el semiciclo de longitud cuatro:



como el siguiente en un bosque es único, entonces  $(y,x)$  y  $(x,z)$  son arcos transversales de  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$ , existiendo, entonces, un camino  $y \ x \ z$  de arcos transversales con  $(y^-↑, z) \in \bar{G}$ . El morfismo geométrico  $\pi : (\tilde{X}^t, \tilde{G}^t, \bar{G}^t) \rightarrow (X^t, G^t)$  identifica los puntos  $y, x$  y  $z$ , con lo que se obtienen en el contraído  $(X^t, G^t)$  dos arcos  $(y, y^-↑), (y^-↑, z)$ , en contra de que  $(X^t, G^t)$  sea acíclico.



Proposición 4.5.3

Si se conoce  $(\tilde{X}^t, \bar{G}^t)$  y los subconjuntos  $\tilde{X}^r \subset \tilde{X}^t$  y  $\tilde{G}^r \subset \bar{G}^t$ , entonces se conoce  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$ .

En definitiva, basta localizar  $\tilde{G}^t$ , lo que es equivalente a encontrar, para cada  $x \in \tilde{X}^t$ , su siguiente  $x^-↑$  en el bosque de las cadenas  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$ . (Se sobreentiende que  $x$  no es maximal).

Llamaremos distancia de  $\tilde{X}^r$  a un punto  $x \in \tilde{X}^t$  y lo denotaremos por  $d(\tilde{X}^r, x)$ , al mínimo de las longitudes de los caminos en  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$  que comienzan en un punto de  $\tilde{X}^r$  y acaban en  $x$ . Obviamente, los puntos de  $\tilde{X}^t$  quedan clasificados por su distancia a  $\tilde{X}^r$ .

Si  $d(\tilde{X}^r, x) = 0$ , entonces  $x \in \tilde{X}^r$  y  $x^-↑$  está determinado en  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$ .

Si  $d(\tilde{X}^r, x) = 1$ , entonces el lema 4.5.2 nos determina  $x^-↑$ .

Recurrentemente se obtienen los siguientes de los otros puntos de  $\tilde{X}^t$ , es decir, si

$$\tilde{X}^{r_i} = \tilde{X}^{r_{i-1}} \cup \{x, d(\tilde{X}^{r_{i-1}}, x) = 1\} \quad \text{y} \quad \tilde{G}^{r_i} = \{(x, x^{-1}), x \in \tilde{X}^{r_i}\}$$

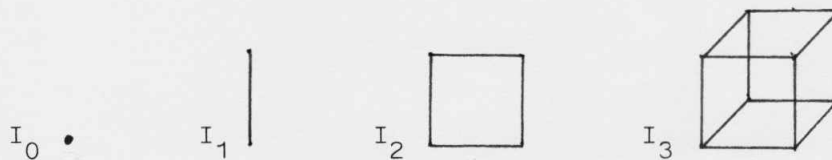
el lema 4.5.2 nos proporciona el siguiente de  $x \in \tilde{X}^{r_i} - \tilde{X}^{r_{i-1}}$ . De este modo se llega a  $\tilde{X}^{r_k} = \tilde{X}^t$  siendo k el máximo del conjunto  $\{d(\tilde{X}^r, x), x \in \tilde{X}^t\}$ .

Aunque para un grafo acíclico transitivo (X,G) el explotado completo  $(\tilde{X}, \bar{G})$  no está determinado por el bosque de las cadenas  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ , mucha de la información contenida en  $(\tilde{X}, \bar{G})$  resulta estar ya en el bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ . Esta información hace referencia a la estructura cúbica.

Definiciones 4.5.4

Sea (X,G) un grafo acíclico no necesariamente transitivo y sea  $(\tilde{X}, \tilde{G}, \bar{G})$  su desingularizado completo.

Si I representa al grafo  $(\{0,1\}, \{(0,1)\})$ , e i es un número natural  $\geq 0$ , denotaremos por  $I_i$  el grafo suma de i copias de I y llamaremos a  $I_i$  "cubo standar" de dimensión i. Por extensión, el cubo standar de dimensión 0 será el grafo con un solo punto.



Llamaremos i-cubo de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  a todo subconjunto  $C_i$  de  $\tilde{X}$  tal que el grafo inducido  $(C_i, \bar{G}/C_i)$  sea isomorfo al "cubo standar" de dimensión i. Si  $0 \leq j < i$ , llamaremos cara j-dimensional de un i-cubo  $C_i$  de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  a todo j-cubo  $C_j$  de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  tal que  $C_j \subset C_i$ . Cada i-cubo tiene, obviamente, caras j-dimensionales  $\forall j, 0 \leq j \leq i$ . Los cubos

de dimensión 0 de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  son simplemente los puntos de  $\tilde{X}$ , los cubos de dimensión 1 de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  son los arcos de  $\bar{G}$ , mientras que los cubos de dimensión 2 son los semiciclos de longitud cuatro en  $(\tilde{X}, \bar{G})$ .

Lema 4.5.5

Cada cubo  $C_i$  de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  está determinado por el conjunto  $x \uparrow$  siendo  $x$  el punto mínimo de  $C$ . ( $x \uparrow$  consta del propio  $x$  y de sus  $i$  puntos siguientes en  $(\tilde{X}, \bar{G})$ ).

En efecto, si  $x = x_1 \dots x_q$ , entonces cada uno de los  $i$  elementos de  $x \uparrow$  es el resultado de extraer un elemento  $x_p$ , con  $p \neq q$ , de la anterior sucesión. El resto de los vértices (puntos) del cubo  $C_i$  es el resultado de ir extrayendo simultáneamente pares, ternas, etc... de esos  $i$  puntos  $x_p$  extraídos en la primera etapa. El máximo de  $C_i$  se obtiene extrayendo de la sucesión  $x_1 \dots x_q$  los  $i$  puntos  $x_p$  anteriores. (Lema 4.5.2).

Sin embargo, no es cierto, en general, que dado un punto  $x \in \tilde{X}$ ,  $x = x_1 \dots x_q$  y dados  $i$  subíndices  $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_i < q$  exista un  $i$ -cubo con mínimo en  $X$  y que corresponda a las extracciones  $x_{p_1}, \dots, x_{p_i}$ , ya que extrayendo algún elemento  $x_p$  no se puede asegurar que el arco  $(x_{p-1}, x_{p+1})$  esté en el grafo  $(X, G)$ . Si el grafo es transitivo, entonces, tal problema no existe y, por tanto, dar un cubo  $i$ -dimensional de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  con mínimo  $x = x_1 \dots x_q$  es equivalente a dar un subconjunto de  $i$  elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, q-1\}$  (el maximal no se puede extraer).

Recordemos que indicábamos (definición 2.2.4) por  $l(x)$  la longitud del punto  $x$  es decir,  $l(x) = p$  si y sólo si  $x \in N_p$ . Si indicamos por  $l^d(x)$  la longitud de  $x$  en el grafo dual se tiene, para un grafo acíclico y transitivo, que  $l(x) + l^d(x) = k$ , siendo  $k$  la

dimensión del grafo. En consecuencia, si  $x = x_1 \dots x_q$  entonces  $l^d(x) = q-1$ , es decir, la longitud del camino con fin maximal  $x_1 \dots x_q$ .

Teorema 4.5.6

Si  $(X,G)$  es un grafo acíclico transitivo de dimensión  $k$  y, para cada  $i > 0$ ,  $c_i$  es el número de cubos  $i$ -dimensionales de  $(X,G)$ , entonces se tiene

$$a) \quad c_i = \sum_{x \in \tilde{X}} \binom{l^d(x)}{i}, \text{ si } i \leq k \text{ y } c_i = 0 \text{ para } i > k.$$

$$b) \quad \sum_{i=0}^k (-1)^i c_i = m, \text{ siendo } m \text{ el número de maximales de } (\tilde{X}, \tilde{G})$$

(o bien de  $(X, \bar{G})$  o de  $(\tilde{X}, \bar{G})$ ).

a) es consecuencia inmediata de lo comentado en el lema anterior, pues la colección de todos los cubos  $i$ -dimensionales de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  se puede clasificar por la relación de equivalencia "tener

igual mínimo", y para una clase cuyo mínimo sea  $x$  hay  $\binom{l^d(x)}{i}$  cubos.

En particular,  $\text{Card}(\bar{G}) = \sum_{x \in \tilde{X}} l^d(x)$ .

Para probar el apartado b) necesitamos acudir a la Topología. En efecto, si  $A_i$  es la familia de cubos  $i$ -dimensionales de  $(\tilde{X}, \bar{G})$ , entonces  $A_0, A_1, \dots, A_k$  forman un complejo de cubos (análogo de un complejo simplicial) ya que para cada cubo  $c \in A_i$  están especificadas sus  $j$ -caras y la intersección de dos cubos  $c \in A_i$  y  $c' \in A_j$  es o bien vacía, o bien una cara de cada uno de ellos. Esta propiedad permite visualizar el espacio topológico "subyacente"  $T$  al complejo de cubos, sin más que tomar un cubo (macizo) topológico en un espacio afín por cada uno de los cubos de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  y hacer las identificaciones de acuerdo con las propiedades de ser un cubo una cara

de otro y de ser un cubo la intersección de otros dos. El complejo de cubos se ve, ahora, como una descomposición celular del espacio topológico  $T$  y, por tanto, el teorema de Euler dice que:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i c_i = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \text{Card}(A_i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{R}} H_i(T, \mathbb{R})$$

Los espacios vectoriales de homología singular  $H_i(T, \mathbb{R})$  son nulos para  $i > 0$  ya que, por construcción, cada componente conexa de  $T$  es contractil. Por otro lado,  $\dim_{\mathbb{R}} H_0(T, \mathbb{R})$  es el número de componentes conexas del grafo  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ , es decir, el número  $m$  de elementos maximales del mismo. Nótese, también, que  $m$  es el número de árboles del bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$ .

En el teorema anterior se muestra que los números  $c_i$  dependen sólo del bosque  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  bajo la hipótesis de que el grafo acíclico  $(X, G)$  sea transitivo. Si  $(X, G)$  no es transitivo, entonces, es claro que el número  $c_i$  de cubos  $i$ -dimensionales de  $(X, G)$  es a lo sumo la cantidad calculada, es decir se tiene

$$c_i \leq c_i^{\max} \quad \text{siendo} \quad c_i^{\max} = \sum_{x \in X} \binom{l^d(x)}{i}$$

Más aún, de la demostración de este teorema se sigue que  $c_i = c_i^{\max}$ , para todo  $i$  si, y sólo si, el grafo  $(X, G)$  es transitivo. Incluso se sigue una propiedad más fuerte:

Corolario 4.5.7

Sea  $(X, G)$  un grafo acíclico,  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  su bosque de las cadenas y  $c_i^{\max} = \sum_{x \in \tilde{X}} \binom{l^d(x)}{i}$ . Entonces son condiciones equivalentes:

- a)  $(X, G)$  es transitivo.
- b)  $c_i = c_i^{\max}$  para todo  $i$ .
- c)  $c_1 = c_1^{\max} = \sum_{x \in \tilde{X}} l^d(x)$ .



En efecto, si  $c_1 = c_1^{\max}$ , entonces para cada  $x \in \tilde{X}$  el número de arcos de  $(\tilde{X}, \bar{G})$  que comienzan en  $x$  es  $l^d(x)$  y, por tanto, para cada camino con fin maximal,  $x_1 \dots x_q$ , en  $(X, G)$  y para cada  $p$ ,  $1 \leq p < q$ , el camino  $x_1 \dots x_{p-1} x_{p+1} \dots x_q$  existe en  $(X, G)$ . En consecuencia,  $(X, G)$  tiene la propiedad de que si  $(x, y) \in G$  e  $(y, z) \in G$  entonces  $(x, z) \in G$ , es decir es transitivo.

De este corolario se deduce el siguiente:

Corolario 4.5.8

Si un grafo acíclico  $(X, G)$  es geométrico-birrationalmente equivalente a un grafo transitivo  $(X', G')$  entonces  $(X, G)$  es, también, transitivo.

Corolario 4.5.9

a) Para cada clase de estructuras cúbicas  $|\bar{H}|$  sobre un bosque  $(Z, H)$  tal que  $\text{Card}(\bar{H}) = \sum_{x \in Z} l^d(x)$  se tiene que todos los grafos de  $\text{Iso}(Z, H, |\bar{H}|)$  son transitivos y todos ellos tienen igual explotación de su reducido  $(Z', H')$ .

b) Con las notaciones anteriores,  $\text{Iso}(Z, H, |\bar{H}|)$  es isomorfo al subgrafo inducido por  $\text{Iso}(Z', H')$  en  $\text{Im}(\Psi)$  siendo  $\Psi: \text{Iso}(Z, H, |\bar{H}|) \rightarrow \text{Iso}(Z', H')$  la aplicación que asocia a cada grafo transitivo su reducido:  $\Psi(X, G^t) = (X, G^r)$ . Dicho subgrafo es continuo.

En efecto, a) es consecuencia del corolario anterior y la proposición 4.5.1. (Ver ejemplo 4.2.13 y 4.2.14). Para el apartado b): si  $(X, G^t) \geq (X', G'^t)$ , existe un morfismo birracional geométrico  $\psi: (X, G^t) \rightarrow (X', G'^t)$  que, por tanto, es morfismo birracional entre los reducidos (proposición 4.5.1)  $\psi: (X, G^r) \rightarrow (X', G'^r)$  luego  $(X, G^r) \geq (X', G'^r)$  y, entonces,  $\Psi$  es morfismo de grafos. El recíproco también es cierto. Nótese que  $\Psi$  es inyectiva y si

$(X, G^r), (X, G'^r) \in \text{Im}(\Psi)$  con  $(X, G^r) \geq (X', G'^r)$ , existe un morfismo birracional  $\psi: (X, G^r) \rightarrow (X', G'^r)$  que induce un morfismo birracional geométrico entre los transitivos de la siguiente manera: sea  $\tilde{\psi}: (\tilde{X}, \tilde{G}^r) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{G}'^r)$  el isomorfismo entre los explotados de los reducidos y  $\hat{\psi}^t: (\tilde{X}, \hat{G}^t) \rightarrow (\tilde{X}', \hat{G}'^t)$  la aplicación  $\hat{\psi}^t(x_1 x_2 \dots x_q) = \psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_q)$ .  $\tilde{\psi}$  es biyectiva entre los caminos con fin maximal en los reducidos y conserva su longitud. Los caminos con fin maximal de  $(X, G^t)$  que no están en  $(X, G^r)$  son todos los subcaminos con fin maximal de los caminos con fin maximal de  $(X, G^r)$  y se corresponden biyectivamente con los homólogos en  $(X', G'^t)$  dado que  $\psi$  conserva sus longitudes. Que  $\hat{\psi}^t$  es morfismo es claro, pues  $\psi$  conserva los niveles. Análogamente para  $(\hat{\psi}^t)^{-1}$ , obsérvese que si  $x_1 \dots x_q$  es un camino con fin maximal en  $(\tilde{X}, \hat{G}^t)$  existe el máximo camino con fin maximal que une  $x_1$  con  $x_q$  y, este camino  $c$ , está en  $(\tilde{X}, \tilde{G}^r)$  e incluye a  $x_1 \dots x_q$  como subcamino,  $\tilde{\psi}(c)$  incluye, entonces, a  $\psi(x_1) \dots \psi(x_q) = \hat{\psi}^t(x_1 \dots x_q)$ . Así pues,  $\hat{\psi}^t$  es un isomorfismo birracional y  $(\tilde{X}, \hat{G}^t) \geq (\tilde{X}', \hat{G}'^t)$ .

Como los  $\bar{H}$  tienen el mismo cardinal (proposición 4.4.8) entonces  $\hat{\psi}^t$  es morfismo birracional geométrico y entonces

$$(\tilde{X}, \tilde{G}^t, \bar{G}^t) \geq (\tilde{X}', \tilde{G}'^t, \bar{G}'^t)$$

Obviamente,  $\text{Iso}(Z, H, |\bar{H}|)$  es el subgrafo inducido en  $\text{Im}(\Psi)$  por

$\text{Iso}(Z', H')$ . Veamos que este subgrafo es continuo. Sean  $(X, G^t)$  y  $(X', G'^t)$  grafos geométrico birracionalmente equivalentes, tales que  $(X, G^t) \geq (X', G'^t)$ , respecto del orden en  $\text{Iso}_A(Z, H)$  y sea  $(X'', G''^r)$  un grafo reducido tal que  $(X, G^r) \geq (X, G''^r) > (X, G'^r)$ , entonces se tienen morfismos birracionales  $\psi_1: (X, G^r) \rightarrow (X'', G''^r)$  y  $\psi_2: (X'', G''^r) \rightarrow (X', G'^r)$ .

Como  $(\tilde{X}, \tilde{G}^t)$  y  $(\tilde{X}', \tilde{G}'^t)$  son geométrico birracionalmente equivalentes,

$\hat{\psi}_2^t \circ \hat{\psi}_1^t$  es morfismo birracional geométrico. Como todos los morfismos son suprayectivos en puntos y arcos se tiene (corolario 4.4.9)

que  $\tilde{\Psi}_1$  es morfismo birracional geométrico y, por tanto,  $(X'', G''^r)$  está en  $\text{Im}(\Psi)$ , como se quería probar.

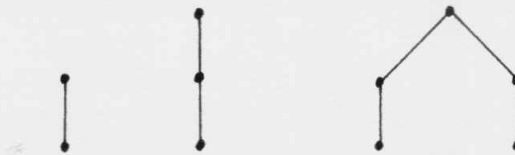
El siguiente ejemplo muestra cómo los grafos geométrico birracionalmente equivalentes a un grafo transitivo se obtienen a través de sus reducidos.

Ejemplo 4.5.10

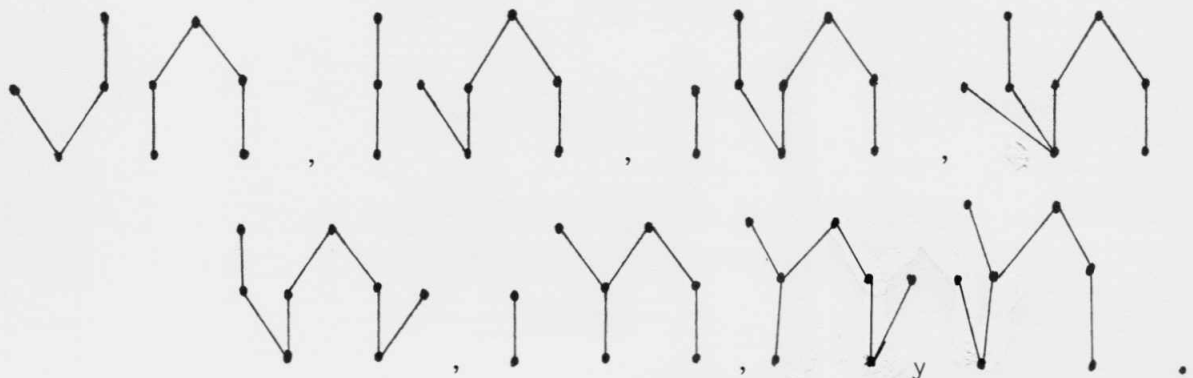
Sea el bosque con estructura cúbica  $(Z, H, |\bar{H}|)$  con  $\text{Card}(\bar{H}) = \sum_{x \in Z} l^d(x) = 13$  de la figura:



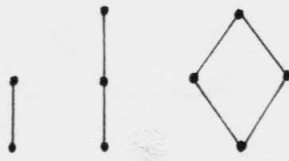
Su bosque de las cadenas está marcado con trazos continuos; su bosque  $(Z', H')$  explotado de su reducido es:



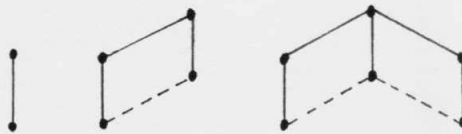
Los elementos de  $\text{Im}(\Psi)$  son, entonces, además de  $(Z, H')$ :



Para obtener los puntos de  $(Z, H, |\bar{H}|)$  basta transitivizar estos grafos reducidos. Obsérvese que, por ejemplo, el grafo



está en  $\text{Iso}(Z', H')$  pero no procede de ningún grafo de  $\text{Iso}(Z, H, |\bar{H}|)$  pues su estructura cúbica



no verifica  $\text{Card}|\bar{H}| = \sum_{x \in Z} 1^d(x) = 13$  (en este caso es 12).

La siguiente tabla muestra, en cada fila, para cada grafo acíclico y transitivo  $(X^t, G^t)$ , su grafo reducido  $(X^r, G^r)$ , el explotado de éste  $(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$ , el bosque de las cadenas  $(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$  y el bosque con estructura cúbica  $(\tilde{X}, \bar{G})$ . Las filas recorren los grafos acíclicos transitivos no-etiquetados con tres y cuatro puntos y los conexos con cinco puntos.

En los ejemplos de esta tabla se pueden comprobar las propiedades enunciadas en este parágrafo.





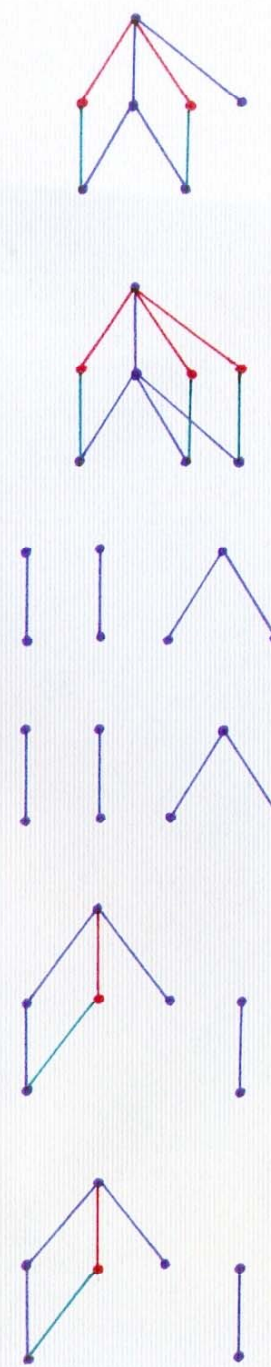
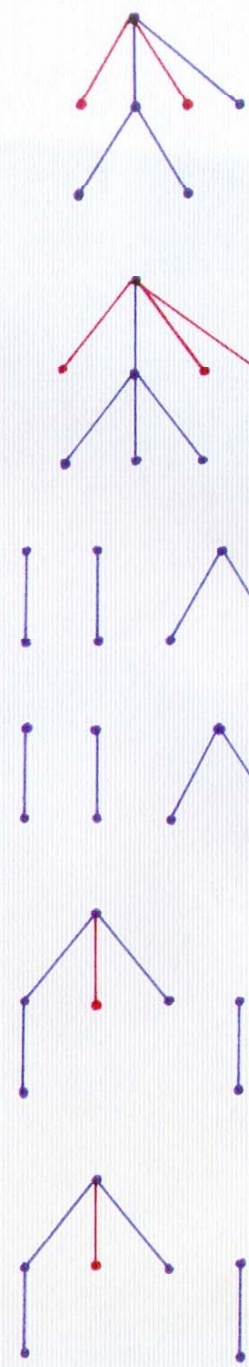
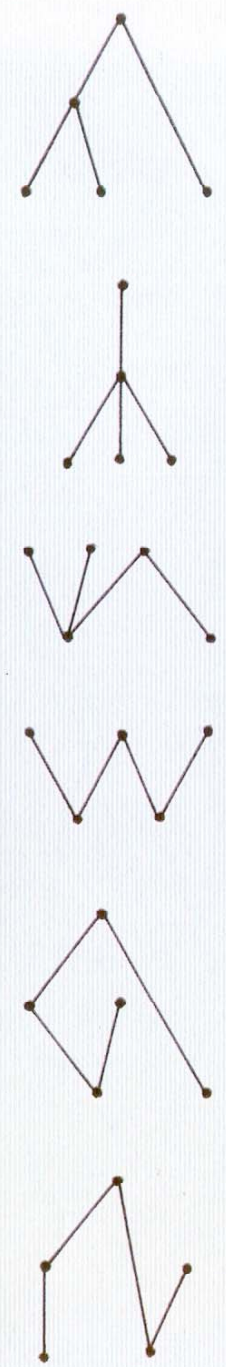
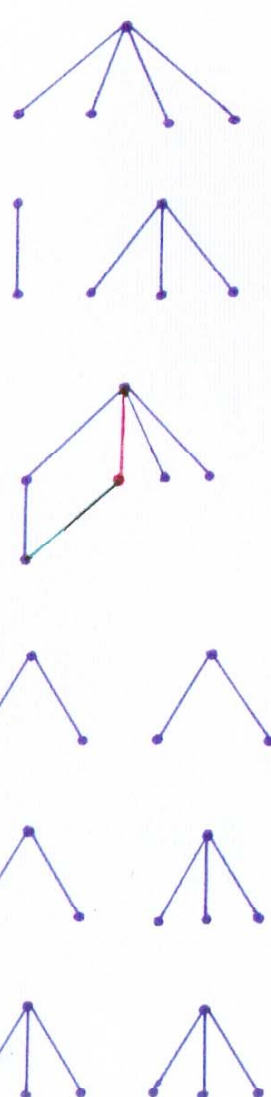
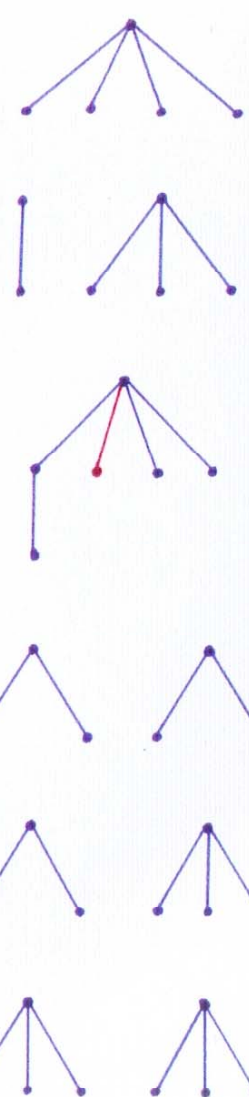
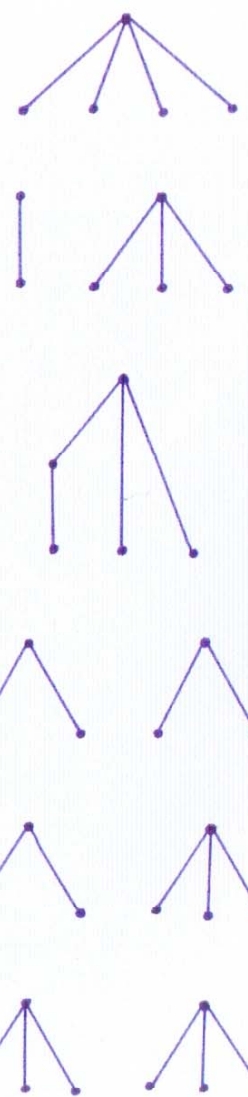
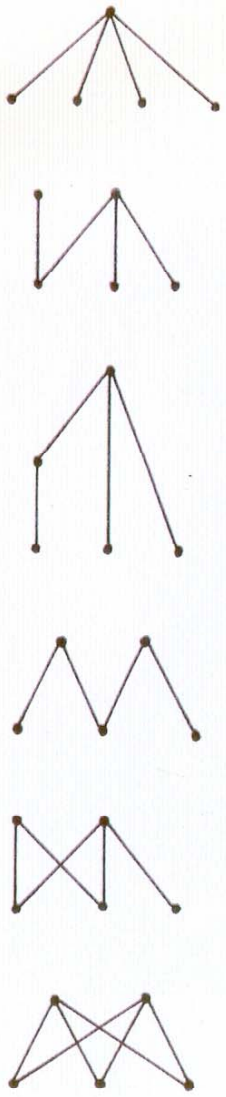
$\text{Card}(X^r) = 5, (X^r, G^r)$  conexo.

$(X^r, G^r)$

$(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$

$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$

$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$



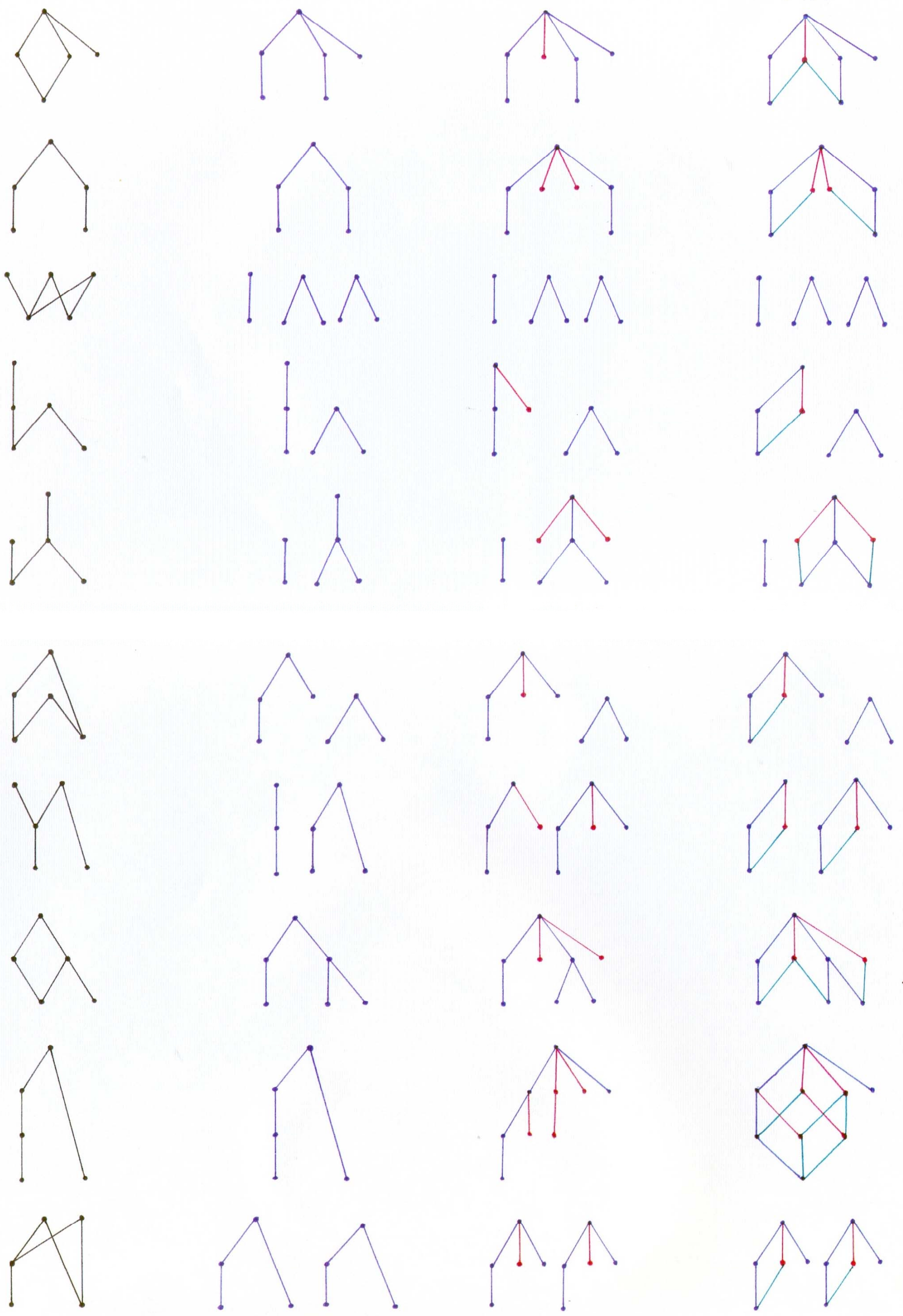


$(X^r, G^r)$

$(X^r, G^r)$

$(X^t, G^t)$

$(X^t, G^t)$

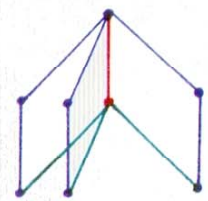
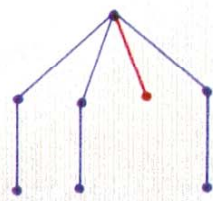
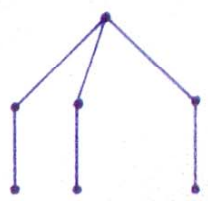
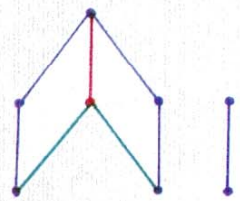
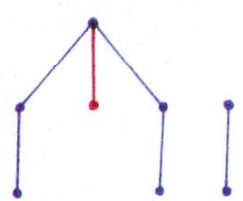
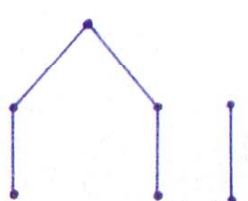
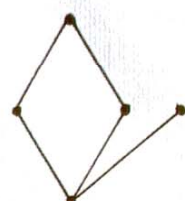
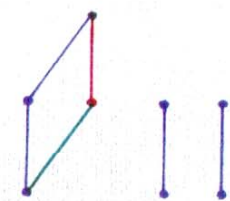
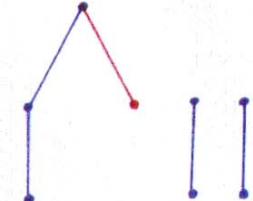
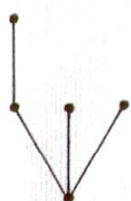
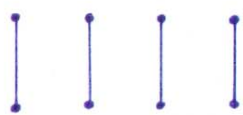
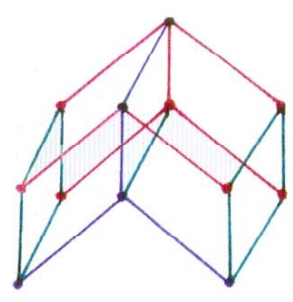
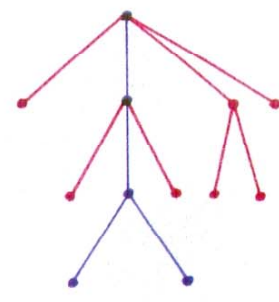
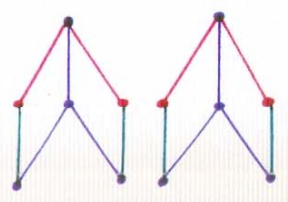
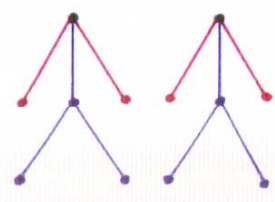
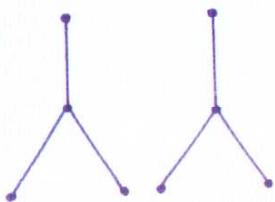
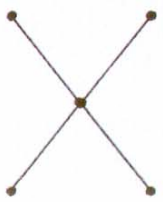
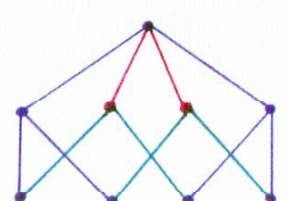
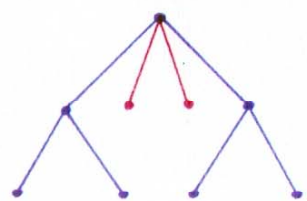
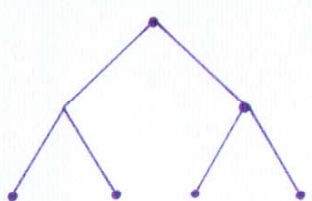
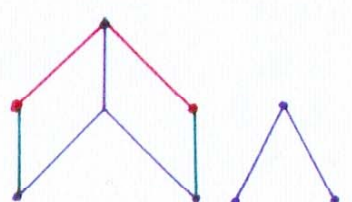
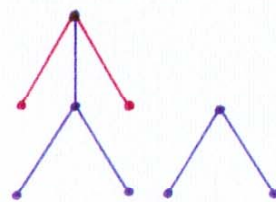
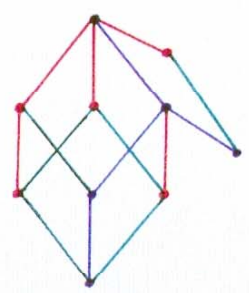
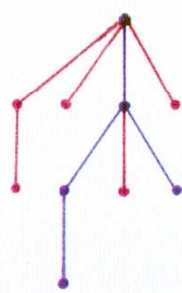


$(X^r, G^r)$

$(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$

$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$

$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$

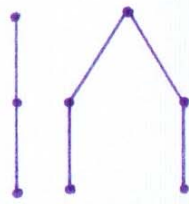
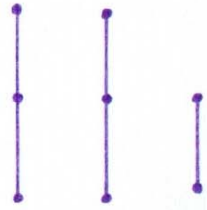




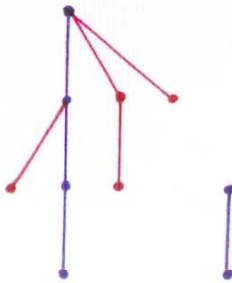
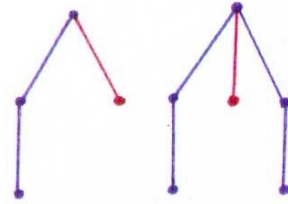
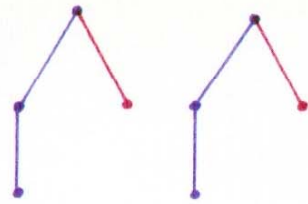
$(x^r, G^r)$



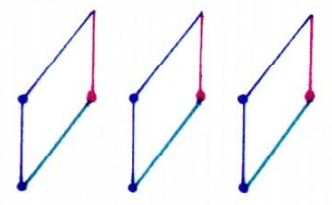
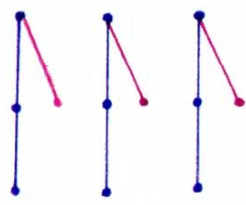
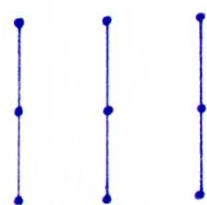
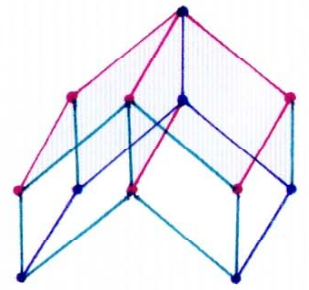
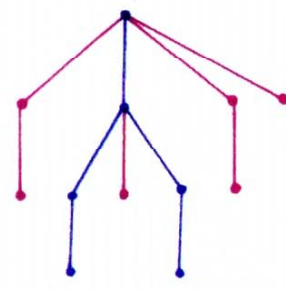
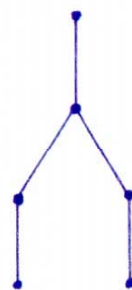
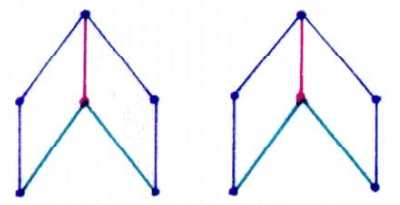
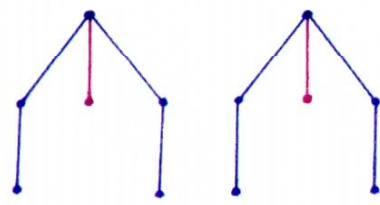
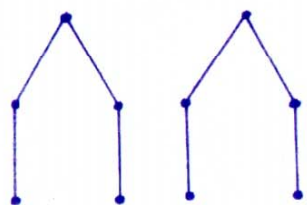
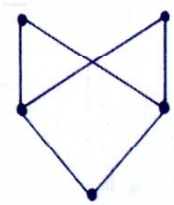
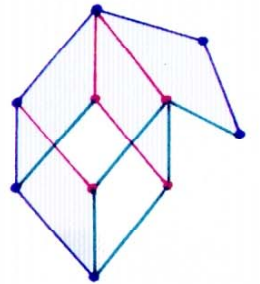
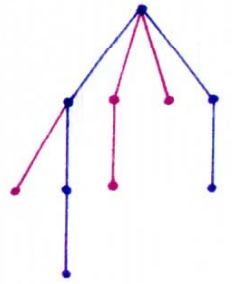
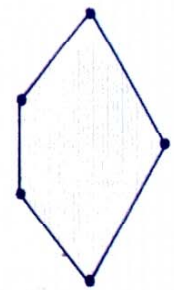
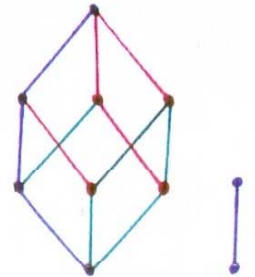
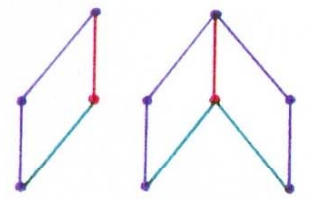
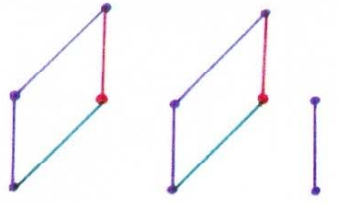
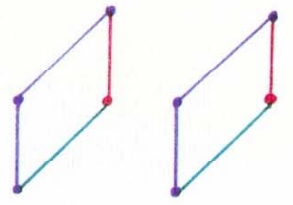
$(\tilde{x}^r, \tilde{G}^r)$



$(\tilde{x}^t, \tilde{G}^t)$



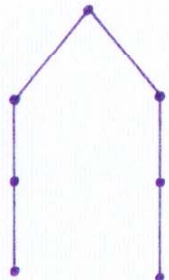
$(\tilde{x}^t, \tilde{G}^t)$



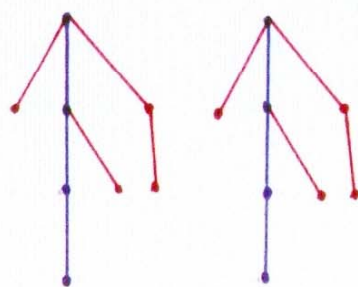
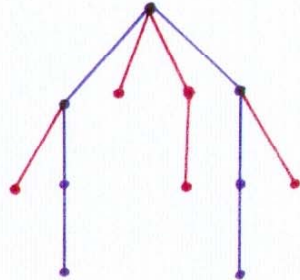
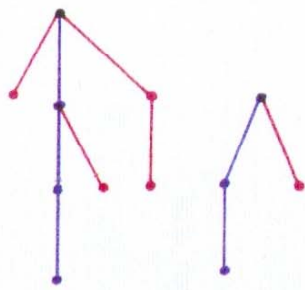
$(X^r, G^r)$



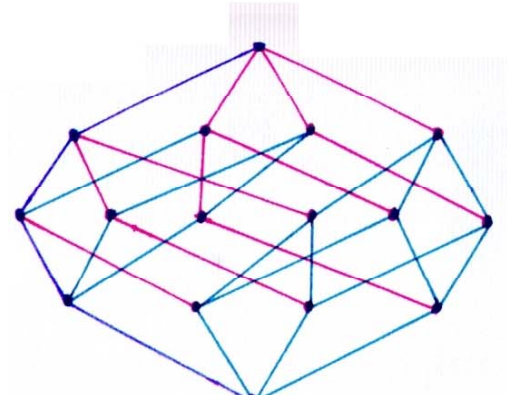
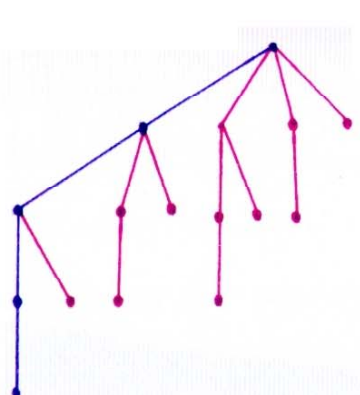
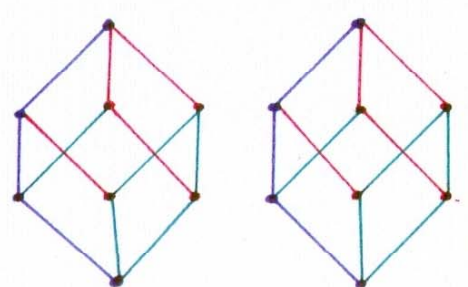
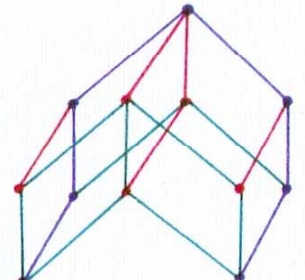
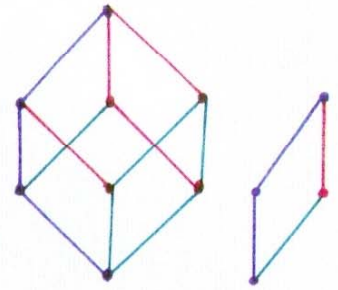
$(\tilde{X}^r, \tilde{G}^r)$



$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$



$(\tilde{X}^t, \tilde{G}^t)$



BIBLIOGRAFÍA



BIBLIOGRAFÍA

- |B.1| BERGE, C.-"Graphes" Bordas, (1983) Paris.
- |C.1| CARRE, B. "Graphs and Networks". Clarendon Press. Oxford. (1979).
- |C.D.S.| CVETKOVIT-DOOB-SACHS. "Spectra of graphs". VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin (1982).
- |D.1| DAVIS, R.L. "The number of structures of finite relations" Proc. Proc. Amer. Math. Soc. 4. (1953), 486-495.
- |E.H.L.1| EVANS-HARARI-LYNN. "On the computer Enumeration of Finite Topologies". Comm. Assoc. Comp. Mach. 10 (1967), 295-298.
- |F.1| FINAT, J. "Cuádricas completas y sistemas lineales de cuádricas". Tesis. Universidad de Valladolid. (1983).
- |F.2| FINAT, J. "Modelos combinatorios de variedades de banderas" Rev. Mat. Univ. Valladolid. (1985).
- |Fu| FULTON, W. "Algebraic Curves" Benjamin Inc. New York (1968).
- |G.D.1| GROTHENDIECK-DIEUDONNE. Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer-Verlag. Berlin (1971).
- |G.2| GREENBERG, M. "Lectures on Algebraic Topology". Benjamin Inc. New York (1967).
- |G.N.P| GUILLEN, F.-NAVARRO, V.-PUERTA, F. "Cubic Hiper-solutions" Aparecerá en Lect. Notes in Mathematics. Springer-Verlag (1988).
- |H.1| HARARY, F. "Graph Theory". Reading. Massachusetts (1969)
- |H.2| HARSTHORNE, R. "Algebraic Geometry". G.T.M. Springer-Verlag Berlin (1977).

- |K.1| KAUFMANN. "Combinatoria". R.E.C.S.A. Barcelona (1971)
- |L.1| LEWIS, W.J. "The Spectrum of a Ring as a Partially Ordered Set". Journal of Algebra. 25, (1973), 419-434.
- |P.1| PEREZ ESTEBAN, D. "Invariantes aritméticos de los espacios espectrales". Tesis. Universidad Complutense. Madrid (1988).
- |R.1| ROY, B. "Algèbre Moderne et theorie des graphes". Dunod, Paris, (1969).
- |S.1| STANLEY, R.D. "Combinatorics and Commutative Algebra". Birkhäuser. Boston (1983).
- |W.1| WILLARD, S. "General Topology". Reading. Massachusetts (1970).

