

CARLOS GALINDO PASTOR

DESARROLLOS DE HAMBURGER-NOETHER  
y  
EQUIVALENCIA DISCRETA DE VALORACIONES

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR  
AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS,  
SECCION DE MATEMATICAS

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS,  
SECCION DE MATEMATICAS, POR

CARLOS GALINDO PASTOR.

ANTONIO CAMPILLO LOPEZ, CATEDRATICO DE ALGEBRA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID,

CERTIFICA:

Que la presente memoria " **Desarrollos de Hamburger-Noether y equivalencia discreta de valoraciones** " ha sido realizada bajo su dirección en el departamento de Algebra y Geometría de la Universidad de Valladolid por Carlos Galindo Pastor, y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, presenta y apadrina ante la Facultad de Ciencias de dicha Universidad la referida Tesis Doctoral.

En Valladolid a 30 de Mayo de mil novecientos noventa y uno.

Fdo. Antonio Campillo López.

Este trabajo forma parte  
del Proyecto " CURVAS  
ARITMETICAS. APLICACIONES."  
financiado por la Empresa  
"IBERDUERO" a través de la  
Universidad de Valladolid.

Este trabajo ha sido  
parcialmente financiado por  
una beca concedida por la  
"CONSELLERIA DE CULTURA  
EDUCACION Y CIENCIA" de la  
Generalitat Valenciana.

Muchos son los nombres que deberían aparecer aquí, como eficaces colaboradores en la elaboración de esta memoria, tanto en el aspecto científico, como en el humano. A todos ellos quisiera expresarles mi más profundo agradecimiento y aprecio. Especialmente, en el aspecto técnico, al profesor Antonio Campillo, sin cuyas ideas y sugerencias no hubiera salido este trabajo adelante, al doctor F. Delgado por haber puesto a mi alcance sus resultados sobre semigrupos y series de Poincaré asociados a ellos y también, a todos los miembros del departamento de Álgebra y Geometría, que siempre estuvieron dispuestos a responder a cualquier cuestión planteada. Entre ellos, por el apoyo incondicional que de él he recibido, Manolo Carnicer, quien me hizo sentir de verdad el sentido de la palabra amigo.

No puedo, ni quiero, dejar de agradecer el soporte moral recibido, incluso en los peores momentos, por mis padres y mis hermanos. A Pablo, lo cito en especial, por ser el mejor ejemplo a seguir.

**A MARIA,**  
**( En honor a su paciencia y**  
**comprensión )**

## INTRODUCCION

El lenguaje de valoraciones es, en la geometría, una buena técnica para tratar los problemas relacionados con la resolución de singularidades. De hecho, durante los años 50, Zariski trató de probar la existencia de resoluciones trabajando en la llamada superficie de Riemann-Zariski, o espacio que parametriza a todas las valoraciones sobre el cuerpo de funciones de la variedad singular de partida y las obtuvo para dimensiones bajas. Aunque en su teorema de resolución Hironaka no usa técnicas valorativas, en algunos trabajos actuales sobre el tema, se ha recuperado el espíritu de Zariski. Esto sucede, por ejemplo, con el teorema de resolución constructiva de O. Villamayor [ V ] y el teorema de resolución por transformaciones, de Nash, normalizadas sucesivas de M. Spivakovsky [ S-1 ].

Otros problemas de resolución de actualidad y que han motivado nuestro trabajo son los resultados sobre resolución de foliaciones y ecuaciones diferenciales debidos a F. Cano [ Ca-2 ], F. Cano y D. Cerveau [ CC ] y a J. Cano [ Cj ]. Estos trabajos siguen mas bien la linea de Hironaka y la literatura no está adaptada para el uso del lenguaje valorativo.

Nuestro objetivo inicial, en este trabajo, es describir las valoraciones que aparecen de forma natural en el proceso de resolución de un germen de foliación algebraica u holomorfa en un punto de una superficie lisa. En lineas generales, las ramas del árbol de resolución, las separatrices formales o convergentes que pasan por puntos simples del proceso y los divisores dicríticos sugieren la consideración de ciertas valoraciones asociadas a estos objetos. En el trabajo consideramos tales valoraciones y damos, por tanto, un punto de vista valorativo para la resolución de dichas foliaciones.



Siendo posible clasificar en 5 tipos, que llamaremos A, B, C, D, y E, las valoraciones que dominan a un anillo local regular de dimensión dos,  $R$ , nuestro planteamiento ha sido efectuar, en primer lugar, una presentación autocontenida de los 5 tipos de valoraciones explicitando los principales invariantes de naturaleza discreta que utilizaremos para su estudio ( grafo dual, diagrama de Enriques, exponentes de Puiseux, etc...). Esta presentación, que hacemos en el capítulo 1, tiene un hilo conductor original que es el uso de desarrollos de Hamburger-Noether para las valoraciones. Los desarrollos Hamburger-Noether existen para todas las valoraciones y se comportan exactamente como en el caso de curvas tratado por Campillo [ C ], teniendo, por consiguiente, las mismas ventajas. En particular, permiten tratar cómodamente las ecuaciones paramétricas asociadas a una valoración y si una valoración dada está definida por ecuaciones paramétricas, entonces el algoritmo Hamburger-Noether ( es decir, el algoritmo de calculo del desarrollo Hamburger-Noether ) permite determinar en la practica el tipo de valoración. ( ver 1.7. ).

La clasificación de valoraciones en tipos debe afinarse, pues las valoraciones de un tipo dado pueden tener un comportamiento numérico completamente particular. Así, estudiamos la equivalencia discreta de valoraciones, entendiendo por ello, que dos valoraciones son discretamente equivalentes cuando sus grafos duales ( infinitos en general ) coinciden. La equivalencia discreta se caracteriza por medio del semigrupo de valores ( de  $R$  respecto a la valoración ), los exponentes de contacto maximal ( equivalentes a los exponentes de Puiseux de Zariski ), la forma del desarrollo Hamburger-Noether o el diagrama de Enriques. Cuando las valoraciones están asociadas a curvas algebroides ( tipos A y D ) la equivalencia discreta no es más que la equisingularidad.

Como apéndice o párrafo complementario al capítulo I, hemos incluido el calculo de la serie de Poincaré del graduado de  $R$  respecto de la filtración dada por una valoración divisorial ( tipo E ).

Dicha serie de Poincaré resultará otro dato equivalente a la clase de equivalencia discreta de la valoración. En la prueba, usamos de forma central el desarrollo Hamburger-Noether de la valoración, ilustrando así la utilidad de estos desarrollos.

En el capítulo segundo consideramos conjuntos finitos de valoraciones y estudiamos numéricamente la equivalencia discreta entre dos de tales conjuntos. La equivalencia discreta está dada, como antes, por el grafo dual ( en general infinito ) y la caracterización numérica es ahora no trivial. De hecho, si las valoraciones fuesen del tipo A-D, entonces, la equivalencia discreta es la equisingularidad de la curva que tiene por componentes las asociadas a las valoraciones, y la caracterización de la equisingularidad por el semigrupo y la estructura de éste en función del contacto maximal está dada por Delgado en [ D ].

Nosotros extenderemos el resultado de Delgado para conjuntos de valoraciones de los tipos A, D y E, mostrando como se tiene el contacto maximal, en este caso. Y los valores del contacto maximal son un dato equivalente a la equivalencia discreta. También se puede sustituir cada valoración E por un par de curvas transversales al divisor en un punto general y caracterizar así la equivalencia discreta por el semigrupo de la curva formado por todas las ramas consideradas.

En el capítulo tercero, describimos las valoraciones asociadas a un germen de foliación en un punto del plano. Por cada divisor dicrítico consideramos la valoración divisorial correspondiente a ese divisor y por cada divisor no dicrítico, que en la desingularización completa tenga  $l$  puntos simples ( no esquinas ), añadimos  $l$  veces la correspondiente valoración divisorial. Además, por cada uno de estos puntos simples pasa una separatriz formal lisa y transversal al divisor que da lugar a una valoración A-D. Ahora, nuestro resultado es que la equivalencia discreta de los conjuntos asociados a dos foliaciones es equivalente a que las foliaciones sean equirreducidas ( es decir, que tengan procesos de resolución idénticos ).

Tambien en este capítulo, mostramos como un germen de foliación y una valoración tienen un número de intersección, que estudiamos de forma unificada en 3.4. para los cinco tipos de valoraciones, detallando los aspectos particulares en cada caso y el calculo en función de ecuaciones paramétricas para la valoración. Como aplicación, vemos como seria posible dar un algoritmo que determinase la combinatoria del proceso de resolución de una foliación  $\omega$  sin necesidad de efectuar explosiones. El resultado exacto, puede enunciarse diciendo que conocer el proceso de resolución es equivalente a conocer los números de intersección  $(R_{\nu}, \omega)$  para todos los anillos de valoración divisorial  $R_{\nu}$  que dominan al anillo  $R$ .

# Capítulo 1. Valoraciones y sus desarrollos Hamburger-Noether

## 1.0 Introducción y preliminares.

A lo largo de este trabajo,  $(R, \mathfrak{m}, K)$  será un anillo local y regular con  $\dim R = 2$ ,  $\mathfrak{m}$  es el ideal maximal de  $R$ ,  $K$  el cuerpo residual y  $F$  el cuerpo de cocientes. Supondremos que  $K$  es algebraicamente cerrado y que  $R$  contiene el cuerpo de coeficientes  $K$ .

Sea  $K$  un cuerpo y  $K^*$  su grupo multiplicativo. Sea  $\Gamma$  un grupo aditivo abeliano totalmente ordenado; una valoración de  $K$  es una aplicación suprayectiva  $v: K^* \longrightarrow \Gamma$ , tal que verifica:

- a)  $v(xy) = v(x) + v(y)$
- b)  $v(x+y) \geq \min \{ v(x), v(y) \}$ .

Un subgrupo  $\Delta \subseteq \Gamma$  se dice que es aislado, si es un segmento en el orden de  $\Gamma$  ( Es decir si  $a, b \in \Gamma$ ,  $a \in \Delta$  y  $-a \leq b \leq a$  entonces,  $b \in \Delta$  ). Los subgrupos aislados de  $\Gamma$  forman un conjunto totalmente ordenado para la inclusión. Se llama rango de  $v$ , al número de subgrupos aislados de  $\Gamma$  y se representa por  $\text{rg } v$ .

Se llama rango racional de  $v$ , al máximo número de elementos racionalmente independientes de  $\Gamma$  y se representa por  $\text{rg. rac. } v$ .

### Notas 1.0.1.

i) Si  $v$  es una valoración, el anillo de valoración de  $v$  se define como  $R_v = \{ x \in K^* / v(x) \geq 0 \} \cup \{ 0 \}$  que es local, con ideal maximal,  $\mathfrak{m}_v = \{ x \in K^* / v(x) > 0 \}$ .

Consideramos situaciones  $K \subseteq R \subseteq R_v$ , donde  $R$  es local regular,  $K$  un cuerpo de coeficientes y  $R_v$  domina a  $R$ .

ii) Existe una biyección entre los subgrupos aislados de  $\Gamma$  y los ideales primos de  $R_{\mathfrak{v}}$ , dada por  $\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{v}(R_{\mathfrak{v}} \setminus \mathfrak{p})$ , por tanto,  $\text{rg } \mathfrak{v} = \text{rg } \Gamma = \dim_{\text{Krull}} R_{\mathfrak{v}}$ .

iii) De las definiciones, es obvio que,  $\text{rg } \mathfrak{v} \leq \text{rg } \text{rac } \mathfrak{v}$ .

Pondremos ahora,  $\text{gr. trasc}_k \cdot \mathfrak{v} = \text{gr. trasc}_k(R_{\mathfrak{v}}/m_{\mathfrak{v}})$ . Se tiene:

iv) (Abhyankar [A]). Si  $(R, m)$  es local noetheriano y si  $R \subseteq R_{\mathfrak{v}}$  con  $m_{\mathfrak{v}} \cap R = m$ , entonces :

$$\text{rg } \mathfrak{v} + \text{gr. trasc}_k \cdot \mathfrak{v} \leq \dim R,$$

y si se da la igualdad,  $\mathfrak{v}$  es discreta, es decir,  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$  con el orden lexicográfico, para algún  $n$ . Además, si  $R$  es regular

$$\text{rg. rac. } \mathfrak{v} + \text{gr. trasc}_k \cdot \mathfrak{v} \leq \dim R.$$

v) Una valoración  $\mathfrak{v}$  como en iv), se dice que es divisorial, si  $\text{gr. trasc}_k \cdot \mathfrak{v} = \dim R - 1$ . En el caso que nos interesa,  $R$  local y de dimensión dos, se tiene que  $\mathfrak{v}$  es divisorial si  $\text{gr. trasc}_k \cdot \mathfrak{v} = 1$ .

vi) Si  $\mathfrak{v}$  es una valoración sobre un dominio integro  $R$ , no negativa sobre él, y si  $\mathfrak{u}$  es un ideal de  $R$ , son equivalentes:

a)  $\mathfrak{u}$  es un  $\mathfrak{v}$ -ideal, es decir, es la traza con  $R$  de un ideal de  $R_{\mathfrak{v}}$ .

b) Si  $a, b \in R$ ,  $a \in \mathfrak{u}$  y  $\mathfrak{v}(b) > \mathfrak{v}(a)$ , entonces,  $b \in \mathfrak{u}$ .

c)  $R_{\mathfrak{v}} \mathfrak{u} \cap R = \mathfrak{u}$ .

### 1.0.2.

Se considera un anillo local regular de dimensión dos  $(R, m, K)$ , con un cuerpo de coeficientes algebraicamente cerrado  $K$ ,  $\mathfrak{v}$  una valoración con  $R \subseteq R_{\mathfrak{v}}$  y  $m = m_{\mathfrak{v}} \cap R$ . Sea  $F$  el cuerpo de cocientes de  $R$ .

#### Definición

Una sucesión de sucesivas transformaciones cuadráticas (explosiones de puntos cerrados), con superficie de partida el esquema  $X = \text{Spec } R$ ,

$$(\pi) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\pi_{n+1}} X^{(n)} \xleftarrow{\dots}$$

donde  $L_i$  es el divisor excepcional de  $\pi_i$  en  $X^{(i)}$  y  $P_i$ , el centro de  $\pi_{i+1}$ , se dice **simple**, si se verifican:

- i)  $P_i \in L_i$ . Para todo índice  $i$ .
- ii) Si la sucesión de explosiones es infinita, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que, cuando  $j \geq N$ ,  $P_j$  no está en el transformado estricto de  $L_i$  en  $X^{(i)}$ .

Existe una biyección entre las valoraciones de  $F$  que dominan a  $R$  y las sucesiones simples de transformaciones cuadráticas cuyo primer objeto es  $\text{Spec } R$ . En efecto, dada la valoración, se comienza explotando su centro en  $\text{Spec } R$  y tomando el centro  $P_1$ , en dicho explotado, se continua explotando  $P_1$  siempre que sea un punto cerrado y se repite el proceso hasta encontrar ( si existe ) un centro de dimensión 1 ( existirá exactamente en el caso divisorial ). Recíprocamente, si se tiene la sucesión simple  $(\pi)$ , entonces,  $R_{\mathcal{V}} = \cup \mathcal{O}_{X, P_i}^{(i)}$  es el anillo de valoración correspondiente.

Tambien hay correspondencia biunívoca, entre sucesiones simples finitas ( y por lo tanto valoraciones divisoriales ) e ideales completos simples [ Z-S ].

### 1.1. Expresión Hamburger-Noether asociada a una valoración.

Sea  $R$  un anillo en las condiciones 1.0,  $v$  una valoración que domina a  $R$ ,  $(\pi)$  la sucesión de transformaciones cuadráticas que lleva asociada  $v$  y  $\{x, y\}$  un par de generadores de  $m$ . Unos generadores del ideal maximal del anillo local  $R_1 = \mathcal{O}_{X, P_1}^{(1)}$  se obtienen por una de la dos igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ x' (y' + \xi) &= y \quad \xi \in K \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} x' y' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

De este modo, eligiendo  $x, y$ , con  $v(x) \leq v(y)$ , se puede suponer que en el punto  $P_1$  corresponde el primer tipo de cambio. Escribiremos  $a_{01} = \xi$ , y unos generadores del ideal maximal de  $R_1$  serán  $\{x, y^{(1)} = y - a_{01}x/x\}$ . Si la sucesión sigue con puntos correspondientes al primer tipo de cambio, entonces, o bien, durante  $h_0$  pasos más se obtienen generadores de  $R_{h_0} = \mathcal{O}_{X, P_{h_0}}^{(h)}$  dados por  $\{x, y^{(h-1)} - a_{0h_0}x/x\}$ . (lo que indica también, que cada una de las transformaciones cuadráticas  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{h_0}$  se hace sobre un punto del divisor excepcional, que no está sobre el corte de dos componentes irreducibles del divisor total), o bien, el proceso es infinito.

En el primer caso ponemos,

$$z_1 = y^{(h-1)} - a_{0h_0}x/x$$

y la siguiente explosión, se corresponde a un cambio del segundo tipo (la explosión se realiza en un punto de corte entre dos divisores, y unos generadores del ideal maximal de  $\mathcal{O}_{X, P_{h_0+1}}^{(h_0+1)}$  serán,  $\{x/z_1, z_1\}$ ).

Se continua en esta línea, siguiendo el procedimiento utilizado por Campillo en [ C, capII ], para el caso de curvas algebroides aparece, entonces, una sucesión de números enteros  $h_0, h_1, \dots$  ( finita o infinita ), un conjunto de subíndices  $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_g, \dots$  ( finito o infinito ), naturales  $k_1, k_2, \dots, k_g, \dots$  con  $2 \leq k_i \leq h_{s_i}$  y una colección de expresiones, llamadas desarrollo de Hamburger-Noether, o H-N, como sigue:

$$\begin{aligned}
 y &= a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0h_0} x^{h_0} + x^{h_0} z_1 \\
 x &= z_1^{h_1} z_2 \\
 &\dots \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \dots \\
 z_{s_1-1} &= a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1} \\
 &\dots \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \dots \\
 z_{s_g-1} &= a_{s_g, k_g} z_{s_g}^{k_g} + \dots + a_{s_g, h_{s_g}} z_{s_g}^{h_{s_g}} \dots
 \end{aligned}$$

Donde el proceso puede ser finito o infinito. Más tarde, se indicarán los diferentes casos que se pueden presentar en el caso infinito. Siguiendo el proceso que permite, a partir de la sucesión de transformaciones cuadráticas, obtener su expresión H-N, es fácil darse cuenta que, tanto los enteros  $h_i$ , como los subíndices  $s_j$  y los números naturales  $k_l$  (  $i, j, l$ , en los conjuntos de índices adecuados ), dependen exclusivamente, de la sucesión de transformaciones cuadráticas, es decir, de la situación en el divisor excepcional de los puntos en que se efectúa cada transformación y, por lo tanto, no dependen de la base  $\{ x, y \}$  elegida.



### 1.1.1

Dada una sucesión simple de transformaciones cuadráticas ( $\pi$ ), como antes, se tendrá ( ver [ C ] ):

a) Son puntos libres, los siguientes:

$$P_0, \dots, P_{h_0}, y, P_{h_0+h_1+\dots+h_{s_{l-1}}+k_l}, \dots$$

$$P_{h_0+h_1+\dots+h_{s_{l-1}}+k_l+h_{s_l}-1}, \dots, \text{para } l=1, \dots, g, \dots$$

b) Son puntos satélites, todos aquellos  $P_i$  que no son libres.

c) Son puntos libres iniciales, exactamente, los puntos

$$P_{h_0+h_1+\dots+h_{s_{l-1}}+k_l}, l = 1, \dots, g, \dots$$

d) Por fin, son puntos satélites terminales, exactamente, los puntos  $P_{h_0+h_1+\dots+h_{s_{l-1}}+k_l-1}$  para  $l = 1, \dots, g, \dots$

## 1.2. Valoraciones y grafos duales asociados.

Introducimos, el grafo dual asociado a cualquier valoración ( ver, [ S-1 ] )

### Definición 1.2.1.

Sea  $\Gamma$ , un grafo pesado en los vértices, con peso  $w_{\Gamma}(-)$ . Una modificación elemental de  $\Gamma$  de tipo A ( análogamente de tipo B ) es un grafo pesado  $\Gamma'$  al que se le ha añadido un nuevo vértice, que verifica una de las tres condiciones siguientes:

i) Existe un vértice " x "  $\in \Gamma$ , tal que,  $\Gamma'$  se obtiene a partir de  $\Gamma$ , añadiendo un nuevo vértice " y " y un arco que conecte x con y, de manera que, **para el tipo A**,  $w_{\Gamma'}(y) = w_{\Gamma}(x) + 1$ ;  $w_{\Gamma'}(z) = w_{\Gamma}(z)$  para todo z vértice de  $\Gamma$ , y por lo tanto, de  $\Gamma'$ . Y **para el tipo B**,  $w_{\Gamma'}(y) = 1$ ;  $w_{\Gamma'}(x) = w_{\Gamma}(x) + 1$  y  $w_{\Gamma'}(z) = w_{\Gamma}(z)$ , para todo z vértice de  $\Gamma - \{ x \}$ .

ii) Existen dos vértices adyacentes x, y  $\in \Gamma$ , tales que,  $\Gamma'$  se obtiene de  $\Gamma$  reemplazando el subgrafo  $\begin{matrix} o & \text{---} & o \\ x & & y \end{matrix}$  por el subgrafo  $\begin{matrix} o & \text{---} & o & \text{---} & o \\ x & & z & & y \end{matrix}$ , donde z es el único vértice de  $\Gamma' - \Gamma$  de modo que, **para el tipo A**,

$w_{\Gamma'}(z) = \max \{ w_{\Gamma}(x), w_{\Gamma}(y) \} + 1$  y,  $w_{\Gamma'}(t) = w_{\Gamma}(t)$  para cualquier vértice  $t \in \Gamma$  ( y por lo tanto a  $\Gamma'$  ); y **para el tipo B**,  $w_{\Gamma'}(z) = 1$ ,  $w_{\Gamma'}(x) = w_{\Gamma}(x) + 1$ ,  $w_{\Gamma'}(y) = w_{\Gamma}(y) + 1$ ,  $w_{\Gamma'}(t) = w_{\Gamma}(t)$  para cualquier vértice  $t \in \Gamma - \{ x, y \}$ .

iii)  $\Gamma = \emptyset$  y  $\Gamma' = \{ x \}$ , con  $w_{\Gamma'}(x) = 1$ , en ambos casos.

Una modificación elemental i), se denota por  $\varepsilon(x)$ , y se dice de primera clase. Si es ii) se denotará por  $\varepsilon(x,y)$ , y se dice de segunda clase. En el caso de que sea iii), se denota  $\varepsilon(\emptyset)$  y es, también, de primera clase. El contexto indicará si es de tipo A o de tipo B.

Definición 1.2.2.

Tomando el grafo  $\Gamma = \emptyset$ , se llama sucesión elemental de grafos de tipo A ( respectivamente de tipo B ), a una sucesión,

$$\Gamma \xrightarrow{\varepsilon_1} \Gamma^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon_2} \dots \xrightarrow{\varepsilon_i} \Gamma^{(i)} \dots$$

de modificaciones elementales de tipo A ( de tipo B ).

Definición 1.2.3.

Considérese una sucesión elemental 1.2. 2. ( de tipo A o de tipo B ) de grafos, y sea  $x_i$ , el único vértice de  $\Gamma^{(i)} - \Gamma^{(i-1)}$ .  $S_i$ , el conjunto de vértices de  $\Gamma^{(i-1)}$  con  $\varepsilon_i = \varepsilon(S_i)$  ( card.  $S_i = 1$  ó  $2$  ), entonces, esta sucesión es **simple** si se verifican las dos condiciones siguientes:

- i)  $x_i \in S_{i+1}$
- ii) Si la sucesión de 1.2.2. es infinita, para cada  $i$  y  $j$  suficientemente grande relativo a  $i$ ,  $x_i \notin S_j$ .

Definición 1.2.4.

Sea una sucesión simple 1.2.2., el límite,  $\Gamma^*$ , de una sucesión elemental  $\{ \Gamma^{(i)}, \varepsilon_i \}$  de tipo A ( respectivamente de tipo B ), que se denota  $\Gamma^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma^{(i)}$ , se define del modo siguiente:

El conjunto de vértices es  $\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma^{(i)}$  y, dos vértices de  $\Gamma^*$ , son adyacentes, si lo son en  $\Gamma^{(i)}$  para  $i \gg 0$ .

Además, si  $x \in \Gamma^*$  es un vértice, entonces,  $w_{\Gamma^*} = \lim_{i \rightarrow \infty} w_{\Gamma^{(i)}}(x)$ . Como  $\{ \Gamma^{(i)}, \varepsilon_i \}$  es simple,  $\Gamma^*$  está bien definida y,  $w_{\Gamma^*}(x) < \infty$ , para cada vértice  $x \in \Gamma^*$ .

Nota 1.2.5.

Sea  $X$  una superficie no singular,  $\xi \in X$  un punto, tal que,  $\dim. \mathcal{O}_{X,\xi} = 2$ , y una sucesión de transformaciones cuadráticas 1.0.2, tal que,  $\pi_i \circ \dots \circ \pi_1$  induce un isomorfismo,

$$\pi_i \circ \dots \circ \pi_1 : X^{(i)} \setminus (\pi_i \circ \dots \circ \pi_1)^{-1}(\xi) \longrightarrow X \setminus \{ \xi \}.$$

Si  $\Gamma^{(i)}$  es el grafo dual de  $(\pi_i \circ \dots \circ \pi_1)^{-1}(\xi)$ , de tipo A ( respectivamente de tipo B ) ( es decir, los vértices son las componentes del divisor excepcional, y dos vértices se unen si las componentes se cortan; los pesos siguiendo las relaciones A o B según el caso ), entonces,  $\Gamma^{(i)}$  y  $\Gamma^{(i+1)}$ , se relacionan por una modificación elemental  $\varepsilon_i$ . Además, si  $\{ \pi_i \}$  es simple también  $\{ \Gamma^{(i)}, \varepsilon_i \}$  lo es.

Definición 1.2.6.

En las condiciones 1.0., sea  $\nu$  una valoración de  $F$  que domina  $R$ ,  $(\pi)$  ( 1.0.2. ) la sucesión simple de transformaciones cuadráticas que lleva asociada, y  $\Gamma_{A(B)}^{(i)}$  la sucesión simple de grafos pesados de tipo A (respectivamente B) elemental que lleva asociada. Entonces, se define el grafo dual de tipo A ( tipo B ) asociado a  $\nu$  ( o a  $\pi$  ) como:

$$\Gamma = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma^{(i)}$$

Proposición 1.2.7.

Considerense los siguientes conjuntos:

$\Lambda_A = \{ \text{límites de sucesiones elementales simples de tipo A que empiezan en } \Gamma = \emptyset \}.$

$\Lambda_B = \{ \text{límites de sucesiones elementales simples de tipo B que empiezan en } \Gamma = \emptyset \}.$

Existe una biyección natural entre los conjuntos  $\Lambda_A$  y  $\Lambda_B$ ,  $\psi$ , tal que, si  $\nu$  es una valoración como en 1.2.6., y,  $\Gamma_A \in \Lambda_A$ ;  $\Gamma_B \in \Lambda_B$  son las dadas en 1.2.6., se tiene que,  $\psi(\Gamma_A) = \Gamma_B$ .

Lema 1.2.8.

Si  $\Gamma^* \in \Lambda_A$  ( respectivamente  $\Lambda_B$  ), entonces, existe una única sucesión  $\Gamma^{(i)}$ , tal que,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma^{(i)} = \Gamma^*$  ( El sentido de la unicidad se precisa teniendo en cuenta  $\Gamma^{(i)} \subseteq \Gamma^*$  ).

Demostración 1.2.8. ( Identica para el caso A y B )

Supongamos, por reducción al absurdo, que existen  $\Gamma^{(i)}$  y  $\Gamma^{(j)}$  distintos, tales que,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma^{(j)} = \Gamma^*$ . Como  $\Gamma^{(0)} = \Gamma^{(0)} = \emptyset$ , existirá un  $j \in \mathbb{N}$ , tal que,  $\Gamma^{(j)} = \Gamma^{(j)}$  y  $\Gamma^{(j+1)} \neq \Gamma^{(j+1)}$  ( tanto  $\Gamma^{(i)}$  como  $\Gamma^{(j)}$  se pueden considerar subgrafos de  $\Gamma^*$  ), puesto que la asignación de pesos depende de la situación de cada vértice nuevo, en el caso B, y en el caso A, se hace sumando uno al peso del anterior vértice, y también, porque la sucesión es simple, la diferencia entre  $\Gamma^{(j+1)}$  y  $\Gamma^{(j)}$  debe de estar en que, si  $x \in \Gamma^{(j+1)} \setminus \Gamma^{(j)}$  y  $x' \in \Gamma^{(j+1)} \setminus \Gamma^{(j)}$ , los vértices adyacentes a  $x$ , y los adyacentes a  $x'$ , deben ser diferentes, propiedad que se transmite a lo largo de las siguientes modificaciones, puesto que  $x = x' \in \Gamma^*$ , en el límite deberá ser adyacente a un mismo vértice, lo que es absurdo.

Demostración 1.2.7.

Se sigue del lema anterior, sea  $\Gamma^* \in \Lambda$ , existe por el lema 1.2.8. una única sucesión  $\Gamma^{(i)}$ , tal que,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma^{(i)} = \Gamma^*$ . Puesto que  $\Gamma^{(0)} = \emptyset$ , podemos ir creando los B-pesos de  $\Gamma^{(i)}$  a partir de los A-pesos, y viceversa, siendo  $\Gamma^{(i)}$  en ambos casos el mismo grafo, observando la situación en que aparecen los nuevos vértices, pesándolos como se ha indicado en 1.2.1. La construcción de  $\psi$  y el resultado es ahora evidente.

Además, si  $\nu$  es una valoración, lleva asociada una única sucesión de explosiones simples  $\pi$ , y una única sucesión elemental simple de tipo A ( respectivamente B ) con el mismo soporte  $\Gamma^{(i)}$ . Denotando  $\Gamma_A^{(i)}$  y  $\Gamma_B^{(i)}$  los correspondientes grafos pesados, entonces los grafos A-dual y B-dual  $\Gamma_A^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_A^{(i)}$ , y,  $\Gamma_B^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_B^{(i)}$ . Es trivial que,  $\psi ( \Gamma_A^* ) = \Gamma_B^*$ .

**1.3. Grafos duales y desarrollos H-N de las valoraciones divisoriales.**

**1.3.1. El grafo dual de tipo A.**

En este apartado, sea  $v$  una valoración divisorial que domina a  $R$  sobre  $F$ , sea  $(\pi)$  la sucesión de transformaciones cuadráticas que lleva asociada y que sabemos que es finita:

$$(\pi) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \leftarrow \dots \leftarrow X^{(N)} \xleftarrow{\pi_{N+1}} \dots X^{(N+1)}$$

Si  $\{x, y\}$  es una base de  $m$ , la expresión Hamburger-Noether para  $v$  (o para  $\pi$ ) será de la forma:

$$\begin{aligned}
 y &= a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1 \\
 x &= z_1^{h_1}z_2 \\
 &\dots \qquad \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \qquad \dots \\
 z_{s_1-1} &= a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1}^{h_{s_1}} \\
 &\dots \qquad \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \qquad \dots \\
 z_{s_g-1} &= a_{s_g, k_g} z_{s_g}^{k_g} + \dots + z_{s_g}^{h_{s_g}} z_{s_g+1}^*
 \end{aligned}$$

Con  $a_{ij} \in K$ , y para ciertos valores  $h_0, \dots, h_{s_g}$ , ciertos subíndices  $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_g$  y ciertos números naturales  $k_1, k_2, \dots, k_g$  con  $2 \leq k_i \leq h_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) que no dependen de la base  $\{x, y\}$  de  $m$ , elegida, además \* significa que es el último elemento que puede someterse al algoritmo de crear el desarrollo H-N y, se escribe para completar la igualdad. El elemento  $U = z_{s_g+1}^*$  es un uniformizante para el anillo de valoración divisorial, que en este caso es discreta.

Sea ahora,

$$\emptyset \xrightarrow[\underset{1}{\varepsilon}]{} \Gamma_A^{(1)} \xrightarrow[\underset{2}{\varepsilon}]{} \dots \xrightarrow[\underset{N}{\varepsilon}]{} \Gamma_A^{(N)} \xrightarrow[\underset{N+1}{\varepsilon}]{} \Gamma_A^{(N+1)}$$

la sucesión elemental simple de tipo A, que lleva asociada la sucesión  $(\pi)$ , y por lo tanto el grafo dual asociado  $\Gamma_A^*$  será:

$$\Gamma_A^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_A^{(i)} = \Gamma_A^{(N+1)}$$

Es interesante indicar que si a cada componente del divisor y a sus transformados estrictos, se les denota por  $L_i$ , donde  $i$  indica que aparece tras la explosión  $\pi_i$ , entonces el A-peso del vértice del grafo dual será  $i$ . Por otro lado, la geometría del divisor excepcional se conoce a partir del desarrollo H-N. Vamos a precisar cuales son los A-pesos.

Lema 1.3.1.1.

Si,

$$H(j) = \sum_{i \leq j} h_j; \text{ para } 0 \leq j \leq s_g.$$

Para cada  $n$  con  $N \geq n \geq 1$ , existe un único  $m(n) > n$ , tal que,  $L_n$  y  $L_{m(n)}$  se cortan. Además,  $m(n) \neq n+1$ , si y sólo si, existe un valor  $r \in \{0, 1, \dots, s_g - 1\}$ , tal que,  $n = H(r)$ .

Finalmente, si  $n = H(r)$  entonces:

$$m(n) = H(r+1) + 1, \text{ si, } r \neq s_t - 1; \forall t \in \{1, \dots, g\}$$

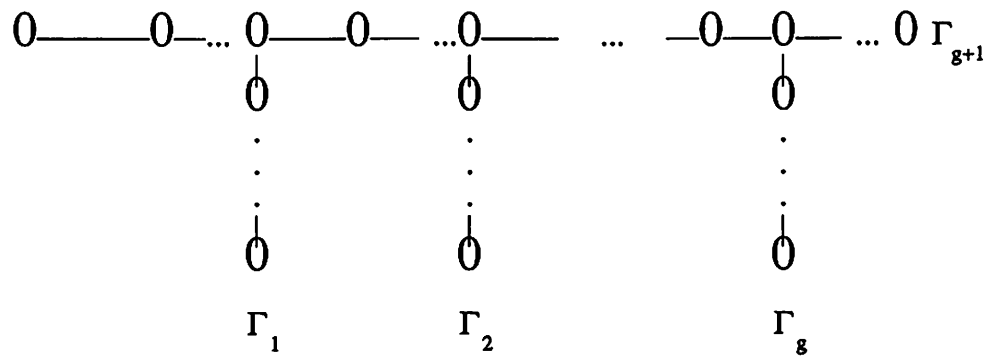
$$m(n) = n + k_t \text{ si } \exists t \text{ con } r = s_t - 1.$$

( Ver [ D ] pag.199 ).

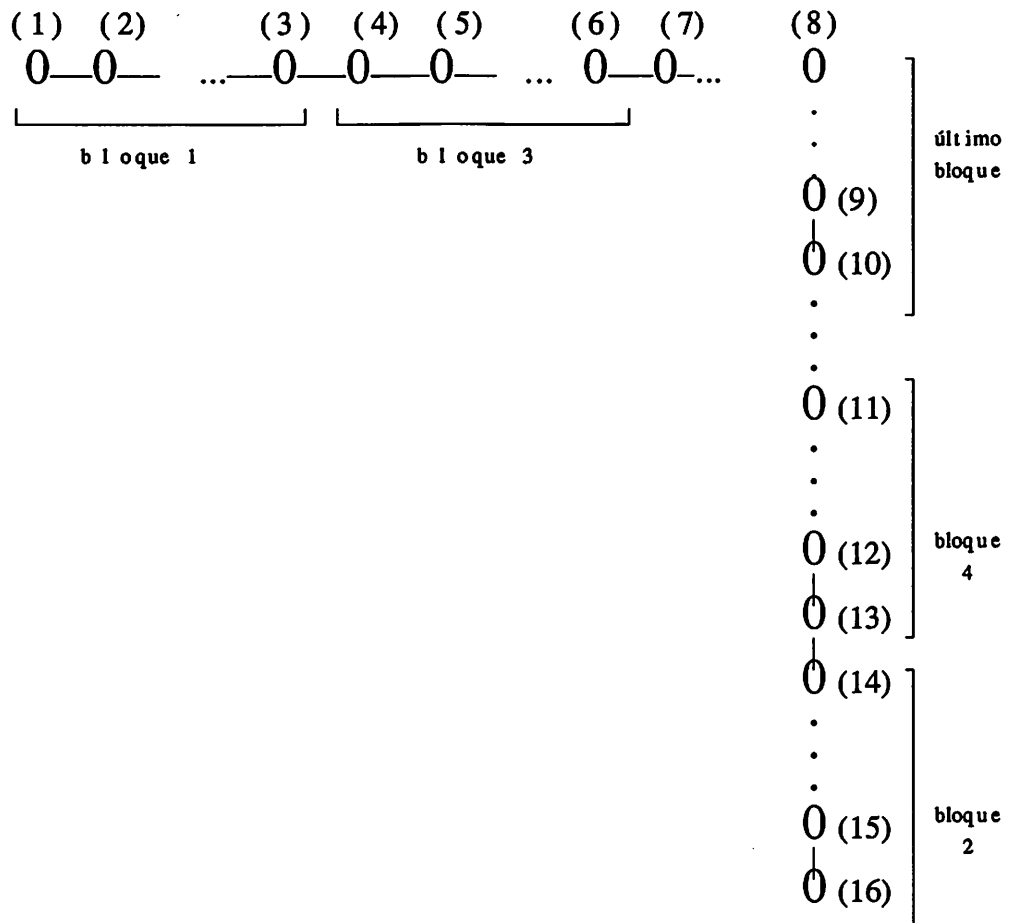
A partir de este resultado es fácil mostrar la siguiente,

Proposición 1.3.1.2.

El grafo dual de tipo A, asociado a la valoración divisorial  $\nu$ , con el desarrollo H-N de 1.3.1. tiene la forma siguiente,



Viene dado por el desarrollo H-N y cada "rama" del grafo  $\Gamma_j$ ,  $0 \leq j \leq g$ , será como se muestra en el dibujo:

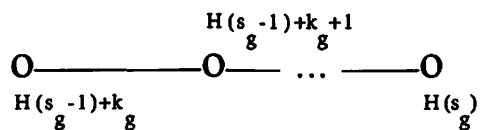




Los pesos serán los siguientes:

- ( 1 ) =  $H ( s_{j-1} - 1 ) + k_{j-1}$ ;
- ( 2 ) =  $H ( s_{j-1} - 1 ) + k_{j-1} + 1$ ;
- ( 3 ) =  $H ( s_{j-1} )$ ;
- ( 4 ) =  $H ( s_{j-1} + 1 ) + 1$ ;
- ( 5 ) =  $H ( s_{j-1} + 1 ) + 2$ ;
- ( 6 ) =  $H ( s_{j-1} + 2 )$ ;
- ( 7 ) =  $H ( s_{j-1} + 2 ) + 1$ ;
- ( 8 ) =  $H ( s_j - 1 ) + k_j$ ;
- ( 9 ) =  $H ( s_j - 1 ) + 2$ ;
- ( 10 ) =  $H ( s_j - 1 ) + 1$ ;
- ( 11 ) =  $H ( s_{j-1} + 3 )$ ;
- ( 12 ) =  $H ( s_{j-1} + 2 ) + 2$ ;
- ( 13 ) =  $H ( s_{j-1} + 2 ) + 1$ ;
- ( 14 ) =  $H ( s_{j-1} + 1 )$ ;
- ( 15 ) =  $H ( s_{j-1} ) + 2$ ;
- ( 16 ) =  $H ( s_{j-1} ) + 1$ .

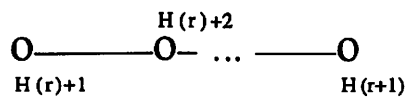
La rama  $\Gamma_{g+1}$  será:



Demostración

Apliquemos el lema anterior:

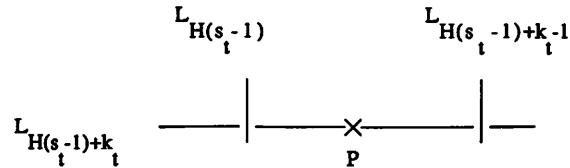
a) La secuencia de divisores, de pesos,  $H ( r ) + 1, \dots, \dots, H ( r+1 )$ , aparece siempre en el grafo  $\Gamma_A$  de la forma,



b) Por cada número entero  $n > 1$ , existe un único  $k(n) < n$ , de manera que  $L_n$  y  $L_{k(n)}$  se cortan, excepto en los casos siguientes:

b-1) Si  $n = H(s_t) + 1$ , para  $t \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ , estamos en el lema 1.3.1. b y no existe  $k(n)$ .

b-2) Si  $n = H(s_t - 1) + k_t$ , nos encontramos en el caso del dibujo:



Y, por lo tanto, el divisor  $n$  corta otros tres, dos de ellos con menor peso, y otro, con peso mayor, por lo tanto, los únicos extremos del grafo son:  $H(s_t) + 1$ ;  $t \in \{s_0, s_1, \dots, s_{g-1}\}$  y  $H(s_g)$ , ( $s_0 = 0$ ).

Todo esto indica, junto con el lema, que el grafo es el indicado en el texto de la proposición.

### 1.3.2. El grafo dual $B$

Sea  $\nu$  una valoración divisorial sobre  $F$  que domina a  $R$  y sea  $\pi = \pi(\nu)$ , la sucesión de transformaciones cuadráticas,

$$(\pi) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\pi_{N+1}} X^{(N)} \xleftarrow{\pi_{N+1}} X^{(N+1)}$$

donde  $X = \text{Spec } R$ .

Y sea,

$$\emptyset \xrightarrow{\epsilon_1} \Gamma_B^{(1)} \xrightarrow{\epsilon_2} \dots \xrightarrow{\epsilon_N} \Gamma_B^{(N)} \xrightarrow{\epsilon_{N+1}} \Gamma_B^{(N+1)}$$

la sucesión elemental simple que lleva asociada  $\pi$ . Sabemos que cada  $\Gamma_B^{(i)}$  coincide con  $\Gamma_A^{(i)}$  en la construcción gráfica, aunque no en los pesos, y el grafo dual de tipo B, asociado a  $\pi$  será:

$$\Gamma_B = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_B^{(i)} = \Gamma_B^{(N+1)}, \text{ y por 1.2. 7., será } \psi(\Gamma_A) = \Gamma_B.$$

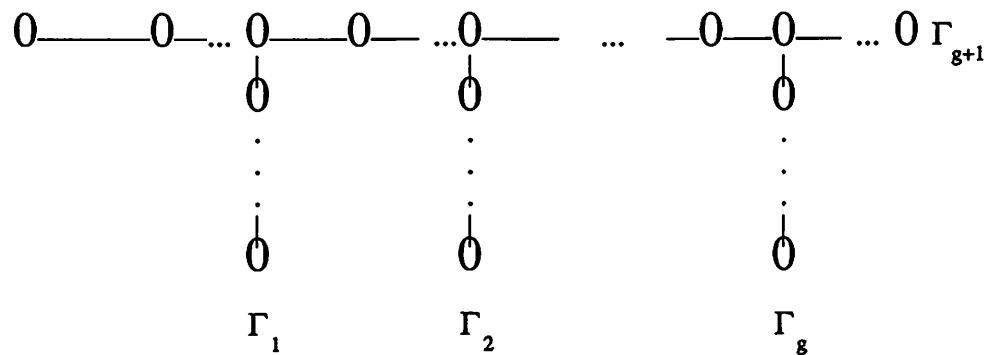
Además, [ ver Spivakovsky [ S-1 ] ], existe una colección de enteros no negativos:

$$g \in \mathbb{N}_0;$$

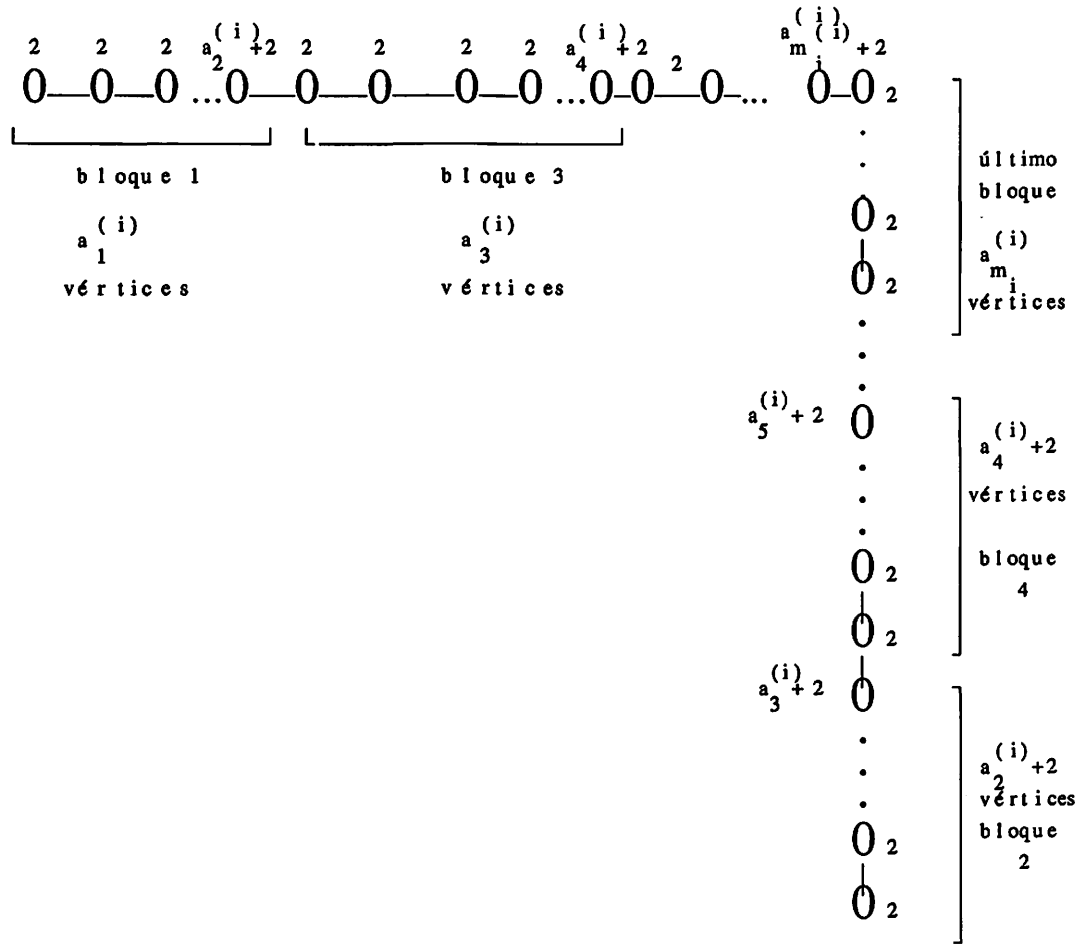
$$m_i \in \mathbb{N}, \text{ para } 1 \leq i \leq g+1, \text{ donde } m_i \geq 2 \text{ para } i \leq g, \text{ y, } m_{g+1} = 1;$$

$$a_j^{(i)} \in \mathbb{N}, \text{ para } 1 \leq i \leq g+1, 1 \leq j \leq m_i.$$

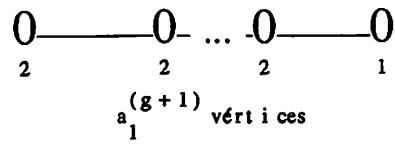
tales que, el grafo dual de  $\nu$  ( o de  $\pi$  ) de tipo B es el siguiente:



Donde cada  $\Gamma_i$ ,  $0 < i \leq g$ , será:



Y,  $\Gamma_{g+1}$ ,



La prueba de este resultado es también elemental, y se puede hacer por inducción sobre la construcción, o utilizando la matriz de proximidad  $P$ , para describir la matriz de intersección como  $'P P$ . En lo que sigue, precisaremos quienes son los números anteriores, en términos del desarrollo de Hamburger-Noether. De hecho, esto nos dará una descripción explícita de la biyección  $\psi$ .

Proposición 1.3.2.1.

En las condiciones anteriores, se tiene ( los parámetros dados por el desarrollo H-N ):

- $g$  = número de ramas en forma de "  $\gamma$  " del grafo.
- Si  $u_i$  = número de bloques que aparecen en la rama  $\Gamma_i$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 u_i &= s_i - s_{i-1} + 1. \\
 k_0 &= 1; \\
 h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1 &= a_1^{(i)}. \\
 h_{s_{i-1}} + 1 &= a_2^{(i)}. \\
 h_{s_{i-1}} + 2 &= a_3^{(i)}. \\
 &\cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \\
 h_{s_{i-1}} + m_i^{(i)} - 2 &= a_{m_i-1}^{(i)}. \\
 k_i - 1 &= a_{m_i}^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Demostración

Nuestra prueba se basa en el hecho siguiente:  $\Gamma_B$  y  $\Gamma_A$  son gráficamente iguales, porque la sucesión elemental que conduce a cada uno de ellos es la misma, geoméricamente. El orden en que aparecen los divisores, está indicado por el grafo  $A$  y es obvio que, en cada rama  $\Gamma_i$ , van apareciendo los puntos del primer bloque, de izquierda a derecha, luego, los del segundo de abajo arriba, a continuación, el tercero de izquierda a derecha ...

De modo que, si el número de divisores de cada bloque coincide, para los grafos de tipo A y B respectivamente, ( en todas la ramas ), el número de bloques, tambien, así como el orden de ellos y el número de ramas, en cada grafo. Será claro que los dos grafos son los que se corresponden por la biyección  $\psi$ . Así, se tendrá:

$g$  = número de ramas.

$u_i = m_i$  en el grafo B, y el número de bloques  $u_i$ , en el grafo B, será  $s_i - 1 - (s_{i-1}) + 1 = s_i - s_{i-1} + 1$ , pues los primeros pesos de cada bloque son  $\underline{H(s_{i-1}-1)} \pm \underline{k_{i-1}}$ ;  $\underline{H(s_{i-1})} \pm \underline{1}$ ;  $\underline{H(s_{i-1}+1)} \pm \underline{1}$ ; ... ;  $\underline{H(s_i-1)} \pm \underline{1}$ .

Por lo tanto:

$$m_i = s_i - s_{i-1} + 1$$

Respecto al número de divisores en cada bloque,

$$H(s_{i-1}) - \left[ H(s_{i-1}-1) + k_{i-1} \right] + 1 = h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1 = a_1^{(i)}.$$

$$H(s_{i-1}+1) - \left[ H(s_{i-1}) + 1 \right] + 1 = h_{s_{i-1}} + 1 = a_2^{(i)}.$$

...

...

...

...

...

...

$$H(s_i-1) + k_i - \left[ H(s_i-1) + 1 \right] = k_i - 1 = a_{m_i}^{(i)}.$$

Con esto finaliza la prueba de la proposición.

Nota 1.3.2.2.

También, asociados a una valoración divisorial se pueden considerar los datos de Puiseux de  $v$  (según la terminología de Zariski)  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g$ , y el semigrupo de valores  $\phi^+ = v(R \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{Q}$  (donde  $v$  se ha normalizado para que  $v(m) = 1$ ).

Los datos de Puiseux vienen dados por :

$$\beta_0 = 1; \quad \text{y para } 1 \leq i \leq g$$

$$\beta_i = a_1^{(i)} + \frac{1}{a_2^{(i)} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{m_i}^{(i)} + 1}}}$$

Si ponemos  $\beta_i = \frac{p_i}{n_i}$  con  $(p_i, n_i) = 1$  y  $e_i = n_1 \dots n_i$ ;  $e_0 = n_0 = 1$ , entonces  $\phi^+$  está generado de manera minimal por los números racionales  $\beta'_0, \dots, \beta'_g$  dados por,

$$\beta'_0 = 1, \beta'_1 = \beta_1, \text{ y } \beta'_i = \frac{\beta_i - 1}{e_{i-1}} + \beta'_{i-1} n_{i-1}.$$

La demostración de este hecho, puede encontrarse en, [ S-1 ] o en [ C ], si se tiene en cuenta, que el semigrupo  $e_0 \phi^+ \subseteq \mathbb{N}$ , no es otra cosa que el semigrupo de una curva algebroide plana irreducible, cuyo desarrollo de H-N, se obtiene por especialización del desarrollo de  $v$  (sustituir "U" por un elemento de  $F^*$ ). Según la terminología de [ C ] se tiene,

$$e_0 \beta'_i = \tilde{\beta}_i.$$

El conjunto de las ecuaciones implícitas, para estas curvas especializadas, generan el ideal completo simple  $\mathfrak{p}$  asociado a  $\nu$ . Las características de este ideal estarán recogidas, de alguna manera, en el desarrollo Hamburger-Noether. En particular,  $\nu(\mathfrak{p}) = \beta'_{g+1}$ . Así tenemos el siguiente resultado resumen.

Corolario 1.3.2.3.

Sea  $\nu$  una valoración divisorial de  $F$  que domina a  $R$ , tal que,  $\nu(m) = 1$ . A partir de su desarrollo de Hamburger-Noether, puede obtenerse:

- 1) Su grafo dual  $A$  y también  $B$ .
- 2) Una sucesión minimal  $\{ \beta'_i \}$  de generadores del semigrupo de la valoración.

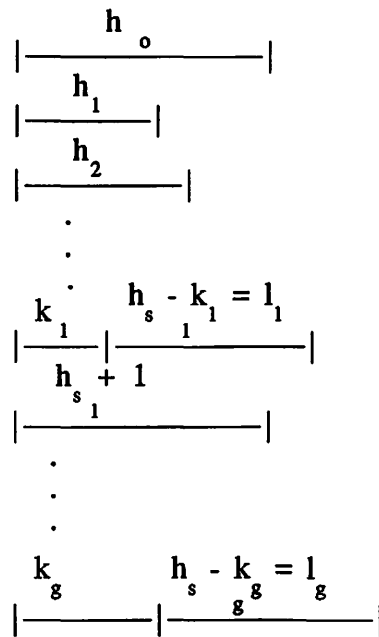
3) El valor  $\nu(\mathfrak{p}) = \beta'_{g+1} = \frac{\beta_{g+1}^{-1}}{e_g} + \beta'_g n_g$ .  
 (  $\beta_{g+1} = a_{1+1}^{(g+1)}$  ).

1.3.3. La "forma" del desarrollo de Hamburger-Noether y el diagrama de Enriques.

Además del grafo dual, hay otras dos representaciones gráficas equivalentes que, en ocasiones, pueden representar comodidad para el trabajo con valoraciones. Ambas, tienen una relación inmediata con el desarrollo H-N y la discusión sobre puntos libres y satélites.



En primer lugar, entenderemos por " forma " del desarrollo H-N de la valoración  $\nu$ , la colección de segmentos siguientes:



El diagrama de Enriques, consiste en considerar la sucesión simple  $P_0, P_1, \dots, P_n$  asociada a la valoración, estructurada de la forma siguiente:

1º) La colección de puntos infinitamente próximos libres consecutivos  $P_0, P_1, \dots, P_h$ .

2º) La colección de puntos infinitamente próximos satélites consecutivos,

$P_{h+1}, P_{h+2}, \dots, P_{h+h_1}; P_{h+h_1+1}, \dots, P_{h+h_1+h_2}; \dots, P_{h+h_1+\dots+h_1-1}$ .

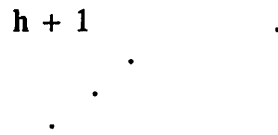
Estando separada, dicha colección, por paquetes de puntos ligados entre si por la propiedad de permanecer o no, sobre la ( transformada estricta ) del mismo divisor.

3º) La colección correspondiente de puntos libres siguientes.

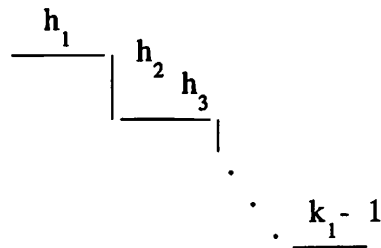
4º) Nueva colección de paquetes de puntos satélites.

Y así, sucesivamente, hasta la última colección de puntos, a la fuerza, libres.

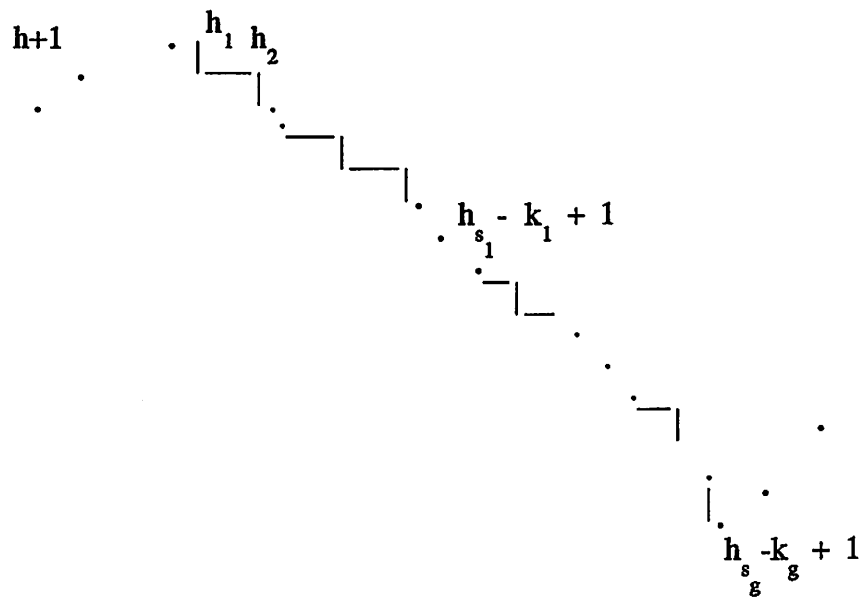
La información anterior, se organiza gráficamente en el diagrama de Enriques, en la forma siguiente. Las colecciones de puntos libres se describen por un diagrama lineal curvilíneo con el número de puntos de la colección:



Las colecciones de puntos satélites, se representan por un diagrama en escalera, con sucesivos peldaños y contrapeldaños, que son diagramas rectilíneos, con respectivos números iguales a los números de puntos de los paquetes:



La forma final del diagrama de Enriques será la siguiente:



**1.4. Grafos duales y desarrollos H-N de valoraciones no divisoriales.**

En este párrafo, precisaremos las propiedades de los distintos tipos de valoraciones, que dominan a un anillo local regular de dimensión 2.

La discusión que sigue se puede encontrar en el trabajo de Spivakovsky [ S-I ], en el que se da también información adicional.

**1.4.0. Preliminares**

Sea  $v$  una valoración de  $F$  que domina  $R$ . Y sea  $\phi = v( F - \{ 0 \} )$  su grupo de valores. Sea  $\hat{R}$  el completado  $m$ -ádico de  $R$  y  $\hat{F}$  su cuerpo de fracciones, existe una única valoración  $\hat{v}$  de  $\hat{F}$ , dominando a  $\hat{R}$ , tal que, su restricción sobre  $F$  es  $v$ . Dicha valoración puede obtenerse del modo siguiente:

$\hat{\alpha} = \{ \hat{f} \in \hat{R} / \text{Existe una sucesión } ( f_n ) \text{ de Cauchy; } f_n \in R, \text{ con } v( f_n ) \text{ no acotada en } \phi \text{ y, tal que, } f_n \rightarrow \hat{f} \}$ , es un ideal primo de  $\hat{R}$ . Si  $\hat{\alpha} = v( m )$ , podemos distinguir dos situaciones:

1) Para cada  $b \in \phi$ , existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que,  $na > b$ . En este caso es  $\text{rg } v = 1$ .

2) Existe  $b \in \phi$  con,  $na < b$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene,  $\text{rg } v = 2$ ,  $v$  es discreta y  $\hat{\alpha} = ( 0, a^* )$  con  $a^* \in \mathbb{N}$ .

Si se tiene 1) podemos distinguir, a su vez, dos casos.

a)  $\hat{\alpha} = ( 0 )$ . Entonces, se tendrá que el grupo de valores  $\hat{\phi}$  de  $\hat{v}$  es igual a  $\phi$ , y para cualquier sucesión  $f_n \rightarrow \hat{f}$ ,

$$\hat{v}(\hat{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(f_n)$$

b)  $\hat{\alpha} \neq ( 0 )$ . Entonces, se tiene  $\hat{\phi} = \mathbb{Z} \oplus \phi$ . Si  $\hat{f} \in \hat{R} - \hat{\alpha}$  para cualquier sucesión  $f_n \rightarrow \hat{f}$  se tiene,

$$\hat{v}(\hat{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(f_n)$$

Si  $f \in \hat{R} - \hat{a}$ , con  $f = t^{\frac{m}{b}}$ ,  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ ;  $a, b \in \hat{R} - \hat{a}$ , siendo  $t \in \hat{R}$  un parámetro regular de  $\hat{R}_a$ , entonces,

$$\hat{v}(f) = (m, 0) + \hat{v}(a) - \hat{v}(b).$$

Si se tiene 2), podemos considerar el ideal primo de  $\hat{R}$  siguiente:

$\hat{h} = \{ \hat{f} \in \hat{R} / \text{Existe una sucesión } (f_n) \text{ de Cauchy; } f_n \in R \text{ con } v(f_n) \text{ no acotada en } \phi_1 \text{ y, tal que, } f_n \rightarrow \hat{f} \}$ , donde  $\phi_1$  es el único subgrupo propio aislado de  $\phi$ .

Si  $t \in \hat{R}$  es un parámetro regular del anillo local  $\hat{R}_h$ , se tiene:

Si  $f \in \hat{R} - \hat{h}$ , siendo  $f_n \rightarrow \hat{f}$  como antes, entonces,

$$\hat{v}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}(f_n)$$

Si  $f \in \hat{h}$ , con  $f = t^{\frac{m}{b}}$ ,  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ ;  $a, b \in \hat{R} - \hat{h}$ , entonces,

$$\hat{v}(f) = m \hat{v}(t) + \hat{v}(a) - \hat{v}(b).$$

#### 1.4.1. Clasificación de valoraciones de $F$ que dominan a $R$ .

Según la fórmula de Abhyankar, ( 1.0.1.iv ) se puede construir el siguiente cuadro, que da todas las posibilidades para una valoración  $v$  de  $F$  que domina a  $R$ .

Tipo	Rango	Rango racional	Grado trascendencia	Discreta	Grupo valores
A	2	2	0	SI	contenido en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$
B	1	2	0	NO	contenido en $\mathbb{R}$ , no en $\mathbb{Q}$
C	1	1	0	NO	contenido en $\mathbb{Q}$ , no en $\mathbb{Z}$
D	1	1	0	SI	$\mathbb{Z}$
E	1	1	1	SI	$\mathbb{Z}$

En lo que sigue y en coherencia con la notación anterior,  $\phi$  es el grupo de valores de  $v$ ,  $\phi^+$  el semigrupo de valores,  $\phi_1$  el subgrupo aislado minimal no nulo de  $\phi^+$ ,  $\phi_1^+ = \phi_1 \cap \phi^+$  y  $\hat{\phi}, \hat{\phi}^+$  el grupo y semigrupo de valores de la extensión  $\hat{v}$  a  $\hat{R}$ . Salvo que se indique lo contrario, tomaremos para  $v$  normalizaciones con  $v(m) = 1$ , con lo cual los grupos de valores serán semigrupos del grupo aditivo de los números reales, en los casos B, C, D, E. En el caso A, se identificará  $\mathbb{Q}$  con  $0 \oplus \mathbb{Q}$ , la normalización de  $v$  cumplirá  $v(m) = (0,1) = 1$  y en ocasiones, podremos pensar en la división entre elementos de  $0 \oplus \mathbb{Q}$ , que vendrá inducida por la división en  $\mathbb{Q}$ .

1.4.2. Grafo dual y desarrollo H-N de los distintos tipos de valoraciones.

Para detallar más las propiedades de los tipos de valoraciones anteriores, usaremos el concepto de sucesión generatriz y sucesión generatriz minimal. Excluiremos el caso E, pues son las valoraciones divisoriales ya tratadas.

- Una familia  $\{ Q_i \}_{i \in I}$  de elementos de  $m$ , se dice que es una sucesión generatriz de  $v$ , si para cada  $f \in R$  se tiene,

$$v(f) = \text{máx. } \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid (z \oplus \mathbb{Q}) / f \in P_\alpha \}$$

( Entre parentesis, para el caso A, y orden lexicográfico ), donde  $P_\alpha$  es el ideal de  $R$  generado por:

$$\left\{ \prod_{j \in I} Q_j^{\gamma_j} \mid \sum_{j \in I} \gamma_j v(Q_j) \geq \alpha \right\} \quad \gamma_j \in \mathbb{N}$$

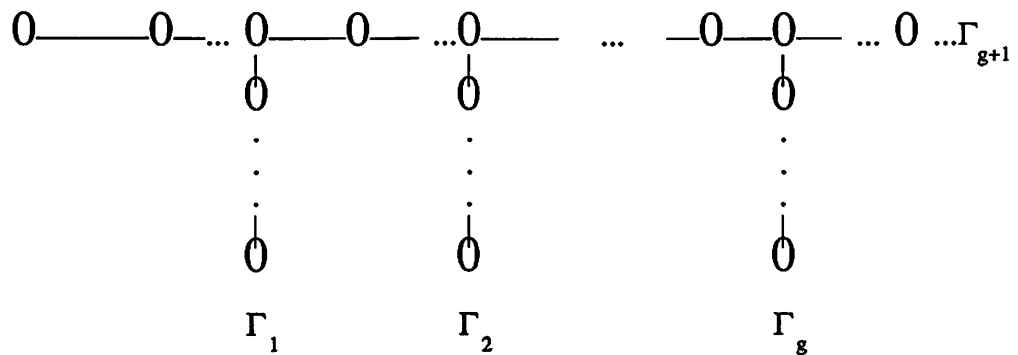
Y se dice que es una sucesión generatriz minimal, si la supresión de cualquiera de sus elementos, evita el que generen la valoración  $v$ .

Tenemos la casuística siguiente. ( Los detalles, pueden encontrarse en [ S-I ] ).

A-1

Es el caso A (  $\text{rg } \nu = 2$  ), en el que se tiene una sucesión generatriz minimal  $\{ Q_i \}_{0 \leq i \leq g+1}$ , su rango racional es dos y se tiene  $\phi^+ = \langle \beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_{g+1} \rangle$ , con  $\nu(Q_i) = \beta'_i$ ,  $e_0 \beta'_i \in 0 \oplus \mathbb{Z}$  ( $e_0$  es un entero) y  $\beta'_{g+1} = (1, 0)$ , siendo dicho sistema generador minimal para el semigrupo.

El grafo dual tiene la forma genérica siguiente:



Los pesos son los descritos para las ramas  $\Gamma_i$ ,  $0 \leq i \leq g$  en 1.3.1.2. y para  $\Gamma_{g+1}$ , se han de proseguir los pesos allí descritos, de uno en uno, indefinidamente.

Y las ramas  $\Gamma_i$  pueden obtenerse de  $\{ \beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_g \}$  mediante las igualdades:

$$\beta_i = e_{i-1} (\beta'_i - n_{i-1} \beta'_{i-1}) + 1;$$

$$\beta_i = \frac{p}{n_i}, \quad \text{m.c.d.}(p_i, n_i) = 1; \quad e_i = \prod_{j=1}^i n_j; \quad e_0 = n_0 = \beta_0 = 1;$$

$$\beta_i = (h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{i-1}+1} + \frac{1}{h_{s_{i-1}+2} + \dots + \frac{1}{k_i}}}$$

para  $1 \leq i \leq g$ .

En consecuencia, el desarrollo de Hamburger-Noether para un sistema regular de parámetros  $\{ x, y \}$  de  $m$ , será,

$$\begin{aligned}
 y &= a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0h_0} x^{h_0} + x^{h_0} z_1 \\
 x &= z_1^{h_1} z_2 \\
 &\dots \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \dots \\
 z_{s_1-1} &= a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1}^{h_{s_1}} \\
 &\dots \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \dots \\
 z_{s_g-1} &= a_{s_g, k_g} z_{s_g}^{k_g} + a_{s_g, k_g+1} z_{s_g}^{k_g+1} + \dots
 \end{aligned}$$





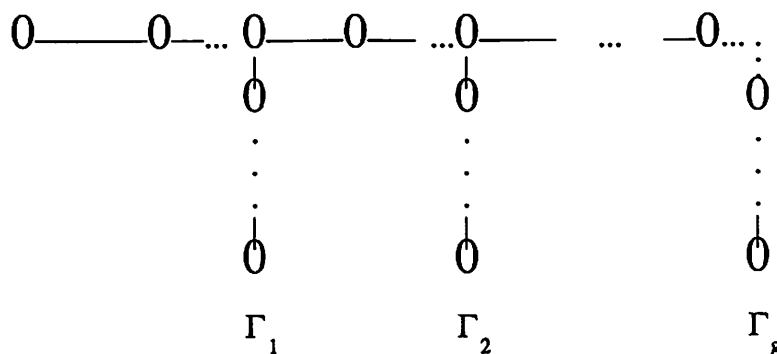
B.

En este caso,  $\text{rg } v = 1$ ,  $\text{rg } \text{rac } v = 2$ . Se tiene una sucesión generatriz minimal  $\{ Q_i \}_{0 \leq i \leq g}$ , con  $\beta'_i = v(Q_i) \in \mathbb{Q}$   $0 \leq i \leq g-1$ ,  $\beta'_g = v(Q_g) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  y, se verifica  $\phi^+ = \langle \beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_g \rangle$ , siendo estos valores un sistema generador minimal de  $\phi^+$ . Las ramas  $\Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq g-1$ , pueden obtenerse de los valores  $\beta'_i$  como se indica en A.1., mientras que  $\Gamma_g$  se obtendrá de  $\beta'_g$  de las fórmulas:

$$\beta_g = e_{g-1} (\beta'_g - n_{g-1} \beta'_{g-1}) + 1;$$

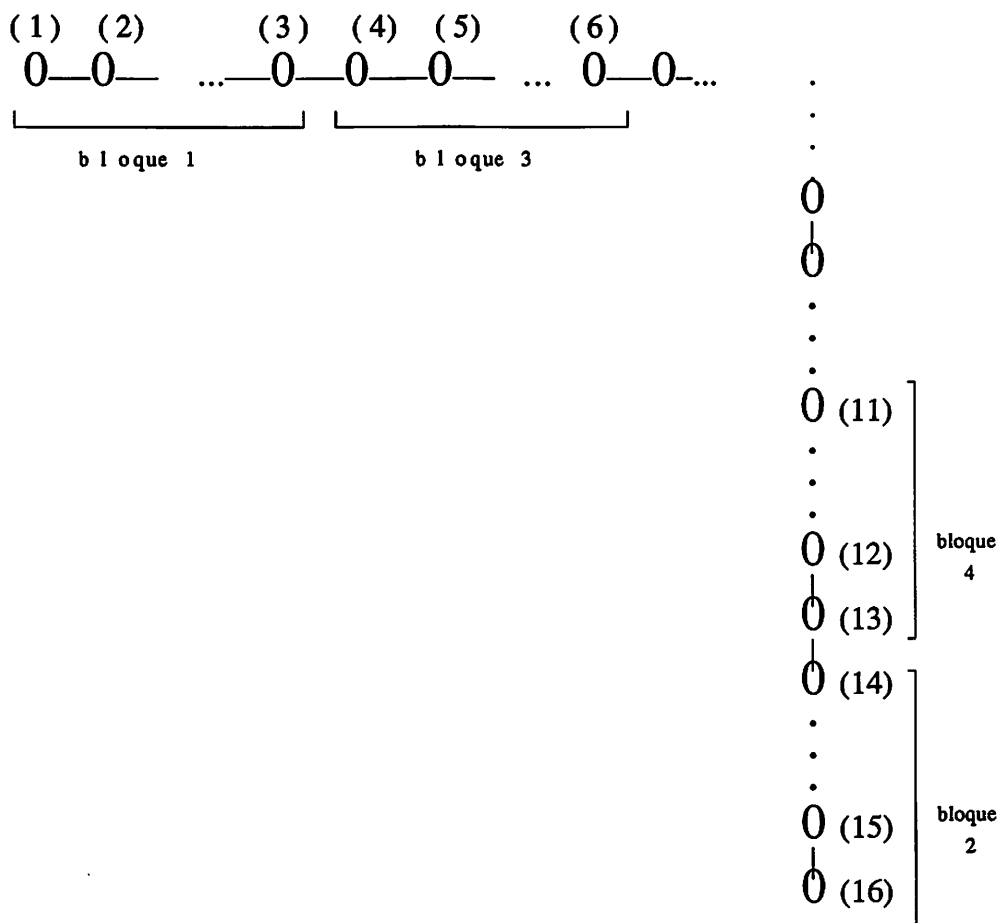
$$\beta_g = (h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{g-1}+1} + \frac{1}{h_{s_{g-1}+2} + \dots}}$$

El grafo dual quedará así:



Los pesos de las ramas  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{g-1}$  son los indicados con anterioridad.

La rama  $\Gamma_g$ ,



Y los pesos  $(1), \dots, (6), (11), \dots, (16)$  son los indicados en 1.3.1.2. para  $j = g$ . Naturalmente, el número de bloques es infinito.

Y el desarrollo H-N,

$$y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1$$

$$x = z_1^{h_1}z_2$$

...

...

$$z_{s_1-1} = a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1}$$

...

...

$$z_{s_{g-1}-1} = a_{s_{g-1}, k_{g-1}} z_{s_{g-1}}^{k_{g-1}} + \dots + a_{s_{g-1}, h_{s_{g-1}}} z_{s_{g-1}}^{h_{s_{g-1}}} + z_{s_{g-1}}^{h_{s_{g-1}}} z_{s_{g-1}+1}$$

$$z_{s_{g-1}+1} = z_{s_{g-1}+2}^{h+2} z_{s_{g-1}+3}$$

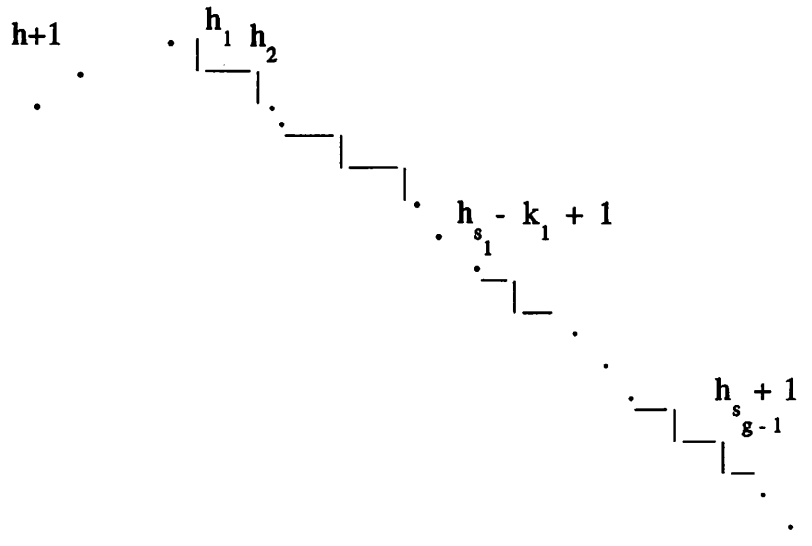
...

prosiguiendo con filas como la última, de forma indefinida.

La "forma" del desarrollo H-N será, en este caso,

$$\begin{array}{c} \frac{h_0}{| \quad |} \\ \frac{h_1}{| \quad |} \\ \frac{h_2}{| \quad |} \\ \vdots \\ \frac{k_{g-1}}{| \quad |} \frac{h_{s_{g-1}} - k_{g-1}}{| \quad |} \stackrel{=1}{g-1} \\ \frac{h_{s_{g-1}} + 1}{| \quad |} \\ | \quad | \\ | \quad | \\ | \quad | \\ \vdots \end{array}$$

Y el diagrama de Enriques, será:



C

Se tiene una sucesión generatriz  $\{ Q_i \}_{0 \leq i < \infty}$ , con  $\beta'_i = \nu(Q_i) \in \mathfrak{a}$ , ahora,  $\text{rg } \nu = \text{rg } \text{rac } \nu = 1$  y  $\phi^+ = \langle \beta'_0, \dots, \beta'_i, \dots \rangle$ , siendo esta una sucesión generatriz minimal del semigrupo. Cada rama  $\Gamma_i$  del grafo, vendrá expresada por las fórmulas de A.1, y el desarrollo H-N se escribirá para un sistema de parámetros  $\{ x, y \}$  de  $m$ ,

$$y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1$$

$$x = z_1^{h_1} z_2$$

...

$$z_{s_1-1} = a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1}^{h_{s_1}}$$

...

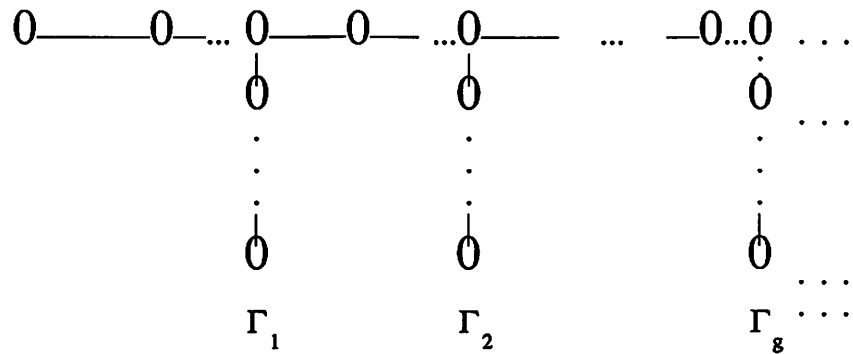
$$z_{s_{l+1}-1} = a_{s_{l+1}, k_{l+1}} z_{s_{l+1}}^{k_{l+1}} + \dots + a_{s_{l+1}, h_{s_{l+1}}} z_{s_{l+1}}^{h_{s_{l+1}}} + z_{s_{l+1}}^{h_{s_{l+1}}} z_{s_{l+1}+1}^{h_{s_{l+1}}}$$

...

} B

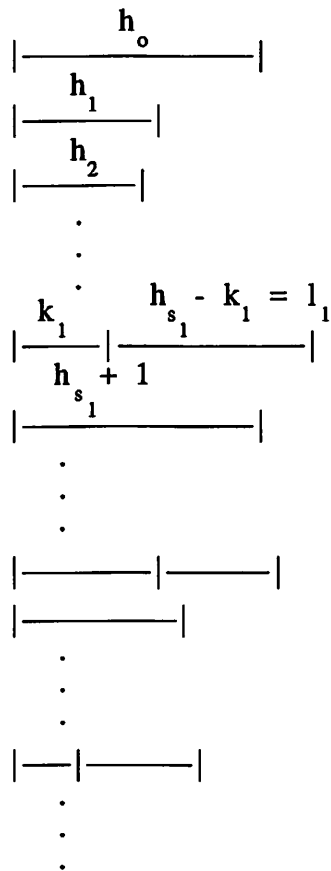
Prosiguiendo con bloques como B indefinidamente.

El grafo dual,

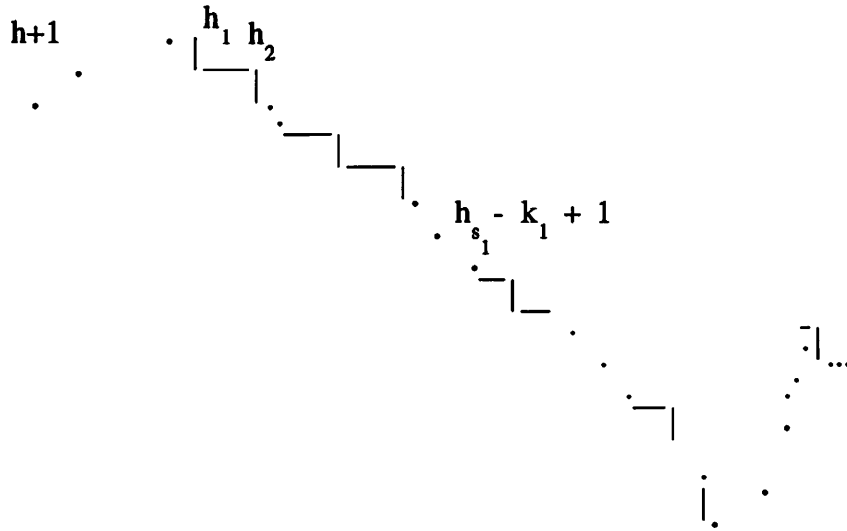


Los pesos son los ya indicados y se proseguirá con ramas indefinidamente.

La "forma" del desarrollo H-N será, en este caso,



Y el diagrama de Enriques será:



Donde el final, en ambos casos, son alternancias de segmentos de puntos libres y satélites indefinidamente.

Los dos casos restantes, A-2 y D, que discutimos a continuación son, tales que, la valoración  $\hat{v}$  extensión de  $v$  al completado  $\hat{R}$  de  $R$  es de tipo A-1. Dicha extensión tendrá una sucesión generatriz minimal  $\hat{Q}_0, \dots, \hat{Q}_{g+1}$ ; pero es obvio que, de hecho,  $Q_0, \dots, Q_g$  se pueden tomar en  $R$ . Así, elegiremos una sucesión  $Q_0, \dots, Q_g \in R, Q_{g+1} \in \hat{R} - R$ , que son generadores minimales para  $\hat{v}$ .

### A-2

Supongamos que existe  $Q_{g+1} \in R$ , tal que,  $\hat{Q}_{g+1} \mid Q_{g+1}$ . Como  $\text{rg } \hat{v} = 2$  se tiene  $\text{rg } v = 2$ . Esto indica que el desarrollo H-N y el grafo dual, así como la forma del desarrollo H-N y el diagrama de Enriques, son los indicados en A-1. La valoración  $v$  se corresponde al caso 2 de 1.4.0.  $\phi = \hat{\phi}$ , pero  $\phi^+$  no está incluido en  $\hat{\phi}^+$ , pues  $\hat{v}(\hat{Q}_{g+1}) \notin \phi^+$ .

D

No existe  $Q_{g+1} \in R$ , tal que,  $\hat{Q}_{g+1} \mid Q_{g+1}$ . Nos encontramos en el caso 1.b. de 1.4.0., el ideal  $\hat{\alpha} \neq 0$  y  $\hat{Q}_{g+1} \in \hat{\alpha}$ , luego,  $\text{rg } \nu = \text{rag } \text{rac } \nu = 1$ ,  $\nu$  es discreta,  $\hat{\nu}|_F = \nu$  y  $\phi = Z \oplus \phi$ . En conclusión, el grafo dual y el desarrollo H-N se corresponden a los de tipo A.1, así como la "forma" del desarrollo H-N y el diagrama de Enriques. En lo sucesivo, nos referiremos a los grafos de tipo A-D para indicar los de la figura A.1.



Definición 2

Sea  $A$  un anillo local, un par  $(\hat{A}, i)$ , donde  $\hat{A}$  es un anillo local henseliano e  $i : A \longrightarrow \hat{A}$  es un morfismo local de anillos, es el henselianizado de  $A$ , si para cada anillo local henseliano  $B$  y para cada morfismo local  $u : A \longrightarrow B$ , existe un único morfismo local  $\hat{u} : \hat{A} \longrightarrow B$ , tal que,  $u = \hat{u} \circ i$

Los anillos locales henselianos que son G-anillos (de Grothendieck) tienen una importante propiedad, propiedad conocida como el teorema de aproximación de Artin. Dicho resultado ha sido conjetural hasta la actualidad, conociéndose en los casos geoméricamente importantes. Rothanss lo ha probado para el caso en que el anillo contiene a  $\mathbb{Q}$ , y Spivakovsky ha anunciado el teorema general. Podemos enunciarlo en la forma siguiente:

3

Sea  $A$  un G-anillo local noetheriano y henseliano,  $\mathfrak{m}$  su ideal maximal. Si  $I$  es un ideal del anillo  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  existe un número  $r \in \mathbb{N}$ , tal que, si  $t_1, t_2, \dots, t_n \in A$  y  $l \in \mathbb{N}$  verifican  $I \subseteq (x_1 - t_1, x_2 - t_2, \dots, x_n - t_n) + \mathfrak{m}^{rl}$ , se tiene que, existen  $t'_1, t'_2, \dots, t'_n \in A$  que cumplen,  $I \subseteq (x_1 - t'_1, x_2 - t'_2, \dots, x_n - t'_n)$  y  $t_i - t'_i \in \mathfrak{m}^l$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

Corolario 4

Sean  $A$  y  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  como antes y,  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Si  $f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = \dots = f_r(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ , para  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \hat{A}$  (completado  $\mathfrak{m}$ -ádico de  $A$ ), se tiene que, para cada  $l \in \mathbb{N}$ , existen  $t'_1, t'_2, \dots, t'_n \in A$  verificando,

$$f_1(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = \dots = f_r(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = 0$$

y  $t_i - t'_i \in \mathfrak{m}^l$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

## 1.5. Descripción de las valoraciones que dominan a R

### 1.5.E.

Sea  $v$  una valoración de tipo E ( o divisorial ),  $v$  corresponde a una sucesión finita  $\pi$  de transformaciones cuadráticas como se indica en 1.3. y también a un ideal simple  $m$ -primario,  $\mathfrak{p}$ , de R.

### Definición

Llamaremos elemento general de  $v$ , a cualquier elemento  $g \in \mathfrak{p}$ , analíticamente irreducible, tal que, su transformado estricto a través de la sucesión  $\pi$  en  $X^{(n+1)}$  es regular y transversal a  $L_{n+1}$  ( notación 1.3. ). Los elementos generales son, de hecho, un sistema de generadores del ideal  $\mathfrak{p}$ , siendo  $\mathfrak{p}$ , la completación en el sentido de Zariski del ideal generado por dos de ellos que se separan en  $L_{n+1}$ . ( Ver [ Z-S ] ).

La valoración  $v$  ( normalizada sobre  $Z$  ), está descrita completamente por la fórmula:  $f \in R$ ,

$$v(f) = \min \{ (f, g) / g \text{ es general de } v \}$$

donde  $(f, g)$  indica la multiplicidad de la intersección en  $m \in \text{Spec } R$ , entre las curvas  $f = 0$  y  $g = 0$ .

### 1.5.A.D.

Recordamos la noción de henselianizado para proceder a la discusión.

### Definición 1

Un anillo local  $A$  es henseliano, si todo  $A$ -álgebra finita es producto de anillos locales.

Nuestro interés se centra en el resultado siguiente:

Teorema 5

Sea  $R$  un  $G$ -anillo local en las condiciones anteriores. Si  $\hat{R}$  es el completado  $m$ -ádico de  $R$ ,  $\mathfrak{R}$  el henselizado de este anillo y  $\mathfrak{R}^i$  el conjunto de elementos de  $\mathfrak{R}$  analíticamente irreducibles y los que se obtienen a partir de ellos multiplicando por una unidad de  $\hat{R}$ . Entonces, se tiene:

$$\mathfrak{R}^i = \left\{ f \in \hat{R} \text{ analíticamente irreducible} / \exists h \in \hat{R}, h \neq 0, \text{ con } fh \in R \right\}$$

Para la demostración, serán precisos algunos resultados que indicamos:

Proposición 5.1.

Sea  $R$  un  $G$ -anillo local henseliano en las condiciones 1.0.,  $f \in \hat{R}$  analíticamente irreducible, supongamos que existe  $h \in \hat{R}, h \neq 0$ , tal que,  $g = fh \in R$ , entonces,  $fu \in R$ , donde  $u$  es una unidad en  $\hat{R}$ .

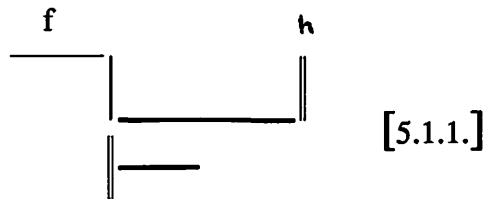
Demostración

Consideremos el anillo de polinomios  $R[U, V]$ , en las variables  $U, V$ , y  $g - UV \in R[U, V]$ , puesto que  $g - fh = 0$ , por 4, existen  $f'$  y  $h' \in R$  con,  $g = f'h'$  y  $f - f' \in m^l$ , para cada  $l \in \mathbb{N}$ ;  $h - h' \in m^l$ .

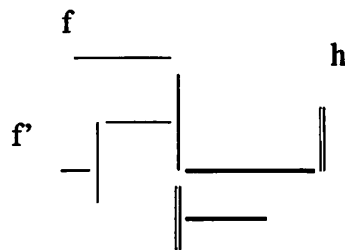
Si  $h$  y  $f$  no tienen componentes comunes, entonces, tienen un número finito  $p$  de puntos infinitamente próximos comunes (aquí  $f$  y  $h$  indican también las curvas que tienen asociadas).

Sea  $l \gg 0$ , para que el número de puntos infinitamente próximos comunes de  $f$  y  $f'$  supere  $p$ . (Esto es posible, pues existe una constante  $l(f)$ , tal que, si  $l \geq l(f)$  y  $f - f' \in m^l$ , el número de puntos infinitamente próximos comunes entre  $f$  y  $f'$  es  $c + l - l(f) = \psi(l)$ , con  $c$  constante y  $l \rightarrow \infty$  implica,  $\psi(l) \rightarrow \infty$  (Ver [C], cap IV)).

El árbol de puntos infinitamente próximos de  $g = f h$  será esquemáticamente:



Y el de  $g' = h f'$ , si  $f \neq f'$ ,



Los puntos infinitamente próximos de  $f'$  forman parte del árbol de puntos infinitamente próximos de  $g$ , pero no están todos en el de  $h$ , pues tiene alguno en común con  $f$  que no lo es con  $h$ , en conclusión,  $u f = f'$  y  $f u \in R$ , con  $u$  unidad en  $\hat{R}$ .

Si  $f \mid h$  entonces  $g = f^q \bar{h}$  con  $f \nmid \bar{h}$ . Como antes se encuentran  $f'_1, \dots, f'_q, \bar{h}' \in R$ , con  $g = f'_1 \dots f'_q \bar{h}'$ , cada  $f'_i$  analíticamente irreducible y  $f'_i = u_i f$ ,  $u_i$  una unidad en  $\hat{R}$ . La conclusión se sigue de este hecho.

Proposición 5.2.

Sean  $R$  y  $\mathfrak{R}$  un anillo local y su henselianizado. Sea,

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \hat{R} / \text{existe } g \in \hat{R}, g \neq 0, \text{ con } f g \in R \right\}$$

entonces,  $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{A}$

Demostración

Por  $[R]$  cap.I y VIII, se tiene  $\mathfrak{R} = \lim_{i \in I} A_i$ , donde  $A_i = \left[ \frac{R[t]}{p(t)} \right]_{\mathfrak{q}}$ ;  $R[t]$  es el anillo de polinomios en la indeterminada  $t$ ;  $p(t) \in R[t]$ , mónico y  $\mathfrak{q}$  es un ideal primo de  $R[t]$  que se contrae en  $m$ . ( Los valores exactos de  $p(t)$  y de  $\mathfrak{q}$  no son relevantes ).

En primer lugar, si  $\bar{h} = h + (p(t)) \in \frac{R[t]}{p(t)}$  existen  $\bar{h}' \in \frac{R[t]}{p(t)}$  y  $r \in R$ , tales que,  $\bar{h} \bar{h}' - r \in (p(t))$ . En efecto, podemos suponer que  $gr p(t) \geq gr h$ , y puesto que,  $F[t]$  es un dominio euclideo, existen  $g_1, c_1 \in F[t]$ , con  $p(t) = h g_1 + c_1$ .

Si  $gr c_1 = 0$ , se tiene  $c_1 \in F$  y existe  $u \in R$  con  $g_1 u = g \in R[t]$  y  $c = c_1 u \in R$ , luego,  $u p(t) = h g + c$ . Renombrando,  $\bar{h}' = g$  y tomando módulo  $p(t)$ ,  $\bar{h} \bar{h}' = -c + (p(t))$ .

Si  $gr c_1 > 0$ , sea  $v \in R$  con  $v c_1 = c \in R[t]$ ,  $v g_1 = g \in R[t]$  y  $v p(t) = h g + c$ , tomando módulo  $p(t)$ ,  $\bar{h} \bar{g} = -c + (p(t))$ .

Un método similar, indica que existe  $c'(t) \in R[t]$  con,  $gr c'(t) < gr c(t)$  y  $c g' + c' \in (p(t))$ . Despues de un número finito de pasos, existe  $\bar{h}'(t) \in R[t]$  y  $c^l \in R$  con  $\bar{h} \bar{h}' = c^l + (p(t))$ .

Esta propiedad, se traslada facilmente al conjunto  $A_i$  para cualquier índice, y en consecuencia, si  $f \in \mathfrak{R}$  existe un representante de  $f$  en  $A_i$ , para  $i \gg 0$ , luego, tambien  $g \in A_i$  representante de un elemento de  $\mathfrak{R}$ , tal que,  $f g \in R$ .

Demostración del teorema 5

Por 5.2. y la definición de  $\mathfrak{R}^I$ , puede escribirse,

$$\mathfrak{R}^I = \left\{ f \in \mathfrak{R} \text{ irreducible analíticamente ( I.A.)} / \exists g \in \mathfrak{R} \text{ con } f g \in R \right\}.$$

Y se tiene la cadena,

$$\mathfrak{R}^1 \subseteq \left\{ f \in \hat{R}, \text{ I.A.} / \exists g \in \hat{R}, g \neq 0, \text{ con } fg \in R \right\} \subseteq \\ \subseteq \left\{ f \in \hat{R}, \text{ I.A.} / \exists g \neq 0 \in \hat{R} \text{ con } fg \in \mathfrak{R} \right\} \subseteq (\text{por 5.1.}) \mathfrak{R}^1.$$

Nota 6

La condición de irreducibilidad analítica, no es precisa y puede decirse que el conjunto,

$$\left\{ f \in \hat{R} / \exists g \in \hat{R}, g \neq 0, \text{ con } fg \in R \right\}$$

consiste en los elementos del tipo  $uf$  con  $f \in \mathfrak{R}$  y  $u$  unidad de  $\hat{R}$ .

Teorema 7

Toda valoración  $A$  ó  $D$ ,  $v$ , que domina a un  $G$ -anillo  $R$  ( condiciones 1.0. ), puede obtenerse, como se indica en la demostración, de las ecuaciones paramétricas de una curva  $f = 0$ ,  $f \in \hat{R}$  analíticamente irreducible, de manera que:

- i) Si  $f \in R$ , la valoración es de tipo A-1.
- ii) Si  $f \in \hat{R} - R$  y  $uf \in \mathfrak{R}$  para alguna unidad en  $\hat{R}$ , la valoración es A-2.
- iii) Si  $f \in \hat{R} - R$  y  $uf \notin \mathfrak{R}$  para toda unidad en  $\hat{R}$ , la valoración es D.

Demostración

Valoraciones A

Sea  $v$  una valoración de este tipo,  $\text{rg } v = 2$ . Sea  $\hat{h}$  el ideal descrito en 1.4.0.,  $\text{ht } \hat{h} = 1$ ,  $\hat{R}_{\hat{h}}$  es de valoración discreta y  $\hat{h} \hat{R}_{\hat{h}} = (f) \hat{R}_{\hat{h}}$ ,  $f$  puede tomarse en  $R$ , y  $\hat{h} = (f)$  en  $\hat{R}$ .

Se tiene una sucesión generatriz minimal ( en  $R$  o en  $\hat{R}$  )  $Q_0, \dots, Q_g, Q_{g+1}$  donde,  $Q_0, \dots, Q_g \in R$  y,  $Q_{g+1} \in \hat{R}$  y los valores  $\beta'_i = v(Q_i) \in 0 \oplus \mathfrak{a}$ ,  $0 \leq i \leq g$ ,  $\beta'_{g+1} = v(Q_{g+1}) \in \mathfrak{z} \oplus 0$ . Además,

$$v(f) = \text{máx} \left\{ \alpha / f \in P_{\alpha} \right\}$$

Donde  $P_\alpha$  tiene el significado indicado en 1.4.2. Si no hay ambigüedad, escribiremos  $\hat{Q}_{g+1}$  en vez de  $\hat{Q}_{g+1}$ , en lo que sigue.

Si  $f \notin (\hat{Q}_{g+1})$  en  $\hat{R}$ ,

$$f = \sum c_{\gamma_0, \dots, \gamma_{g+1}} \prod_{i=0}^{g+1} Q_i^{\gamma_i}$$

pero en algún sumando  $\gamma_{g+1} = 0$ . Como  $\beta'_i < \beta'_{g+1}$ ,  $i = 0, \dots, g$ , se tiene que,  $\hat{v}(f) \in \phi_1$  y  $\hat{v}(f) \notin \phi - \phi_1$ , lo que es imposible, pues por definición,  $\hat{v}(f) = v(f)$ , y no está acotado, luego no está en  $\phi_1$ .

En consecuencia, se tendrá que  $f \in (\hat{Q}_{g+1}) \hat{R}$ .

Supongamos  $f$  analíticamente irreducible. Salvo unidad de  $\hat{R}$ ,  $f \in \hat{Q}_{g+1}$  y estamos en el caso A.1. Entonces, la valoración  $\hat{v}$  induce una valoración  $\bar{v}$  en el cuerpo de cocientes,  $\hat{F}$ , de  $\hat{R} / (f)$ . Dicha valoración es discreta y su anillo de valoración lo denotamos  $R_{\bar{v}}$ .

Por otra parte,  $\mathcal{O} = \hat{R} / (f)$  es un dominio local noetheriano de dimensión 1, y G-anillo (por ser completo), luego el cierre integro  $\bar{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{O}$  en  $\hat{F}$  es un anillo de valoración discreta y dicha valoración es la única que domina a  $\mathcal{O}$ . Como  $\bar{v}$  domina también a  $\mathcal{O}$  por construcción, se sigue que,  $\bar{v}$  es la valoración normalizada que corresponde al anillo de valoración discreta  $\bar{\mathcal{O}}$ .

En el caso que consideramos en esta memoria,  $\hat{R}$  y por tanto  $\hat{R}$ , tienen un cuerpo de coeficientes  $K$ , algebraicamente cerrado, y de aquí  $\bar{\mathcal{O}}$  es una curva algebroide irreducible sobre  $K$  y  $\bar{\mathcal{O}} = K[[t]]$ , siendo  $t$  un uniformizante para  $\bar{v}$ . Si  $\{x, y\}$  es un sistema de generadores del ideal maximal de  $\hat{R}$  (y de aquí sus clases módulo  $(f)$  un sistema de generadores del ideal maximal de  $\mathcal{O}$ ), sus imágenes  $\{x(t), y(t)\}$  en  $\bar{\mathcal{O}}$  proporcionan una parametrización para la curva algebroide.

Así, si  $g \in R$ ,  $g \notin (f)$ , entonces, el  $\hat{v}$ -valor de su clase  $\bar{g}$  en  $\hat{\mathcal{O}}$  es  $\text{ord}_f g(x(t), y(t))$ , es decir, la multiplicidad de intersección  $(f, g)$  entre las curvas algebroides en  $\text{Spec } \hat{R}$ , dadas por  $f = 0$  y  $g = 0$ . En conclusión se tiene, para tales  $g$ ,

$$v(g) = (0, (f, g))$$

Si  $g \in R$ ,  $g \in (f)$ ,  $g \neq 0$ , entonces,  $g = f^p h$  para algún  $p$  y  $h \notin (f)$ . Como  $v(f) = v(\hat{Q}_{g+1}) = (1, 0)$ , es claro que,

$$v(g) = (p, (h, f))$$

La extensión al cuerpo  $F$  es inmediata. Un elemento de  $F$  no nulo se escribe como  $f^p \frac{a}{b}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  y  $a, b \in R$  con  $a, b \notin (f)$ . Así:

$$v\left(f^p \frac{a}{b}\right) = (p, (a, f) - (b, f))$$

Supongamos que  $f$  no es analíticamente irreducible.

### Valoraciones A.2.

En este caso  $f \in R$  y su descomposición en  $\hat{R}$  será,  $f = f_1^{p_1} \dots f_r^{p_r}$  con los  $f_i$  irreducibles en  $\hat{R}$  y distintos dos a dos,  $\hat{Q}_{g+1}$  también es irreducible y es divisor de  $f$ , luego, existe un índice  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  con  $f_i = \hat{Q}_{g+1} \notin R$ . Como  $f$  es irreducible en  $R$  y  $\hat{R}/(f) = (\hat{R}/(f))$ , en el caso en que  $\hat{R}/(f)$  sea G-anillo (por ejemplo en las situaciones geométricas), entonces,  $\hat{R}/(f)$  será también reducido y de aquí,  $p_1 = p_2 = \dots = p_r = 1$ . Es obvio que, como  $R$  es G-anillo, también lo es  $\hat{R}/(f)$  y así podemos hacer la afirmación anterior.

Como en el caso de valoraciones A.1.,  $\hat{v}$  se puede obtener a partir de la valoración de la curva algebroides dada por  $f_i$ .



Ahora,  $f_i \in \hat{R}$  y si  $g = \frac{f}{f_i} \in \hat{R}$  se tiene,  $g f_i = f \in R$ , luego por el teorema 5,  $f_i \in \mathfrak{K}$ .

Si se toman  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ , unas ecuaciones paramétricas de  $f_i = 0$ , se puede escribir como antes,  $v(g) = (0, (f_i, g))$ , si  $g \notin (f_i)$ , ó equivalentemente,  $g \notin (f)$ . Por otro lado,  $v(f) = (1, (-\frac{f}{f_i}, f_i))$ , luego si  $h \in F$ , con  $h = f_i^p \frac{a}{b}$  entonces,

$$v(h) = (p, (a, f_i) - (b, f_i))$$

### Valoraciones D

En este caso, por 1.4.0., el ideal de  $\hat{R}, \hat{\mathfrak{a}}$ , es no nulo,  $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{a}}}$  es de valoración discreta,  $\hat{\mathfrak{a}}$  de altura 1 y tomaremos un parámetro regular  $f \in \hat{R} - R$  que genera  $\hat{\mathfrak{a}}$ . Nuevamente,  $\hat{Q}_{g+1}$  es divisor de  $f$  y si  $f = f_1^{p_1} \dots f_r^{p_r}$ , existe  $f_i = \hat{Q}_{g+1}$ . La definición de  $\hat{v}$  y  $v$  son las anteriores. Aunque, en este caso, no existe  $h \in R$ , tal que,  $f_i | h$  (ver 1.4.2.D.), por lo tanto,  $f_i \notin \mathfrak{K}$ , y el grupo de valores es  $\mathbb{Z}$ . (Las expresiones indicadas son para una normalización de  $v$ , no necesariamente  $v(m) = 1$ ).

### Corolario 8

Si  $R$  es un G-anillo henseliano en las condiciones 1.0., no existen valoraciones de  $F$  que dominan a  $R$  de tipo A.2.

### Demostración

$R$  henseliano implica  $R = \mathfrak{K}$  y no existe  $f$  analíticamente irreducible, tal que,  $f \notin R$  y  $f \in \mathfrak{K}$ .

### Ejemplos 9

Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado,  $K[X, Y]$  el anillo de polinomios en dos variables y coeficientes en  $K$ . Sea  $R = K[X, Y]_{(X, Y)}$ ,  $\hat{R} = K[[X, Y]]$  y  $\hat{F} = K((X, Y))$ .

A.1. Definase sobre  $\hat{F}$  una valoración  $\hat{v}$ , tal que,  $\hat{v}(\lambda) = 0$  si  $\lambda \in K$ ,  $\hat{v}(X) = (0,1)$  y  $\hat{v}(Y) = (1,0)$ . Nuestro elemento  $f$ , será  $Y$ , de ecuaciones paramétricas,  $Y = y(t) = 0$ ;  $X = x(t) = t$  y para  $g \in \hat{R}$ ,  $g = \sum c_{ij} X^i Y^j$ .

$$\hat{v}(g) = \min_{\text{orden lexicográfico}} \{ (j,i) / c_{ij} \neq 0 \}$$

La restricción de  $\hat{v}$  a  $F = \text{Frac.}(R)$ , será una valoración  $v$  de tipo A.1.

D.Pongamos  $\hat{v}(X) = (0,1)$ ;  $\hat{v}(X + \sum_{i=1}^{\infty} Y^i) = (1,0)$ . Las ecuaciones paramétricas serán  $y(t) = t$ ;  $x(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} t^i$ . Y como

$v|_R = \hat{v}|_R$  se tiene:

$$v(X) = (0,1); \quad v(X + Y) = (0,2); \quad \dots$$

$$v(X + Y + \dots + Y^n) = (0, n+1); \quad \dots$$

El grupo de valores de  $v$  es  $\mathbb{Z}$ , y,

$$R_v = K \left[ X, Y, \frac{X}{Y}, \frac{X+Y}{Y^2}, \frac{X+Y+Y^2}{Y^3}, \dots \right]$$

$m_v = Y R_v$ . Esta será una valoración de tipo D.

A.2. El elemento que dará la valoración será,  $f = X^2 - Y^3 - Y^2$ , cuya descomposición en  $\hat{R}$  será,

$$f = \left( X - \sqrt{Y^2 + Y^3} \right) \left( X + \sqrt{Y^2 + Y^3} \right)$$

$$\sqrt{Y^2 + Y^3} = Y \sqrt{1 + Y} = Y g(Y), \quad \text{con}$$

$$g(Y) = (1 + Y)^{1/2} = \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} Y^i.$$

En resumen,

$$f = \left( X - \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} Y^{i+1} \right) \left( X + \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} Y^{i+1} \right)$$

Considerando las ecuaciones paramétricas:

$X = x(t) = \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1}$ ;  $Y = y(t) = t$ , obtendremos una valoración  $\hat{v}$ , que da  $v$  como restricción, tal que,

$$\hat{v} \left( X - \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1} \right) = (1, 0); \hat{v} \left( X + \sum_0^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1} \right) = (0, 1).$$

Y por lo tanto,  $v(f) = (1, 1)$ .

### 1.5. Valoraciones B y C

#### 1. Preliminares y notaciones sobre curvas.

Recordando 1.5.A-D.7.A.1, sea  $R$  un anillo local en las condiciones 1.0.  $\hat{R}$  su completado  $m$ -ádico y  $\{x, y\}$  un sistema regular de parámetros. Si  $f \in \hat{R}$ , puede considerarse el álgebra local  $\mathcal{O}_f = \hat{R} / (f) = K[[x, y]] / (f)$ , que es una curva algebroide que también representaremos por  $f$ . El cierre integro  $\bar{\mathcal{O}}_f$  de  $\mathcal{O}_f$  es un anillo de valoración discreta, cuya valoración asociada pondremos  $v_f$ . Unas ecuaciones paramétricas de  $f$  permiten conocer  $v_f$ .

Si ahora  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \hat{R}$  irreducibles e  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , pueden considerarse las curvas  $\mathcal{O}_r = K[[x(r), y(r)]]$ ,  $x(r) = x + (f_r)$ ,  $y(r) = y + (f_r)$ ;  $r \in I$ , cuyo desarrollo H-N será:

$$(D_r) = \left\{ z_{j-1} = \sum_{i=0}^{h_j^r} a_{ji}^r z_j^i + z_{j+1}^{h_j^r} / 0 \leq j \leq d_r; z_0 = x(r); z_{-1} = y(r) \right\}$$

Si  $\{ s_1, s_2, \dots, s_{g_r} \} = \{ j > 0 / \exists i \text{ con } a_{ji}^r \neq 0 \}$ , entonces,  $g_r$  es el género de la curva y cada fila  $s_p$ -ésima  $1 \leq p \leq g_r$ , se escribe,

$$z_{s_p-1}^r = a_{s_p, k_p}^r z_{s_p}^r + \dots + a_{s_p, h_p}^r z_{s_p}^r + z_{s_p}^r z_{s_p+1}^r$$

$a_{s_p, k_p}^r \neq 0$ . La fila  $s_{g_r}$ -ésima es infinita y los  $a_{ji}^r$  restantes valen cero.

Usaremos la notación siguiente, para cada  $r \in I$ ,

$$l_p^r = h_p^r - k_p^r; \quad 1 \leq p \leq g_r.$$

$$n_j^r = v_{f_r} ( z_j ) ; \quad 0 \leq j \leq s_{g_r}.$$

$$e_j^r = n_{s_j}^r \cdot N_j^r = \frac{e_{j-1}^r}{e_j^r}.$$

$\{ \bar{\beta}_0^r, \bar{\beta}_1^r, \dots, \bar{\beta}_{g_r}^r \}$  son los valores de contacto maximal de  $f_r$ .

Las propiedades y relaciones entre estos valores, puede encontrarse en [ C ], 3.3.2. y 4.3.5.

### Definiciones

Se consideran dos curvas dadas por  $f_1$  y  $f_2$  como antes, se llama índice de separación del tipo de equisingularidad de  $f_1$  y  $f_2$ , al entero  $\rho \leq \min \{ g_1, g_2 \}$ , dado por,

$$\rho = \max \{ n / h_j^1 = h_j^2 \text{ para todo } j < s_n \text{ y } k_i^1 = k_i^2 \forall i \leq n \}$$

Se llama par de contacto  $( f_1 | f_2 )$  entre  $f_1$  y  $f_2$  al par de enteros  $( q, c )$  dados por,

i)  $k_q^1 = k_q^2; h_j^1 = h_j^2; a_{ji}^1 = a_{ji}^2$  si  $j < s_q; 1 \leq i \leq h_j$ . Y

$$a_{s_q, k_q+p}^1 = a_{s_q, k_q+p}^2 \text{ para } 0 \leq p < c.$$

ii)  $( q, c )$  es el mayor par de enteros que verifican i), para el orden lexicográfico de  $z_+^2$ .

En términos del desarrollo del par,  $(f_1 | f_2)$  indica la fila libre y el lugar de ella, hasta los cuales los desarrollo H-N de ambas curvas coinciden.

Si se tienen curvas dadas por  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \hat{R}$  irreducibles, se llama par de contacto entre  $f_1, f_2, \dots, f_n$  al par de enteros,

$$(f_1 | f_2 | \dots | f_n) = \min \left\{ (f_i | f_j) / 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

el mínimo tomado respecto del orden lexicográfico en  $\mathbb{Z}_+^2$ .  
 $(\mathbb{Z}_+ = \{ x \in \mathbb{Z} / x \geq 0 \})$ .

Sea  $v$  una valoración de tipo B ó C y sea  $\pi$ ,

$$(\pi) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\pi_{n+1}} X^{(n)} \xleftarrow{\dots}$$

la sucesión simple de transformaciones cuadráticas que tiene asociada.

En lo que sigue,  $w_j$  es la valoración divisorial normalizada con  $w_j(m) = 1$ , asociada a la "subsucesión" finita de  $\pi$

$$(\pi^j) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\pi_j} X^{(j)}$$

### Teorema 2

Sea  $v$  una valoración de tipo C. Para cada  $f \in F$  existe un número natural  $M(f) \gg 0$ , tal que, si  $i > M(f)$  entonces,

$$v(f) = w_i(f)$$

### Demostración

Será suficiente probar las tres afirmaciones que enunciamos:

a) Si  $f \in F$  existe  $M(f) \gg 0$ , natural, tal que, si  $i \geq M(f)$ ,  
 $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j(f) = w_i(f)$ .

b)  $v' = \lim_{j \rightarrow \infty} w_j(f)$  es una valoración de  $F$ .

c)  $v$  y  $v'$  son equivalentes.

a) Teniendo en cuenta la posibilidad de extender valoraciones al completado, bastará probar la afirmación para  $f \in R$  analíticamente irreducible, pues automáticamente, se extenderá el resultado a  $F$ .

Sea,  $g_f$  el género de la curva dada por  $f$  y  $M(f)$  el número de divisores que aparecen en el grafo de  $v$ , en las  $g_f$  primeras ramas. ( Ver 1.3.1.3. ).

Si  $k, l \in \mathbb{N}$ ;  $k \neq l$ ;  $k, l \geq M(f)$  y  $f_k, f_l$  elementos generales de  $w_k, w_l$ . Se tiene,

$$(f_k | f_l) > (f_l | f) \text{ y } (f_k | f_l) > (f_k | f)$$

En consecuencia,

$$(f_k | f) = (f_l | f) < (f_k | f_l).$$

Los exponentes  $\beta'$  asociados a las valoraciones  $w_k$  y  $w_l$  coinciden hasta el índice  $g_f + 1$ , y como  $(f_l | f) = (f_k | f) < (g_f^-)$ , por un calculo sencillo ( ver [ D ] 1.1.7. ), se deduce si  $k > l$ ,

$$\frac{1}{e_{g_l}^k} (f_l, f) = (f_k, f)$$

Y, por lo tanto,

$$w_l(f) = \frac{(f, f_l)}{e_0^l}; w_k(f) = \frac{(f, f_k)}{e_0^k} = \frac{1}{e_{g_l}^k} \frac{(f, f_l)}{e_0^l} e_{g_l}^k$$

valores que coinciden.

b) Probaremos, en primer lugar, que para  $f, f' \in F$ ,  
 $v'(ff') = v'(f) + v'(f')$ . Esta cuestión es sencilla, aplicando a) pues, si  $M' > \max \{ M(f), M(f'), M(ff') \}$ , se tiene para  $i > M'$ ,  
 $v'(ff') = w_i(ff')$ ;  $w_i(f) = v'(f)$  y  $w_i(f') = v'(f')$ .

Tambien es cierto,

$$v'(f + f') \geq \min \{ v(f), v(f') \}$$

pues para  $i > \max \{ M(f), M(f'), M(f + f') \}$ , se tienen las igualdades con la valoración  $w_i$  y el resultado.

c) Bastará comprobar que los anillos de valoración  $R_{\mathcal{O}}$  y  $R_{\mathcal{O}'}$  coinciden.

En primer lugar,

$$R_{\mathcal{O}} = \lim_{\rightarrow} \mathcal{O}_{X, P_j}^{(j)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_{X, P_j}^{(j)} \quad (\text{notación 1.0.})$$

Si  $\eta_j$  es el punto genérico del divisor excepcional  $L_j$ , el anillo de valoración de  $w_j$  será  $\mathcal{O}_{X, \eta_j}^{(j)}$ .

Podemos establecer el diagrama de homomorfismos inyectivos de anillos locales, homomorfismos naturales, a la vista de la situación geométrica,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{X, P_j}^{(j)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, \eta_j}^{(j)} \\
 \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{O}_{X, P_{j+1}}^{(j+1)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, \eta_{j+1}}^{(j+1)} \\
 \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{O}_{X, P_{j+2}}^{(j+2)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, \eta_{j+2}}^{(j+2)} \\
 \downarrow & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Ahora se tiene que,  $f \in m_{\mathcal{O}'}$ , equivale a  $v'(f) > 0$  y que existe  $j_0 \gg 0$ , tal que, si  $j \geq j_0$ , entonces,  $w_j(f) > 0$ .  $f$  se anula en  $L_j$ , si y sólo si,  $f(P_{j-1}) = 0$ , o equivalentemente,  $f \in m_{j-1} \mathcal{O}_{X, P_{j-1}}^{(j-1)}$ , para  $j \geq j_0$  ( el ideal maximal de este anillo ). La última condición para cierto  $j$  equivale a  $f \in m_{\mathcal{O}'}$ . Luego,

$$m_{\mathcal{O}'} = m_{\mathcal{O}},$$

Ahora, si  $f \in R_{\nu}$  y  $f \notin R_{\nu'}$ , entonces,  $\nu'(f) < 0$ , luego,  $\nu'(1/f) > 0$  y, por tanto,  $1/f \in m_{\nu'} = m_{\nu}$ , luego,  $f \notin R_{\nu}$ , lo cual es contradictorio. Lo mismo sucede cambiando  $\nu$  por  $\nu'$ , por lo tanto, se concluye  $R_{\nu} = R_{\nu'}$ , como se quería.

### Teorema 3

Manteniendo las notaciones anteriores, sea  $\nu$  una valoración de tipo B. Entonces, para cada  $f$  analíticamente irreducible, puede ocurrir una de las dos posibilidades siguientes:

- 1)  $\nu(f) = e_{g-1}^f \beta'_g$ , ó
- 2) Existe  $M \gg 0$ , tal que, si  $i \geq M$ ,  $\nu(f) = w_i(f)$ .

### Demostración

Bastará con probar las tres afirmaciones siguientes:

- a)  $\lim_{i \rightarrow \infty} w_i(f) = \nu'(f)$ , existe, y es igual a  $e_{g-1}^f \beta'_g$ , ó,  $w_i(f)$  para  $i \gg 0$ .
- b)  $\nu'$  da lugar a una valoración de  $F$ .
- c)  $\nu'$  y  $\nu$  son valoraciones equivalentes.

a) Supongamos que el desarrollo H-N de  $\nu$  relativo al sistema regular de parámetros  $\{x, y\}$  es el de 1.4.2.B. ( $f_j$  denota un elemento general de  $w_j$ ;  $j = 1, \dots$ ). Puede ocurrir:

D) Que exista  $M'(f) \in \mathbb{N}$ , tal que, si  $i, j \geq M'(f)$ , entonces,

$$(f_i | f) = (f_j | f) \leq (g-1, h_{g-1} - k_{g-1})$$

En este caso, escribiremos  $(f_i | f) = (f_j | f) = (q, c)$  y como los valores  $\beta'$  asociados a  $w_i$  y a  $w_j$  coinciden hasta el índice  $q$ , pondremos para  $i, j \gg 0$ ,

$$\frac{\bar{\beta}_1^i}{\bar{\beta}_0^i} = \frac{\bar{\beta}_1^j}{\bar{\beta}_0^j} \quad 1 \leq g-1$$



Por [ C ] 4.3.6., se tendrá,

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.} ( \bar{\beta}_0^i \bar{\beta}_0^j, \dots, \bar{\beta}_1^i \bar{\beta}_0^j ) &= e_1^i \bar{\beta}_0^j = \\ &= \text{m.c.d.} ( \bar{\beta}_0^j \bar{\beta}_0^i, \dots, \bar{\beta}_1^j \bar{\beta}_0^i ) = e_1^j \bar{\beta}_0^i. \end{aligned}$$

Y los calculos en [ D ] 1.1.7. implican,  $v(f) = v'(f) = w_i(f)$  para  $i \gg 0$ .

II) Que  $(f_i | f) = (f_j | f) = (g-1, h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1)$ .

Si  $\{ \beta_j^{i_1} \}_{j=1}^{g_i}$  son los generadores del semigrupo de  $w_i$  y  $\{ \bar{\beta}_j^f \}_{j=1}^{g_f}$  los valores de contacto maximal de  $f$ , se tiene por [ D ] 1.1.7. que,

$$(f_i, f) = \text{mín} \{ e_{g-1}^f e_0^i \beta_g^{i_1}, e_{g-1}^i \bar{\beta}_g^f \}$$

Ahora,

$$\beta_g = (h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{g-1}+1} + \frac{1}{h_{s_{g-1}+2} + \dots}}$$

Podemos encontrar índices  $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ , tales que, el valor  $\beta_g^{i_0}$  de  $w_{i_0}$  será  $h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1$ , el valor de  $\beta_g^{i_1}$  de  $w_{i_1}$  será,

$$(h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{g-1}+1}}$$

El valor de  $\beta_g^{i_2}$  de  $w_{i_2}$  será,

$$\begin{aligned}
 & (h_{s_{g-1}} - k_{g-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{g-1}+1} + \frac{1}{h_{s_{g-1}+2}}} \\
 & \dots \qquad \dots \qquad \dots
 \end{aligned}$$

Las sucesiones,

$$\begin{aligned}
 & \beta_g^{i_0}, \beta_g^{i_2}, \beta_g^{i_4}, \dots \\
 & \beta_g^{i_1}, \beta_g^{i_3}, \beta_g^{i_5}, \dots
 \end{aligned}$$

son monótonas contiguas y definen un número real  $\beta_g$ . Un hecho análogo se produce para  $B'_g$ , con valores  $\beta_g^{i_0}, \beta_g^{i_1}, \dots$  definidos en forma similar. Los valores  $\beta'_g$  estarán en los intervalos encajados que definen los índices  $i_{2p-1} < i < i_{2p}$  para  $p = 1, 2, \dots$

Y  $v'$  estará definida en la forma siguiente:

Si  $e_0^f \beta'_g < \bar{\beta}_g^f$ , por lo indicado anteriormente, para  $i \gg 0$ ,  $e_0^f \beta_g^{i_2} < \bar{\beta}_g^f$  y se tiene,

$$e_{g-1}^f \beta_g^{i_2} < e_{g-1}^f (\bar{\beta}_g^f / e_0^f)$$

Esta desigualdad y,  $e_{g-1}^i = (e_0^i e_{g-1}^f) / e_0^f$  [ D ], permiten

concluir,  $e_{g-1}^f \beta_g^{i_2} < (e_{g-1}^i / e_0^i) \bar{\beta}_g^f$ , por lo tanto,

$$w_i(f) = \frac{(f, f_i)}{e_i^0} = e_{g-1}^f \beta_g^{i_2} \text{ y de aquí,}$$

$$v'(f) = e_{g-1}^f \beta'_g$$

Si  $e_0^f \beta'_g > \bar{\beta}_g^f$ , por lo indicado anteriormente, para  $i \gg 0$ ,

$$e_{g-1}^f e_0^i \beta_g^{i'} > e_{g-1}^i \bar{\beta}_g^f$$

y  $w_i(f) = \frac{(f, f_i)}{e_0^i} = e_{g-1}^i \bar{\beta}_g^f / e_0^i = e_{g-1}^f \bar{\beta}_g^f / e_0^f$ . En resumen,  
 $v'(f) = w_i(f)$  para  $i \gg 0$ , como se quería probar. Si son iguales  $e_{g-1}^f \bar{\beta}_g^f$

b) Probaremos que si  $f, f' \in F$ , entonces,

$$v'(ff') = v'(f) + v'(f')$$

$$v'(f + f') \geq \min \{ v'(f), v'(f') \}$$

La primera es consecuencia de la definición de  $v'$  y de las propiedades del límite.

Para mostrar la segunda, tengamos en cuenta que la función  $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por,  $(x, y) \longrightarrow \min \{ x, y \}$  es continua, por tanto como  $w_j(f), w_j(f')$  convergen, también lo hará  $\min (w_j(f), w_j(f'))$  y como,

$$\min (w_j(f), w_j(f')) \leq w_j(f + f'), \text{ pasando al límite se tendrá,}$$

$$\min (v'(f), v'(f')) \leq v'(f + f')$$

El apartado c se prueba como en el teorema 2.

#### 4. Ejemplos

a) Como en 1.5.A-D.9, sea  $R = K [ X, Y ]_{(X, Y)}$  y  $F = K ( X, Y )$ . Denotemos por  $K \langle t \rangle$  el anillo de series de potencias con coeficientes en  $K$  cuyos exponentes forman un subconjunto bien ordenado y no acotado de los racionales positivos. Si  $\mu_0: K \langle t \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}$ , a cada serie le envía el menor de sus exponentes, puede extenderse de forma trivial al cuerpo de cocientes de  $K \langle t \rangle$ , obteniéndose una valoración. Si esta se compone con la extensión a  $K ( X, Y )$  de  $O: K [ X, Y ] \longrightarrow K \langle t \rangle$ ;  $O(X) = t, O(Y) = \sum_1^\infty t^{n+\frac{1}{n}}$ , obtenemos una valoración que denotaremos  $v$  y que por construcción domina a  $R$ .

Utilizando [ Z-S ], cap VI y considerando  $\mu_0$  sobre  $K(t, O(Y))$ , el grupo de valores está generado por 1 y los exponentes de  $O(Y)$ , es por lo tanto  $\mathbb{Q}$ . Esta valoración es de tipo C y coincide, para cada elemento, con valoraciones divisoriales  $v_1$  de elementos generales:

$$x(t) = t^{l'}; y(t) = \sum_1^l t^{\frac{n^2+1}{n}} \text{ para } l' = \text{m.c.m.}(1, 2, \dots, l).$$

b) Si el anillo R es el de a), consideramos el subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$  engendrado por 1 y  $\pi$  y, definimos una valoración  $v$  de modo que,  $v(\lambda) = 0$  si  $\lambda \in K$ ;  $v(X) = 1$ ;  $v(Y) = \pi$ , es decir, si  $f = \sum c_{ij} X^i Y^j$ ,

$$v(f) = \text{mín} \{ i + \pi j / c_{ij} \neq 0 \}$$

la valoración obtenida es de tipo B y si  $f$  es analíticamente irreducible, su valoración es, o un entero menor que  $\pi$  o el número  $\pi$ .

**1.6. Expresión explícita de una valoración a partir de su desarrollo H-N.**

**1.6.E. Valoraciones divisoriales**

Sea  $v$  una valoración divisorial en las condiciones y con las notaciones 1.0.2. A continuación, explicitaremos el valor  $v(f)$  para  $f \in R$ .

Sea  $D$  el desarrollo H-N 1.3. de  $v$ , para el sistema regular de parámetros  $\{x, y\}$  de  $m$ , por 1.5.E. se tiene,

$$v(f) = \min \{ (f, g) / g \text{ es general de } v \}$$

Sustituycamos en  $D$ ,  $z_s$  por un parámetro  $t$ , que da una expresión  $x = x^*(t, U)$ ;  $y = y^*(t, U)$ . Consideremos  $x(t, U) = x^*(t, U)$ ;  $y(t, U) = y^*(t, U)$  De la definición de elemento general, las expresiones anteriores dan ecuaciones paramétricas para cada general de  $v$ . Si  $U$  se hace variar en el conjunto  $\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \}_{a_i \in K; i=0,1,\dots}$  aplicando [C], 2.3., implica:

$$v(f) = \min \text{ord}_t [ f(x(t, U), y(t, U)) ]$$

donde  $U \in \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \}_{a_i \in K; i=0,1,\dots}$

Más concretamente,  $f \in \hat{R}$  y entonces,

$$f(x^*(t, U), y^*(t, U)) = \sum_{i \geq \alpha} A_i(U) t^i$$

Y si  $A_i(U) = \sum_{j=0}^i A_{ji} U^j$  se tiene:

$v(f) = \alpha$ , si y sólo si,  $A_{0\alpha} \neq 0$ ; y  $v(f) = \alpha + \beta$ , si y sólo si, se tiene  $A_{j-k, \alpha+k} = 0$ , para  $j, k \in \{ 0, \dots, \beta-1 \}$  y  $j \geq k$  y además, alguno de los valores  $A_{\beta-k, \alpha+k}$  para  $k \in \{ 0, \dots, \beta-1 \}$  es no nulo. En resumen,

$$v(f) = \text{ord}_t [ f(x(t, U), y(t, U)) ]$$

1.6. Valoraciones A-D

Sea D el desarrollo H-N de una valoración  $v$  de tipo A o D. Sea  $\hat{h} \in \hat{R}$ , analíticamente irreducible, que sirve para calcular  $v$  como se indicó en 1.5.A.D.7. De la definición de  $h$  se observa que su desarrollo de H-N coincide con el de  $v$ , a excepción de los valores  $z_i$  que estan, naturalmente, en otro anillo y en consecuencia a partir de este desarrollo si hacemos  $z_s = t$ , se obtienen unas ecuaciones paramétricas de  $h$ ,  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ . Por tanto,  $f \in R$ ,

$$v(f) \begin{cases} (0, \text{ord}_t f(x(t), y(t))) & \text{si } f \notin (\hat{h})\hat{R} \\ (\rho, \text{ord}_t g(x(t), y(t))) & \text{si } f = h^\rho g \text{ ( en } \hat{R} \text{ )} \\ & \text{y } g \notin (\hat{h})\hat{R}, g \in \hat{R}. \end{cases}$$

en el caso D, el grupo de valores es  $Z$ , luego la primera componente es siempre  $\rho = 0$  y el valor se identifica con la segunda componente.

1.6. Valoraciones C.

Sea D ( ver 1.4.C. ) el desarrollo H-N, relativo a un sistema de parámetros  $\{ x, y \}$ , de una valoración  $v$  de tipo C. Sean  $w_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  las valoraciones divisoriales descritas en 1.5.C. y B. Y considérese la subfamilia de estas  $\{ w'_p \}_{p=0}^\infty$ , formada por aquellas cuyo desarrollo H-N en el sistema  $\{ x, y \}$  es:

$$y = a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0h_0} x^{h_0} + x^{h_0} z_1$$

$$x = z_1^{h_1} z_2$$

...

$$z_{s-1}^p = a_{s,p}^k z_s^k + \dots + a_{s,p}^{h_s} z_s^{h_s} + z_s^{h_s} z_{s+1}^*$$

para  $p = 0, 1, \dots$

Naturalmente, para cada  $f \in R$ ,  $v(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} w'_p(f)$ .

Quedando el valor  $w'_p(f)$  descrito por 1.6.E. Además, en este caso para  $p \gg 0$  se tiene,  $v(f) = w'_p(f)$ .

### 1.6. Valoraciones B

Sea  $v$  una valoración de tipo B, D su desarrollo de H-N relativo a un sistema regular de parámetros de  $m$ ,  $\{x, y\}$ , como se indica en 1.4.B.

En forma similar a 1.6.C., si  $\{w'_p\}_{p=0}^\infty$  es la subsucesión de la familia  $\{w'_j\}_{j=0}^\infty$  descrita en 1.5.C.B. cuyo desarrollo H-N es,

$$y = a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots + a_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1$$

...

$$z_{s_{g-1}} = z_{s_{g-1}+1}^{h+1} z_{s_{g-1}+2}$$

...

$$z_{s_{g-1}+p} = z_{s_{g-1}+p+1}^{h+p+1} z_{s_{g-1}+p+2}$$

Se tiene para  $f \in R$ ,

$$v(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} w'_p(f)$$

Y los valores  $w'_p(f)$  pueden obtenerse por 1.6.E del desarrollo H-N. (Tomando la normalización sobre  $Z$  adecuada de  $w'_p$ ).

**1.7. Ecuaciones paramétricas asociadas a una valoración. El algoritmo Hamburger-Noether.**

El desarrollo Hamburger-Noether para una valoración divisorial proporciona unas ecuaciones paramétricas,

$$(1.7.1.) \quad \begin{aligned} x &= x(t, U) \in K[[t, U]] \\ y &= y(t, U) \in K[[t, U]] \end{aligned}$$

siendo  $\{x, y\}$  un sistema regular de parámetros para el anillo regular  $R$ . La valoración entonces viene dada por,

$$(1.7.2.) \quad v(h) = \text{ord}_t h(x(t, U), y(t, U))$$

para  $g \in R, g \neq 0$ . Propiamente hablando, se tiene  $\hat{R} \cong K[[x, y]]$  (la selección del cuerpo de coeficientes para  $R$  y del sistema regular de parámetros determina este isomorfismo) y cada  $h \in R$  se puede identificar con el desarrollo de Taylor (es decir su imagen en  $\hat{R} \cong K[[x, y]]$ ) y  $v(h)$  es el orden en  $t$  del resultado de sustituir  $x$  por  $x(t, U)$  e  $y$  por  $y(t, U)$  en dicho desarrollo.

Las expresiones de 1.7.1. se pueden entender como unas ecuaciones paramétricas con coeficientes en  $K[[U]] \subset K((U))$  y parámetro  $t$ , para la valoración divisorial. Se tiene un homomorfismo inyectivo, al que llamaremos de parametrización,

$$p: K[[x, y]] \longrightarrow K((U))[[t]]$$

dado por 1.7.1. que es obviamente inyectivo, ya que, en caso contrario  $\text{Ker } p$  sería un ideal primo de  $K[[x, y]]$  generado por un elemento  $f$  cuyo desarrollo de H-N definido sobre  $K$  daría lugar a 1.7.1. en el que  $U$  aparece explícitamente. La valoración divisorial se entiende como la restricción al cuerpo de fracciones de  $R$  del  $t$ -orden en  $K((U))[[t]]$ .



Asimismo, la única extensión de  $\nu$  a  $\hat{R}$  es la restricción al cuerpo de fracciones de  $\hat{R} \cong K[[x,y]]$  del t-orden de  $K((U))[[t]]$ .

A continuación extendemos las nociones anteriores para los otros tipos de valoraciones.

### 1.7.3.

Las valoraciones de tipo A-D tienen como desarrollo H-N el desarrollo de una curva algebroide irreducible sobre  $K$ . Así, las ecuaciones paramétricas asociadas al desarrollo H-N de esta curva algebroide determinan un homomorfismo de parametrización,

$$(1.7.3.1.) \quad p: K[[x,y]] \longrightarrow [[t]]; \quad p(x) = x(t), p(y) = y(t).$$

cuyo nucleo es el ideal principal generado por una ecuación  $f$  para la curva. Ahora si  $p$  se restringe a  $R$  ( a través de la identificación  $\hat{R} = K[[x,y]]$  ), se tiene el morfismo:

$$p|_R : R \longrightarrow K[[t]]$$

cuyo nucleo es un ideal primo de  $R$  distinto del maximal y por tanto, es de la forma  $gR$  con  $g = 0$  o  $g \neq 0$  un elemento irreducible de  $R$ . El teorema 7 de 1.5. clarifica cuál es el tipo de valoración: Si  $g = 0$  el tipo es D, si  $g\hat{R} \neq f\hat{R}$ ,  $g \neq 0$  el tipo es A-2 y si  $g\hat{R} = f\hat{R}$  el tipo es A-1.

Para el tipo D,  $p$  es inyectiva y podemos decir que  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  son unas ecuaciones paramétricas para D, en el sentido de que  $\nu$  está dada por,

$$(1.7.3.2.) \quad \nu(h) = \text{ord}_t h(x(t), y(t)). \quad h \in R$$

Para el tipo A,  $p$  no es inyectiva y la valoración que es de rango dos no será meramente la restricción del t-orden. Como  $R$  es un D.F.U. y  $g \in R$  es irreducible,  $\nu(h)$  será el par dado por el orden g-ádico de  $h$  y el t-orden de  $h$ , es decir,

$$v(h) \begin{cases} (\text{ord}_g h, \text{ord}_t \bar{h}) \text{ si } g \nmid h & h = g^a \bar{h} \\ (0, \text{ord}_t(x(t), y(t))) \text{ si } g \mid h \end{cases} \quad h \in R$$

También, en este caso A, a  $x(t)$ ,  $y(t)$  se les puede llamar ecuaciones paramétricas para la valoración. La siguiente proposición muestra como el orden g-ádico se puede determinar también en términos de las ecuaciones paramétricas, al menos si la característica del cuerpo base es 0.

### 1.7.3.3. Proposición

En las condiciones 1.7.3. si  $K$  tiene característica 0, entonces el orden g-ádico de  $h \in R$ ,  $h \neq 0$ , viene dado por,

$$\text{ord}_g h = \frac{\text{ord}_f h}{\text{ord}_f g}$$

donde para cada serie de potencias  $\hat{R}$ ,

$$\text{ord}_f \hat{h} = \max \left\{ m \in \mathbb{N} / (D^\alpha \hat{h})(x(t), y(t)) = 0, \text{ para todo } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \right. \\ \left. \text{con } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 < m \right\}$$

siendo  $D^\alpha$  la derivada parcial relativa al multiíndice  $\alpha$ .

### Demostración

Viendo  $h$  como elemento de  $\hat{R}$  se tendrá  $h = f^n h'$ , con  $f \nmid h'$ . Si  $|\alpha| < n$ , entonces se tiene,

$$(D^\alpha h)(x(t), y(t)) = 0,$$

puesto que,  $f \mid D^\alpha h$ . Si  $|\alpha| = n$ , entonces,

$$(D^\alpha h)(x(t), y(t)) = n! \left( (f_x(x(t), y(t)))^{\alpha_1} (f_y(x(t), y(t)))^{\alpha_2} h'(x(t), y(t)) \right).$$

Ahora bien, como o bien  $f_x \neq 0$  o bien  $f_y \neq 0$ , se tiene que para  $\alpha = (n, 0)$  o para  $\alpha = (0, n)$ ,  $(D^\alpha h)(x(t), y(t)) \neq 0$ .

Esto muestra que, el orden f-ádico de h está dado por el máximo orden hasta el cual las derivadas anteriores se anulan sobre la curva. Ahora está claro que  $\text{ord}_g h = \text{ord}_f h$ , de donde se sigue la proposición.

#### 1.7.4.

Para discutir las parametrizaciones correspondientes a los tipos B y C necesitamos introducir series de potencias con exponentes, en general, números reales. Consideramos expresiones formales con coeficientes en el cuerpo K del tipo,

$$(1.7.4.1.) \quad \sum_{r \in \mathbb{R}} a_r t^r$$

donde  $a_r \in K$  para todo  $r$  y  $a_r = 0$  excepto para una cantidad finita de índices  $r_1 < \dots < r_N$ ,  $0 \leq r_1$ , o infinita  $r_1 < \dots < r_n < \dots$ ,  $0 \leq r_1$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ . Tales series forman una K-álgebra con las operaciones de anillo dadas en la forma obvia, que se denotará por  $K \langle t \rangle$ . Las series con  $a_0 \neq 0$  son exactamente las no unidades de forma que se trata de un anillo local no noetheriano. El cuerpo de cocientes de  $K \langle t \rangle$  consiste en las series de Laurent de este tipo, es decir, expresiones 1.7.4.1. con soporte  $r_1 < \dots < r_n < \dots$  finito o infinito tendiendo a infinito pero sin la limitación  $r_1 \geq 0$ . El orden respecto de  $t$  es, obviamente, una valoración sobre este cuerpo.

En el caso de valoraciones del tipo B, tenemos unas ecuaciones paramétricas asociadas a un sistema regular de parámetros de R del tipo,

$$(1.7.4.2.) \quad \begin{aligned} x &= x(t) \in K \langle t \rangle \\ y &= y(t) \in K \langle t \rangle \end{aligned}$$

de tal forma que  $v(h) = \text{ord}_t(h(x(t), y(t)))$  ( la sustitución en h es posible porque  $x(t), y(t)$  no son unidades de  $K \langle t \rangle$  ). El homomorfismo de parametrización,

$$(1.7.4.3.) \quad p: \hat{R} = K \left[ \left[ x, y \right] \right] \longrightarrow K \langle t \rangle$$

dado por 1.7.4.2. es inyectivo y una cierta normalización para  $\nu$  se obtiene por restricción del t-orden via  $p|$ .

La construcción de las ecuaciones 1.7.4.2. se puede conseguir a partir del desarrollo de Hamburger-Noether. En efecto, los elementos  $z_j$  que aparecen en el desarrollo son elementos del cuerpo de fracciones de  $R$  y a partir de la aparición de  $z_{s+1}^R$  los valores  $\nu(z_j)$ ,  $j \geq s$ , definen una fracción continua infinita,

$$h_s + \frac{1}{h_{s+1} + \frac{1}{\ddots}}$$

fracción que define un número real irracional  $\gamma$  con  $[\gamma] = h_s$ . Si escribimos  $z_s = t^\gamma$ ,  $z_{s+1} = t$ , entonces, efectuando por recurrencia inversa las sustituciones indicadas en las primeras filas del desarrollo se obtienen las series  $x = x(t)$ ,  $y = y(t) \in K \langle t \rangle$ , que dan lugar a las ecuaciones paramétricas. Está claro que  $p|_R$  determina la valoración de partida, pues la sucesión simple de puntos infinitamente próximos que define dicha restricción es la misma que la de  $\nu$ .

#### 1.7.4.4.

Finalmente, también las valoraciones de tipo C tienen unas ecuaciones paramétricas en  $K \langle t \rangle$  con homomorfismo de parametrización inyectivo e idéntico comportamiento que los casos anteriores. Haremos la discusión en el caso en que la característica del cuerpo es cero.

Si en el desarrollo H-N de una valoración de tipo C separamos para cada  $r$  todas las filas hasta la  $s_r$ -ésima incluida, y si eliminamos el término  $z_{s_r}^r z_{s_r+1}^r$ , nos queda el desarrollo H-N de una curva algebroide irreducible de género  $r$ , a la que podemos llamar curva  $C_r$  de contacto maximal de género  $r$  con la valoración, en analogía con el caso de curvas.

Así tendremos contacto maximal de género  $r$  para  $0 \leq r < \infty$ . Los desarrollos de Puiseux para las curvas  $C_r$  serán del tipo,

$$y_r = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ir} x^{\frac{i}{n_r}}$$

donde siguiendo la terminología de  $[C]$  en la expresión anterior los exponentes característicos son exactamente  $r+1/n_r, \beta_0(r), \beta_1(r), \dots, \beta_r(r)$ .

Teniendo en cuenta la relación entre un desarrollo de Puiseux y el correspondiente de H-N, se tiene que, los números racionales  $\beta_i(r) / n_r$   $i \leq r$  no dependen de  $r$  y pueden ser denotados por  $\beta_i$ . Así tenemos la sucesión de números racionales  $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_i < \dots$ . Más aún, los coeficientes  $a_{ir}$  se pueden ir tomando sucesivamente, tal que, son independientes de  $r$  y así queda definida una serie en  $K \langle t \rangle$  que reajustando la notación la escribiremos como

$$\sum_{r \in A} a_r t^r$$

donde  $A = \{ r_1 < r_2 < \dots \}$ ,  $r_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  y la sucesión de denominadores de los  $r_n$ , en su expresión como cociente de elementos primos entre si, no acotada. Las ecuaciones paramétricas son en este caso,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sum_{r \in A} a_r t^r \in K \langle t \rangle \end{cases}$$

### 1.7.5.

Las ecuaciones paramétricas representan la forma en la que en la practica aparecen las valoraciones. Así, en general, si  $K'$  es un cuerpo extensión de  $K$ , y si se tiene,

$$(1.7.5.1) \quad \begin{aligned} x &= x(t) \in K' \langle t \rangle \\ y &= y(t) \in K' \langle t \rangle \end{aligned}$$

con  $x(t)$  e  $y(t)$  no unidades en  $K' \langle t \rangle$  y alguna de ellas no nula, entonces se tiene el homomorfismo de parametrización,

$$p: K[[x, y]] \longrightarrow K' \langle t \rangle$$

Y  $\bar{v}(h) = \text{ord}_t(h(x(t), y(t)))$  determina una valoración sobre el cuerpo de fracciones de  $K[[x, y]]$  salvo el caso en que  $\text{Ker } p \neq 0$ . En este caso si  $f$  es un generador de  $\text{Ker } p$ , se tiene que,  $v(h) = (\text{ord}_f h, \bar{v}(h))$  es una valoración de tipo A sobre  $K[[x, y]]$ .

La restricción de  $\bar{v}$  y  $v$  a  $R$  da lugar, obviamente, a una valoración sobre el cuerpo de fracciones de  $R$ , aunque en el caso en que  $u f \notin \mathfrak{R}$  ( henselianizado ) para toda unidad  $u$ ,  $\bar{v}|_R$  es, de hecho, una valoración sobre  $R$ .

#### 1.7.6. El algoritmo de Hamburger-Noether

Si se tiene una valoración dada por 1.7.5.1., entonces, por divisiones sucesivas es posible encontrar el desarrollo H-N de la valoración siguiendo el mismo planteamiento que en [ C ], cap.II.

El algoritmo ( con infinitos pasos ) para encontrar el desarrollo consiste en los siguientes pasos:

1) Una vez seleccionado uno de los dos parámetros  $x$  o  $y$ , sea por ejemplo  $x$ , con orden menor o igual que el otro, se divide  $y$  entre  $x$  extrayendo el término independiente al que se denomina  $a_{01}$  y se escribe

$$\frac{y}{x} = a_{01} + y_1.$$

Si  $a_{01} \notin K$ , entonces la valoración es divisorial ( E ) y poniendo  $y_1 = U$ , se ha obtenido el desarrollo. Si  $a_{01} \in K$  se continua con el par de ecuaciones  $\{ x(t), y_1(t) \}$  existiendo dos posibilidades,

1.1)  $\text{ord}_t y_1 \geq \text{ord}_t x$ , en cuyo caso se continua dividiendo por  $x$ .

1.2)  $\text{ord}_t y_1 < \text{ord}_t x$ , entonces se escribe  $z_1 = y_1$ , se deja

$$y = a_{01} x + x z_1$$

como primera fila en el desarrollo y se divide, para buscar la segunda fila, entre  $z_1$ .

1.3) Por iteración de 1.1, o bien se llega a 1.2, o bien se continua indefinidamente. En el segundo caso se obtiene un desarrollo del tipo,

$$y = a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0n} x^n + \dots \quad a_{0i} \in K$$

Si se llega a 1.2, entonces, se tiene una primera fila,

$$y = a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0h} x^h + x^h z_1 \quad a_{0i} \in K$$

Si algún coeficiente  $a_{0i}$  no pertenece a  $K$  entonces se trata se una valoración divisorial y se pone  $U = y_i$  para el correspondiente índice.

2) Con el par  $\{ x(t), z_1(t) \}$ ;  $\text{ord}_t z_1 < \text{ord}_t x$  se continua en la misma linea. Si  $\text{ord}_t x / \text{ord}_t z_1 \notin \mathbb{Q}$ , entonces la reiteración del algoritmo consiste, esencialmente, en encontrar el desarrollo infinito en fracción continua del número irracional en cuestión. En este caso la valoración es de tipo B.

Si  $\text{ord}_t x / \text{ord}_t z_1 \in \mathbb{Q}$ , el proceso 1) aplicado a esta situación nos llevará a las alternativas 1.3. Si algún coeficiente no está en  $K$  la valoración es divisorial, si el proceso es infinito entonces la valoración es de tipo A y si es finito se obtiene  $z_2$  y se continua.

3) Con el par  $\{ z_1(t), z_2(t) \}$  se itera el proceso. Si nunca aparece el fin del algoritmo que da lugar a una valoración de tipos A, B o E, entonces es que la valoración es de tipo C y se obtendrían así infinitas filas con coeficientes en  $K$  en el desarrollo y una sucesión infinita de índices  $s_0 < s_1 < \dots$  con  $a_{s_i k_i} \neq 0$  para algún  $k_i$ .

### 1.7.7. Teorema

El algoritmo anterior proporciona, en efecto, el desarrollo Hamburger-Noether de la valoración  $\tilde{v}$  o  $v$  asociada a las ecuaciones paramétricas.

### Demostración

Es obvia si se va paso a paso en el algoritmo y en el desarrollo de la valoración. En el primer paso la condición  $\text{ord}_t x \leq \text{ord}_t y$  equivale, a que  $x = 0$  es transversal a la dirección que indica el centro de la valoración en el primer entorno infinitesimal y que, de hecho,  $\{ x, y - a_{01} x \}$  son un sistema regular de parámetros para  $\mathcal{O}_{X_1, P_1}$  en dicho centro. En los demás pasos la situación es análoga y el teorema se sigue por recurrencia.

### 1.7.8. Nota

De una manera unificada podemos decir que toda valoración tiene unas ecuaciones paramétricas de " Puiseux "

$$y = \sum_{r \in \mathbb{R}, r > 0} a_r x^r \in F \langle t \rangle \quad F = K( a_r / r \in \mathbb{R} )$$

donde si  $S = \text{sop}(y) = \{ r / a_r > 0 \}$ , se tiene,

Tipos A y D,  $F = K$ ,  $S \subset \mathbb{Q}$  y  $\exists n \in \mathbb{N}$  con  $nS \subset \mathbb{N}$ .

Tipo B,  $F = K$ ,  $S$  no incluido en  $\mathbb{Q}$ .

Tipo C,  $F = K$ ,  $S \subset \mathbb{Q}$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $nS$  no incluido en  $\mathbb{N}$ .

Tipo E,  $F \neq K$ ,  $S \subset \mathbb{Q}$  y  $\exists n \in \mathbb{N}$  con  $nS \subset \mathbb{N}$ .

En el caso E, el desarrollo de Puiseux se puede conseguir a partir del desarrollo H-N mediante las relaciones existentes entre ambos tipos de desarrollos ( ver [ C ] ). Con precisión, si se tiene un desarrollo H-N con la forma que sigue,



$$\begin{array}{c}
\frac{h = 1}{\frac{h_1}{\frac{h_2}{\vdots \\ \frac{k_1}{h_{s_1} + 1} \left| \frac{h_s - k_1 = 1}{1} \right|}} \\
\vdots \\
\frac{k_g}{\frac{h_s - k_g = 1}{g}} \left| \frac{h_s - k_g = 1}{g} \right| \text{X}
\end{array}
\tag{1.7.8.1}$$

entonces para el correspondiente desarrollo de Puiseux,

$$(1.7.8.2.) \quad y = \sum_{i=n}^{\infty} c_i x^{i/n}$$

se tiene,

$$\{\beta_1, \dots, \beta_g\} \subseteq \text{sop}(y) = S \subseteq \bigcup_{i=0}^{g-1} \{\beta_i, \beta_i + e_i, \dots, \beta_i + l_i e_i\} \cup \{\beta_g, \beta_{g+1}, \dots\} = S^*$$

verificandose además  $\beta_i + l_i e_i < \beta_{i+1}$ . Entonces, existe una correspondencia biunívoca entre los puntos en 1.7.8.1. cubiertos por un doble trazo y los elementos de  $S^*$ , respetando el orden natural en ambos casos. Así el punto marcado X corresponderá a  $\beta_g + l_g$ . En cuanto a los coeficientes del desarrollo H-N y los  $c_i$  se verifica que el coeficiente  $c_i$  que ocupa el lugar q-ésimo en  $S^*$  es función solamente de los q primeros coeficientes cubiertos con doble trazo y viceversa.

En particular, si el desarrollo H-N de una valoración divisorial tiene forma 1.7.8.1. y termina en el punto marcado con X, entonces, el desarrollo de Puiseux para la valoración asociada es,

$$\left. \begin{aligned}
 y &= \sum_{i \in s^*, i < \beta_g + 1} c_i t^i + U t^{\beta_g + 1} \in K((U))[[t]] \\
 x &= t^n
 \end{aligned} \right\}$$

## 1.8. La serie de Poincaré asociada a valoraciones divisoriales.

En este párrafo, calcularemos la serie de Poincaré del graduado asociado a una valoración divisorial que domina a  $R$ , mostrando que la información en la serie de Poincaré contiene exactamente, la información sobre los invariantes de dicha valoración, a saber, los valores  $\beta'_0, \dots, \beta'_{g+1}$ . Este resultado puede ser generalizado al caso de conjuntos finitos de valoraciones divisoriales ( que seria de utilidad en el cap. II para dar otras caracterizaciones numéricas de la que llamaremos equivalencia discreta ), pero omitimos la construcción por ser complicada la discusión del análogo a " serie de Poincaré " para familias de valoraciones, complicada en relación con el objetivo de caracterizar la equivalencia discreta por medio de invariantes "discretos". El caso de una sola valoración, sin embargo, es, a nuestro juicio, ilustrativo de la situación y una aportación, en si, al álgebra conmutativa.

### 1.8.1. Definición

Sea  $v$  una valoración divisorial en las condiciones 1.0., se consideran los ideales de  $R$ ,

$$P_\alpha = \{ f \in R / v(f) \geq \alpha \}$$

$$P_{\alpha^+} = \{ f \in R / v(f) > \alpha \}$$

para cada  $\alpha \in \phi^+$ .

Se llamará álgebra asociada a la valoración  $v$ , a la  $K$ -álgebra graduada siguiente:

$$\text{gr}_v R = \bigoplus_{\alpha \in \phi^+} \frac{P_\alpha}{P_{\alpha^+}}$$

### 1.8.2. Proposición.

Sea  $v$  divisorial y  $\{ Q_i \}_{i \in I}$ ,  $I$  familia de índices numerable o finita, una sucesión de elementos de  $m$ . Y sea  $P'_\alpha$  el ideal generado por,

$$\left\{ \prod_{j \in I_0} Q_j^{\gamma_j} / \gamma_j \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \sum_{j \in I} \gamma_j v(Q_j) \geq \alpha \right\}$$

$I_0$  finito

$\{ Q_i \}_{i \in I}$  es una sucesión generatriz de  $\nu$ , si y sólo si, verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

i) Cada  $\nu$ -ideal de  $R$  ( ideales de  $R$  contracción de ideales del anillo  $R_\nu$  ),  $\alpha$ , está generado por el conjunto,

$$\left\{ \prod_{j \in I_0} Q_j^{\gamma_j} / \gamma_j \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \sum_{j \in I} \gamma_j \nu(Q_j) \geq \nu(\alpha) \right\}$$

$I_0$  finito

siendo  $\nu(\alpha) = \min \{ \nu(x) / x \in \alpha \}$ .

ii) Para cada  $\alpha \in \phi^+$ ,  $P'_\alpha = P_\alpha$ .

### Demostración

Es suficiente demostrar que todo  $\nu$ -ideal  $\alpha$  de  $R$  es de la forma  $P_\alpha$  para algún  $\alpha \in \phi^+$ . Como  $R$  es noetheriano,  $\alpha = \langle h_1, \dots, h_r \rangle$  y sea  $\alpha = \nu(\alpha) = \min \{ \nu(h_i) \} \in \phi^+$ , vamos a demostrar que  $\alpha = P_\alpha$ .

1)  $\alpha \subseteq P_\alpha$ , pues si  $a \in \alpha$ ,  $\nu(a) \geq \alpha$ , luego,  $a \in P_\alpha$ .

2)  $P_\alpha \subseteq \alpha$ , si  $x \in P_\alpha$   $\nu(x) \geq \nu(\alpha)$ , es decir, existe  $j_0 \in \{ 1, \dots, r \}$ , tal que,  $\nu(h_{j_0}) \leq \nu(x)$ , como  $\alpha$  es un  $\nu$ -ideal,  $\alpha = \mathfrak{h} \cap R$ , con  $\mathfrak{h}$  ideal de  $R_\nu$ , ahora,

$x = h_{j_0} \frac{x}{h_{j_0}}$ , pues  $\frac{x}{h_{j_0}} \in R_\nu$  y  $h_{j_0} \in \mathfrak{h}$ , luego si  $\mathfrak{h}$  es un ideal,  $x \in \mathfrak{h}$ ,

$x \in R$ , por tanto,  $x \in \alpha$ .

### 1.8.3. Proposición

Sea  $\nu$  una valoración divisorial normalizada sobre  $Z$  (si  $\nu'$  es la normalización habitual con  $\nu'(m) = 1$ , aquí  $\nu = \nu' e_0$  y  $\bar{\beta}_i = \beta'_i \cdot e_0$ ),  $\{ Q_i \}_{i \in I}$  es una sucesión generatriz, si y sólo si, las imágenes de  $Q_i$  en  $gr_\nu R$  generan dicha  $K$ -álgebra.

### Demostración

Supongamos que  $\{ Q_i \}_{i \in I}$  es una sucesión generatriz de  $\nu$ .

$\bar{Q}_i \in \text{gr}_0 R$  es un elemento homogéneo y  $\bar{Q}_i = Q_i + P_{\beta_i}^+$ , probamos a continuación que dichos elementos generan la K-álgebra  $\text{gr}_0 R$  y bastará con probar que lo hacen con sus elementos homogéneos.

Sea  $f + P_{\alpha^+} \in \text{gr}_0 R$ , con  $f \in P_{\alpha}$  y  $f \notin P_{\alpha^+}$ , por ser  $\{ Q_i \}$  generatriz  $P_{\alpha} = P'_{\alpha}$  y si  $M = \{ (\gamma_0, \dots, \gamma_k) / k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^k \gamma_j \bar{\beta}_j \geq \alpha \}$  como  $f \in P_{\alpha} = P'_{\alpha}$  se tiene,

$$f = \sum_{\gamma \in M_0 \subseteq M} A_{\gamma} \prod Q_i^{\gamma_i}$$

ahora,  $f + P_{\alpha^+} = \sum_{\gamma \in M_0 \subseteq M} A_{\gamma} \prod Q_i^{\gamma_i} + P_{\alpha^+}$  y mediante esta operación desaparecen los  $\prod Q_i^{\gamma_i}$  con  $\sum \gamma_j \bar{\beta}_j > \alpha$ , y como en  $\text{gr}_0 R$ ,

$$(Q_i + P_{\beta_i}^+) (Q_j + P_{\beta_j}^+) = Q_i Q_j + P_{(\beta_i + \beta_j)^+} \quad y$$

$$(Q_i + P_{\beta_i}^+)^{\gamma_i} = Q_i^{\gamma_i} + P_{(\gamma_i \beta_i)^+}, \text{ se tiene que:}$$

$$f + P_{\alpha^+} = \sum_{\gamma \in M' \subseteq M} A_{\gamma} \prod Q_i^{\gamma_i} \text{ con } M' = \{ \gamma \in M_0 / \sum_{j=0}^k \gamma_j \bar{\beta}_j = \alpha \}.$$

Recíprocamente, supongase que  $\bar{Q}_i = Q_i + P_{\beta_i}^+$  y que estos elementos generan  $\text{gr}_0 R$ . Probamos que si  $\alpha \in \phi^+$ ,  $P_{\alpha} = P'_{\alpha}$ .

Es trivial que,  $P'_{\alpha} \subseteq P_{\alpha}$ .

Probamos a continuación que  $P_{\alpha} \subseteq P'_{\alpha}$ . Anotar que si  $\alpha, \beta \in \phi^+$  y  $\alpha < \beta$ , entonces,  $P'_{\beta} \subseteq P'_{\alpha}$  y  $P_{\beta} \subseteq P_{\alpha}$ .

Sea  $f \in P_{\alpha}$  y  $v(f) = \beta_0 \geq \alpha$ , luego  $f \in P_{\beta_0}$  y  $f + P_{\beta_0}^+ \in \text{gr}_0 R$ ,

homogéneo, por hipótesis  $f + P_{\beta_0}^+ = \sum_{\gamma \in M' \subseteq M} A_{\gamma} \prod Q_i^{\gamma_i}$  para cierto  $M'$  y  $f - \sum_{\gamma \in M' \subseteq M} A_{\gamma} \prod Q_i^{\gamma_i} \in P_{\beta_0}^+$ , y obviamente,  $f \in P'_{\beta_0} + P_{\beta_0}^+$ , pudiendose escribir para cierto  $f_0 \in P'_{\beta_0}$ ,  $f + f_0 \in P_{\beta_0}^+$ , por el mismo razonamiento para  $\beta_1 > \beta_0$ ,  $f + f_0 \in P'_{\beta_0} + P_{\beta_1}^+$ .

Iterando este procedimiento, existen  $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_i < \dots$ , con  $\beta_i \in \phi^+$ , tales que,  $f \in P'_{\beta_0} + P_{\beta_i}$  para cada  $i$ , luego

$$f \in \bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + P_{\beta_i})$$

En primer lugar, probemos que  $\bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + P_{\beta_i}) = \bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + m^i)$ , porque como  $v$  es divisorial, posee una sucesión generatriz finita  $\{G_i\}_{i \in I}$  y si  $f \in P_{\beta}$  ( $\beta \in \phi^+$ , cualquiera) entonces,

$$f = \sum_{\gamma \in M_0 \subseteq M} A_{\gamma} \prod G_i^{\gamma_i}$$

con  $M = \{ (\gamma_0, \dots, \gamma_k) / k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^k \gamma_j \bar{\beta}_j \geq \beta \}$ .

Si  $\mu_{\beta} = \min \{ \sum_{j=0}^k \gamma_j / (\gamma_0, \dots, \gamma_k) \in M \}$ , se tiene que,  $f \in m^{\mu_{\beta}}$  y además si  $\beta' > \beta$ ,  $\mu^{\beta'} > \mu^{\beta}$ . Luego,

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + P_{\beta_i}) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + m^i)$$

La otra contención es simple, pues  $R$  es noetheriano y  $P_{\beta}$  es  $m$ -primario para cualquier  $\beta$ .

Para acabar, sea  $\frac{R}{P'_{\beta_0}}$  y  $m + P'_{\beta_0} = \bar{m}$ , pondremos en este anillo

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + m^i) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{m}^i = \bar{0} = P'_{\beta_0}, \text{ por ser noetheriano, luego,}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (P'_{\beta_0} + P_{\beta_i}) = P'_{\beta_0} \text{ y } f \in P'_{\beta_0} \subseteq P'_{\alpha}.$$

#### 1.8.4. Proposición

Sea  $\nu$  divisorial normalizada como en 1.8.3., entonces se tiene:

a)  $\text{gr}_{\nu} R = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} P_{\alpha} / P_{\alpha^+}$ .

b)  $\dim P_{\alpha} / P_{\alpha^+} < \infty \cdot \forall \alpha \in \mathbb{N}$ .

c) Si  $r + 1$  es el número de elementos de una sucesión generatriz para  $\nu$ , entonces, a  $S = K [ X_0, \dots, X_r ]$  ( el anillo de polinómios con coeficientes en  $K$  y  $r+1$  variables ), se le puede dotar de una estructura de  $K$ -álgebra graduada, tal que, existe un epimorfismo de  $K$ -álgebras graduadas de grado cero entre  $S$  y  $\text{gr}_{\nu} R$ .

#### Demostración

a) Es suficiente demostrar que si  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \notin \phi^+$ ,  $P_{\alpha} / P_{\alpha^+} = 0$ . Si  $\alpha \notin \phi^+$ , no existe  $f \in R$  con  $\nu(f) = \alpha$ , luego, si  $h \in P_{\alpha}$  se tiene  $\nu(h) > \alpha$  y  $h \in P_{\alpha^+}$ , es decir  $P_{\alpha} \subseteq P_{\alpha^+}$ , luego,  $P_{\alpha} / P_{\alpha^+} = 0$ .

También es cierto el recíproco, pues si  $P_{\alpha} / P_{\alpha^+} = 0$ , se tiene,  $P_{\alpha} \subseteq P_{\alpha^+}$  y si  $\alpha \in \phi^+$  esto indica que existe  $f \in R$  con  $\nu(f) = \alpha$ , por lo tanto,  $f \in P_{\alpha}$  y  $f \notin P_{\alpha^+}$ , absurdo.

b) Por ser  $R$  noetheriano,  $P_{\alpha}$  es finitamente generado como  $R$ -módulo y como la valoración  $\nu$  está centrada en el ideal maximal  $m$  de  $R$ , se tiene,  $mP_{\alpha} \subseteq P_{\alpha^+}$ . Se tiene un epimorfismo de  $K$ -espacios vectoriales,

$$P_{\alpha} / mP_{\alpha} \longrightarrow P_{\alpha} / P_{\alpha^+}$$

y  $\dim_K P_{\alpha} / mP_{\alpha} < \infty$ , de donde,  $\dim_K P_{\alpha} / P_{\alpha^+} < \infty$ .

c) Sea  $\{ Q_i \}_{0 \leq i \leq r}$  una sucesión generatriz de  $\nu$ . Está claro que  $\text{gr}_{\nu} R = K [ \bar{Q}_0, \dots, \bar{Q}_r ]$ , siendo  $\bar{Q}_i = Q_i + P_{\beta_i^+} \in \text{gr}_{\nu} R$ , puesto que,  $\nu(Q_i) = \bar{\beta}_i \in \mathbb{Z}$ .

Considérese el anillo  $K [ X_0, \dots, X_r ]$ , graduado del modo siguiente,  $S = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} S_\alpha$  siendo  $S_\alpha$  el subespacio vectorial de  $S$  generado por el conjunto,

$$\left\{ \prod_{i=0}^r X_i^{v_i} / \sum_{i=0}^r v_i \bar{\beta}_i = \alpha \right\}$$

Esto permite establecer un epimorfismo  $\psi$  de  $K$ -álgebras graduadas de grado cero,

$$\psi : S \longrightarrow \text{gr}_\nu R$$

dado por  $\psi ( X_i ) = \bar{Q}_i$ ,  $0 \leq i \leq r$ . Si  $J = \text{Ker } \psi$ ,  $J$  es un ideal de  $S$  homogéneo,  $J = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} J_\alpha$ ,  $S_\alpha$  y  $J_\alpha$  para  $\alpha \geq 1$  son  $K$ -espacios vectoriales ligados por la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow J_\alpha \longrightarrow S_\alpha \longrightarrow P_\alpha / P_{\alpha^+} \longrightarrow 0$$

Por tanto,  $S_\alpha / J_\alpha \cong P_\alpha / P_{\alpha^+}$  y  $\dim_K S_\alpha / J_\alpha = \dim_K P_\alpha / P_{\alpha^+}$ .

### 1.8.5. Definición

Dada una valoración divisorial  $\nu$  normalizada como antes, llamaremos serie de Poincaré de  $\text{gr}_\nu R$ , a la serie de potencias en una variable  $t$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ , siguiente:

$$H_{\text{gr}_\nu R} ( t ) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \dim_K ( P_\alpha / P_{\alpha^+} ) t^\alpha$$

Para cada valor real  $r \in \mathbb{N}$ , tal que, exista una sucesión generatriz de  $\nu$  con  $r + 1$  elementos, en particular, para el mínimo posible  $r_0$  podemos establecer con las notaciones 1.8.4. la sucesión exacta de graduados,

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow S \xrightarrow{\psi} \text{gr}_\nu R \longrightarrow 0$$

que permite expresar la serie de Poincaré de  $\text{gr}_\nu R$  en función de las de los graduados  $J$  y  $S$ ,

$$H_{\text{gr}_\nu R} ( t ) = H_S ( t ) - H_J ( t )$$



En la siguiente proposición, evaluamos la serie de Poincaré de  $S$ , lo que convierte el cálculo de  $H_{\text{gr}_V R}(t)$  en la evaluación de  $H_J(t)$ .

**Proposición 1.8.6.**

Si  $r_0$  es como en 1.8.5., se tiene que,

$$H_S(t) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{r_0} (1 - t^{\tilde{\beta}_i})}$$

**Demostración**

En primer lugar, todas las series de Poincaré mencionadas arriba son funciones racionales en  $t$  y tienen la forma  $f(t) / \prod_{i=1}^s (1 - t^{n_i})$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ;  $n_i, s \geq 1$ , con  $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ .

Sea  $S = K[X_0, \dots, X_{r_0}]$  y sean  $Y_0, \dots, Y_{r_0}$  nuevas variables independientes entre si e independientes de  $X_0, \dots, X_{r_0}$ . Sea  $B$  el

anillo graduado  $B = K[Y_0^{\tilde{\beta}_0}, \dots, Y_{r_0}^{\tilde{\beta}_{r_0}}]$  con la graduación inducida por la natural de  $K[Y_0, \dots, Y_{r_0}]$ , entonces:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & B \\ X_i & \longrightarrow & Y_i^{\tilde{\beta}_i} \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos graduados, y la serie de Poincaré de  $B$  y por lo tanto la de  $S$  es,

$$H_S(t) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{r_0} (1 - t^{\tilde{\beta}_i})}$$

1.8.7. Proposición

Sea  $v$  una valoración como antes, y con las mismas notaciones,  $e_i = \text{m.c.d.}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_i)$ ;  $i = 0, \dots, g+1$  y  $N_i = \frac{e_i - 1}{e_i}$ . Sea 1.3.1,

el desarrollo H-N de  $v$ . Entonces:

Si  $h_s \cdot k_g \neq 0$ ,

$$H_{gr_v R}(t) = \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_0}} \prod_{i=1}^g \frac{1-t^{N_i \bar{\beta}_i}}{1-t^{\bar{\beta}_i}} \cdot \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_{g+1}}}$$

Si  $h_s \cdot k_g = 0$ ,

$$H_{gr_v R}(t) = \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_0}} \prod_{i=1}^{g-1} \frac{1-t^{N_i \bar{\beta}_i}}{1-t^{\bar{\beta}_i}} \cdot \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_g}}$$

Demostración

Establezcamos el homomorfismo de  $K$ -espacios vectoriales siguiente, para cada  $\alpha \in \phi^+$ ,

$$\gamma_\alpha: P_\alpha \longrightarrow K [ U ]$$

definido así, si  $f \in P_\alpha$  y  $f(x^*(t,U), y^*(t,U)) = \sum_{i \geq \beta} A_i(U) t^i$  pondremos,

$$\gamma_\alpha(f) = \sum_{\substack{i+j=\alpha \\ A_{ji} \neq 0}} A_{ji} U^j$$

Recordando 1.6.E si  $v(f) = \alpha$ , entonces,  $\gamma_\alpha(f) \neq 0$  y si  $v(f) > \alpha$ ,  $\gamma_\alpha(f) = 0$ . Luego,  $\text{Ker } \gamma_\alpha = P_{\alpha^+}$  y podemos construir,

$$\bar{\gamma}_\alpha: P_\alpha / P_{\alpha^+} \longrightarrow K [ U ]$$

que es un monomorfismo de espacios vectoriales.

Sea  $\{ Q_i \}_{0 \leq i \leq g+1}$  una sucesión generatriz de  $\mathfrak{v}$ , que será minimal cuando  $h_s \cdot k_g = 0$  ( ver [ S-1 ] ). Sea,

$$\gamma_{\bar{\beta}_i} ( Q_i ) = A_i ( U ) \in K [ U ] \text{ y } Q_i = Q_i + P_{\bar{\beta}_i} \in \text{gr}_{\mathfrak{v}} R.$$

Para cada  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $P_{\alpha} / P_{\alpha^+}$  es la componente homogénea de grado  $\alpha$  de  $K [ Q_0, \dots, Q_{g+1} ] = \text{gr}_{\mathfrak{v}} R$ , luego estará generada como  $K$ -espacio vectorial por,

$$\left\{ \prod_{i=0}^{g+1} Q_i^{v_i} / \sum_{i=0}^{g+1} v_i \bar{\beta}_i = \alpha \right\}$$

y por ser  $P_{\alpha} / P_{\alpha^+}$  isomorfo como espacio vectorial a,  $\bar{\gamma}_{\alpha} ( P_{\alpha} / P_{\alpha^+} )$ , este último espacio vectorial estará generado por,

$$\left\{ \prod_{i=0}^{g+1} A_i ( U )^{v_i} / \sum_{i=0}^{g+1} v_i \bar{\beta}_i = \alpha \right\}$$

y por supuesto,  $\dim_K ( P_{\alpha} / P_{\alpha^+} ) = \dim_K \bar{\gamma}_{\alpha} ( P_{\alpha} / P_{\alpha^+} )$ .

Sea  $i \in \mathbb{N}$ , con  $0 \leq i \leq g$ . En el calculo de  $\mathfrak{v} ( Q_i )$ , el valor de  $U$  es indiferente y si  $g, g'$  son elementos generales de  $\mathfrak{v}$ , se tiene,  $( Q_i, g ) = ( Q_i, g' )$  ( ver [ C ], 2.3.2.v. ), por lo tanto  $\gamma_{\bar{\beta}_i} ( Q_i )$  es constante, luego,  $A_i ( U ) = A_i \in K$  para  $0 \leq i \leq g$  y  $A_{g+1} ( U ) \in K [ U ]$ , y entonces,  $\dim_K ( P_{\alpha} / P_{\alpha^+} )$  es la dimensión del espacio vectorial generado por los productos,

$$[1.8.7.1.] \quad \left\{ \prod_{i=0}^g A_i^{v_i} A_{g+1}^{v_{g+1}}(U) / \sum_0^{g+1} v_i \bar{\beta}_i = \alpha \right\}$$

Definase  $H_\alpha = \{ v^* \in \mathbb{N} / \text{ existe al menos una } g+1\text{-upla de números naturales } (v_0, \dots, v_g), \text{ tales que, } \sum_0^g v_i \bar{\beta}_i + v^* \bar{\beta}_{g+1} = \alpha \}$ . Por lo tanto, como el espacio vectorial generado por [ 1.8.7.1. ] es el mismo que el generado por,

$$\left\{ \bar{A}_{g+1}^{v^*} (U) / \sum_0^{g+1} v_i \bar{\beta}_i = \alpha \right\}$$

su dimensión es igual al cardinal,  $h_\alpha$ , de  $H_\alpha$  y, por lo tanto,

$$H_{\text{gr}_v R} (t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} h_\alpha t^\alpha$$

Para un calculo explícito de  $H_{\text{gr}_v R} (t)$ , póngase,

$$h_{\alpha,a} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin H_\alpha \\ 1 & \text{si } a \in H_\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad h_\alpha = \sum_{a \in \mathbb{N}} h_{\alpha,a}$$

entonces,

$$H_{\text{gr}_v R} (t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} h_\alpha t^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \left( \sum_{a \in \mathbb{N}} h_{\alpha,a} \right) t^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \sum_{a \in \mathbb{N}} h_{\alpha,a} t^\alpha.$$

Pues para cada  $\alpha$ ,  $h_{\alpha,a}$  son casi todos nulos.

Puede escribirse, en este caso,

$$H_{\text{gr}_v R} (t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} h_{\alpha,0} t^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} h_{\alpha,1} t^\alpha + \dots$$

y como  $\{ \bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g \}$  es un sistema de generadores del semigrupo de valores  $\phi^+$ , se tiene que,

$$h_{\alpha,0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \notin \phi^+ \\ 1 & \text{si } \alpha \in \phi^+ \end{cases} \quad h_{\alpha,a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - a\bar{\beta}_{g+1} \notin \phi^+ \\ 1 & \text{si } \alpha - a\bar{\beta}_{g+1} \in \phi^+ \end{cases}$$

Haciendo el cambio  $\rho = \alpha - (a-1) \bar{\beta}_{g+1}$ , en el sumando que depende de  $a$ , se obtiene,

$$\begin{aligned}
 H_{gr_{\mathfrak{v}}} R ( t ) &= \underbrace{\sum_{\rho \in \phi^+} t^{\rho}}_{\text{sumando } 1^{\circ}} + \underbrace{\sum_{\rho \in \phi^+} t^{\rho + \bar{\beta}_{g+1}}}_{\text{sumando } 2^{\circ}} + \underbrace{\sum_{\rho \in \phi^+} t^{\rho + (a-1)\bar{\beta}_{g+1}}}_{\text{sumando } a^{\circ}} + \dots \\
 &= \left( \sum_{\rho \in \phi^+} t^{\rho} \right) \left( 1 + t^{\bar{\beta}_{g+1}} + \dots + t^{(a-1)\bar{\beta}_{g+1}} + \dots \right) = H_{\phi^+} ( t ) \cdot \frac{1}{1 - t^{\bar{\beta}_{g+1}}} .
 \end{aligned}$$

Pues la primera serie es la de Poincaré asociada a cualquier elemento general de  $\mathfrak{v}$  y la segunda es geométrica.

Sea  $g$  un elemento general de  $\mathfrak{v}$ , cuyo semigrupo de valores es  $\phi^+$ , y cuyos valores de contacto maximal son  $\{ \bar{\beta}_i \}_0^g$  ( ver 2.1 de esta memoria para mayor concreción ), por [ C ], 4.3.9, si  $\alpha \in \phi^+$ , existe una expresión única de  $\alpha$ ,  $\alpha = i_0 \bar{\beta}_0 + \dots + i_g \bar{\beta}_g$  con las condiciones,

$$\# = \{ i_0 \geq 0, i_j < N_j, i \leq j \leq g \}$$

luego,

$$\begin{aligned}
 H_{gr_{\mathfrak{v}}} R ( t ) &= \sum_{(i_0, \dots, i_g, \text{verifican } \#)} t^{i_0 \bar{\beta}_0 + \dots + i_g \bar{\beta}_g} = \\
 &= \left( \sum_{i_0 \in \mathbb{N}} t^{i_0 \bar{\beta}_0} \right) \left( \sum_{0 \leq i_1 < N_1} t^{i_1 \bar{\beta}_1} \right) \dots \left( \sum_{0 \leq i_g < N_g} t^{i_g \bar{\beta}_g} \right) = \\
 &= \frac{1}{1 - t^{\bar{\beta}_0}} \frac{1 - t^{N_1 \bar{\beta}_1}}{1 - t^{\bar{\beta}_1}} \dots \frac{1 - t^{N_g \bar{\beta}_g}}{1 - t^{\bar{\beta}_g}} ,
 \end{aligned}$$

de todo esto, esta claro que, si:

$$h_{s_g} - k_g \neq 0, H_{gr_0} R = \frac{1}{1-t\bar{\beta}_0} \prod_{i=1}^g \frac{1-t^N \bar{\beta}_i}{1-t\bar{\beta}_i} \cdot \frac{1}{1-t\bar{\beta}_{g+1}}$$

Si  $h_{s_g} - k_g = 0$ , podemos simplificar la fórmula pues

$$\bar{\beta}_{g+1} = N_g \bar{\beta}_g \text{ ( ver [ S-2 ], 8.13. ) y,}$$

$$\begin{aligned} H_{gr_0} R &= \frac{1}{1-t\bar{\beta}_0} \prod_{i=1}^{g-1} \frac{1-t^N \bar{\beta}_i}{1-t\bar{\beta}_i} \cdot \frac{1-t^N \bar{\beta}_g}{1-t\bar{\beta}_g} \cdot \frac{1}{1-t\bar{\beta}_{g+1}} = \\ &= \frac{1}{1-t\bar{\beta}_0} \prod_{i=1}^{g-1} \frac{1-t^N \bar{\beta}_i}{1-t\bar{\beta}_i} \cdot \frac{1}{1-t\bar{\beta}_g} \end{aligned}$$

Nota 1.8.8.

Despues de 1.8.7., podemos tambien escribir  $H_j^{(r_0)}(t)$  así:

Si  $h_{s_g} - k_g \neq 0$ ,  $r_0 = g + 1$  y,

$$H_j(t) = \frac{1 - \left( \prod_{i=1}^g 1-t^N \bar{\beta}_i \right)}{\left( \prod_{i=0}^{g+1} 1-t \bar{\beta}_i \right)} \text{ por 1.8.6.}$$

Si  $h_{s_g} - k_g = 0$ ,  $r_0 = g$  y,

$$H_j(t) = \frac{1 - \left( \prod_{i=1}^{g-1} 1-t^N \bar{\beta}_i \right)}{\left( \prod_{i=0}^g 1-t \bar{\beta}_i \right)} \text{ por 1.8.6.}$$

## Capítulo 2 Equivalencia discreta de familias finitas de valoraciones.

Este capítulo, está dedicado al estudio de invariantes discretos asociados a los conjuntos finitos de valoraciones de los tipos A, D y E, mostrando la relación de dichas familias con la geometría de los puntos del árbol de puntos infinitamente próximos, cuyas ramas son las sucesiones simples asociadas a las valoraciones consideradas. Como idea general, las valoraciones de los tipos A, D y E se pueden describir con ayuda de curvas algebroides analíticamente irreducibles, de tal manera que, los invariantes considerados son similares a los que se utilizan para las curvas ( ver [ C ], [ D ] ). De esta manera, mostraremos como la equivalencia de dos conjuntos finitos de tales valoraciones se puede caracterizar por medio de un semigrupo de valores adecuado.

### 2.1. Equivalencia de sucesiones finitas simples de transformaciones cuadráticas .

#### 2.1.0. Notación

Usaremos la notación del capítulo anterior. Consideraremos ahora, una sucesión simple finita  $\pi$  de transformaciones cuadráticas y sea  $\nu$  la valoración divisorial de  $F$  asociada a ella.

#### 2.1.1. Proposición

Si  $\nu$  está normalizada, tal que, su grupo de valores sea  $\mathbb{Z}$  y  $f$  un elemento general para  $\nu$ , los semigrupos de valores de  $\nu$ ,  $\phi_{\nu}^+$ , y de la curva  $f = 0$ ,  $S(f)$ , coinciden. ( Recordar que la curva  $f = 0$ , la expresaremos también por  $f$ , si no hay ambigüedad ).

Lema 2.1.1.1.

Si  $f_1, f_2$  definen dos curvas algebroides planas irreducibles en  $\hat{\text{Spec}} R$ , entonces se tiene,

A) Conocidas las clases de equisingularidad de  $f_1$  y  $f_2$ , los siguientes datos son equivalentes, ( es decir, de uno se deducen los otros ).

i) El par de contacto  $(f_1|f_2)$ . ( Ver 1.5.A-D.1. )

ii) La multiplicidad de la intersección  $(f_1, f_2)$ .

iii) El número de puntos infinitamente próximos en común de ambas curvas, que denotaremos,  $\# B(f_1, f_2)$ .

B) Si  $f_1, f_2$  son equisingulares entre si, y  $h$  define otra curva analíticamente irreducible, y además  $(f_1|h) = (f_2|h)$ , entonces se tiene,  $(f_1, h) = (f_2, h)$ .

Demostración

El apartado A se sigue por inducción sobre el número de puntos infinitamente próximos en común ( ver [ D ], 1.1.8. y 1.1.9. ). Para B, usando la notación de 1.5.B. y C 1. Los valores  $e_i^1, e_i^2$  y  $\beta_i^1, \beta_i^2$ , donde  $i$  varía desde 1 hasta el valor del género común de  $f_1$  y  $f_2$ , coinciden. Entonces, es fácil deducir B ( ver 1.1.7. [ D ] ).

Demostración de la proposición

Empezamos indicando que todos los elementos generales de  $\mathcal{V}$  poseen el mismo semigrupo de valores ( ver [ C ], 4.3.11. ), alternativamente, teniendo en cuenta que su grafo dual es el mismo.

Veamos que  $\phi_{\mathcal{V}}^+ \subseteq S(f)$ . Si  $s \in \phi_{\mathcal{V}}^+$ , existe  $h \in R$  con  $v(h) = s$ , esto es,  $\min_{f' \text{ general de } \mathcal{V}} (h, f') = s$ , luego existe  $\tilde{f}$ , general, con  $(h, \tilde{f}) = s$ , es decir,  $s \in S(\tilde{f}) = S(f)$ .

Para el recíproco, bastará ver que los generadores del semigrupo  $S(f)$  están en  $\phi_{\mathcal{V}}^+$ . Por [ C ], 4.3.8., estos generadores son los valores de contacto maximal de  $f$ .



Sea, para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq g$ ,  $g =$  género de  $f$ ,  $\nabla_{i-1}$  una curva de género  $i-1$  y contacto maximal de ese género con  $f$ . Si el desarrollo H-N de  $f$  es,

$$(D) = \left\{ z_{j-1} = \sum_{i=0}^j b_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1} / 0 \leq j \leq d; z_0 = x+(f); z_{-1} = y+(f) \right\}$$

( ver 1.5.B y C.1 ), el de  $\nabla_{i-1}$  será,

$$y = b_{01}x + b_{02}x^2 + \dots + b_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1$$

$$x = z_1^{h_1}z_2$$

...

...

$$z_{s_{i-2}-1} = b_{s_{i-1}, k_{i-1}} z_{s_{i-1}}^{k_{i-1}} + \dots$$

Además, la multiplicidad  $(f, \nabla_{i-1}) = \beta_i$ .

De lo anterior, si  $h, h'$ , son elementos generales de  $\mathfrak{v}$ ,

$(h|\nabla_{i-1}) = (h'|\nabla_{i-1})$ , aplicando el lema,  $(h, \nabla_{i-1}) = (h', \nabla_{i-1})$  y en consecuencia,  $\nu(\nabla_{i-1}) = \beta_i$ , esto es,  $\beta_i \in \Phi_{\mathfrak{v}}^+$ .

Definición 2.1.2.

Dos sucesiones  $\pi$  y  $\pi^*$  de transformaciones cuadráticas, simples y finitas, son discretamente equivalentes si sus grafos duales coinciden. En lo sucesivo, diremos simplemente que son equivalentes, pues la noción no entrará en conflicto con ninguna otra noción.

Proposición 2.1.3.

Dos sucesiones  $\pi$  y  $\pi^*$  de transformaciones cuadráticas, simples y finitas son equivalentes, si y sólo, si  $\phi_{\nu^{(0)}}^+ = \phi_{\nu^{(0)*}}^+$  y  $\nu^{(0)}(\mathfrak{p}) = \nu^{(0)*}(\mathfrak{p}^*)$ , donde  $\nu^{(0)}$  y  $\nu^{(0)*}$  son las valoraciones divisoriales de  $F$  asociadas a  $\pi$  y  $\pi^*$ , normalizadas de modo que,  $\nu^{(0)}(\mathfrak{m}) = \nu^{(0)*}(\mathfrak{m}) = 1$ . ( $\mathfrak{p}$  y  $\mathfrak{p}^*$  son los ideales simples asociados a  $\pi$  y  $\pi^*$ , respectivamente, descritos en el capítulo 1 ). Alternativamente,  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes, si y sólo si, las series de Poincaré de las valoraciones divisoriales correspondientes son iguales.

Demostración

Sea  $\bigcup_{i=1}^{g+1} \Gamma_i$  el grafo dual de  $\pi$ . Los valores  $\{ 1, \beta'_1, \dots, \beta'_{g+1} \}$  determinan y son determinados por el grafo ( ver, 1.3. ).  $\{ 1, \beta'_1, \dots, \beta'_g \}$  son generadores de  $\phi_{\nu^{(0)}}^+$  y  $\nu^{(0)}(\mathfrak{p}) = \beta'_{g+1}$ . En consecuencia, se tiene el resultado. El resultado para las series de Poincaré se sigue de 1.8.7. ( incluyendo las expresiones de la demostración ).

Proposición 2.1.4.

La clase de equivalencia de  $\pi$ , para la relación 2.1.2., puede conocerse a partir de un par de elementos generales de  $\nu$ , bien elegidos.

Demostración

Es conocido que,  
 $e_0 \nu^{(0)}(\mathfrak{p}) = \min \{ (f, f') / f, f' \in \mathfrak{p}, f \neq f', f \text{ y } f' \text{ generales de } \nu \}$  y en conclusión, existen  $f$  y  $f''$  generales de  $\nu$ , tales que,

$$\nu^{(0)}(\mathfrak{p}) = \frac{(f, f'')}{e_0} = \beta'_{g+1}.$$

Por 2.1.1, los semigrupos  $S(f)$  y  $\phi_{\nu^{(0)}e_0}^+$  coinciden.

Puesto que un sistema minimal de generadores de un semigrupo de  $\mathbb{Z}_+$  es único, se tiene que,  $\{ \bar{\beta}_i \}_{i=0}^g$  generadores de  $S(f)$  y  $\{ e_0 \beta'_i \}_{i=0}^g$  generadores de  $\phi^+_{v^{(0)}e_0}$ , ordenados de menor a mayor, coinciden.

Luego  $f$  da,  $\cup_{i=1}^g \Gamma_i$ , ( ver, 1.3.2.2. ) y  $f$  junto con  $f''$ ,  $\cup_{i=1}^{g+1} \Gamma_i$ , luego la clase de equivalencia de  $\pi$ .

Proposición 2.1.5.

Usando las notaciones del capítulo 1, si  $f$  y  $f'$  son elementos generales como los descritos en la proposición anterior, de género común  $g$ , y si  $(f | f') = (g, c)$ , entonces, se tiene:

$$c = a_1^{(g+1)} = h_s - k+1 = \beta_{g+1} - 1$$

Las notaciones siendo correspondientes con las de 1.1. para el desarrollo H-N de  $v$  y 1.3.

Demostración

Los exponentes de Puiseux  $\{ \beta_i \}_{1 \leq i \leq g}$  de  $v^{(0)}$  vienen dados por, ( 1.3.1.2. ),

$$\beta_i = a_1^{(i)} + \frac{1}{a_2^{(i)} + \dots + \frac{1}{a_{m_i}^{(i)} + 1}} =$$

$$= (h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1) + \frac{1}{h_{s_{i-1}+1} + \frac{1}{h_{s_{i-1}+2} + \dots + \frac{1}{k_i}}}$$

Escribiendo,

$$(h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1)n_{s_{i-1}} + n_{s_{i-1}+1} = p_i, \text{ y puesto que se tiene,}$$

$$\begin{aligned} n_{s_{i-1}} &= h_{s_{i-1}+1} n_{s_{i-1}+1} + n_{s_{i-1}+2} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \quad 1 \leq i \leq g \\ n_{s_{i-1}} &= k_i n_{s_i} \end{aligned}$$

( ( Ver, [ C ] 3.3.3. ),

( Ya que, estos valores son comunes para los elementos generales y para la valoración ). Y se tiene,  $\beta_i = p_i / n_{s_{i-1}}$ .

De las igualdades anteriores, m.c.d. (  $p_i, n_{s_{i-1}}$  ) =  $n_{s_i}$ . Así, se deduce,

$$p_i = \frac{(h_{s_{i-1}} - k_{i-1} + 1) n_{s_{i-1}} + n_{s_{i-1}+1}}{n_{s_i}}$$

y tambien  $n_i = n_{s_{i-1}} / n_{s_i}$ . Luego,  $\beta_i = p_i / n_i$  con  $p_i, n_i$  primos entre si.

De 1.3.2.,

$$\beta'_{g+1} = \frac{a_1^{(g+1)}}{e_g} + n_g \beta'_g \text{ y tambien, } e_i = \prod_{j=1}^i n_j \text{ ( } 1 \leq i \leq g \text{ )}$$

por lo tanto, como  $n_s = 1$  ( [ C ], 3.3.3. ), se deduce,

$$e_g = \prod_{j=1}^g n_j = \frac{n_0}{n_{s_1}} \frac{n_{s_1}}{n_{s_2}} \dots \frac{n_{s_{g-1}}}{n_{s_g}} = n_0$$

Y de  $\beta'_g = \bar{\beta}_g / n_0$  se tiene,

$$\beta'_{g+1} = \frac{a_1^{(g+1)}}{n_0} + n_{s_{g-1}} \frac{\bar{\beta}_g}{n_0} \text{ , en conclusión}$$

$$n_0 \beta'_{g+1} = a_1^{(g+1)} + \bar{\beta}_g n_{s_{g-1}}$$

Por otra parte,

$$\beta'_{g+1} = v^{(0)}(p) = v(p) / n_0 = (f, f') / n_0,$$

permite obtener,

$$(f, f') = a_1^{(g+1)} + \bar{\beta}_g n_{s_{g-1}} \text{ [2.1.5.1.]}$$

( Se omiten los superíndices por ser f y f' equisingulares).

$(f | f') = (g, c)$ , aplicando [ D ], 1.1.7, se tiene,

$$(f, f') = e_{g-1} \bar{\beta}_g + c e_g e_g$$

y además,

$$e_g = n_{s_g} = 1; e_{g-1} = n_{s_{g-1}}.$$

En definitiva,

$$(f, f') = e_{g-1} \bar{\beta}_g + c \quad [2.1.5.2.]$$

Y de [2.1.5.1.] y [2.1.5.2.], se concluye,  $c = a_1^{(g+1)}$

Finalmente, aplicando 1.3.2. y  $a_1^{(g+1)} = \beta_{g+1}$  se tiene,

$$c = a_1^{(g+1)} = \beta_{g+1} - 1 = h_s - k_g + 1$$

Nota 2.1.6.

La anterior proposición tiene una cómoda interpretación geométrica. Cada transformación cuadrática de  $\pi$ , tiene como centro, el centro de  $\nu$  en cada  $X^{(i)}$ , mientras este sea puntual, y esto ocurre cuando todos los elementos generales de  $\nu$  pasan por el mismo punto del correspondiente divisor excepcional.

Si existen dos elementos generales que cortan a un divisor en diferentes puntos, mientras que al divisor anterior le cortaban todos en el mismo punto, la explosión que dió este último divisor es la última de la sucesión de transformaciones cuadráticas asociadas a  $\nu$  y además, el número de estas es,  $c$  veces más que el número de transformaciones que son necesarias para desingularizar  $f$ . Este número, es el de transformaciones que son precisas para que la curva dada por el producto de dos elementos generales corten al nuevo divisor en distintos puntos.

2.1.7.

Resumimos, a continuación una serie de resultados debidos a F. Delgado ( [ D ], [ De ] ), útiles para nosotros en lo que sigue. Las notaciones son las de 1.5.B y C.1.

Sean, en particular  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ,  $n$  elementos analíticamente irreducibles, definiendo curvas algebroides distintas dos a dos. Entonces, se tiene:

2.1.7.a)

Si  $(q | c) = (f_1 | f_2 | \dots | f_n)$ .

i) Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq i < q$ , existe una curva  $C_i$  de contacto maximal ( $[C]$ , 4.2.2.) de género  $i$ , simultáneamente con  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

ii) Sea  $\mathcal{O} = K[[X, Y]] / (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $\mathbb{B}$  el conjunto de no divisores de  $\mathcal{O}$ . Definimos  $\underline{u} : \mathcal{O} \longrightarrow (\bar{\mathbb{Z}}_+)^n$ , donde  $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ . Y si  $h \in \mathcal{O}$ ,  $\underline{u}(h) = (u_{f_1}(h), \dots, u_{f_n}(h))$ . ( $u_{f_i}$  es la valoración discreta asociada a la curva  $f_i = 0$ ).

Entonces,  $\underline{u}(C_i)$  pertenece a la recta  $L$  que une el origen con el punto de coordenadas  $(\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^n)$ .

iii)  $q$  es el mayor entero que verifica i) y ii).

( $[D]$ , 1.2.3.)

Definiciones I

Se llama *semigrupo de valores* asociado a  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , al subconjunto de  $\mathbb{Z}_+^n$ ,  $S = S(f_1, \dots, f_n) = \underline{u}(\mathbb{B})$ . Y *semigrupo de valores completado* asociado a  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , al subconjunto de  $\bar{\mathbb{Z}}_+^n$ ,  $\bar{S}(f_1, \dots, f_n) = \bar{S} = \underline{u}(\mathcal{O})$ , donde  $u_{f_r}(0) = \infty$ .

Si consideramos  $S = \bar{S} \cap \mathbb{Z}_+^n$ , el cierre integro de  $S$  en el espacio topológico producto  $\bar{\mathbb{Z}}_+^n$  es  $\bar{S}$ , ver  $[Cam]$ . Donde sobre  $\bar{\mathbb{Z}}_+^n$ , se toma la topología producto, siendo esta topología, aquella que tiene a los elementos de  $\mathbb{Z}_+$  como puntos aislados y a  $\infty$  como punto límite de la sucesión de naturales. En consecuencia, los datos  $S$  y  $\bar{S}$  son equivalentes.

Además, si  $(q, c) = (f_1 | f_2 | \dots | f_n)$ , existe  $h \in K[[X, Y]]$  con  $(h | f_r) = (q, c)$ ,  $\forall r \in I$  ( $[D]$ , 1.2.4.). Para cualquiera de estos  $h$ ,  $\underline{u}(h)$  es el mismo, denotándose  $\gamma^0$ .

2.1.7.b)

Para cada  $\gamma \in S$ , póngase  $S(\gamma) = \{ \alpha \in S / \alpha \geq \gamma \}$ , si  $L$  es la recta indicada en a) y definimos,  $A = \{ \gamma \in S / S \subseteq L \cup S(\gamma) \} \subseteq S$ . Entonces,  $A$  es finito y  $\gamma^0 = \text{máx } A$  (orden lexicográfico).  
 [ D ], 1.2.6.

Definiciones y Notaciones II

Sea  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  y  $J = \{ i_1, i_2, \dots, i_p \} \subseteq I = \{ 1, \dots, n \}$ , escribimos,  
 $\Lambda_J(\alpha) = \{ \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n / \alpha_r = \beta_r \text{ si } r \in J \text{ y } \beta_r > \alpha_r \text{ si } r \notin J \}$ .

Tambien definimos,  $\Lambda(\alpha) = \bigcup_{r \in I} \Lambda_r(\alpha)$  y  $\wedge(\alpha) = \Lambda(\alpha) \cap S$ .

Entonces diremos que,

$\alpha \in S$ , es un maximal de  $S$ , si  $\wedge(\alpha) = \emptyset$ . Que,  
 $\alpha \in S$ , es un maximal absoluto de  $S$  si es un maximal y  $\Lambda_J(\alpha) = \Lambda(\alpha) \cap S = \emptyset$ , para todo  $J \subseteq I; J \neq I$ . Y finalmente que,  
 $\alpha \in S$ , es un maximal relativo de  $S$  si es maximal y  $\Lambda_J(\alpha) \neq \emptyset$ , para todo  $J \subseteq I; J \neq I$ , tal que, el cardinal de  $J$  es mayor o igual que dos.

2.1.7.c.

Sea  $f = \prod_{r \in I} f_r$  una serie que define una curva algebroide plana reducida con  $n$  ramas. Denotaremos  $\xi_{r,s} = (f_r, f_s)$ ,  $r \neq s$ ,  $r, s \in I$ ;  
 $\xi^r = \sum_{\substack{s=1 \\ r \neq s}}^n \xi_{r,s}$ . Si  $c_r$  es el conductor del semigrupo  $S(f_r)$ , y  $Q$  es el

punto,  $Q = (c_1 + \xi^1 - 1, \dots, c_n + \xi^n - 1) \in \mathbb{Z}_+^n$ , se tiene:

- i)  $Q \in S$  y es un maximal relativo de  $S$ .
- ii)  $Q + (1, 1, \dots, 1)$  es el conductor de  $S$ .
- iii)  $\alpha \in S$  es maximal de  $S$ , si y sólo si,  $Q - \alpha \in S$ .
- iv)  $\alpha + \beta = Q$ ;  $\alpha, \beta \in S$ ,  $\alpha$  es maximal relativo, si y sólo si,  $\beta$  es maximal absoluto. ( [ D ], 3.2.13. ).



Definiciones III

Para cada entero  $p \geq 0$ , considérese  $\mathcal{O}^p = \{ r \in I / g_r \geq p \}$  y defínase  $T^p \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O}^p)$  así,  $A \in T^p$ , si y sólo si, existe una curva de género  $p$  y contacto maximal de ese género con  $f_r$ , para todo  $r \in A$ . Sea  $\mathcal{M} = \{ E_p^1, \dots, E_p^s \}$ , el conjunto de maximales de  $T^p$  para la inclusión y  $\mathcal{B} = \{ h_p^1, \dots, h_p^s \}$ , una familia de curvas  $h_p^i \in K[[X, Y]]$  (irreducibles de género  $p$ ), tales que,  $u_{f_r}(h_p^i) = \bar{\beta}_{p+1}^i$  para  $r \in E_p^i$ ;  $i \in \{ 1, \dots, s \}$ . Si  $f = f_1 \dots f_n$ ,  $\mathcal{B}$  se llama *ramillete de curvas algébroides con contacto maximal de género  $p$  con  $f$* .

El subconjunto de  $S(f_1 \dots f_n)$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(f_1 \dots f_n) = \{ \underline{u}(h_p^1), \dots, \underline{u}(h_p^s) \}$  se llama *valor de contacto maximal de género  $p$  de  $f$* . Además, poniendo  $\mathcal{V}^1 = (\bar{\beta}_0^1, \dots, \bar{\beta}_0^n)$ , si todas las componentes de  $f$  tienen la misma tangente y  $\mathcal{V}^1 = \emptyset$  en otro caso, definimos *valor de contacto maximal de*

$f$  como el subconjunto de  $S(f_1 \dots f_n)$ ,  $\mathcal{A}(f) = \bigcup_{\substack{r \in I \\ p = -1}}^{\sup(g_r)} \mathcal{P}(f)$ . Si,  $\mathcal{V}_\infty(f) = \{ \underline{u}(f_1), \dots, \underline{u}(f_n) \}$ ,

$$\mathcal{A}(f) \cap S = \mathcal{A}(f) - \mathcal{V}_\infty(f) = \bar{\mathcal{A}}(f),$$

por definición.

2.1.7.d.

Sea  $p \in \mathbb{Z}_+$ ,  $E \in \mathcal{M}$  y  $h_E$  la serie indicada anteriormente asociada a  $E$ , entonces, el valor  $\underline{u}(h_E)$  no depende de la serie elegida, además:

$$\text{Si } r \in E, u_{f_r}(h_E) = \bar{\beta}_{p+1}^r.$$

$$\text{Si } r \notin E, \exists s \in E, \text{ tal que, } u_{f_r}(h_E) = \frac{\xi_{r,s}}{e_p^s} \quad ( [ D ], 3.4.3. )$$

#### Definición IV

Un elemento  $\alpha \in S$  es irreducible si  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  con  $\alpha_1, \alpha_2 \in S$  implica  $\alpha_1 = 0$ , ó  $\alpha_2 = 0$ .

#### 2.1.7.e.

$\alpha \in S$ , es un maximal absoluto irreducible de  $S$ , si y sólo si, es uno de los valores de contacto maximal finito de  $f$  ( [ D ],3.4.3. ).

#### 2.1.7.f.

Sean  $\{ \beta^1, \dots, \beta^m \}$  el conjunto de maximales absolutos irreducibles de  $S$ ,  $F = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta^i / \lambda_i \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta^i \leq Q \} \subseteq S$  y sea  $F^S = \{ Q - \gamma / \gamma \in F \}$ . Si  $\beta$  cumple que la proyección respecto a los índices de  $J$ ,  $pr_J(\beta) \in pr_J(S)$ , para cada  $J \subseteq I$  con cardinal  $n - 1$ , entonces  $\beta \in S$ , si y sólo si,  $\beta \in \Lambda(\alpha)$  para todo  $\alpha \in F^S$ . ( [ D ], 3.4.14. ).

#### Proposición 2.1.8.

Sean  $\pi$  y  $\pi^*$  como en 2.1.2.,  $\{ f_1, f_2 \}$  y  $\{ f_1^*, f_2^* \}$  elementos generales para las valoraciones divisoriales asociadas a  $v$  y  $v^*$ , respectivamente, elegidos como se indica en 2.1.4. Entonces,  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes, si y sólo si,

$$S(f_1, f_2) = S(f_1^*, f_2^*)$$

Además, el semigrupo  $S(f_1, f_2)$  permite calcular el grafo de  $\pi$ . Y recíprocamente.

#### Demostración

Si  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes, tienen asociado el mismo grafo. Está claro, pues, que  $S(f_1) = S(f_1^*)$  y  $S(f_2) = S(f_2^*)$ . También  $(f_1, f_2) = (f_1^*, f_2^*)$ .

Póngase  $f = f_1 f_2$ ;  $f^* = f_1^* f_2^*$ , por 2.1.7.d  $\mathcal{Q}(f) = \mathcal{Q}(f^*)$ , y los maximales absolutos de  $S(f_1, f_2)$  y de  $S(f_1^*, f_2^*)$  coinciden por 2.1.7.e. Por 2.1.7.c, el valor  $Q$  es el mismo en ambos semigrupos y por 2.1.7.e,

$$S(f_1, f_2) = S(f_1^*, f_2^*) \text{ que implica } S(f_1, f_2) = S(f_1^*, f_2^*).$$

Es muy interesante añadir que lo anterior prueba que la elección de elementos generales diferentes pero verificando 2.1.4, no modifica el semigrupo  $S$ .

Recíprocamente, si  $S(f_1, f_2) = S(f_1^*, f_2^*)$ ,

$\text{pr}_{(r)} S(f_1, f_2) = \text{pr}_{(r)} S(f_1^*, f_2^*)$ ,  $r \in \{1, 2\}$  y, por lo tanto,  $S(f_r) = S(f_r^*)$ . Además, considerando en cada semigrupo el conjunto  $A$  de 2.1.7.b, se obtiene  $\gamma^0 = \text{máx } A$ .

Operando en el semigrupo  $S(f_1, f_2)$ , es conocido que,  $(f_1 | f_2) = (g, c)$ . Sea  $h$  una curva de género  $g$  equisingular a  $f_1, f_2$ , con  $(h | f_1) = (h | f_2) = (f_1 | f_2)$ , aplicando 2.1.1.B,  $(h, f_1) = (h, f_2) = (f_1, f_2)$ .

Puesto que,  $(u_{f_1}(h), u_{f_2}(h)) = ((f_1, f_2), (f_1, f_2)) = \gamma^0$ , se deduce que, por ejemplo,  $\text{pr}_{(1)} \gamma^0 = (f_1, f_2)$ . Este razonamiento, aplicado al semigrupo  $S(f_1^*, f_2^*)$ , conduce a  $(f_1, f_2) = (f_1^*, f_2^*)$  con lo que finaliza la prueba, esto es, los grafos de  $\pi$  y  $\pi^*$  coinciden.

La última afirmación es evidente después de la descripción explícita de la recíproca de la prueba.

**2.2. Equivalencia discreta de sucesiones finitas de transformaciones multicuadráticas.**

Definición 2.2.1.

Como en el primer capítulo, considérese el anillo local regular  $(R, m, K)$  y  $X_0 = X = \text{Spec } R$ . Una sucesión finita de transformaciones multicuadráticas es una *sucesión de transformaciones*,

$$(\pi): X_{N+1} \xrightarrow{\pi^{N+1}} X_N \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi^2} X_1 \xrightarrow{\pi^1} X$$

donde  $\pi^i$ , es la transformación resultante de explotar un número finito de puntos de los divisores excepcionales de  $\pi^{i-1}$ , es decir, se tendrán sucesiones de transformaciones cuadráticas cuya compuesta es  $\pi^i$ :

$$X_i = X_{i,r_i} \xrightarrow{\pi_{r_i}^i} \dots \longrightarrow X_{i,2} \xrightarrow{\pi_2^i} X_{i,1} \xrightarrow{\pi_1^i} X_{i-1} = X_{i-1,r_{i-1}} = X_{i,0}$$

cuyos centros respectivos  $P_{i-1,j_i} \in X_{i,j_i}$ ,  $1 \leq i \leq N$ ;  $1 \leq j_i \leq r_i < \infty$ , están en uno de los divisores excepcionales creados por  $\pi^{i-1}$ .

El divisor excepcional de cada  $\pi_{j_i}^i$  se denotará  $L_{i,j_i}$ , y por lo tanto, el divisor de  $\pi^i$  será  $L_i = \bigcup_{j_i=1}^{r_i} L_{i,j_i}$ . El divisor excepcional total para  $\pi^i$  será  $E_i = \bigcup_{j=1}^i L_j$ .

Se tendrán, pues, en particular, las condiciones siguientes:

- i)  $\pi^1$ , es la explosión de  $X$  con centro el maximal, que se denota  $P_0$ .
- ii) Los puntos  $P_{i,j_{i+1}}$  deben pertenecer a  $L_i$  para todo  $i$ .

Nota 2.2.2.

Dado el carácter local de las transformaciones cuadráticas, no es necesario tener en cuenta el orden de los puntos en que se explotan para construir  $\pi$ .

Nota 2.2.3.

Sea  $\pi$  la sucesión finita de 2.2.1., consideramos las subsucesiones simples de transformaciones cuadráticas de  $\pi$ , es decir las sucesiones simples

$$(\pi): X^{(M+1)} \xrightarrow{\pi_{M+1}} X^{(M)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(2)} \xrightarrow{\pi_2} X^{(1)} \xrightarrow{\pi_2} X$$

de centros  $P_0, P_1, \dots, P_M$ , tales que:

i)  $P_i = P_{i_{j_{i+1}}} \in L_i$ .

ii)  $M = N$ , es decir que, la sucesión consume todas las etapas de 2.2.1. Gráficamente, la sucesión 2.2.1. tiene una estructura de árbol, siendo las subsucesiones simples sus ramas.

Definición 2.2.4.

Sea  $\pi$  la sucesión de transformaciones multicuadráticas de 2.2.1., llamaremos grafo dual,  $G(\pi)$ , asociado a  $\pi$ , al grafo dual pesado obtenido del siguiente modo, cada divisor se corresponde a un vértice, dos vértices se unen por un brazo, si y sólo si, se cortan los divisores asociados. Todos los vértices tendrán un peso, este será  $i$  para todos los vértices asociados a un divisor de  $L_i$ .

Nota 2.2.5.

Sea  $\pi$  la sucesión de transformaciones multicuadráticas anterior. Supongamos que  $i_0$  es el primer índice  $i$ , tal que,  $r_{i+1} > 1$ . El grafo de nuestra sucesión hasta la obtención del divisor  $L_{i_0}$  se denota  $G(i_0, -)$ . Considérese  $P_{i_0 j_0+1}$  con  $1 \leq j_0+1 \leq r_{i_0+1}$ . Podemos considerar dos casos, para cada  $P_{i_0 j_0+1}$ :

a)  $P_{i_0 j_0+1} \in L_{i_0}$ , exclusivamente.

b) Existe otro índice  $i < i_0$ , tal que,  $P_{i_0 j_0+1} \in L_{i_0} \cap L_i$ .

En el caso a), tomamos la sucesión de transformaciones multicuadráticas obtenida a partir de la explosión en  $P_{i_0^{j+1}}$  y sucesivos puntos de los divisores obtenidos, que sean de explosión de  $\pi$ , su grafo dual es como se describe en 2.2.4. pero añadiendo el valor  $i_0$  a cada peso. Se denotará por  $G_{i_0^{j+1}}(+)$  a dicho grafo.

En el caso b), la misma notación describirá un grafo obtenido como se indicó en el apartado a), con la salvedad de que,  $G_{i_0^{j+1}}(+)$  incluye además un vértice de peso  $i$  unido al de peso  $i_0$ .

Utilizando la definición de adjunción de grafos ( [ D ] 4.2.5. ) se puede decir que,

$$G(\pi) = G(i_0, -) \amalg G_{i_0^1}(+) \amalg \dots \amalg G_{i_0^{r+1}}(+).$$

Repitiendo este proceso para cada  $G_{i_0^{j+1}}(+)$  y para los sucesivos grafos  $G(+)$  que se obtengan, se tiene una descomposición completa del grafo  $G(\pi)$  en grafos  $G(i, -)$ , mediante la adjunción. Una elección adecuada de estos grafos, primero  $G(i_0, -)$  luego  $G(i_1, -)$  correspondiente a uno de los  $G_{i_0^{j+1}}$ , y así sucesivamente, permite mediante la adjunción obtener los grafos de todas las subsucesiones simples de  $\pi$ .

#### Definición 2.2.6.

Dos sucesiones  $\pi$  y  $\pi'$  de transformaciones multicuadráticas finitas se dicen discretamente equivalentes si sus grafos coinciden. ( En lo que sigue pondremos equivalentes, por simplicidad ).

#### Proposición 2.2.7.

Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal simple  $m$ -primario de  $R$  y  $\nu_{\mathfrak{p}}$  la valoración divisorial que tiene asociada, puesto que, todas las curvas asociadas a elementos generales de  $\nu_{\mathfrak{p}}$  son equisingulares, a esta clase de equisingularidad se le puede llamar clase de equisingularidad asociada a  $\mathfrak{p}$ .

a) Si  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  son dos ideales simples m-primarios de R. Conocidas las clases de equisingularidad de  $\mathfrak{p}_1$  y  $\mathfrak{p}_2$ , si  $f_1$  es un elemento general de  $\mathfrak{v}_{\mathfrak{p}_1}$  y  $f_2$  de  $\mathfrak{v}_{\mathfrak{p}_2}$ . De  $(f_1|f_2)$  puede obtenerse  $(f_1, f_2)$  y viceversa.

b) Sean  $f_1 \in \mathfrak{p}_1$  y  $f_2 \in \mathfrak{p}_2$  generales, tales que,

$$(f_1|f_2) = \text{mín}(h_1|h_2), h_1 \in \mathfrak{p}_1 \text{ y } h_2 \in \mathfrak{p}_2, \text{ generales,}$$

Entonces,

$$(f_1, f_2) = \text{mín}(h_1, h_2), h_1 \in \mathfrak{p}_1 \text{ y } h_2 \in \mathfrak{p}_2, \text{ generales}$$

Y recíprocamente.

c) Sea  $f_1$  general de  $\mathfrak{p}_1$ , tal que,

$$(f_1|f_2) = \text{mín}(h_1|f_2), h_1 \in \mathfrak{p}_1 \text{ general y } f_2 \in \mathfrak{p}_2 \text{ fijo}$$

Se tiene,

$$(f_1, f_2) = \text{mín}(h_1, f_2), h_1 \in \mathfrak{p}_1 \text{ general y } f_2 \in \mathfrak{p}_2 \text{ fijo}$$

Y rec.

#### Demostración

a) Es inmediato. ( Vease [ D ], 1.1.9. para precisiones ).

b) Sea  $\rho_0$ , el índice de separación del tipo de equisingularidad de  $f_1$  y  $f_2$ . Puesto que sólo depende de la clase de equisingularidad de  $f_1$  y  $f_2$ , [ D ] 1.1.1, este, será el mismo para las curvas  $h_1$  y  $h_2$ .

Probaremos que,

$(f_1, f_2) \geq (h_1, h_2)$ , si  $h_1, h_2$  son fijos y definidos como antes.

Usaremos la notación de 1.5.B y C.1. Tanto para  $f_r$  como para  $h_r$ ,  $r \in I$  ( ahora  $n = 2$  ).

En el desarrollo H-N, para  $h_r$  cambiaremos las  $a_{ji}^r$  por  $b_{ji}^r$ , pero al ser equisingulares estas curvas a  $f_r$ , todos los demás datos coinciden salvo la última fila del desarrollo H-N, que no afecta a la equisingularidad, que puede diferir.

Sea,  $(f_1|f_2) = (q_0, c_0)$  y  $(h_1|h_2) = (q, c)$ .

A) Supongamos  $(f_1, f_2) = \xi(q_0, c_0) = e_{q_0-1}^1 \bar{\beta}_{q_0}^2 + c_0 e_{q_0}^1 e_{q_0}^2$   
 ( ver [ D ], 1.1.7. y 1.1.8. ) con  $0 \leq q \leq \rho_0$  y  
 $0 \leq c_0 \leq \min \{ l_{q_0}^1, l_{q_0}^2 \}$ . Por tener  $f_1$  y  $f_2$  menor par de contacto,  
 $0 \leq q_0 \leq q \leq \rho_0$ .

A<sub>1</sub>) Sea  $c \leq \min \{ l_q^1, l_q^2 \}$ , se tiene que,

$$(h_1, h_2) = \xi(q, c) = e_{q-1}^1 \bar{\beta}_q^2 + c e_q^1 e_q^2$$

por [ D ], 1.1.8. Además,  $(q_0, c_0) \leq (q, c)$  implica,

$$(f_1, f_2) = \xi(q_0, c_0) \leq \xi(q, c) = (h_1, h_2)$$

A<sub>2</sub>) Si  $c = l_{\rho_0}^{r_0} + 1$ . Para  $r_0$ , tal que,

$$l_{\rho_0}^{r_0} = \min \{ l_{\rho_0}^1, l_{\rho_0}^2 \}, r_0 \in I.$$

Entonces ,

$$(f_1, f_2) = \xi(q_0, c_0) \leq \xi(\rho_0) = (h_1, h_2)$$

B) Si,  $(f_1, f_2) = \xi(\rho_0) = \min \{ e_{\rho_0}^1 \bar{\beta}_{\rho_0+1}^2, e_{\rho_0}^2 \bar{\beta}_{\rho_0+1}^1 \}$ .

De  $(f_1|f_2) \leq (h_1|h_2)$ , como los tipos de equisingularidad coinciden, está claro que,  $(f_1|f_2) = (h_1|h_2)$ , luego,  
 $(f_1, f_2) = (h_1, h_2)$ , por [ D ] 1.1.7.

Nota. Es trivial que si  $\text{gen } f_1 = \text{gen } f_2 = g$ ,  $\rho_0 < g$ .

Recíprocamente,

A<sup>R</sup>) Supongamos que existe  $(q_0, c_0)$ ;  $0 \leq q_0 \leq \rho_0$  y  
 $0 \leq c_0 \leq \min \{ l_{q_0}^1, l_{q_0}^2 \}$ , tal que,  $(f_1, f_2) = \xi(q_0, c_0)$ .



$A_1^R$ ) Sean  $h_1 \in \mathfrak{p}$  y  $h_2 \in \mathfrak{p}$ , tales que, existe  $(q, c)$ ,  $0 \leq q \leq \rho_0$  y  $0 \leq c \leq \min \{ l_q^1, l_q^2 \}$ , verificando,

$$(h_1, h_2) = \xi(q, c),$$

y aplicando [ D ], 1.1.8.  $(h_1 | h_2) = (q, c)$  y además,  $(q_0, c_0) \leq (q, c)$ , pues en caso contrario  $(q_0, c_0) > (q, c)$  implica

$$\xi(q, c) < \xi(q_0, c_0)$$

y en consecuencia,  $(h_1, h_2) < (f_1, f_2)$ , que no es cierto, por hipótesis.

$A_2^R$ ) Si  $(h_1, h_2) = \xi(\rho_0)$ , aplicando [ D ], 1.1.8, se tiene que,  $(h_1 | h_2) = (\rho_0, l_{\rho_0}^{r_0})$ , con  $l_{\rho_0}^{r_0} = \min \{ l_{\rho_0}^1, l_{\rho_0}^2 \}$  para  $r_0 \in I$ . Y por lo tanto,

$$(f_1 | f_2) = (q_0, c_0) < (\rho_0, l_{\rho_0}^{r_0}) = (h_1 | h_2)$$

En ambos casos A, se tiene,  $(f_1 | f_2) \leq (h_1 | h_2)$ .

$B^R$ ) Si resulta que,  $(f_1, f_2) = \xi(\rho_0)$ , se tiene entonces que,  $(f_1 | f_2) = (\rho_0, l_{\rho_0}^{r_0})$ , en las condiciones anteriores para  $r_0$ . Supongamos que,  $(h_1, h_2) = \xi(q, c)$  con  $0 \leq q \leq \rho_0$  y  $0 \leq c \leq \min \{ l_{\rho_0}^1, l_{\rho_0}^2 \}$ . Como,

$$(h_1, h_2) < \xi(\rho_0) = (f_1, f_2).$$

Se llega a un absurdo y se tiene,  $(h_1, h_2) = \xi(\rho_0)$ , esto implica  $(f_1 | f_2) = (\rho_0, l_{\rho_0}^{r_0}) = (h_1 | h_2)$  y esto concluye la prueba de B.

c) La misma prueba de b) puede aplicarse a este apartado, pues la propiedad de  $\mathfrak{p}_2$  utilizada en la misma, es que todos los elementos generales de ese ideal son equisingulares, si cambiamos dichos elementos por uno fijo, conservaremos la propiedad.

Proposición 2.2.8.

Sea  $\pi$  una sucesión finita de transformaciones multicuadráticas, que posee exactamente  $n$  subsucesiones simples,  $\pi_r$ ,  $r \in I = \{ 1, 2, \dots, n \}$ . Los grafos duales de  $\pi$  (respec.  $\pi_r$ ) se denotan  $G(\pi)$  (respec.  $G(\pi_r)$ ). Supongamos que  $\{ f_r, f'_r \}$  son elementos generales como los descritos en 2.1.4 para  $v_r$  valoración asociada a  $\pi_r$ . A partir de los tipos de equisigularidad y los pares de contacto de la familia de elementos  $\{ f_1, f'_1, f_2, f'_2, \dots, f_n, f'_n \}$ , podemos obtener el grafo  $G(\pi)$ , esto es, la clase de equivalencia de  $\pi$ .

Demostración

Se hará la prueba por inducción sobre el valor de  $n$ .

Para  $n = 1$  es el resultado de 2.1.4. Supongamos que es cierto para cualquier valor  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ , si  $f_r^{(s)}$  designa  $f_r$  o  $f'_r$ , se tiene que para cualquier subconjunto  $\{ r_1, r_2, \dots, r_m \}$  de  $I$ ,

$$( f_{r_1} | f_{r_2} | \dots | f_{r_m} ) = ( f_{r_1}^{(s)} | f_{r_2}^{(s)} | \dots | f_{r_m}^{(s)} ),$$

veamos esto.

En primer lugar, supongamos que  $m = 2$  y por simplicidad consideremos  $r_1 = 1, r_2 = 2$ , probaremos que,

$$(f_1 | f_2) = (f_1 | f'_2) = (f'_1 | f_2) = (f'_1 | f'_2).$$

Para ello, es suficiente con ver que  $(f_1 | f_2) = (f_1 | f'_2)$ , pues al no existir distinción previa entre  $f_r$  y  $f'_r$ , la prueba será análoga.

Reducción al absurdo, Si  $(f_1 | f_2) \neq (f_1 | f'_2)$ , puede ocurrir:

a)  $(f_1 | f_2) < (f_1 | f'_2)$ , esto indica que,

$$\#B(f_1 f_2) < \#B(f_1 f'_2)$$

a<sub>1</sub>)  $(f_1 | f_1) \geq (f_1 | f'_2)$ , puesto que, los centros de explosión de las transformaciones cuadráticas asociadas a  $\pi_2$  coinciden con los puntos infinitamente próximos de  $f_2$ , hasta el de peso  $\#B(f_2 f'_2)$  (ver 2.1.6.).

Las hipótesis a) y a<sub>1</sub>) indican que, tras la última explosión de  $\pi_2$ , se explotará nuevamente en un punto del divisor para obtener  $\pi_1$ , pues los desarrollos H-N de  $f_1$  y  $f'_1$  aún coinciden, esto es absurdo pues va en contra de que  $\pi_2$  sea una subsucesión simple.

a<sub>2</sub>)  $(f_1|f'_1) < (f_1|f'_2)$ , podemos encontrar tres casos,

a<sub>2,1</sub>)  $(f'_1|f_2) < (f_2|f'_2)$ , y todos los puntos infinitamente próximos comunes de  $f_1$  y  $f'_1$  formaran parte de los comunes entre  $f_2$  y  $f'_2$ , lo que va en contra de que  $\pi_1$  sea una subsucesión simple.

a<sub>2,2</sub>)  $(f'_1|f_2) > (f_2|f'_2)$ , y todos los puntos infinitamente próximos comunes de  $f_2$  y  $f'_2$  formaran parte de los comunes entre  $f_1$  y  $f'_1$ , lo que va en contra de que  $\pi_2$  sea una subsucesión simple.

a<sub>2,3</sub>)  $(f'_1|f_2) = (f_2|f'_2)$ , y todos los puntos infinitamente próximos comunes de  $f_2$  y  $f'_2$  son los comunes entre  $f_1$  y  $f'_1$ , absurdo.

b) Si  $(f_1|f_2) > (f_1|f'_2)$ , se tiene análogo razonamiento, pues es un problema de notación. Queda, pues, probada la proposición para  $n = 2$ .

Continuamos la prueba, si,

$$(f_{r_1}|f_{r_2}|\dots|f_{r_m}) \neq (f_{r_1}^{(s)}|f_{r_2}^{(s)}|\dots|f_{r_m}^{(s)})$$

para alguno de estos últimos valores, que denotaremos igual, y supongamos que,

$$(f_{r_1}|f_{r_2}|\dots|f_{r_m}) < (f_{r_1}^{(s)}|f_{r_2}^{(s)}|\dots|f_{r_m}^{(s)})$$

y para simplificar sea,

$$(f_{r_1}|f_{r_2}) = \min_{j,k \in \{1, \dots, m\}} \{ (f_r|f_k) \} = (f_{r_1}|f_{r_2}|\dots|f_{r_m}) \quad \text{y}$$

$$(f_{r_p}^{(s)}|f_{r_q}^{(s)}) = \min_{j,k \in \{1, \dots, m\}} \{ (f_{r_j}^{(s)}|f_{r_k}^{(s)}) \} .$$

Acabamos de probar,

$$(f_{r_1}^{(')} | f_{r_2}^{(')}) = (f_{r_1} | f_{r_2}), \text{ y en consecuencia,}$$

$$(f_{r_1}^{(')} | f_{r_2}^{(')}) < (f_{r_p}^{(')} | f_{r_q}^{(')}) = \min \{ (f_{r_j}^{(')} | f_{r_k}^{(')}) \},$$

$j, k \in \{1, \dots, m\}$

lo cual es absurdo, quedando probada nuestra afirmación anterior.

El número de puntos infinitamente próximos en común de las sucesiones  $\pi_{r_1}, \pi_{r_2}, \dots, \pi_{r_m}$  será el mismo que los comunes a  $f_{r_1}, f_{r_2}, \dots, f_{r_m}$ ,  $\#B(f_{r_1}, \dots, f_{r_m})$ , y esto podrá obtenerse con las mismas fórmulas que da [ D ], en 1.2.1. y 1.2.2., a partir de los valores que dan la clase de equisingularidad de  $f_{r_j}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  y de  $(f_{r_1} | \dots | f_{r_m})$ . [ El hecho de que los  $f_{r_j}$  puedan ser equisingulares no afecta al razonamiento ].

La afirmación de que los puntos infinitamente próximos de  $\pi_{r_1}, \pi_{r_2}, \dots, \pi_{r_m}$  comunes coincide con  $\#B(f_{r_1}, \dots, f_{r_m})$ , merece una pequeña explicación. Los puntos infinitamente próximos de  $\pi_{r_j}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  coinciden con los de  $f_{r_j}$  hasta el divisor de peso  $\#B(f_{r_j}, f_{r_j}')$ . Ahora, puesto que,  $\#B(f_{r_1}, \dots, f_{r_m}) < \#B(f_{r_j}, f_{r_j}')$ , para todo índice  $j$  ( en otro caso el número de subsucesiones simples sería menor que  $n$ , en contra de la hipótesis ), se tiene el resultado.

En conclusión, el calculo del número de puntos infinitamente próximos comunes a todas las  $\pi_r$ , y la clase de equisingularidad de cualquier  $f_r$  muestra  $G(i_0, -)$ , con  $i_0 = \#B(f_1 \dots f_n)$ .

Sean  $P_{i_0^{j_{i_0+1}}}$ ,  $1 \leq j_{i_0+1} \leq s_{i_0+1}$ , el conjunto de puntos descrito en 2.2.5. Para cada índice  $j_{i_0+1}$ , se considera  $I_{j_{i_0+1}} = \{r_1, \dots, r_m\} \subset I$ , tales que,  $P_{i_0^{j_{i_0+1}}}$  es uno de los puntos infinitamente próximos de  $\pi_{r_j}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Consideremos los grafos  $G_{i_0^{j_{i_0+1}}}$  (+) que por inducción podrán obtenerse de las familias  $\{f_{r_1}, f'_{r_1}, \dots, f_{r_m}, f'_{r_m}\}$  asociadas a cada familia de índices  $I_{j_{i_0+1}}$ , pues es evidente que de la elección de  $i_0, r_m < n$ , en cualquier caso.

Nota 2.2.9.

La obtención de los subconjuntos de  $I$ ,  $I_{j_{i_0+1}}$  es sencilla, pues son las clases de equivalencia de la siguiente relación:

Si  $(f_1 | f_2 | \dots | f_n) = (q_0, c_0)$ ;  $r, s \in I$

$$r R_{\gamma_0} s \Leftrightarrow \begin{cases} (f_r | f_s) > (q_0, c_0) & \text{si } c \leq l_{q_0}^r \\ (f_r | f_s) > (q_0+1, c_0) & \text{si } c = l_{q_0}^r + 1 \end{cases}$$

Proposición 2.2.10.

Si  $\pi$  y  $\pi^*$  son dos sucesiones finitas de transformaciones multicuadráticas con  $n$  subsucesiones simples, tales que,  $\pi_r$  ( $\pi_r^*$ ),  $r \in I$ , son dichas subsucesiones simples. Si  $\xi_{rs}$  ( $\xi_{rs}^*$ )  $r \neq s$ , es el peso del último divisor común a  $\pi_s$  y  $\pi_r$ , entonces,  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes, si y sólo si, se verifica que:

Existe una permutación de  $n$  elementos,  $\sigma$ , tal que,

i)  $\pi_r$  es equivalente a  $\pi_{\sigma(r)}^*$ .

ii) Para cada pareja  $r, s \in I$ ,  $r \neq s$ ,  $\xi_{rs} = \xi_{\sigma(r)\sigma(s)}^*$ .

### Demostración

Por ser  $\pi$  y  $\pi^*$  equivalentes, los grafos duales coinciden,  $G(\pi) = G(\pi^*)$ , eligiendo las subsucesiones de  $\pi$ ,  $\pi^*$ , asociadas a cada rama del grafo, se obtiene la biyección  $\gamma \in I$  que cumple las condiciones i), ii).

Recíprocamente, podemos suponer para mayor sencillez del razonamiento, que  $\sigma = \text{id}$ . Denotemos  $\{f_r, f'_r\}$  y  $\{f_r^*, f_r'^*\}$ , elementos generales como los descritos en 2.1.4., para  $v_r, v_r^*$  valoraciones asociadas a  $\pi_r, \pi_r^*$ ,  $r \in I$ .

Puesto que,  $G(\pi_r) = G(\pi_r^*)$ , las curvas  $f_r, f'_r, f_r^*, f_r'^*$  son equisingulares y también se verifica  $(f_r|f'_r) = (f_r^*|f_r'^*)$ , para todo  $r$ .

Como  $\xi_{rs}$  indica el número de puntos infinitamente próximos comunes de  $\pi_r$  y  $\pi_s$ , por 2.1.1.1., este dato permite obtener  $(f_r|f_s)$ , si se conocen las clases de equisingularidad de  $f_r$  y  $f_s$  y recíprocamente, como se indica en 2.2.8.. Y de las igualdades,  $\xi_{rs} = \xi_{\sigma(r)\sigma(s)}^*$ , se deduce  $(f_r|f_s) = (f_r^*|f_s^*)$ , para  $r, s \in I$ ,  $r \neq s$ .

Si ahora  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\} \subseteq I$ , podemos decir a partir de la definición que,  $(f_{r_1} | \dots | f_{r_m}) = (f_{r_1}^* | \dots | f_{r_m}^*)$ .

Estos datos y las clases de equisingularidad de las  $f_r, f_r^*$ , permiten obtener, siguiendo la prueba de 2.2.8., el grafo de  $\pi$  y el de  $\pi^*$ . Al ser todos los valores iguales, es obvio que,  $G(\pi) = G(\pi^*)$ , y son ambas sucesiones equivalentes.

### 2.2.11. Nota

Si en la anterior proposición se cambia  $\xi_{rs}$  por  $\xi_{rs}$  y  $\xi_{rs}^*$  por  $\xi_{rs}^*$ , donde  $\xi_{rs} = (f_r, f_s)$  y  $\xi_{rs}^* = (f_r^*, f_s^*)$ , podemos enunciar el mismo resultado después de 2.1.1.1.

2.2.12. Nota

Con las notaciones anteriores, escribiremos para cada  $r \in I$ ,  $\xi_r = (f_r, f'_r)$  y  $\xi_{rr}^* = (f_r^*, f_{r'}^*)$ . Supongamos además que,  $\{v_r\}_{r \in I}$ ;  $\{v_r^*\}_{r \in I}$  son las valoraciones divisoriales asociadas a  $\{\pi_r\}_{r \in I}$ ;  $\{\pi_r^*\}_{r \in I}$ , respectivamente, normalizadas con grupo de valores  $Z$ .

Escribimos,

$$\underline{v} : R - \{0\} \longrightarrow Z^n,$$

dada por,  $\underline{v}(g) = (v_1(g), \dots, v_n(g))$ , para  $g \in R - \{0\}$ .

Y se considera para  $\sigma \in \mathcal{J}_n$  (grupo de permutaciones de  $n$  elementos) y,  $A \subseteq Z^n$ ,

$$\sigma(A) = \{ \sigma(\underline{a}) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}) / \underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A \}.$$

Considérese la familia,

$$\mathbb{A}^\dagger = \{ (A, \underline{k}) \subseteq \mathcal{P}(Z^n) \oplus Z^n / A \text{ es semigrupo aditivo de } Z^n \text{ y } \underline{k} \in Z^n \}$$

donde puede escribirse la relación de equivalencia  $S$ , definida :

$$(A, \underline{k}), (B, \underline{k}') \in \mathbb{A}^\dagger, (A, \underline{k}) S (B, \underline{k}'),$$

si y sólo si, existe una permutación  $\sigma \in \mathcal{J}_n$ , tal que:

i)  $\sigma(A) \cong B$  (de semigrupos).

ii)  $\sigma(\underline{k}) = \underline{k}'$ .

El conjunto cociente  $\mathbb{A}^\dagger / S$  se denota  $\mathbb{A}$ , y de 2.2.10. podemos afirmar que  $\pi$  es equivalente a  $\pi^*$ , si y sólo si, los elementos de  $\mathbb{A}$ ,

$$(\underline{v}(R - \{0\}), (\xi_{11}, \dots, \xi_{nn})) \text{ y } (\underline{v}^*(R - \{0\}), (\xi_{11}^*, \dots, \xi_{nn}^*))$$

coinciden. (Es obvio que,  $\underline{v}^*$  se define como  $\underline{v}$  para las valoraciones  $v_r^*$ ,  $r \in I$ . Y,  $\underline{v}(R - \{0\}), \underline{v}^*(R - \{0\})$  con la operación suma en  $Z^n$ , son semigrupos).

2.2.13.

Continuamos con las notaciones anteriores y vamos a considerar el semigrupo de  $\mathbb{Z}^{2n}$ ,  $S(\pi) = S(f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n)$ . Indicamos algunas igualdades que nos serán útiles, si  $I' = \{1, 2, \dots, 2n\}$ , se tiene:

i)  $i \in I'$  e  $i = 2r$ ,  $r \in I$ , entonces,  $\text{pr}_{(i)} S(\pi) = S(f'_r)$ .

ii)  $i \in I'$  e  $i = 2r - 1$ ,  $r \in I$ , entonces,  $\text{pr}_{(i)} S(\pi) = S(f_r)$ .

iii)  $i, j \in I'$ ,  $i \neq j$ , entonces,

$$\text{pr}_{(i,j)} S(\pi) = S(f^{(i)}, f^{(j)}) \cup (\infty, \infty).$$

Donde,  $f^{(i)} = f'_r$  si  $i = 2r$ ,  $r \in I$ ;  $f^{(i)} = f_r$  si  $i = 2r - 1$ ,  $r \in I$ . Lógicamente,  $\text{pr}_J S(\pi)$  para  $J \subseteq I'$  indica la proyección referida a los índices de  $J$  de  $S(\pi)$ .

Teorema

Dos sucesiones  $\pi$  y  $\pi^*$  finitas de transformaciones multicuadráticas, son equivalentes (en las mismas condiciones que 2.2.10, con  $n$  subsucesiones simples cada una), si y sólo si, existe una permutación  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , tal que, los semigrupos del semigrupo aditivo  $\bar{\mathbb{Z}}_+^{2n}$  ( $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 0\}$ ),

$S(f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n)$ . y  $S(f_{\sigma(1)}^*, f_{\sigma(1)}^{*'}, \dots, f_{\sigma(n)}^*, f_{\sigma(n)}^{*'})$ , son isomorfos.

Demostración

Supongamos que,

$$S(f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n) = S(f_{\sigma(1)}^*, f_{\sigma(1)}^{*'}, \dots, f_{\sigma(n)}^*, f_{\sigma(n)}^{*'}).$$

Si  $i \in I'$ ,  $i = 2r - 1$ , se tiene,

$$\text{pr}_{(i,i+1)} S(f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n) = \text{pr}_{(i,i+1)} S(f_{\sigma(1)}^*, \dots, f_{\sigma(n)}^{*'})$$

Es decir, por las igualdades anteriores, para todo  $r \in I$ ,  $S(f_r, f'_r) = S(f_{\sigma(r)}^*, f_{\sigma(r)}^{*'})$ .



Por 2.1.9. y la elección de  $f_r, f'_r, f_r^*, f_r^{*'}$ , se tiene que,  $\pi_r$  y  $\pi_r^*$  son equivalentes.

Sean  $r, s \in I$ ;  $r \neq s$ , considerense  $r', s' \in I'$ ,  $r' = 2r - 1$ ;  $s' = 2s - 1$ , se tiene,

$$\text{pr}_{(r',s')} S (f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n) = \text{pr}_{(r',s')} S (f_{\sigma(1)}^*, \dots, f_{\sigma(n)}^*)$$

Aplicando la igualdad iii),  $S (f_r, f'_s) = S (f_{\sigma(r)}^*, f_{\sigma(s)}^*)$ ,

de donde se deduce que,  $\gamma_{S(f_r, f'_s)}^0 = \gamma_{S(f_{\sigma(r)}^*, f_{\sigma(s)}^*)}^0$  y las primeras proyecciones  $\text{pr}_1$  indican,

$$\text{pr}_1 \gamma_{S(f_r, f'_s)}^0 = \text{pr}_1 \gamma_{S(f_{\sigma(r)}^*, f_{\sigma(s)}^*)}^0$$

de donde se tiene,

$$(f_r, f'_s) = (f_{\sigma(r)}^*, f_{\sigma(s)}^*).$$

Si aplicamos 2.2.10 y 2.2.11., como  $\xi_{rs} = \xi_{\sigma(r)\sigma(s)}$ , para  $r, s \in I$ ,  $r \neq s$ . Y como  $\pi_r$  es equivalente a  $\pi_{\sigma(r)}^*$ , para todo  $r \in I$ , se deduce que  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes.

Recíprocamente, supongamos que  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes y recordemos que  $n$  es el número de subsucesiones simples que ambas poseen. Si  $n = 1$ , por 2.1.9. se deduce,  $S(f_1, f'_1) = S(f_1^*, f_1^{*'})$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , por ser  $\pi$  y  $\pi^*$  equivalentes, se tiene que,

$$G(\pi) = G(\pi^*).$$

Para mayor sencillez en la prueba, podemos suponer que, mediante una permutación  $\sigma \in \mathcal{J}_n$  hemos reordenado las subsucesiones de  $\pi^*$ , de manera que, la rama del grafo que llamaremos "rama  $r$ " y que se obtendrá, de manera única, con la pareja  $f_r, f'_r$ , será también la que se obtenga de forma única de  $f_r^*, f_r^{*'}$ , para todo  $r \in I$ . Será suficiente con probar que,  $S(f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n) = S(f_1^*, f_1^{*'}, \dots, f_n^*, f_n^{*'})$ , y por lo tanto, bastará con demostrar que,

$$S (f_1, f_1', \dots, f_n, f_n') = S (f_1^*, f_1^{*'}, \dots, f_n^*, f_n^{*'})$$

Modificando la notación, por comodidad, escribiremos,

$$g_{2r-1} = f_r; g_{2r} = f_r'; g_{2r-1}^* = f_r^*; g_{2r}^* = f_r^{*'}, r \in I.$$

Se trata de probar,

$$S (g_1, \dots, g_{2n}) = S (g_1^*, \dots, g_{2n}^*).$$

Aplicamos los resultados descritos en 2.1.7. y es, pues, trivial que,  $S (g_1, \dots, g_{2n})$  depende en exclusiva de tres factores:

- a) La clase de equisingularidad de  $g_i, i \in I' = \{ 1, \dots, 2n \}$ .
- b) Las multiplicidades  $(g_i, g_j); i, j \in I', i \neq j$ .
- c) Las proyecciones  $pr_J S (g_1, \dots, g_{2n}) = S_J (g_1, \dots, g_{2n})$  para  $J \subset I'$ , con  $\text{card.} J = 2n - 1$ .

Como  $\pi$  y  $\pi^*$  son equivalentes, tras la aplicación a los índices de las subsucesiones  $\pi_r^*, r \in I$ , de la permutación  $\sigma$  descrita para las ramas, se tiene que  $\pi_r$  y  $\pi_r^*$  son equivalentes y como consecuencia, para cada  $i \in I', i = 2r - 1; r \in I$ , puede escribirse que,

$$S (g_i, g_{i+1}) = S (g_i^*, g_{i+1}^*)$$

Esto permite establecer que,

I)  $g_i, g_i^*$  son equisingulares;  $i \in I'$ .

II)  $(g_i, g_{i+1}) = (g_i^*, g_{i+1}^*); i \in I', i = 2r - 1; r \in I$ .

[ 2.2.13. ]

Observese que por 2.2.10, si  $r, s \in I, r \neq s$

$$(f_r^{(s)}, f_s^{(r)}) = (f_r^{*(s)}, f_s^{*(r)})$$

con la notación allí utilizada, y:

$(g_i, g_j) = (g_i^*, g_j^*),$  para  $i, j \in I'; i \neq j$  salvo  $i, j$  consecutivos e  $i$  impar, caso descrito en [2.2.13., II].

En consecuencia, para probar la igualdad de los semigrupos  $S (g_1, \dots, g_{2n}) = S (g_1^*, \dots, g_{2n}^*),$  bastará comprobar las igualdades c) ( a) y b) coinciden ).

Para ello será suficiente, por simetría, suponer  $J = \{ 1, 2, \dots, 2n-1 \}$ . En primer lugar, afirmamos que para que  $S_J (g_1, \dots, g_{2n}) = S_J (g)$ , coincida con,  $S_J (g_1^*, \dots, g_{2n}^*) = S_J (g^*)$ , es suficiente que,  $S (g_1, \dots, g_{2n-1}) = S (g_1^*, \dots, g_{2n-1}^*)$ . En efecto, vamos a comprobar que si se cumple esta última igualdad, entonces,  $S_J (g) \subseteq S_J (g^*)$ . (La otra contención se sigue de la simetría).

Sea pues  $z \in S_J (g)$ , entonces, existe  $h \in K[[X, Y]]$ , tal que,  $h$  no es divisor de cero en  $K[[X, Y]]/(g_1, \dots, g_{2n})$ , de modo que,  $z = (u_{g_1}(h), \dots, u_{g_{2n-1}}(h))$ , es pues obvio que,  $z \in S (g_1, \dots, g_{2n-1})$ , en consecuencia,  $z \in S (g_1^*, \dots, g_{2n-1}^*)$  y existe  $h^*$  con  $h^*$  no divisor de cero en  $K[[X, Y]]/(g_1^*, \dots, g_{2n-1}^*)$ , tal que,  $z = (u_{g_1^*}(h^*), \dots, u_{g_{2n-1}^*}(h^*))$ . Con lo cual, si  $h^*$  no es divisor de cero en  $K[[X, Y]] / (g_1^*, \dots, g_{2n}^*)$  está probada nuestra afirmación. En caso contrario, si  $h^*$  es divisor de cero en este último anillo, se deduce que  $h^*$  es múltiplo de  $g_{2n}^*$ , por ser  $g_i$  equisingular a  $g_i^*$  para  $i \in I'$ , existe  $h' \in K[[X, Y]]$ , tal que,  $u_{g_i^*}(h^*) = u_{g_i}(h')$ , para cada  $i \in I'$ , luego,  $h'$  es múltiplo de  $g_{2n}$  y cumple que,

$$z = (u_{g_1}(h'), \dots, u_{g_{2n-1}}(h')) \notin S_J(g)$$

lo que es absurdo.

En conclusión, el resultado es cierto si para todo  $i \in I'$

$$S (g_1, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{2n}) = S (g_1^*, \dots, \hat{g}_i^*, \dots, g_{2n}^*)$$

La iteración de este procedimiento, nos conduce a que se tendrá el resultado si,  $S (g_i) = S (g_i^*)$  para todo  $i \in I'$ , cuestión obvia.

Nota

Nos conviene aclarar que la elección de las  $f_r, f'_r$  para la sucesión  $\pi$  ( ó  $f_r^*, f'_r^*$  para la  $\pi^*$  ),  $r \in I$ , no influye en el semigrupo  $S(f_1, \dots, f_{2n})$  (  $S(f_1^*, \dots, f_{2n}^*)$  ). La prueba consiste en seguir exactamente la recíproca del teorema a partir de [ 2.2.13. ].

### 2.3. Equivalencia discreta de familias finitas de valoraciones divisoriales.

#### 2.3.1. Definición

Un grafo con cotas y marcas es una cuaterna  $G = (V, B, h, m)$ , tal que:

a)  $V$  es un conjunto finito o numerable, cuyos elementos se denominan vértices.

b)  $B \subseteq (V \times V - \Delta) / \sim$ , donde  $\Delta = \{ (a,a) / a \in V \}$  y  $\sim$  es la relación de equivalencia simetrizante, es decir,

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (c,d) = (a,b) \text{ ó } (c,d) = (b,a).$$

Los elementos de  $B$  se llaman arcos.

c)  $h: V \longrightarrow \mathbb{N}_+ = \{ n \in \mathbb{N} / n > 0 \}$ , función denominada cota.

d)  $m: V \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$ , función denominada marca.

#### 2.3.2. Definición

Dos grafos  $G = (V, B, m, h)$  y  $G' = (V', B', m', h')$ , con cotas y marcas, se diran isomorfos, y se escribirá  $G \simeq G'$ , si existe una biyección  $\psi: V \longrightarrow V'$ , tal que,  $h' \circ \psi = h$ ;  $m' \circ \psi = m$  y se tiene,  $(a,b) \in B$ , si y sólo si,  $(\psi(a), \psi(b)) \in B'$ .

#### 2.3.3.

Sea  $\nu$  una valoración divisorial que domina al anillo local  $R$ , su grafo dual puede ser visto como un grafo con cotas y marcas, donde los vértices serán los del grafo dual; los arcos serán las parejas de vértices unidos por el grafo dual; las cotas serán los pesos del grafo dual y las marcas valdrán cero.

La noción de grafo con cotas y marcas, se ha introducido para generalizar el grafo indicado a familias de valoraciones divisoriales, al no ser posible hacer esto con un grafo pesado, como indicaremos.

Sea pues,  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$  una familia finita de valoraciones divisoriales, puede asociarsele una sucesión finita de transformaciones multicuadráticas del modo siguiente:

Supondremos que todas las valoraciones  $v_i$  tienen el mismo centro en  $X = \text{Spec } R$ , el punto cerrado  $P_0$ . Sea  $\pi^1$  la explosión de centro  $P_0$ ,  $\pi^1 : X_1 \longrightarrow X$ .

Consideremos los centros de las valoraciones  $v_r$  en  $X_1$  que sean puntuales. Si el centro de alguna no es un punto cerrado ya no se considera en el futuro. Explotando dichos puntos, se obtiene el esquema  $X_2$  y la transformación multicuadrática  $\pi^2$ ,

$$\pi^2: X_2 = X_{2,r_2} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{2,2} \longrightarrow X_{2,1} \longrightarrow X_1$$

Repitiendo este proceso, de explotar en centros cerrados de las valoraciones que permanecen, se obtiene una sucesión finita de transformaciones multicuadráticas  $\pi$ ,

$$(\pi): X_{N+1} \xrightarrow{\pi^{N+1}} X_N \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi^2} X_1 \xrightarrow{\pi^1} X$$

expresada con la notación de 2.2.1., que ha finalizado en  $X_{N+1}$ , pues en él, ya no existe centro cerrado de ninguna valoración.

A la familia  $\{ v_r \}_{r=1}^n$  se le asocia un grafo  $G ( v_1, v_2, \dots, v_n )$  con cotas y marcas, como sigue. Cada divisor obtenido es un vértice, los arcos unen sólo vértices que se "cortan". La cota de los vértices de  $L_i$  es  $i$ . Y la marca vale cero salvo en los casos siguientes:

i) Los divisores que son centro de una valoración que se llega a olvidar en alguno de los pasos anteriores y, tales que, algún punto de ellos es centro de alguna explosión de  $\pi$ . La marca de ese divisor será el número de valoraciones cuyo centro es ese divisor.

ii) Si un divisor es centro de  $p > 1$  valoraciones y sobre él no se vuelve a explotar, la marca que se le asigna es  $p - 1$ .

Gráficamente, se puede indicar así, vértices por puntos, arcos por segmentos que unen puntos, cotas por números sobre los vértices y, marcas mediante un aspa y un número sobre ella, si es nula no se hace constar.

Es conveniente indicar que es necesario incorporar las marcas debido a la existencia de valoraciones, tales que, su centro es el divisor excepcional en algún  $X_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq N$ ;  $1 \leq j \leq r_i$  ( es decir, tales que, su grafo sea una parte del de alguna otra valoración de la familia  $\{ v_r \}_{r=1}^n$  ).

#### 2.3.4. Definición

Dos familias  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ ;  $\{ v'_1, v'_2, \dots, v'_n \}$  de valoraciones divisoriales se dicen discretamente equivalentes ( o simplemente, equivalentes ) si,

$$G ( v_1, v_2, \dots, v_n ) \approx G ( v'_1, v'_2, \dots, v'_n )$$

#### 2.3.5. Proposición

Sea  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ , una familia de valoraciones divisoriales. Y sean  $\{ f_r, f'_r \}$ , elementos generales que cumplen las condiciones de 2.1.4. para cada  $v_r$ ,  $r \in I$ . El dato dado por los pares de contacto y los tipos de equisingularidad, de los elementos de la familia  $\{ f_1, f'_1, f_2, f'_2, \dots, f_n, f'_n \}$ , son suficientes para calcular el grafo con cotas y marcas  $G ( v_1, v_2, \dots, v_n )$ .

#### Demostración

Por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , es 2.1.4.

Si  $n = 2$ , podemos diferenciar dos casos, uno de los divisores que aparecen en la desingularización de una de las valoraciones, es centro ( tras coincidir los centros de ambas hasta ese divisor ) de la otra, como primer caso, y como segundo, que esto no ocurra.

En el segundo caso, la sucesión de transformaciones descrita en 2.3.3, tiene dos subsucesiones simples  $\pi_1$  y  $\pi_2$  y el grafo  $G(v_1, v_2)$  coincide con  $G(\pi_1, \pi_2)$ , descrito con los datos conocidos en 2.1.8, pues  $G(v_1, v_2)$  no tiene marcas.

En el primero,

$$\min_{\substack{f \text{ general de } v_1 \\ g \text{ general de } v_2}} (f|g) = \min \{ (f_1|f_2), (f_1|f'_2), (f'_1|f_2), (f_1|f'_2) \}$$

Por simplicidad, sea  $(f_1|f_2)$  este valor. En consecuencia, el peso del último divisor común de las valoraciones  $v_1$  y  $v_2$  será  $\#B(f_1 f_2)$ .

Si  $\#B(f_1 f_2) < \#B(f_1 f'_1)$  y  $\#B(f_1 f_2) < \#B(f_2 f'_2)$ , estamos en el caso segundo, luego:

a)  $\#B(f_1 f_2) = \#B(f_1 f'_1)$ , y el grafo será el de  $v_2$  con una marca 1 en el peso  $\#B(f_1 f'_1)$ .

b)  $\#B(f_1 f_2) = \#B(f_2 f'_2)$ , y el grafo será el de  $v_1$  con una marca 1 en el peso  $\#B(f_2 f'_2)$ .

Supongamos que el resultado es cierto para cualquier  $k < n$ , probemoslo para  $n$ .

En primer lugar, si consideramos  $s < n$  valoraciones  $v_1, \dots, v_s$ , por simplicidad, podemos encontrar el número de puntos infinitamente próximos comunes a ellas y, será suficiente conocer,

$$\min_{\substack{i \text{ general de } v_i \\ i \in J = \{1, \dots, s\}}} \{ (f^1 | f^2 | \dots | f^s) \} \quad [ 2.3.5. ]$$



Y,

$$\begin{aligned}
 f^i_{\text{general de } \mathcal{V}_i, i \in J} \text{ m\u00edn } \{ (f^1 | f^2 | \dots | f^s) \} &= \\
 &= f^i_{\text{general de } \mathcal{V}_i} \text{ m\u00edn } \left( \text{m\u00edn } \{ (f^i | f^j) \}_{j \in J, i \neq j} \right) = \\
 &= f^i_{\text{general de } \mathcal{V}_i, i \in J} \text{ m\u00edn } \{ (f^i | f^{(j)}) \} = (f^{(i)}_{i_1} | f^{(j)}_{j_1}), \quad i_1, j_1 \in J, \\
 & i_1 \neq j_1. \quad (\text{La notaci\u00f3n } f^{(j)}_{i_1} \text{ se indica en 2.2.7.}).
 \end{aligned}$$

Puesto que,

$$(f^{(i)}_{i_1} | f^{(j)}_{j_1}) = \text{m\u00edn } \{ (f^{(i)}_1 | f^{(j)}_2 | \dots | f^{(s)}_s) \}.$$

Nuestros datos sirven para obtener [ 2.3.5. ] y, aplicando [ D ] 1.2.1. y 1.2.2., el n\u00famero de puntos infinitamente pr\u00f3ximos comunes a las sucesiones de transformaciones cuadr\u00e1ticas de  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ , que representaremos,  $\#B(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s)$ .

Sea  $i_0 = \#B(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s)$ .

A) Si  $i_0 < \#B(f_{r_1} | \dots | f_{r_m})$ , para todo  $r \in I$ , obtendremos un grafo  $G(i_0, -)$  con todas sus marcas cero y como se describi\u00f3 en 2.2.3. Sean  $P_{i_0 j_{i_0+1}}$  con  $1 \leq j_{i_0+1} \leq r_{i_0+1}$  los puntos infinitamente pr\u00f3ximos que existen en el divisor  $L_{i_0}$ .  $I_{j_{i_0+1}} = \{ r_1, \dots, r_m \} \subset I$  ( $I_{j_{i_0+1}} \neq I$ ), tales que,  $P_{i_0 j_{i_0+1}}$  son puntos infinitamente pr\u00f3ximos de la sucesi\u00f3n  $\mathcal{V}_{r_j}$  con  $j \in \{ 1, 2, \dots, m \}$ .

Considerando los grafos  $G_{i_0 j_{i_0+1}}(+)$ , marcados y obtenidos por inducci\u00f3n de las familias  $\{ f_{r_1}, f'_{r_1}, \dots, f_{r_m}, f'_{r_m} \}$ , podremos escribir,

$$G(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s) = G(i_0, -) \amalg G_{i_0 1}(+) \amalg \dots \amalg G_{i_0 r_{i_0+1}}(+)$$

observando que las marcas no afectan a la adjunci\u00f3n.

B) Si ahora,  $i_0 = \#B ( f f'_r )$ , para  $r = r_1, \dots, r_p \in I$ . El grafo  $G(i_0, -)$  será el indicado en A) pero con una marca  $p$  en su último divisor y cero en el resto, salvo que  $p = n$ , en cuyo caso será la marca,  $p - 1$ .

Considerando las valoraciones,

$\{ v_1, \dots, \hat{v}_{r_1}, \dots, \hat{v}_{r_p}, \dots, v_n \}$ , aplicando inducción y suprimiendo los  $n$  primeros vértices, obtenemos un grafo denotado  $G(i_0, +)$ , con sus correspondientes marcas y por lo tanto,

$$G(v_1, \dots, v_n) = G(i_0, -) \amalg G(i_0, +)$$

### 2.3.6. Proposición

Sean  $\{ v_1, \dots, v_n \}$  y  $\{ v_1^*, \dots, v_n^* \}$ , dos familias de valoraciones divisoriales y  $\{ f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n \}$ ;  $\{ f_1^*, f'^*_1, \dots, f_n^*, f'^*_n \}$  familias de elementos generales descritas como en 2.3.5., entonces si,

$$S ( f_1, f'_1, \dots, f_n, f'_n ) \approx S ( f_{\sigma(1)}^*, f'^*_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)}^*, f'^*_{\sigma(n)} )$$

para alguna permutación  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , se tiene que, las familias de valoraciones anteriores son equivalentes.

### Demostración

Aplicando 2.2.13. y 2.1.8., a partir de cada semigrupo, pueden tenerse en 2.3.5., los datos necesarios para obtener los grafos con cotas y marcas. Al ser idénticos, salvo el orden dado por  $\sigma$ , dichos datos se tiene,

$$G(v_1, \dots, v_n) \approx G(v_1^*, \dots, v_n^*)$$

### 2.3.7. Nota

La recíproca de la proposición anterior no es siempre cierta, así, si  $v$  tiene como desarrollo H-N,  $y = x^2 + x^2 z_1^*$  (  $\{ x, y \}$  es cierto sistema de parámetros de  $\mathbb{R}$  ). Podemos tomar,  $f_1 \equiv ( \bar{y} = \bar{x}^2 + \bar{x}^3 + \dots ; f_1' \equiv ( \bar{y} = \bar{x}^2 + 2 \bar{x}^3 + \dots )$  ( entre parentesis, los desarrollos H-N de las curvas ).

Si ahora tomamos,  $f_2 \equiv ( \bar{y} = \bar{x}^2 + 3\bar{x}^3 ) ; f_2' \equiv ( \bar{y} = \bar{x}^2 + 4\bar{x}^3 )$ , asociadas también a  $v$ , y consideramos la familia  $\{ v, v \}$  se le podrán asociar  $S ( f_1, f_1', f_2, f_2' )$  y  $S ( f_1, f_1', f_2, f_1' )$ , que no son isomorfos, ya que  $f_1'$  está repetida en el segundo grupo de elementos. De hecho, bastaría que los puntos que definen  $f_i$  y  $f_i'$  en los divisores excepcionales a los que son transversales sean algunos de ellos coincidentes, para que se tenga esa situación. Así, se pueden precisar las condiciones para que la noción de general sea la de " suficientemente general ", que se necesita para establecer el resultado geométrico de que el semigrupo depende sólo de las valoraciones.

### 2.3.8. Proposición

Con las mismas notaciones que 2.3.6., si además se verifica que,

$$( f_r, f_s ) = ( f_r', f_s' ) = ( f_r, f_s' ) = ( f_r', f_s ) \text{ y,}$$

$$( f_r^*, f_s^* ) = ( f_r^*, f_s'^* ) = ( f_r'^*, f_s^* ) = ( f_r'^*, f_s'^* ), \quad \text{para } r, s \in I;$$

$r \neq s$ , se tiene que:

$$\{ v_1, \dots, v_n \} \text{ y } \{ v_1^*, \dots, v_n^* \} \text{ son equivalentes, si y sólo si,}$$

$$S ( f_1, f_1', \dots, f_n, f_n' ) \approx S ( f_{\sigma(1)}^*, f_{\sigma(1)}'^*, \dots, f_{\sigma(n)}^*, f_{\sigma(n)}'^* )$$

para alguna permutación  $\sigma \in \mathcal{J}_n$ .

### Demostración

La condición suficiente es 2.3.6.

La condición necesaria, gracias a las condiciones de la proposición, estará probada de forma análoga a la recíproca del teorema 2.2.13. Esto también prueba que, la elección de distintas familias generales con la condición dada no afecta al semigrupo completado.

b) Si  $r \notin E$ ,

$b_1)$   $g_r < p$ . Sea  $s \in E$ ,  $p \leq g_s$  y  $(f_s|h_E) > (f_s|f_r)$ , entonces,  $(f_r|h_E) = (f_s|f_r)$ , para todo  $h_E$  y,  $(f_r|h_E) = (f_r|h'_E)$ . Como  $h_E$  y  $h'_E$  son equisingulares, aplicando 2.4.3.1. se tiene,

$$v_r(h_E) = v_r(h'_E)$$

$b_2)$   $p \leq g_r$ ; Sea  $s \in E$ , existen  $f_s$  y  $f'_s$  generales de  $v_s$ , tales que,  $v_s(h_E) = (f_s|h_E) = \beta_{p+1}^s$ ,  $v_s(h'_E) = (f'_s|h'_E) = \beta_{p+1}^s$ .

(salvo constante que depende de la normalización, y no influye en los calculos). Aplicando 2.4.3.1.,

$(f_s|h_E) \leq (f_s|f'_s)$  y,  $(f'_s|h'_E) \leq (f_s|f'_s)$ . Lo que prueba que si

$(f_r|h_E) \geq \max_{s \in E} (f_s|h_E)$ , se deduce que, existe una curva  $h_E^0$  de contacto maximal de género  $p$  asociada a  $E$  con,

$$(h_E|h_E^0) \geq \max_{s \in E} (f_s|h_E)$$

Y se tiene,  $v_r(h_E^0) = \beta_{p+1}^r$  y además  $r \notin E$ , lo que es imposible.

Por tanto,

$$(f_r|h_E) < \max_{s \in E} (f_s|h_E)$$

Si  $s_0 \in E$ , tal que,  $(f_{s_0}|h_E) = \max_{s \in E} (f_s|h_E)$ , se tiene,

$(f_r|h_E) < (f_{s_0}|h_E)$ , y si  $f'_{s_0}$  cumple que,

$$(f'_{s_0}|h'_E) = \max_{s \in E} (f'_s|h'_E) \quad \text{y} \quad (f_r|h'_E) < (f'_{s_0}|h'_E).$$

Como  $(h_E|h'_E) \leq (f_{s_0}|f'_{s_0})$  y,

$$(h_E|f_{s_0}) = (h'_E|f'_{s_0}) = (h_E|f'_{s_0}) = (h'_E|f_{s_0})$$

se tiene,  $(f_r|h_E) = (f_r|h'_E)$ , y por lo tanto,

$$v_r(h_E) = v_r(h'_E)$$

**2.4. El contacto maximal para familias finitas de valoraciones divisoriales.**

2.4.1.

Sea  $\nu$  una valoración divisorial. Recordar que una familia  $\{ Q_i \}_{i \in I}$  de elementos de  $m$ , se dice que es una sucesión generatriz de  $\nu$ , si para cada  $f \in R$ , se tiene,

$$\nu(f) = \text{máx. } \{ \alpha / f \in P_\alpha \}$$

donde  $P_\alpha$ , es el ideal de  $R$  generado por:

$$\left\{ \prod_{j \in I} Q_j^{\gamma_j} / \sum_{j \in I} \gamma_j \nu(Q_j) \geq \alpha \right\}$$

Los exponentes de Puiseux asociados a  $\nu$ , pueden calcularse sin realizar transformaciones cuadráticas. Ver 1.8.

Se llama género de una valoración divisorial,  $\nu$ , a un número natural  $g^\nu$ , tal que,  $g^\nu + 2$  es el número de elementos de una sucesión generatriz minimal de  $\nu$ . La definición es correcta, pues todas las sucesiones minimales tienen el mismo número de elementos. En otras palabras,  $g^\nu$  es el género de las curvas dadas por elementos genéricos para  $\nu$ , o es uno menos, según que, el último divisor en el grafo dual ( es decir el que define la valoración ) tenga valencia 1 o 2 en el grafo dual.

En lo que sigue, salvo que se advierta lo contrario, supondremos que las valoraciones están normalizadas con  $\nu(m) = 1$ .

2.4.2. Definición

Sean  $\{ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \}$ , una familia de valoraciones divisoriales distintas, y  $g_r = g^{\nu_r}$ ,  $r \in I$ , los géneros de estas. Definimos para  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq -1$ ,  $\mathcal{P} = \{ r \in I / g_r \geq p \}$  y,  $T^p \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P})$ , así,  $A \in T^p$ , si y sólo si, existe  $h_A \in \hat{R}$ , curva de género  $p$ , analíticamente irreducible, tal que,  $\nu_i(h_A) = \beta_{p+1}^i$ , para todo  $i \in A$ . ( $\beta_{p+1}^i$  es el  $p+1$ -exponente de Puiseux de  $\nu_i$ ).

Si  $\mathcal{M} = \{ E_p^1, \dots, E_p^m \}$ , es el conjunto de maximales de  $T^p$  para la inclusión y  $\mathcal{B} = \{ h_p^1, \dots, h_p^m \}$ , una familia de curvas  $h_p^j$ , tales que,  $h_p^j$  es uno de los elementos  $h_{E_p^j}$ ,  $j \in \{ 1, \dots, m \}$ . El conjunto  $\mathcal{B}$  se llama *ramillete de curvas algebraoides con contacto maximal de género  $p$  con la familia  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$* .

### 2.4.3. Proposición

Sea  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$  la familia anterior. Para cada  $h \in \hat{F}$ , escribiremos  $\underline{v}(h) = (v_1(h), v_2(h), \dots, v_n(h)) \in \mathbb{Q}^n$ . Si  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq -1$ ,  $E \in \mathcal{M}$  y  $h_E, h'_E$  son dos posibles elementos de  $\mathcal{B}$  asociados a  $E$ , entonces,

$$\underline{v}(h_E) = \underline{v}(h'_E).$$

### Demostración

Primero probaremos el siguiente,

#### Lema 2.4.3.1.

Sean  $f_1, f_2, h_1, h_2$ , curvas dadas por elementos algebraoides de  $\hat{R}$  (como habitualmente,  $f_i$  representa el elemento de  $\hat{R}$  y la curva algebraoide asociada). Supongamos que,  $f_i$  es equisingular a  $h_i$  para  $i = 1, 2$ . Entonces:

i) Si  $(f_1|f_2) \stackrel{*}{\geq} (h_1|h_2)$ , se tiene,  $(f_1, f_2) \geq (h_1, h_2)$ . ( $\stackrel{*}{\geq}$  es el orden lexicográfico en  $\mathbb{Z}^2$ , lo representaremos  $\geq$ ).

ii) Si  $(f_1|f_2) = (h_1|h_2)$ , se tiene,  $(f_1, f_2) = (h_1, h_2)$ .

#### Demostración 2.4.3.1.

Si  $\{ x, y \}$  es un sistema regular de parámetros de  $\hat{R}$ , el desarrollo H-N de  $f_i(h_i)$ ,  $i = 1, 2$ , por ser equisingulares, será:

$$\begin{aligned}
y &= a_{01}^{(i)} x + a_{02}^{(i)} x^2 + \dots + a_{0h_0}^{(i)} x^{h_0} + x^{h_0} z_1^{(i)} \\
x &= z_1^{(i) h_1} z_2^{(i)} \\
&\dots \qquad \dots \\
&\dots \qquad \dots \\
z_1^{(i)} &= a_{s_1^{i-1} s_1^i k_1^i s_1^i}^{(i)} z_1^{(i)} + \dots + a_{s_1^{i-1} s_1^i h_1^i s_1^i}^{(i)} z_1^{(i) s_1^i} + z_1^{(i) s_1^i} z_1^{(i) s_1^i} \\
&\dots \qquad \dots \\
&\dots \qquad \dots \\
z_1^{(i)} &= a_{s_1^{i-1} s_1^i k_i^i s_1^i}^{(i)} z_1^{(i) g_i} + \dots
\end{aligned}$$

Escribimos  $l_j^i = h_j^i - k_j^i$  con  $0 \leq j \leq g_i$ . Supongamos,

$$(h_1 | h_2) = (q_0, c_0).$$

i) Si  $c_0 \leq \min \{ l_{q_0}^1, l_{q_0}^2 \}$ ;  $(h_1, h_2) = e_{q_0-1}^1 \bar{\beta}_{q_0}^2 + c_0 e_{q_0}^1 e_{q_0}^2$

ii) Si  $c_0 = l_{\rho_0}^1 + 1$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\rho_0$  es el índice de separabilidad de

$h_1$  y  $h_2$  entonces,

$$(h_1, h_2) = \min \{ e_{\rho_0}^1 \bar{\beta}_{\rho_0+1}^2, e_{\rho_0}^2 \hat{\beta}_{\rho_0+1}^1 \}$$

Además, si  $(q, c)$  es un par, tal que,  $0 \leq q \leq \rho_0$  y  $0 \leq c \leq \min \{ l_q^1, l_q^2 \}$  y  $\xi(q, c) = e_{q-1}^1 \bar{\beta}_q^2 + c e_q^1 e_q^2$ . ( Ver 2.2.6. y [ D ], cap I ). Se tiene:



i)  $\xi(q, c) < \xi(q', c')$ , si y sólo si,  $(q, c) < (q', c')$  para el orden lexicográfico.

ii)  $\xi(q, c) < \xi(\rho_0) = \min \{ e_{\rho_0}^1 \bar{\beta}_{\rho_0+1}^2, e_{\rho_0}^2 \bar{\beta}_{\rho_0+1}^1 \}$ . (Escribimos  $\bar{\beta}_{g_2+1}^2 = \bar{\beta}_{g_1+1}^1 = \infty$ ).

Pongase,  $(f_1 | f_2) = (q, c)$ , se tiene,

A) Si  $(h_1, h_2) = \xi(q_0, c_0)$ ;  $0 \leq q_0 \leq \rho_0 = \rho$  (índice de separabilidad de  $f_1$  y  $f_2$ );  $0 \leq c_0 \leq \min \{ l_{q_0}^1, l_{q_0}^2 \}$ .

A<sub>1</sub>)  $c \leq \min \{ l_q^1, l_q^2 \}$ , entonces,

$$(f_1, f_2) = \xi(q, c) \text{ y } (q_0, c_0) \leq (q, c)$$

por tanto,  $(h_1, h_2) = \xi(q_0, c_0) \leq \xi(q, c) = (f_1, f_2)$ .

A<sub>2</sub>) Si  $c = l_\rho + 1 = l_{\rho_0} + 1$ , donde,

$$l_{\rho(\rho_0)} = \min \{ l_{\rho(\rho_0)}^1, l_{\rho(\rho_0)}^2 \}, \text{ se tiene,}$$

$$(h_1, h_2) = \xi(q_0, c_0) < \xi(\rho_0) = (f_1, f_2).$$

B) Si  $(h_1, h_2) = \xi(\rho_0)$ , está claro que,

$$(h_1, h_2) = (\rho_0, \min \{ l_{\rho_0}^1 + 1, l_{\rho_0}^2 + 1 \}) \text{ y } (f_1 | f_2) \geq (h_1 | h_2);$$

$\rho = \rho_0$ , indica que,  $(f_1 | f_2) = (h_1 | h_2)$  y, en consecuencia,  $(f_1, f_2) = (h_1, h_2)$ . Esto prueba i), y el apartado ii) es trivial de i).

### 2.4.3 Demostración

Si  $h_E = h'_E$  el resultado es obvio. Sea, pues  $h_E \neq h'_E$  y  $f_r$  un elemento general de  $\nu_r$ , probaremos que,  $\nu_r(h_E) = \nu_r(h'_E)$ ,  $r \in I$ .

a) Si  $r \in E$ , entonces,

$$\nu_r(h_E) = \nu_r(h'_E) = \beta_{p+1}^{r'}$$

#### 2.4.4. Definición

Llamaremos *valor de contacto maximal de género*  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq -1$ , asociado a la familia de valoraciones  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{v(h_p^1), \dots, v(h_p^m)\}$$

donde,  $\mathcal{B} = \{h_p^1, \dots, h_p^m\}$ , es el ramillete asociado a  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  con contacto maximal de género  $p$ .

Y llamaremos *valor de contacto maximal*, asociado a la anterior familia  $a$ ,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = (\beta_0^1, \dots, \beta_0^m) \cup \bigcup_{p=0}^{\sup\{g_r\}} \bigcup_{r \in I} \mathcal{P}.$$

#### 2.4.5. Definición

Dada una familia  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de valoraciones divisoriales, se dice que la valoración  $v_{r_0}$ ,  $r_0 \in I$ , es especial, si existe otra valoración  $v_r$ ,  $r \in I$ ,  $r \neq r_0$ , tal que, todo elemento general,  $h$ , de  $v_{r_0}$  es una curva de contacto maximal de algún género con  $v_r$ .

Se suele decir que  $v_{r_0}$  es especial respecto a  $v_r$ . Puede ocurrir que existan varias valoraciones especiales entre si, entonces, se elige una al azar y el resto serán especiales respecto a ella.

#### 2.4.6.

Las anteriores definiciones de contacto maximal, dan buenos resultados para familias de valoraciones cuyo grafo tenga todas sus marcas nulas, como luego se indicará.

Para el caso general, modificaremos las definiciones en la forma siguiente, siempre para una familia de valoraciones divisoriales  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

A)  $\mathcal{M}^{*p} = \{ E_p^1, \dots, E_p^{m^*} \}$ . Donde  $E_p^i \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$ ,  $1 \leq i \leq m^*$  y está formado por los conjuntos de  $\mathcal{M}$  y otros  $E_p^t$ ,  $m^* \geq t > m$ ,  $E_p^t = \{ 1 \}$ , donde  $v_1$  es una valoración, tal que,  $g_1 = p$  y  $v_1$  indica una marca en el grafo del conjunto de valoraciones. Es trivial que si no existe ninguna de estas valoraciones  $\mathcal{M}^{*p} = \mathcal{M}$ .

B)  $\mathcal{B}^{*p} = \{ h_p^1, \dots, h_p^{m^*} \}$ ,  $h_p^i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , son las curvas algébroides irreducibles de  $\mathcal{B}$ . Para cada  $E_p^t = \{ 1 \}$ ,  $h_p^t$  es un elemento general de  $v_1$ , tal que, su multiplicidad con el resto de los elementos de  $\mathcal{B}^{*p}$  es mínima. Además, los elementos de este conjunto se tomarán distintos entre sí.

C)

$$\mathcal{V}^{*p} = \mathcal{V}^{*p}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ v(h_p^1), \dots, v(h_p^{m^*}) \}$$

y se denomina, *valor marcado de género p de contacto maximal* asociado a la familia  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ .

D. El *valor marcado de contacto maximal* asociado a la anterior

$$\text{familia será: } \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^* \{ v_1, v_2, \dots, v_n \} = (\beta_0^{r^1}, \dots, \beta_0^{r^n}) \cup \bigcup_{p=0}^{\sup(g_r)} \mathcal{V}^{*p}.$$

#### 2.4.7. Teorema

Sea  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ , una familia de valoraciones divisoriales, tales que,  $v_1, v_2, \dots, v_k$  son especiales,  $k < n$ . Entonces, a partir de  $\mathcal{V}^*(v_1, v_2, \dots, v_n)$  se puede determinar  $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

#### Demostración

Empezaremos demostrando el siguiente resultado.

2.4.7.1. Lema

Sea  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$  una familia de valoraciones, tales que, ninguna es especial, ni indica marcas. Entonces,  
 $\mathcal{P}^*(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  permite determinar  $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Demostración 2.4.7.1.

Si  $f_r$  es un elemento general bien elegido de  $v_r$ , necesitaremos sólo:

- a) Los valores  $\beta_1^{r'}$ ,  $l = 0, \dots, g_r + 1$ , asociados a cada  $v_r$ .
- b) Los números  $(f_r, f_s)$  para  $r, s \in I$ ;  $r \neq s$ .

Los números  $\beta_1^{r'}$  nos dan el grafo de cada  $v_r$  y, el número de intersección  $(f_r, f_s)$ , indica el número de puntos infinitamente próximos comunes entre los asociados a  $v_r$  y  $v_s$ .

Podemos suponer que el conjunto de valores de  $v_r$  es  $\mathbb{Z}$ , siendo aquí la normalización con grupo de valores  $\mathbb{Z}$ .

Para cada índice  $r \in I$ , sea  $f_r^*$  un elemento general de  $v_r$ , tal que,  $\beta_{g_r+1}^{r'} = (f_r^*, f_r^*)$ . Si  $J \subset I$  y,

$$\text{pr}_J : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^{\text{card}J}$$

es la proyección  $J$ -ésima usual, pondremos,

$$\text{pr}_J(\mathcal{A}(v_1, v_2, \dots, v_n)) = \{ \text{pr}_J(p) / p \in \mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n) \}$$

Entonces:

$$\beta_0^{r'} = \text{mín} \{ \text{pr}_{(r)}(\mathcal{A}(v_1, v_2, \dots, v_n)) \} \quad \text{y,}$$

$$\beta_{\rho}^{r'} = \text{mín} \{ \gamma \in \text{pr}_{(r)}(\mathcal{A}(v_1, v_2, \dots, v_n)) / \text{m.c.d.}(\gamma, e_{\rho-1}^r) < e_{\rho-1}^r \}$$

En  $[C]$ , 4.3.10., se hace la prueba de los resultados anteriores para curvas algebroides irreducibles analíticamente, pero,

$$\text{pr}_{(r)}(\mathcal{A}(v_1, v_2, \dots, v_n)) = \mathcal{P}(v_r) \subseteq v_r(\mathbb{R} - \{0\}) \subseteq S(f_r)$$

$$\text{y, } \beta_{\rho}^{r'} \in \mathcal{A}(v_r),$$

la igualdad es, entonces, cierta.

Los valores  $e_\rho^r$  son los descritos en 1.5.B y C.1 para la curva  $f_r$  y pueden deducirse de  $\beta_\rho^{r'}$ . ( Ver 2.1.1. ).

Los valores anteriores, se iran obteniendo mientras  $\text{m.c.d.} ( \beta_0^{r'}, \dots, \beta_\rho^{r'} ) > 1$ . Y  $g_r$ , será el índice que cumpla,  $\text{m.c.d.} ( \beta_0^{r'}, \beta_1^{r'}, \dots, \beta_{g_r}^{r'} ) = 1$ .

Para  $r, s \in I, r \neq s$ , definimos,

$$\pi_{r,s} = \max \{ \rho < \min \{ g_r, g_s \} / (\beta_{\rho+1}^{r'}, \beta_{\rho+1}^{s'}) \in \text{pr}_{(r,s)}(\mathcal{A}v_1, v_2, \dots, v_n) \}$$

a) Supongase que  $g_r \neq g_s$ . Tomaremos  $g_r < g_s$  ( si  $g_s < g_r$ , se obtiene analoga conclusión ).

$\pi_{r,s} < g_r$ , por lo tanto,  $\pi_{r,s} \leq g_r < g_s$ . Consideremos,

$$(u_{rs}, \beta_{\pi_{r,s}+2}^{s'}) = ( (f_r, h), (f_s, h) )$$

para  $h$ , curva de contacto maximal de género  $\pi_{r,s} + 1$  con  $v_s$ .

i) Si,  $\pi_{r,s} + 1 = g_r$  y  $\pi_{r,s} + 2 = g_s$ , se tiene,  $(f_r | h) \leq (f_s | h)$ .

Entonces,  $(f_r | f_s) \leq (f_s | h)$ , y en conclusión,

$$u_{r,s} = \frac{(f_r, f_s)}{e_{\pi_{r,s}+1}^s} = \frac{(f_r, f_s)}{e_{g_r}^s} \quad [ D ], 3.3.5.$$

ii) Si i) no se verifica, considérese,

$$(\bar{u}_{r,s}, \beta_{g_s}^{s'}) = ( (f_r, h'), (f_s, h') )$$

siendo  $h'$  una curva de contacto maximal de género  $g_s - 1$  con  $v_s$ .

$\pi_{r,s} + 2 < g_s$  nos indica que,  $(h' | f_r) \leq (h' | f_s)$  y entonces,  $(f_r | f_s) \leq (h' | f_s)$ , luego,

$$\bar{u}_{r,s} = \frac{(f_r, f_s)}{e_{g_s-1}^s}$$

b) Si  $g_r = g_s$ , pongamos  $g = g_r = g_s$ .

i) Si  $\pi_{rs} + 1 < g$ , utilizaremos el método a).

Resumiendo, hemos obtenido  $(f_r, f_s)$ , a excepción del caso en que  $\pi_{rs} + 1 = g_r = g_s$ . Además, en este momento no conocemos aún los valores  $\beta_{g_r+1}^{r'}$ ,  $r \in I$ . Esto lo haremos en c).

c) Definimos sobre  $I$ , la siguiente relación de equivalencia,

$$r, s \in I; r \mathbf{R} s, \text{ si y sólo, si } \pi_{rs} + 1 = g_r = g_s.$$

Considérese,  $I / \mathbf{R} = \{ \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m \}$ .  $I' = \{ r_1, r_2, \dots, r_m \} \subseteq I$ .

Después de aplicar a) y b), obtenemos  $(f_k, f_q)$ , para  $k, q \in \{ 1, 2, \dots, m \}$ ,  $k \neq q$ . Entonces,

$$\bar{r}_k = \{ r_k = t_1^k, t_2^k, \dots, t_{\mu}^k \} = \{ t_1, t_2, \dots, t_{\mu} \}$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{\mu}.$$

(Utilizaremos esta notación si no estamos interesados en  $k$ )

Sea,

$$\mathfrak{B} = \{ \underline{v} (h) \in \mathcal{A}(v_1, v_2, \dots, v_n) / h \text{ no es general de ninguna valoración } v_r, r \in I \}.$$

Podemos obtener  $\mathcal{V}$ - $\mathfrak{B}$ , porque sus elementos son  $n$ -uplas de  $\mathcal{V}$  tales que, no contienen ninguno de los valores  $\beta_{\rho}^{r'}$ ,  $0 \leq \rho \leq g_r$ , en la proyección de índice  $r$ ,  $r \in I$ .  $\mathcal{V}$  tiene sólo un elemento con esta condición para cada  $r \in I$ . Entonces  $\mathcal{V}$ - $\mathfrak{B}$ , tiene exactamente  $n$ ,  $n$ -uplas, estas son,

$$\{ \underline{a}^r = \underline{v} (h_r) / h_r \text{ es general de } v_r \}_{r \in I}$$

Escribiremos  $\mathcal{V} - \mathcal{B}$  como una matriz  $n \times n$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}) = \underline{a}^{\sigma(r)} \text{ para } \sigma \in \mathcal{J}_n, r \in I.$$

A continuación, consideremos la submatriz de  $A$ , siguiente:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1t_1} & a_{1t_2} & \dots & a_{1t_\mu} \\ a_{2t_1} & a_{2t_2} & \dots & a_{2t_\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{nt_1} & a_{nt_2} & \dots & a_{nt_\mu} \end{bmatrix}_{n \times \mu}$$

donde,

$$(a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_\mu}) = ((f_{t_1}, h), (f_{t_2}, h), \dots, (f_{t_\mu}, h)),$$

para  $h$  elemento general de  $\mathcal{V}_{\sigma(r)}$ .

Conocemos estos datos si  $r \notin \tilde{r}_k$ , entonces, en  $A'$  omitimos estos números. Si existen dos o más filas que coinciden con una, omitiremos una cualquiera.





Repitiendo el procedimiento para  $t_2, \dots, t_\mu$  y para cada clase de equivalencia  $\bar{r}_k$ , completamos todos los datos precisos para obtener el grafo dual  $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

#### 2.4.7.2. Nota

En el lema anterior, se ha supuesto que las valoraciones están normalizadas sobre  $\mathbb{Z}$ . Si consideramos para definir el conjunto  $\mathcal{V}$  normalizaciones de  $v_r$ , con  $v_r(m) = 1$ , siempre podemos poner  $\beta_0^{r'} = 1$ ; y,

$$\beta_\rho^{r'} = \min \left\{ \gamma \in \text{pr}_{(r)}(\mathcal{R}(v_1, v_2, \dots, v_n)) / \gamma \notin \sum_{q=0}^{p-1} \mathbb{Z}_+ \beta_q^{r'} \right\}$$

para  $1 \leq \rho \leq g_r$ ,  $r \in I$  ( ver [ C ], 4.3.10. ).

Si además,  $e_0^r$  se define como el único número natural, tal que,  $e_0^r \beta_\rho^{r'} \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \rho \leq g_r$  y  $\text{m.c.d.}(e_0^r \beta_0^{r'}, \dots, e_0^r \beta_{g_r}^{r'}) = 1$ . Obtendremos la normalización sobre  $\mathbb{Z}$ ,  $e_0^r v_r$ , que utilizabamos en el lema anterior.

#### 2.4.7.3. Lema

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , una familia de valoraciones divisoriales, tales que,  $v_r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , son especiales ( $k < n$ ). Supongamos que ninguna indica una marca en el grafo asociado. Entonces, el conjunto  $\mathcal{V}^*(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{R}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  permite determinar el grafo.

#### 2.4.7.3. Demostración

Sea  $J = \{k+1, k+2, \dots, n\} \subset I$ . Ninguna de las valoraciones  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  es especial, ni da marcas. Considérese  $\text{pr}_J \mathcal{R}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{R}(v_{k+1}, \dots, v_n)$  y aplicando 2.4.7.1. se obtiene  $G(v_{k+1}, \dots, v_n)$ . Para obtener  $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , basta con completar el grafo anterior con la información que dan las valoraciones especiales.

Supongase que  $h_r^1$ ,  $k + 1 \leq l \leq n$ , es una curva de contacto maximal de género  $r$  con  $v_1$ . Tomense los valores  $v_s(h_r^1)$ , para  $1 \leq s \leq k$ , ( Por 2.4.7.1. los exponentes  $\beta^r$  asociados a  $v_s$  son conocidos ) que muestran los valores  $(h_r^1, f_s)$ , donde  $f_s$  es un elemento general de  $v_s$ , lo que permite obtener  $n_{sl}^r = \#B(h_r^1, f_s)$ . ( Aplicar 1.5.B y C.1. ).

Para cada  $v_1$ , tomaremos su desarrollo H-N como en el capítulo 1 y su grafo dual, si  $H(j) = \sum_{d \leq j} h_d$ , el número de divisores de la estrella  $i$ , será,  $H(s_i) + 1$ . Escribiremos  $n_i^1$  este número y si  $n_{sl}^i > n_i^1$ , entonces,  $v_s$  es especial respecto a  $v_1$  y tendremos que añadir al divisor de peso  $H(s_i) + 1$  de  $v_1$ , otros divisores libres con pesos  $H(s_i) + 2, \dots, H(s_i) + 1 + n_{sl}^i - n_i^1$ . Este método completa el grafo.

#### 2.4.7. Demostración

Las mismas técnicas de 2.4.7.1. y 2.4.7.2. prueban el teorema, pues la elección de curvas en  $\mathcal{C}$  de manera que tomamos diferentes elementos, garantiza el resultado.

La prueba se ha realizado de esta forma, en lugar de directamente, porque si  $\pi$  es una sucesión de transformaciones multicuadráticas, tendrá asociada una única familia de valoraciones como las de 2.4.7.2. ( cuya sucesión asociada es  $\pi$  ) y de este modo, se ha probado que  $\mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  determina el grafo de  $\pi$ .

#### 2.4.8. Notación

Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , tomese el conjunto,

$$U_n^0 = \{ (A, k) / A \subseteq \mathbb{Q}^n; k \in \mathbb{N}, k < n \}$$

y en él la siguiente relación:

$$(A, k) \sim (B, k') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } k = k' \\ \text{ii) Existe } \sigma \in \mathcal{S}_k \text{ y } \tau \in \mathcal{S}_{n-k} \text{ tales que} \\ B = \left\{ (\sigma(\text{pr}_{(1, \dots, k)} \underline{a}), \tau(\text{pr}_{(k+1, \dots, n)} \underline{a})) / \underline{a} \in A \right\} \\ \text{La acción de las permutaciones es} \\ \text{sobre los índices.} \end{array} \right.$$

$U_n$  denotará el conjunto cociente  $U_n^0/S$ .

#### 2.4.9. Teorema

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , una familia de valoraciones divisoriales. La clase de equivalencia  $(\mathcal{V}^*(v_1, v_2, \dots, v_n), k) \in U_n$  es un invariante (numérico) completo de la clase de equivalencia discreta de  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

#### Demostración

Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  son dos conjuntos de valoraciones divisoriales, tales que,

$$(\mathcal{V}^*(v_1, v_2, \dots, v_n), k) \sim (\mathcal{V}^*(v'_1, v'_2, \dots, v'_n), k'),$$

entonces,  $k = k'$ , esto es, el número de valoraciones especiales es el mismo. Y podemos decir que, para una reordenación de índices que no modifican el grafo, se tiene,

$$\mathcal{V}^*(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{V}^*(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$$

y las valoraciones de índice  $r \leq k$  son especiales. Por 2.4.7. los grafos coinciden y las familias son discretamente equivalentes.

Recíprocamente, sean  $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$  y  $\{ v'_1, v'_2, \dots, v'_n \}$  dos conjuntos de valoraciones discretamente equivalentes, para una buena reordenación de los índices,  $v_r$  y  $v'_r$  tienen el mismo desarrollo H-N, a excepción de los valores  $a_{ij}$  y  $z_i$  ( ver cap.1 ). En la ordenación, colocaremos primero las especiales.

Sea  $E \in \mathcal{M}( v_1, v_2, \dots, v_n )$ ,  $E = \{ r_1, r_2, \dots, r_1 \}$ . Si  $h$  es un elemento asociado a  $E$ ,  $h$  tendrá género  $p$  y el desarrollo H-N, para la base  $\{ X, Y \}$ , ( $Z_{-1} = X+(h) = x$ ;  $Z_0 = Y + (h) = y$ ;  $\in R/(h)$  ) siguiente,

$$\begin{aligned}
 y &= a_{01} x + a_{02} x^2 + \dots + a_{0h_0} x^{h_0} + x^{h_0} z_1 \\
 x &= z_1^h z_2 \\
 &\dots \qquad \dots \\
 &\dots \qquad \dots \\
 z_{s_p-1} &= a_{s_p, k} z_p^k + \dots + a_{s_p, k+c-1} z_p^{k+c-1} + \dots
 \end{aligned}$$

[2.4.9.A.]

Este desarrollo, coincide con el de  $v_{r_j}$ ,  $1 \leq j \leq l$ , al menos hasta el término  $a_{s_p, k+c-1} z_p^{k+c-1}$ , para diferentes  $z_i^j$  ( ver [ S-II ], 6.8. ).

Sea  $E = \{ r_q \} \in \mathcal{M}^* ( v_1, v_2, \dots, v_n ) - \mathcal{M}( v_1, v_2, \dots, v_n )$ . Entonces,  $h$  asociado a  $E$ , será un elemento general de  $v_{r_q}$  y tendremos para  $h$ , un desarrollo como [ 2.4.9.A. ] ( con diferentes  $z_j$ ,  $-1 \leq j \leq s_1$  ), salvo que el último término coincidente con [ 2.4.9.A. ] puede ser,  $a_{s_p, k+c'-1} z_p^{k+c'-1}$  para  $c' \leq c$ , y los términos restantes indican mínima multiplicidad con los elementos de  $\mathcal{M}^* ( v_1, v_2, \dots, v_n )$ .

Puesto que,  $\mathcal{M}^*P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ ,  
 podemos encontrar,  $h'$  asociado a  
 $E = \{ r_1, r_2, \dots, r_1 \} \in \mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ , con desarrollo H-N,

$$y = a'_{01}x + a'_{02}x^2 + \dots + a'_{0h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z'_1$$

$$x = z_1^{h_1}z'_2$$

$$\dots \dots$$

$$\dots \dots$$

$$z'_{s-p-1} = a'_{s-p, k} z'_{s-p} + \dots + a'_{s-p, k+c-1} z'_{s-p}^{k+c-1} + \dots$$

[ 2.4.9.B. ]

Este desarrollo es ( para una buena base  $\{ X, Y \}$  ,  
 $Z'_{-1} = X+(h') = x; Z'_0 = Y + (h') = y \in R/(h')$  ) el mismo que el de  
 $v'_{r_1}, v'_{r_2}, \dots, v'_{r_1}$  hasta, al menos, el término  $a'_{s-p, k+c-1} z'_{s-p}^{k+c-1}$ .

Por lo tanto  $h$  y  $h'$  son equisingulares. Y para  $r \in E$ ,

$$v_r(h) = v'_r(h') = \beta_r^{p+1}$$

De forma parecida, si,

$$\tilde{E} = \{ r_q \} \in \mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n) - \mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n),$$

existe  $h'$  con desarrollo como [ 2.4.9.B. ] pero, con último término  
 coincidente  $a'_{s-p, k+c'-1} z'_{s-p}^{k+c'-1}$ ;  $c' \leq c$ , y mínima multiplicidad con los  
 elementos de  $\mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ .

Entonces,  $h$  asociada a  $\tilde{E} = \{ \tilde{r}_q \} \in \mathcal{M}^*P(v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $h'$   
 asociado a  $\tilde{E} = \{ \tilde{r}_q \} \in \mathcal{M}^*P(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  son equisingulares y  
 para  $r \in \tilde{E}$ ,

$$v_r(h) = v'_r(h')$$

Supongase, ahora, que  $s \notin E$  ( maximal de  $\mathcal{M}^{*p}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{M}^{*p}(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  ). Existe  $r \in E$ ,  $r \neq s$  con  $(f_r|f_s) = (f'_r|f'_s)$  ( donde  $f'_l, f_l$  denotan elementos generales cualesquiera de  $v'_l$  y  $v_l$ , para  $l \in \{ 1, 2, \dots, n \}$  ).

Si  $h$  y  $h'$  son como se indicó anteriormente, se tiene,

$$(h|f_s) = (f_r|f_s) \text{ y } (h'|f'_s) = (f'_r|f'_s)$$

y entonces,

$$v_s(h) = (h, f_s) = (2.4.3.1.) = (h', f'_s) = v'_s(h')$$

( salvo la misma constante para las igualdades interiores ), y podemos decir:

$$(v_1(h), v_2(h), \dots, v_n(h)) = (v'_1(h'), v'_2(h'), \dots, v'_n(h')) \in \mathcal{D}^{*p}(v'_1, v'_2, \dots, v'_n),$$

para cada  $p \leq \sup. \{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$  ( =  $\sup. \{ g'_1, g'_2, \dots, g'_n \}$  ), como conclusión,

$$\mathcal{D}^{*p}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subseteq \mathcal{D}^{*p}(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$$

Por simetria, se prueba la contención contraria y tras reordenación,

$$( \mathcal{D}^{*p}(v_1, v_2, \dots, v_n), k ) \text{ S } ( \mathcal{D}^{*p}(v'_1, v'_2, \dots, v'_n), k' )$$

## 2.5. Equivalencia discreta de familias finitas de valoraciones A,D y E.

### 2.5.1.

La relación entre valoraciones A,D con las curvas algebroides, permite un desarrollo similar al descrito en este capítulo, para conjuntos finitos de valoraciones de los tipos A, D y E.

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , una familia finita de valoraciones como las anteriores, en la cual las valoraciones de tipo A y de tipo D son distintas entre si, por el sistema descrito en 2.3.3, de explotar en centros puntuales de alguna de las valoraciones, podemos obtener una sucesión de transformaciones cuadráticas,

$$(\pi): \dots X_{N+1} \xrightarrow{\pi^{N+1}} X_N \longrightarrow \dots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi^2} X_1 \xrightarrow{\pi^1} X$$

donde, cada transformación  $\pi^i$  es como la descrita en 2.2.1., verificando además para  $i \gg 0$ :

a) Los puntos  $P_{i-1j_i}$  son libres ( No son corte de dos componentes del divisor excepcional ).

b) La componente  $L_{ij_i}$  tiene un único punto  $P_{i-1j_i}$  centro de explosión de  $\pi$ .

El mismo método de 2.3.3., asocia a la familia  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un grafo con cotas y marcas, pero con un conjunto de vértices infinito si aparece alguna valoración A ó D, que denotaremos  $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Además, si  $\pi$  es una sucesión de transformaciones cuadráticas como la descrita, se llamará asociada a valoraciones A,D y E y poseerá un número finito de subsucesiones simples, bien finitas como las definidas en 2.2.3., o bien, infinitas que se definiran como subsucesiones simples  $\pi'$ ,

$$(\pi'): \dots X^{(M+1)} \xrightarrow{\pi_{M+1}} X^{(M)} \rightarrow \dots \longrightarrow X^{(2)} \xrightarrow{\pi_2} X^{(1)} \xrightarrow{\pi_1} X$$

de centros,  $P_0, P_1, \dots, P_M, \dots$ , tales que,  $P_i = P_{ij_{i+1}} \in L_i$ .

### 2.5.2. Definición

Dos conjuntos  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  de valoraciones A, D y E se dice que son discretamente equivalentes ( o simplemente, equivalentes ) si,

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) \cong G(v'_1, v'_2, \dots, v'_n).$$

### 2.5.3. Definición

Sea  $v$  una valoración A ó D, llamaremos género de  $v$ , a un número natural,  $g^v$ , tal que,  $g^v + z$  es el número minimal de generadores del semigrupo de valores  $\phi_{\hat{v}}^+$ , donde,  $\hat{v}$  es la única extensión de la valoración  $v$  a una valoración de  $\hat{F}$  que domine  $\hat{R}$ . ( Para las notaciones, y la constatación de que dicho género está bien definido, ver Cap.1 ).

### 2.5.4.

El semigrupo de valores de una valoración divisorial está contenido en  $\mathbb{Q}$ . ( valoraciones  $v$ , con  $v(m) = 1$  ). El semigrupo de valores de una valoración A ó D está incluido en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ . Si se considera la inclusión,

$$i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$$

$i(a) = (0, a)$ ,  $a \in \mathbb{Q}$ , pueden considerarse ambos semigrupos incluidos en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ , dotado del orden lexicográfico.



Cualquier valoración  $\nu$ , A ó D verifica ( Cap.1 ) que, existe un elemento de  $\hat{F}$ ,  $f_\nu$ , asociado a  $\nu$  cuyo desarrollo de H-N es el de  $\nu$ , salvo las excepciones de los  $z_i$ , obvias, que además, permite definir  $\hat{\nu}$ , y por lo tanto  $\nu$ , a partir de los pares de contacto con él, y,  $\hat{\nu}(f) = (1,0)$ . Por definición, a este elemento le llamaremos general de  $\nu$ .

El resultado 2.3.5., se verifica y prueba de forma similar a la ya expuesta, no siendo necesario para cada valoración  $\nu$  no divisorial, más que su elemento general que habrá que incluir en la familia.

Las definiciones y apartados 2.4.3 a 2.4.6 se tendrán de forma inmediata para las familias ahora estudiadas.

Y también, como invariante numérico de la equivalencia discreta de familias de valoraciones tendremos la clase de equivalencia de  $(\mathcal{D}^*(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), k) \in U_n$ , siendo la prueba de este hecho 2.4.9.

### 2.5.5. Teorema

Sea  $\pi$  una sucesión de transformaciones multicuadráticas finita o una sucesión de transformaciones multicuadráticas asociada a valoraciones A, D y E. Y sea,  $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$  la familia de valoraciones divisoriales (o, A, D y E) que son biyectivas a las subsucesiones simples de  $\pi$ . Si las k primeras son especiales, la clase de equivalencia, respecto a la relación S, de  $(\mathcal{D}^*(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), k) \in U_n$  es un invariante numérico completo de la clase de equivalencia discreta de  $\pi$ .

La demostración se sigue de las observaciones anteriores.

## Capitulo 3 Valoraciones asociadas a un germen de foliacion plano.

### 3.1. Introducción.

3.1.0. Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  una variedad analítica compleja no singular de dimensión dos. Sean,  $\Omega_X^k$  el haz de germenos de K-formas diferenciales holomorfas sobre X,  $\Omega_X^*$  el haz de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras graduadas:

$$\Omega_X^* = \Omega_X^0 \oplus \Omega_X^1 \oplus \Omega_X^2$$

con la multiplicación dada por el producto exterior de formas diferenciales. La diferencial exterior da lugar a una  $\mathbb{C}$  antiderivación de grado 1,  $d: \Omega^* \longrightarrow \Omega^*$ .

Definición Una foliación singular sobre X ( de codimensión uno, para que tenga sentido no trivial ) es un  $\mathcal{O}_X$ -submódulo localmente libre de rango uno,  $\mathfrak{F}$ , de  $\Omega_X = \Omega_X^1$  que satisface la condición de integrabilidad,  $\mathfrak{F} \wedge d\mathfrak{F} = 0$ . Esta condición, equivale a decir que para todo punto P de X, la fibra  $\mathfrak{F}_P$  está generada por una forma diferencial,  $\omega$  que es integrable porque, obviamente, satisface  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

La anterior foliación se dice saturada si coincide con su doble ortogonal para el acoplamiento natural:

$$\diamond \Omega_X \times \Theta_X \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Dicho de otra manera, si para cada  $P \in X$  los coeficientes de un generador de  $\mathfrak{F}_P$  en una base de  $\Omega_{X,P}$  no tienen factores comunes.

Definición Se llama distribución de dimensión uno sobre X a cualquier  $\mathcal{O}_X$ -submódulo localmente libre de rango uno,  $\mathfrak{D}$ , del espacio tangente  $\Theta_X$ .

Si  $\mathcal{F}$  es una foliación singular de codimensión uno sobre  $X$ , saturada, se le puede asociar una distribución  $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ , que es el submódulo ortogonal de  $\mathcal{F}$  respecto al acoplamiento  $\langle, \rangle$ .

En este capítulo, foliación significará foliación singular de codimensión uno, saturada.

Definiciones Si  $\mathcal{F}$  es una foliación sobre  $X$ ,  $P \in X$  y  $\omega \in \Omega_{X,P}$  un generador local de  $\mathcal{F}$  en  $P$ .

1.- Un germen  $f \in \mathcal{O}_{X,P}$  es una integral primera de  $\mathcal{F}$  en  $P$  si  $\omega \wedge df = 0$ .

2.-  $f$  es una integral primera fuerte si  $df = u \omega$  para alguna unidad  $u \in \mathcal{O}_{X,P}^*$ .

3.- Un germen  $f \in \mathcal{O}_{X,P}$  que se anula en  $P$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  en  $P$ , si existe una dos-forma diferencial  $\eta \in \Omega_{X,P}^2$ , con  $\omega \wedge df = \eta f$ .

Las anteriores definiciones serán de integrales convergentes. Si se modifica  $\mathcal{O}_{X,P}$  por  $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ , completado  $\mathfrak{m}_P$  (maximal de  $\mathcal{O}_{X,P}$ ) -ádico serán formales.

Una separatriz formal es un dato  $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$  con  $\omega \wedge df = \eta f$  para  $\eta \in \hat{\Omega}_{X,P}^2 = \Omega_{X,P} \otimes \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ .

Un resultado debido a Camacho, Lins y Sad [CLS] y redemostrado recientemente por J. Cano [Cj], por un método constructivo, afirma que si  $\mathcal{F}$  es una foliación, para cada  $P \in X$  existe una separatriz (local) de  $\mathcal{F}$ .

Un subespacio  $Y$  de  $X$  es un *invariante* para  $\mathcal{F}$  en  $P \in Y$ , por definición, si  $D(I_P) \subseteq I_P$ , siendo  $D \in \Theta_{X,P}$  un generador de  $\mathcal{D}_P$  e  $I_P$  el ideal de  $Y$  en el anillo  $\mathcal{O}_{X,P}$ . También puede decirse que  $\mathcal{F}$  es tangente a  $Y$  en  $P$ . Nos interesará el caso de curvas invariantes analíticamente reducidas.

**Definición** Un subespacio  $Y \subseteq X$  es una rama formal en  $P \in Y$  si  $\dim_{\text{Knull}} \hat{\mathcal{O}}_{X,P} / \hat{I}_P = 1$ , siendo  $\hat{I}_P$  es el ideal de  $Y$  en  $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ . Si  $Y$  es invariante para  $\mathfrak{F}$  en  $P$ , la rama se dice integral.

**Proposición** Si  $\mathfrak{F}$  es una foliación sobre  $X$  y  $P \in X$ , ramas integrables y separatrices formales son una misma cosa.

**Demostración** Sea  $\{x, y\}$  un sistema regular de parámetros de  $\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ ,

$$\omega = a(x,y) dx + b(x,y) dy$$

un generador local de  $\mathfrak{F}$  en  $P$ ,  $a(x,y), b(x,y) \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ .

Un generador de  $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})_P$  será:

$$D = b(x,y) \frac{\partial}{\partial x} - a(x,y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sea  $I$  el ideal de la rama formal  $Y$ , será principal y generado por  $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ .

$$\omega \wedge df = \left( b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

Que  $Y$  es rama integral significa,

$$D(f) = b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} \in (f)$$

luego,  $D(f) = g f$  con  $g \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ . Y deducimos,

$$\omega \wedge df = f \left[ g \left[ dx \wedge dy \right] \right] = f \eta ; \eta \in \hat{\Omega}_{X,P}^2$$

por lo tanto,  $f$  es una separatriz formal.

Recíprocamente, si  $f$  es una separatriz, se tiene,

$$f \eta = \omega \wedge df = \left[ b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx \wedge dy.$$

Por ser  $dx \wedge dy$  generador de  $\hat{\Omega}_{X,P}^2$ , es trivial que,

$$b(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + a(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} = g f$$

con  $g \in \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$ , luego  $(f)$  está asociado a una rama integral.

### 3.1.1. Evolución por transformaciones cuadráticas, desingularización.

Sea  $\mathfrak{F}$  una foliación de  $X$  y  $\pi: X' \longrightarrow X$  la transformación cuadrática centrada en  $P$ . Si  $\pi^*$  es el funtor imagen inversa de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, la primera sucesión exacta asociada al haz  $\Omega_X$  proporciona un morfismo canónico:

$$\psi: \pi^* \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X'}$$

tal que, si  $Q \in X'$  cumple  $\pi(Q) = P$ , y se tiene,

$$\left[ \pi^* \Omega_X \right]_Q = \Omega_{X,P} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_{X',Q}$$

Además  $\omega \in \Omega_{X,P}$ , implica que,  $\psi(\omega \otimes 1) \in \Omega_{X',Q}$ .

Sea  $\mathfrak{F}^{\&}$  la imagen de la composición de morfismos siguiente:

$$\pi^* \mathfrak{F} \longrightarrow \pi^* \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X'}$$

Es claro que  $\mathfrak{F}^{\&}$  es una foliación de  $X'$  (no saturada).

#### Definición

El doble ortogonal para el acoplamiento  $\langle, \rangle$  de  $\mathfrak{F}^{\&}$  se denota  $\mathfrak{F}'$  y es el transformado estricto de  $\mathfrak{F}$  por  $\pi$ .

Si  $\omega$  genera  $\mathfrak{F}$  en  $P$ , el germen de imagen inversa de  $\omega$  por  $\pi$  en  $Q$ , genera  $\mathfrak{F}^{\&}$  en  $Q$ .

#### Definición

Un punto  $P \in X$ , se dice singular de la foliación  $\mathfrak{F}$ , si  $\mathfrak{F}_P$  está generado por una forma diferencial que se anula en  $P$ .

La singularidad  $P$ , se dice *no dicrítica* si el divisor excepcional obtenido al explotar en  $P$  es invariante para  $\mathfrak{H}$ . Si no lo es será *dicrítica*.

El valor:

$$v(\mathfrak{H}, P) = \max \left\{ t / \mathfrak{H}_P \subseteq m_P^t \Omega_{X,P} \right\}$$

se denomina multiplicidad de  $\mathfrak{H}$  en  $P$ , y si  $\mathfrak{H}_P$  está generado por la forma diferencial,

$$\omega = a(x, y) + b(x, y)$$

para  $\{x, y\}$  sistema regular de parámetros de  $\mathcal{O}_{X,P}$ , se tiene:

$$v(\mathfrak{H}, P) = \min \left\{ v_P(a(x,y)), v_P(b(x,y)) \right\}$$

donde,  $v_P(a(x,y)) = v_P(a)$   $\left[ v_P(b(x,y)) = v_P(b) \right]$  es la multiplicidad de  $a(x,y) [ b(x,y) ] \in \mathcal{O}_{X,P}$ , relativa al maximal.

Si  $v(\mathfrak{H}, P) = r$ , y,

$$\text{Gr}(\mathcal{O}_{X,P}^r) = \frac{m_P^r}{m_P^{r+1}} \subseteq \text{Gr}(\mathcal{O}_{X,P}).$$

Este último anillo es el anillo graduado natural de  $\mathcal{O}_{X,P}$ .

Para  $r \geq 1$ , puede definirse la aplicación lineal:

$$L(D, P): \text{Gr}^1(\mathcal{O}_{X,P}) \longrightarrow \text{Gr}^1(\mathcal{O}_{X,P})$$

definida,  $L(D, P)(\text{In}(f)) = \text{In}(D(f))$ , para  $D$  generador de  $\mathcal{O}_P$ . Que se llama parte lineal de  $\mathfrak{H}$  en  $P$ .

### Definiciones

Sea  $P \in X$ .

1)  $P$  es un punto regular de  $\mathfrak{H}$ , si  $v(\mathfrak{H}, P) = 0$ .

2)  $P$  es un punto simple de  $\mathfrak{H}$ , si cumple las condiciones siguientes

2-i)  $v(\mathfrak{H}, P) = 1$ .

2-ii)  $L(D, P)$  tiene dos autovalores  $\lambda$  y  $\mu$  distintos, al menos uno no nulo, tales que,  $\lambda / \mu \notin \mathbb{Q}^+$  ( estrictamente positivos )

Si  $\mathfrak{F}$  se ha obtenido tras una sucesión finita de transformaciones cuadráticas ( centradas en puntos de divisores ya obtenidos ), en el espacio  $X$  existe un divisor:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_i$$

donde,  $E_i$  es la última componente irreducible de  $E$  obtenida.

Si  $P \in E_i \cap E_j$ , para  $i \neq j$ , y  $P$  es simple, a  $P$  se le conoce con el nombre de *esquina simple*. En nuestro lenguaje, puntos simples serán los que lo son según la anterior definición pero no son esquinas simples.

Los puntos singulares, que no son simples ni esquinas simples, se llaman puntos *singulares fuertes* de  $\mathfrak{F}$ .

Dada una foliación  $\mathfrak{F}$  de  $X$ , *desingularizar el conjunto de separatrices formales* es obtener una foliación  $\mathfrak{F}(k)$ , tras una sucesión de transformaciones cuadráticas:

$$S = \left\{ \pi(i) : \left[ X(i), \mathfrak{F}(i) \right] \longrightarrow \left[ X(i-1), \mathfrak{F}(i-1) \right], \right. \\ \left. \text{centradas en } P(i-1) \right\} \quad i = 1, \dots, k$$

donde, -  $\mathfrak{F}(i) = (\mathfrak{F}(i-1))'$

-  $(X, \mathfrak{F}) = (X(0), \mathfrak{F}(0))$ ;  $P(0) = P$ ; y

-  $\pi(1) \pi(2) \dots \pi(i) (P(i)) = P$ , para  $i < k$ .

De modo, que las separatrices cumplen :

a) Son lisas y disjuntas.

b) Ninguna incide en el corte de dos componentes irreducibles del divisor.

c) Todas son transversales al divisor al que cortan.

Y *desingularizar completamente* la foliación  $\mathfrak{F}$  es obtener una foliación  $\mathfrak{F}(k)$ , tras una sucesión  $S$  de transformaciones cuadráticas como la anterior, tal que,  $\mathfrak{F}(k)$  no posea singularidades fuertes y sus separatrices formales estén desingularizadas.

**Teorema 3.1.1.**

Si  $\mathcal{F}$  es una foliación,  $\mathcal{F}$  puede desingularizarse completamente ( Ver [ CLS ] pag. 169 ).

Si  $\mathcal{F}(k)$  es la foliación transformada de  $\mathcal{F}$  y desingularizada completamente, los divisores no dicríticos poseen un número finito, posiblemente nulo, de puntos simples. El corte entre dos divisores no dicríticos es esquina simple, y esta es corte de dos separatrices, que son las componentes del divisor que definen el punto. Además, los divisores dicríticos están formados exclusivamente por puntos regulares, incluso en los cortes con otros divisores. Por ser dichos divisores no invariantes y para que en ellos haya un punto simple, tendrían que pasar por él dos separatrices formales, pero al estar desingularizadas esto no es posible.



### 3.2. Equirreducción de foliaciones.

Con la notación y condiciones de 3.1. Sea  $\mathfrak{F}$  una foliación sobre  $X$  con  $P \in X$  un punto singular fuerte.

#### 3.2.1. El grafo dual finito

Sea  $S$  la sucesión de transformaciones cuadráticas que desingulariza  $\mathfrak{F}$  completamente en el entorno de  $P$ . Podemos asociar a  $\mathfrak{F}$  un grafo dual con cotas y marcas ( Ver cap. II para definiciones y notación ) del modo siguiente:

Tras la explosión  $\pi(i)$ , aparece el divisor  $E = E(i)$  cuya descomposición en componentes irreducibles es:

$$E(i) = E_1(i) \cup E_2(i) \cup \dots \cup E_i(i)$$

$E_j(i)$  es el transformado estricto de  $E_j(i-1)$  para  $j < i$ , por la transformación  $\pi(i)$  y,

$$E_i(i) = \pi(i)^{-1} \left[ P(i-1) \right].$$

El grafo dual  $G_{\mathfrak{F}}$  viene dado de la forma siguiente:

- a) Vértices  $V = \{ 1, 2, \dots, k \}$ .
- b) Arcos  $\{ a, b \} \in B$   $a, b \in V$ , si y sólo si,  $E_a(k) \cap E_b(k) \neq \emptyset$ .
- c) Cotas o Pesos  $h(1) = 1$ ; Si  $e( E(j-1), P(j-1) ) = e$  es el número de componentes irreducibles de  $E(j-1)$  que pasan por  $P(j-1)$ , podemos poner,

$$e = 1 \text{ y } P(j-1) \in E_a(j-1), \text{ entonces, } h(j) = h(a) + 1$$

$$e = 2 \text{ y } P(j-1) \in E_a(j-1) \cap E_b(j-1), \text{ entonces,}$$

$$h(j) = \max \{ h(a), h(b) \} + 1.$$

En otras palabras,  $h(j)$  representa la " edad " o momento de aparición de la componente  $j$ .

- d) Marcas  $m(j) = \text{cardinal} \{ P \in E_j(k), \text{ tales que, existe una separatriz formal distinta del divisor que pasa por } P \}$ .

En consecuencia, el grafo anterior se denomina *grafo dual finito asociado a la foliación  $\mathfrak{F}$* .

### 3.2.2. El grafo dual infinito

Construimos en este apartado una aplicación  $\gamma$ , que inyecta el conjunto de grafos duales con cotas y marcas finitos en el conjunto de dichos grafos infinitos.

Sea  $G = G_{\mathbb{F}}$  el grafo finito considerado anteriormente.

El grafo  $\gamma(G) = (V', B', h', m')$  se obtendrá como sigue:

El conjunto de vértices y arcos  $V', B'$  es el de  $G$ , pero con la salvedad de que a cada vértice de marca  $m \neq 0$ ,  $m \neq \infty$  y cota  $p$  de  $G$  se le adjuntarán  $m$  grafos de tipo bambú cuyas cotas son,  $p + 1, p + 2, \dots$  (infinitos). En el nuevo grafo, los vértices tendrán marca 0, salvo los que poseían marca no nula en  $G$  que tendrán, ahora, marca 1 (incluso aquellos cuya marca era  $\infty$ ). Naturalmente, las cotas de  $\gamma(G)$  son las descritas para los bambues y las de  $G$  para el resto de los vértices.

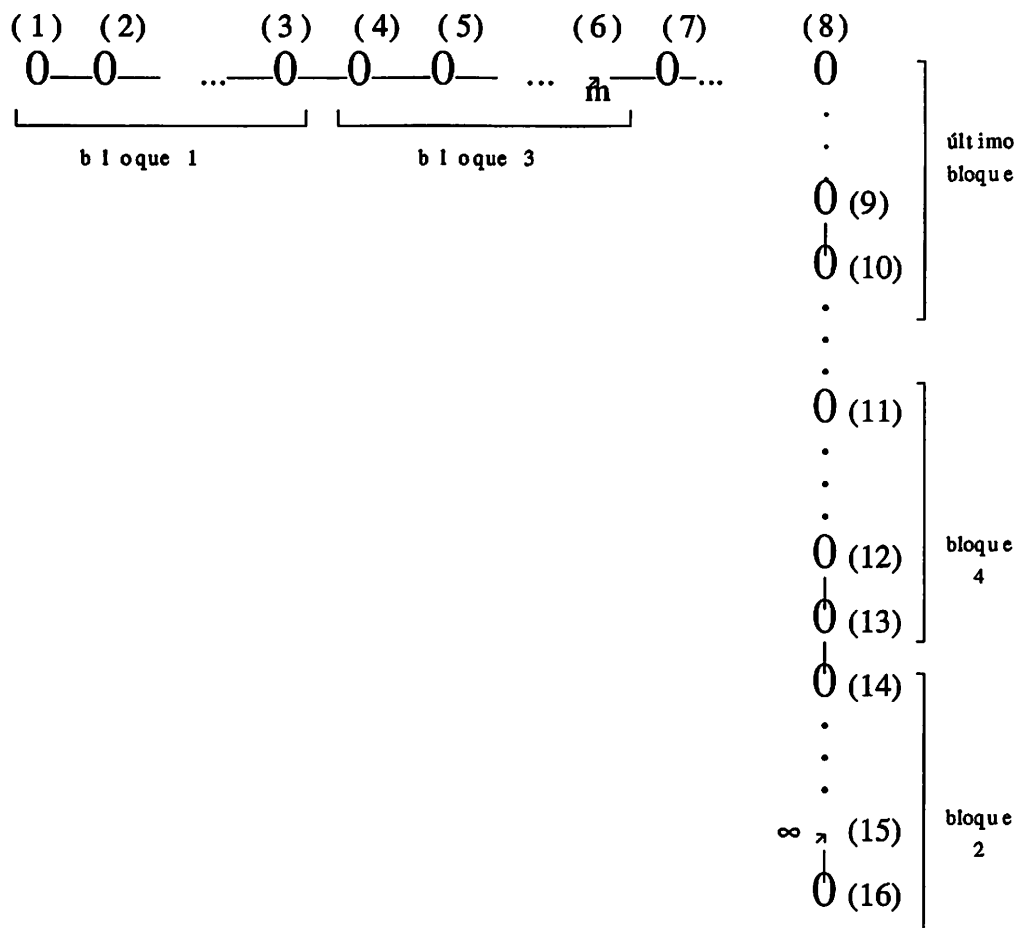
De esta construcción, se sigue, que la aplicación  $\gamma$  es inyectiva como aplicación entre conjuntos de grafos con cotas y marcas abstractos.

El gráfico que aparece en el apartado siguiente ilustra la aplicación  $\gamma$ .

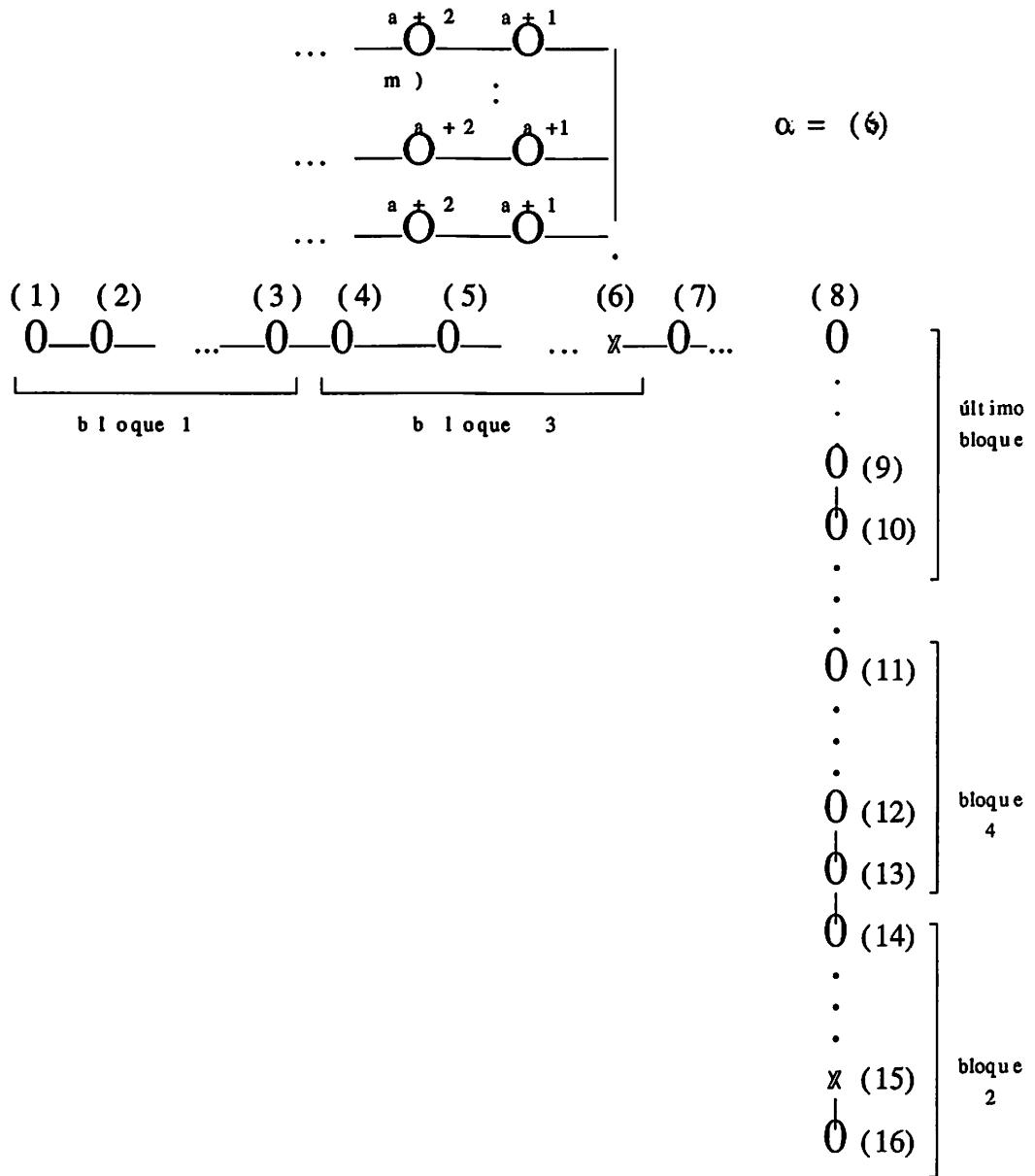
### 3.2.3.

La definición de grafo dual finito e infinito debe considerarse, como se ha dicho, en el contexto de grafos abstractos, de ahí que, en una representación gráfica sea suficiente con poner cada vértice con un círculo, las cotas con un número en el vértice y las marcas con una flecha y un número que indique su valor, en el caso del grafo finito, o un aspa que indique si la marca es 1 en el caso del infinito.

A continuación, se muestra una rama de un grafo finito  $G$  y la rama correspondiente en la representación gráfica de  $\gamma(G)$ . (Notación en Cap.1).



Los valores entre parentesis aparecen en 1.3.1.2. siguiendo la notación de ese capitulo.



Dada una foliación  $\mathcal{F}$ , al grafo infinito asociado a ella mediante  $\gamma$ ,  $\gamma(G_{\mathcal{F}})$ , se le llama grafo infinito de  $\mathcal{F}$  y se denota  $\hat{G}_{\mathcal{F}}$ .

La asignación  $\gamma$  no es arbitraria sino que responde a un criterio geométrico, que se describe así:

Si  $\pi_1$  es la sucesión de  $k$  transformaciones cuadráticas que desingulariza  $\mathfrak{F}$  completamente, a través de ella, se obtiene una superficie  $X(k)$ , una foliación  $\mathfrak{F}(k)$  y un divisor  $E(k)$ , existiendo en él dos tipos de componentes irreducibles, las dicríticas y las no dicríticas. De estas últimas distinguiremos algunas llamándolas simples, pues poseen algún punto simple de  $\mathfrak{F}(k)$ .

Si explotamos el par  $[X(k), \mathfrak{F}(k)]$ , en un punto simple, aparece otro par  $[X(k+1), \mathfrak{F}(k+1)]$ , completamente desingularizado también, pero con un nuevo punto simple en el divisor estricto obtenido, conservándose la misma situación en el resto ( Ver [ Ca ] ). Este procedimiento reiterado en cada punto simple y, posteriormente, en los puntos simples obtenidos de las transformaciones cuadráticas, da sobre  $X(k)$  una sucesión infinita de transformaciones cuadráticas que denotaremos  $\pi_2$ . Si a  $\pi_2 \circ \pi_1$  se le asigna un grafo dual con las cotas habituales y marcas 1, sólo en los divisores dicríticos y en los simples de  $\pi_1$ , obtenemos como grafo total  $\hat{G}_{\mathfrak{F}}$ .

#### Definición 3.2.4.

Dos foliaciones  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  se dicen equirreducidas si los grafos  $G_{\mathfrak{F}}$  y  $G_{\mathfrak{F}'}$  coinciden. O, equivalentemente, si coinciden  $\hat{G}_{\mathfrak{F}}$  y  $\hat{G}_{\mathfrak{F}'}$ .

#### 3.2.5. Valoraciones asociadas a $\mathfrak{F}$

Sea  $\mathfrak{F}$  una foliación de  $X$  y  $P \in X$  su único punto singular fuerte. A continuación asociamos a  $\mathfrak{F}$ , de manera única, una familia finita de valoraciones del cuerpo de cocientes del anillo local  $R = \mathcal{O}_{X,P}$  que dominan a  $R$  de tipo "A", "D" o "E", tales que, el grafo dual de esta familia es  $\hat{G}_{\mathfrak{F}}$ . Esto permite considerar, como invariante numérico del grafo dual de una foliación, el mismo invariante descrito en el capítulo II para familias de valoraciones.

Nota 3.2.5.1.

Aunque las explosiones en puntos las hemos de entender en el contexto analítico complejo, puesto que,  $R = \mathcal{O}_{X,P}$  es local noetheriano y regular con cuerpo de coeficientes  $\mathbb{C}$ , existe una sucesión paralela de explosiones de  $\text{Spec } R$ , en el contexto algebraico, obteniendo esquemas integros y lisos sobre  $\mathbb{C}$  con el mismo cuerpo de cocientes que  $R$ , cuyas complexificaciones son las variedades analíticas explotadas. ( Esto es asi, porque los centros de explosión se han elegido exactamente en los divisores excepcionales ya creados ). Así, para trabajar en un contexto algebraico con las valoraciones asociadas, estas, las consideraremos en el cuerpo de fracciones de  $R$  y tienen la correspondencia geométrica con las sucesiones simples de explosiones del proceso paralelo algebraico y, por lo anterior, también lo tendrán en el analítico.

Sea  $\pi_2 \circ \pi_1$ , la sucesión de transformaciones cuadráticas descrita en 3.2.3. Esta, determinará una familia de valoraciones  $\{ v_1, v_2, \dots, v_m \}$ , como se indicó en el Cap II. El grafo dual de esta familia es exactamente  $\hat{G}_{\mathfrak{F}}$  sin hacer constar sus marcas.

Si además, consideramos las valoraciones divisoriales asociadas a aquellas sucesiones simples de transformaciones cuadráticas que comienzan en  $P$ , que llegan a crear un divisor simple o dicrítico ( siempre subsucesiones de  $\pi_1$  ) y las denotamos  $v_{m+1}, \dots, v_n$ , la familia de valoraciones  $\{ v_1, \dots, v_n \}$  será la asociada a  $\mathfrak{F}$  y, es obvio, por construcción, que su grafo dual será también  $\hat{G}_{\mathfrak{F}}$ .

Teorema 3.2.5.

Sean  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}'$  dos foliaciones de  $X$  con  $P \in X$  su único punto singular. Sean  $\{ v_1, \dots, v_n \}$  y  $\{ v'_1, \dots, v'_n \}$  las valoraciones de  $F = \text{Fr} \left[ \mathcal{O}_{X,P} \right]$  que tienen asociadas por 3.2.4. Si  $k$  y  $k'$  son dos naturales que indican que las anteriores familias poseen, respectivamente,  $k$  y  $k'$  valoraciones especiales y que son las primeras, entonces:

$\mathfrak{F}$  es equirreducida a  $\mathfrak{F}'$ , si y sólo si,  
 $\left[ V^* ( v_1 , v_2 , \dots , v_n ) , k \right] S \left[ V^* ( v_1 , v_2 , \dots , v_n ) , k' \right]$

S es la relación descrita en el cap.II.

Demostración

Es inmediata de ( 2.5.) y de 3.2.4.

Nota 3.2.6.

La asignación de una familia de valoraciones a una foliación, puede realizarse de otras formas, pero la que se ha expuesto es la que nos parece la más natural, geoméricamente.

### 3.3. Intersección entre curvas y foliaciones.

#### 3.3.1.

Consideremos un punto singular  $P$  de una foliación  $\mathcal{F}$ , sobre una superficie lisa  $X$ , dada localmente por la forma,

$$\omega = a(x,y) dx + b(x,y) dy$$

respecto de un sistema regular de parámetros de  $\mathcal{O}_{X,P} = R$ .

Si  $\gamma$  es una curva algebroide en  $P$ , dada por  $f(x,y) \in K[[x,y]]$ , su anillo local  $\mathcal{O} = K[[x,y]]/(f)$  y su cierre integro  $\bar{\mathcal{O}} = K[[t]]$ , se tiene una representación paramétrica de  $\gamma$  así,  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ .

#### Definición

Se llama multiplicidad de intersección entre el germen  $\omega$  y la curva  $\gamma$  en  $P$ , al entero:

$$(\omega, \gamma)_P = \underline{v} \left[ a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t) \right]$$

Siendo  $\underline{v}$ , la valoración natural normalizada de  $K((t)) = \text{Fr}(\bar{\mathcal{O}})$ , es decir el orden relativo a  $t$ .

#### Nota

La multiplicidad  $(\omega, \gamma)_P$  no depende del sistema de parámetros.

De la definición, se sigue que,  $(\omega, \gamma)_P = 0$ , si y sólo si,  $\omega$  es regular en  $P$ ,  $\gamma$  lisa en  $P$  y transversal a  $\omega$ .

En efecto, si  $\omega$  es regular o si  $\gamma$  es lisa, es obvio que,  $(\omega, \gamma)_P$  es el orden de una serie de potencias sin término independiente. Si ambas son regulares, entonces, dicha serie de potencias tiene término independiente

$$a(0,0) x'(0) + b(0,0) y'(0)$$

término que es igual a cero, exactamente cuando la dirección de  $\omega$  es la tangente a  $\gamma$ .



### 3.3.2. Multiplicidad, transformaciones cuadráticas y dicriticidad.

#### Proposición I

Se considera un par  $\omega, \gamma$ , como antes. Sea  $\pi: X \leftarrow X^{(1)}$ , la explosión de  $X$  con centro en  $P$  y  $P_1 \in L_1 = \pi^{-1}(P)$ , el punto del divisor excepcional correspondiente a la tangente a  $\gamma$ . Entonces:

a) Si  $P$  es singular no dicrítico, o regular para  $\omega$ ,

$$(\omega, \gamma)_P = v(\omega) e(\gamma) + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1}$$

b) Si  $P$  es singular dicrítico de  $\omega$ ,

$$(\omega, \gamma)_P = [v(\omega) + 1] e(\gamma) + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1}$$

Siendo  $v(\omega) = v(\mathbb{F}, P)$ ;  $e(\gamma)$ , la multiplicidad de  $\gamma$  en  $P$ ;  $\gamma^{(1)}, \omega^{(1)}$  los transformados estrictos de  $\gamma$  y  $\omega$  por  $\pi$  en  $P_1$ .

#### Demostración

Si  $v(\omega) = v$ , entonces,

$$\omega = [a_v(x,y) + a_{v+1}(x,y) + \dots] dx + [b_v(x,y) + b_{v+1}(x,y) + \dots] dy$$

Eligiendo adecuadamente el sistema de parámetros, podemos suponer que  $\{x^{(1)}, y^{(1)}\}$  es un sistema regular de parámetros de  $\mathcal{O}_{X^{(1)}, P_1}$ , con  $x = x^{(1)}$ ;  $y = x^{(1)} y^{(1)}$ .

Así el transformado total de  $\omega$  en  $P_1$  será:

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= [a_v(1, y^{(1)}) + y^{(1)} b_v(1, y^{(1)}) + x^{(1)} (\dots)] dx^{(1)} + \\ &+ [x^{(1)} b_v(1, y^{(1)}) + x^{(1)2} (\dots)] dy^{(1)}. \end{aligned}$$

Y el transformado estricto de  $\gamma$  viene dado por,  $x^{(1)} = x(t)$ ,  $y^{(1)} = y(t) / x(t)$ .

a) Si  $P$  es regular o singular no dicrítico, entonces:

$$a_v(1, y^{(1)}) + y^{(1)} b_v(1, y^{(1)}) \neq 0$$

por tanto,  $\pi^* \omega = x^{(1)v} \omega^{(1)}$ , y de aquí,

$$(\omega, \gamma)_P = v \operatorname{ord}_t x^{(1)} + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1} = v e(\gamma) + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1}.$$

Debiéndose la última igualdad al hecho de que,  $x = 0$  es una curva transversal para  $\gamma$ , en las coordenadas elegidas.

b) Si  $P$  es singular dicrítico, entonces:

$$a_v(1, y^{(1)}) + y^{(1)} b_v(1, y^{(1)}) \equiv 0$$

y por tanto,  $\pi^* \omega = x^{(1)} \omega^{(1)}$ . El mismo razonamiento muestra ahora:

$$\begin{aligned} (\omega, \gamma)_P &= (v + 1) \operatorname{ord}_t x^{(1)} + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1} = \\ &= (v + 1) e(\gamma) + (\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1}. \end{aligned}$$

### Proposición II

a) Si  $P$  es no dicrítico de  $\omega$ ,  $\omega^{(1)}$  es regular en  $P_1$  y  $\gamma^{(1)}$  una curva plana regular y transversal a  $L_1$ , se tiene,

$$(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1} = 0, \text{ pero } (\omega^{(1)}, L_1)_{P_1} > 0.$$

b) Si  $P$  es dicrítico de  $\omega$  y  $\omega^{(1)}$  regular en  $P_1$ , implica que,  $(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1} = 0$ , para todas las curvas lisas transversales a  $L_1$ , salvo las que llevan la dirección de  $\omega^{(1)}$  en  $P_1$ . Dicha dirección puede ser la de  $L_1$ , circunstancia que equivale a la condición  $(\omega^{(1)}, L_1)_{P_1} > 0$ .

c) En cualquier caso, si existe una curva  $\gamma^{(1)}$  regular y transversal a  $L_1$  en  $P_1$  con  $(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})_{P_1} = 0$ , o si  $(\omega^{(1)}, L_1)_{P_1} = 0$ , se tiene que,  $P_1$  es un punto regular de  $\omega^{(1)}$ .

### Demostración

La demostración de esta proposición se sigue de la nota de 3.3.1.

### 3.4 Intersección entre valoraciones y foliaciones.

En este párrafo, damos una descripción completa de una "multiplicidad de intersección" entre valoraciones y foliaciones, que permitirá describir el grafo de la foliación, a priori, esto es, sin efectuar transformaciones cuadráticas.

#### 3.4.1.

Conservemos las mismas notaciones de este capítulo,  $\omega$  es un germen de la foliación  $\mathfrak{F}$  en  $P$  y  $v$  una valoración del cuerpo de cocientes  $F$  de  $R = \mathcal{O}_{X,P}$  que domina a  $R$ . Sea  $\pi$  la sucesión de transformaciones cuadráticas simple asociada a  $v$ ,

$$(\pi) : X \xleftarrow{\pi_1} X^{(1)} \xleftarrow{\pi_2} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\pi_{n+1}} X^{(n)} \xleftarrow{\dots}$$

donde,  $L_i$  es el divisor excepcional de  $\pi_i$  en  $X^{(i)}$ ,  $P_i$  el centro de  $\pi_{i+1}$  ( $P = P_0$ ), y  $m_i$  el maximal de  $\mathcal{O}_{X^{(i)}, P_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Pongamos  $\epsilon^{(i)} = 0$  ó  $1$ , según que,  $P_i$  sea un punto no dicrítico o dicrítico, para el transformado estricto de  $\omega = \omega^{(0)}$ ,  $\omega^{(i)}$ , en  $X^{(i)}$  por la composición  $\pi^{(i)}$  de los morfismos:

$$X \xleftarrow{\pi^{(1)}} X^{(1)} \xleftarrow{\pi^{(2)}} X^{(2)} \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\pi^{(i)}} X^{(i)} .$$

#### Definición

Se llama *valor de intersección* entre el anillo de valoración de  $v$ ,  $R_v$  y el germen  $\omega$  a:

$$\left[ R_v, \omega \right] = \frac{1}{v'(m)} \sum_{i=0}^{\infty} (v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)}) v'(m_i)$$

donde  $v'$  es cualquier normalización de  $v$ , y dividir entre  $v'(m)$  se hace para que el valor de intersección no dependa de la normalización elegida para la valoración.

Estudiamos este valor para cada tipo de valoración descrita en el capítulo I.

### 3.4.E. Valoraciones divisoriales.

En primer lugar,  $(R_{\nu}, \omega)$  tiene sentido en  $\mathfrak{a}$ , pues la serie suma sólo un número de valores finito.

Si  $\nu^{(0)}$  es la normalización de  $\nu$ , tal que,  $\nu^{(0)}(m) = 1$ , está claro que:

$$\left[ R_{\nu}, \omega \right] = \sum_{i=0}^{\infty} (v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \varepsilon^{(i)}) \nu^{(0)}(m_i)$$

por tanto,  $\left[ R_{\nu}, \omega \right]$  es un elemento no negativo del grupo de valores.

Denotaremos por:

$$X \longleftarrow X^{(1)} \longleftarrow X^{(2)} \longleftarrow \dots \longleftarrow X^{(n+1)}$$

la sucesión de explosiones en puntos cerrados  $P, P_1, \dots, P_n$ , tales que, en  $X^{(n+1)}$  el centro es un divisor.

#### Definición E.1.

Sea  $\nu^{(n)}$  la normalización de  $\nu$  verificando  $\nu^{(n)}(m_n) = 1$ . Se tiene,  $n = \nu^{(n)}(m)$ , es decir,  $n = e(f)$ , donde  $f \in R$  es un elemento general de  $\nu$  y el grupo de valores de  $\nu^{(n)} = n \nu^{(0)}$  es  $\mathbb{Z}$ .

Llamaremos *número de intersección* entre el anillo de valoración  $R_{\nu}$  y el germen  $\omega$  al entero :

$$N(R_{\nu}, \omega) = n(R_{\nu}, \omega) \in \mathbb{N}.$$

Considérese  $X^{(n+1)}$  como esquema y  $\zeta$  un punto genérico del centro de  $(\nu)$ . Entonces,  $R_{\nu} \simeq \mathcal{O}_{X^{(n+1)}, \zeta}$ .

Si  $U$  es una de las  $n + 2$  cartas afines que recubren  $X^{(n+1)}$ , se tiene,

$$\left[ \Gamma(U, \mathcal{O}_{X^{(n+1)}}) \right]_{\mathfrak{q}} = \left[ \mathcal{A}(U) \right]_{\mathfrak{q}}$$

donde  $\mathfrak{q}$  es el ideal primo asociado a  $\zeta = L_{n+1} \cap U$ , en la carta  $U = \text{Spec } \mathcal{A}(U)$ .

Nótese que si  $P_{n+1} \in L_{n+1} \cap U$  es un punto cerrado y si  $\eta_{L_{n+1}}$  es el punto genérico de  $L_{n+1}$  en  $\text{Spec} \left[ \mathcal{O}_{X^{(n+1)}, P_{n+1}} \right]$ , entonces:

$$\left[ \mathcal{O}_{X^{(n+1)}, P_{n+1}} \right]_{\eta_{L_{n+1}}} \simeq R_{\mathcal{V}}.$$

Y siendo  $\mathfrak{m}_{n+1}$  el ideal maximal en  $\mathcal{A}(U)$  de  $P_{n+1}$  podemos escribir:

$$R_{\mathcal{V}} = \left[ \mathcal{A}(U)_{\mathfrak{m}_{n+1}} \right]_{\mathfrak{q}} \left( \mathcal{A}(U)_{\mathfrak{m}_{n+1}} \right) \longleftarrow \left[ \mathcal{A}(U) \right]_{\mathfrak{m}_{n+1}} \longleftarrow \mathcal{A}(U)$$

Consideraremos, en lo que sigue, el morfismo natural,

$$j: \text{Spec } R_{\mathcal{V}} \longrightarrow X^{(n+1)}$$

A nivel de diferenciales tenemos inducido,

$$j^* \circ \pi^* : \Omega_{X, P} \longrightarrow \Omega_{R_{\mathcal{V}}|_K}$$

Ahora bien, se tiene,

$$\Omega_{R_{\mathcal{V}}|_K} = \left[ \Omega_B \right]_{\eta} = \Omega_B \otimes_B B_{\eta}$$

donde,

$$B = \mathcal{O}_{X^{(n+1)}, P_{n+1}} \text{ y } \eta = \eta_{L_{n+1}}$$

De aquí,  $\Omega_{R_{\mathcal{V}}|_K}$  es un  $R_{\mathcal{V}}$ -módulo libre de rango dos y una base se podrá localizar como  $\{ dz \otimes 1, dw \otimes 1 \}$ , siendo  $\{ z, w \}$  un sistema regular de parámetros para  $B$ . El punto  $P_{n+1}$  puede ser elegido arbitrariamente entre los puntos de  $L_{n+1}$ . Si  $\tilde{\omega} \in \Omega_{R_{\mathcal{V}}|_K}$ ,  $a, b \in R_{\mathcal{V}}$  son sus coordenadas en una base de  $\Omega_{R_{\mathcal{V}}|_K}$ , entonces, el valor,

$$\min \{ v^{(n)}(a), v^{(n)}(b) \}$$

no depende de la base elegida y puede ser denotado por  $v^{(n)}(\tilde{\omega})$ .

En particular, si  $\omega \in \Omega_{X,P}|_K$ , entonces,  $v^{(n)}(j^* \circ \pi^*(\omega))$  será denotado, simplemente, por  $v^{(n)}(\omega)$ .

**Teorema 3.4.E.**

Sea  $\omega$  un germen de foliación en  $P$ ,  $v$  una valoración divisorial centrada en  $P$  y  $D$  [ cap I ] el desarrollo Hamburger-Noether de  $v$  en un sistema de parámetros  $\{ x, y \}$  de  $R$ . Los siguientes números son los mismos:

$$i) \min \left\{ (\omega, f)_P / f \text{ es la rama dada por un elemento general de } v \right\} = (\omega, v)_P.$$

$$ii) N(R_v, \omega).$$

$$iii) v^{(n)}(\omega).$$

$$iv) \omega(x(t,u), y(t,u)) = \\ = \text{ord}_t \left[ a(x(t,u), y(t,u)) \frac{\partial}{\partial t} x(t,u) + \right. \\ \left. + b(x(t,u), y(t,u)) \frac{\partial}{\partial t} y(t,u) \right]_{u=\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}$$

Siendo  $x = x(t,u)$ ,  $y = y(t,u)$  la parametrización que en  $K[t,u]$  da el desarrollo,  $D$ , de Hamburger-Noether de  $v$  para  $z_{\frac{s}{g}} = t$ .  $z_{\frac{s}{g}+1}^* = u = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ , siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  variables.

**Demostración**

Si el desarrollo de Hamburger-Noether de  $v$  es el del enunciado, para una base  $\{ x,y \}$ , el de  $v^{(1)}$  será:

$$\begin{aligned}
y' &= a_{02} x + \dots + a_{0h_0} x^{h_0-1} + x^{h_0-1} z_1 \\
x &= z_1^{h_1} z_2 \\
&\dots \qquad \dots \\
&\dots \qquad \dots \\
z_{s_1-1} &= a_{s_1, k_1} z_{s_1}^{k_1} + \dots + a_{s_1, h_{s_1}} z_{s_1}^{h_{s_1}} + z_{s_1}^{h_{s_1}} z_{s_1+1}^{h_{s_1}} \\
&\dots \qquad \dots \\
&\dots \qquad \dots \\
z_{s_g-1} &= a_{s_g, k_g} z_{s_g}^{k_g} + \dots + z_{s_g}^{h_{s_g}} + z_{s_g}^{h_{s_g}} z_{s_g+1}^*
\end{aligned}$$

En la base  $\{ x, y' \}$  con  $y' = y - a_{01} x / x$ .

Esto permite establecer una biyección entre elementos generales  $f$  de  $v$  y  $f^{(1)}$  de  $v^{(1)}$ .

Teniendo en cuenta que,  $e(f) = v^{(n)}(m)$  ( Ver [ C ], 3.3.2. ), para  $f$  general de  $v$ , se deduce la expresión,

$$\begin{aligned}
&\min \left\{ ( \omega, f )_p / f \text{ es general para } v \text{ en } \mathcal{O}_{X_0, P_0} \right\} = \\
&+ ( v(\omega) + \varepsilon^{(0)} ) v^{(n)}(m) + \\
&\quad + \min \left\{ ( \omega^{(1)}, f^{(1)} )_{P_1} / f^{(1)} \text{ es general para } v^{(1)} \text{ en } \mathcal{O}_{X_1, P_1} \right\}.
\end{aligned}$$

El número  $N(R, \omega) = v^{(n)}(m) (R, \omega)_p$  satisface la misma relación inductiva:

$$N(R_v, \omega) = ( v(\omega) + \varepsilon^{(0)} ) v^{(n)}(m) + N(R_v, \omega^{(1)}).$$

En efecto, para mostrarlo basta tomar la normalización  $v^{(n)}$ , en la definición de valor de intersección entre  $R_v$  y  $\omega$ .

Para los números restantes iii) y iv) se sigue teniendo la misma relación de recurrencia.

Para el valor  $v^{(n)}(\omega)$  basta tener en cuenta lo siguiente: Si elegimos el sistema regular de parámetros  $\{x, y\}$ , tal que,  $x = 0$  no lleve la dirección determinada por  $P_1$ , entonces,

$$\pi_0^*(\omega) = x^{v(\omega)+\varepsilon^{(0)}} \omega^{(1)}, \text{ de aquí,}$$

$$j^* \circ \pi^*(\omega) = (x^{v(\omega)+\varepsilon^{(0)}}) \pi^{(1)*}(\omega^{(1)}).$$

Siendo,  $\pi^{(1)} = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n$ . Como,

$$v^{(n)}(x^{v(\omega)+\varepsilon^{(0)}}) = (v(\omega) + \varepsilon^{(0)}) v^{(n)}(x)$$

y  $v^{(n)}(x) = v^{(n)}(m)$ , ya que,  $v^{(n)}(x) \leq v^{(n)}(y)$ .

Debido a la hipótesis sobre el sistema regular de parámetros, se sigue:

$$v^{(n)}(\omega) = (v(\omega) + \varepsilon^{(0)}) v^{(n)}(m) + v^{(n)}(\omega^{(1)})$$

Finalmente, si se utiliza el desarrollo de Hamburger-Noether y se escribe  $(D, \omega)$  y  $(D^{(1)}, \omega^{(1)})$ , para los correspondientes valores iv), la relación entre los desarrollos  $D$  y  $D^{(1)}$ , para  $v$ , en  $\mathcal{O}_{X,P}$  y  $\mathcal{O}_{X_1, P_1}$  respectivamente, muestra fácilmente que ( Ver 3.3.2. Prop. 1 ):

$$(D, \omega) = (v(\omega) + \varepsilon^{(0)}) \text{ord}_t x(t, u) + (D^{(1)}, \omega^{(1)})$$

Ahora basta tener en cuenta que  $\text{ord}_t x(t, u)$  cuando  $u = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$  es, obviamente, igual al valor  $e(f)$ . Para  $f$  genérico, se sigue la relación:

$$(D, \omega) = (v(\omega) + \varepsilon^{(0)}) v^{(n)}(m) + (D^{(1)}, \omega^{(1)})$$

El teorema se demuestra por inducción, siendo la etapa inductiva consecuencia de las fórmulas anteriores.

En la etapa inicial debemos considerar el caso  $n = 0$ , en el cual, la valoración es el orden relativo al ideal maximal de  $\mathcal{O}_{X,P}$  (o al divisor resultado de explotar  $P$ ). En este caso se tiene,  $v^{(0)}(m) = 1$  y los cuatro números i) ii) iii) y iv) son todos iguales a  $v(\omega) + \varepsilon^{(0)}$ .



En el primer caso, es obvio porque los elementos generales son las curvas lisas por  $P$  y debido a las proposiciones 1 y 2 de 3.3.2. se sigue que, el mínimo  $(\omega, f)_p$  es igual a  $v(\omega) + \epsilon^{(0)}$ .

Que  $N(R_{\nu}, \omega) = v(\omega) + \epsilon^{(0)}$  se sigue de la definición, ya que,  $n = 0$ .

El valor  $\nu^{(n)}(\omega)$ , se calculará evaluando,

$$j^* \circ \pi_0^* \omega = j^* (x^{\nu(\omega)+\epsilon^{(0)}} \omega^{(1)}).$$

Si tomamos por ejemplo  $P_1 = P_{n+1}$ , el punto de  $L_1$  correspondiente a la dirección del eje de las  $x$ . Por la definición de transformada estricta de  $\omega$  en  $P_1$  resulta obvio que  $\nu(j^* \omega^{(1)}) = 0$  (ya que en la transformada estricta se ha eliminado el máximo número de copias de divisor excepcional), por tanto, también  $\nu^{(n)}(\omega) = v(\omega) + \epsilon^{(0)}$ .

Finalmente, el desarrollo de Hamburger-Noether en esta situación es  $y = x u$ , que proporciona las ecuaciones paramétricas:  $x = t$ ;  $y = u t$ .

Haciendo,  $u = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$  con  $\alpha_1, \alpha_2$  variables, se está considerando la curva lisa por  $P$  que lleva tangente genérica  $y$ , tal que, su transformado estricto en  $X^{(1)}$  lleva tangente genérica. Por las proposiciones I y II de 3.2.2. se sigue que,  $(D, \omega) = v(\omega) + \epsilon^{(0)}$ .

Nota E.3.

El resultado iv) del teorema, no es cierto si escribimos  $z_s = t$  y  $z_s^* = \alpha_1 t = u$ , con  $\alpha_1$  variable, para demostrarlo, basta con considerar el ejemplo:

Desarrollo de Hamburger-Noether de  $\nu: y = u x; \omega = 2 y dx - x dy$ . La parametrización será  $x = t; y = u t$  con  $u = \alpha_1 t$ ,  $y$ ,

$$\omega(x(t,u), y(t,u)) = \text{ord}_t (2 \alpha_1 t^2 - t 2 \alpha_1 t) = \infty.$$

Lo que es absurdo.

Nota E.4.

Nuestro próximo objetivo es generalizar los resultados expuestos para valoraciones divisoriales, a otros tipos de valoraciones. A continuación, explicaremos porqué el resultado 3.4.E.iii) no puede extenderse a valoraciones no divisoriales.

Para ello, se requiere que  $\Omega_{R_v}$  sea un  $R$ -módulo de tipo finito, pues esto implica que,  $\Omega_{R_v} / m_v \Omega_{R_v}$ , es un  $R_v / m_v$ -espacio vectorial y si  $\{ m_1, m_2, \dots, m_t \}$  es un sistema minimal de generadores de  $\Omega_{R_v}$ , se tiene que,  $\omega \in \Omega_{R_v}$  verifica,  $\omega = \sum_{j=1}^t a_j m_j$ ;  $a_j \in R_v$ ; y podríamos escribir,

$$v(\omega) = \min_{j=1,2,\dots,t} \{ v(a_j) \}.$$

Probamos ahora que, si  $v$  no es divisorial,  $\Omega_{R_v}$  no es un  $R_v$ -módulo de tipo finito.

Sea  $R_0 = R$  y  $R_i = \mathcal{O}_{X,P_i}$ .  $K(R_i) = F$  el cuerpo de fracciones de  $R_i$ . Se sabe:  $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_i \subseteq \dots$  Y por tanto:

$$\Omega_{R_0} \subseteq \Omega_{R_1} \subseteq \dots \subseteq \Omega_{R_i} \dots$$

De  $R_v = \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ , se puede escribir:

$$\begin{aligned} \Omega_{R_i|K} \otimes F &= \Omega_{F|K} \simeq \{ adx_i + bdy_i \}_{a,b \in F} \simeq \\ &\simeq \{ adx_0 + bdy_0 \}_{a,b \in F} \end{aligned}$$

Isomorfismos de  $F$ -espacios vectoriales ( Con  $\{ x_i, y_i \}$  sistema regular de parámetros de  $R_i$  ). ( Cap I ). Además,

$$R_i \Omega_{R_j} \subseteq \Omega_{R_{\max(i,j)}}$$

Luego,  $\Omega_{R_v} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_{R_i}$  es un  $R_v$ -módulo. Ahora si,

$$\Omega'_i = R_v \Omega_{R_i} = \{ adx_i + bdy_i / a,b \in R_v \},$$

se tiene,  $\Omega'_i \subseteq \Omega'_{i+1}$ .

Pero son distintos, pues si  $\{x, y\}$  es un sistema regular de parámetros de  $R_1$ , entonces,

$$R_{i+1} = R_i \left[ \frac{y}{x} \right]_{\left( \frac{y}{x} \right)} \text{ y, } \Omega'_{i+1} = \left\{ a dx + b d \frac{y}{x} / a, b \in R_0 \right\}$$

$$\text{y, } d \left( \frac{y}{x} \right) = - \frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \notin \Omega'_i. \text{ Pues en otro caso, } 1/x \in R_0.$$

En resumen,  $\Omega_{R_0} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega'_i$  y no es de tipo finito, pues si lo fuera,  $\Omega'_i = \Omega'_{i+1}$  para  $i \gg 0$ .

### 3.4.A.-D.

Sea  $v$  una valoración A o D, su grupo de valores ( en cualquier normalización ) estará incluido en  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ . Considérese el cociente entre dos elementos de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$  como el cociente entre elementos de  $\mathbb{Q}$ , permaneciendo nula la primera coordenada. Esto, permite dar una normalización  $v^{(0)}$  de  $v$ , tal que,  $v^{(0)}(m) = (0, 1) = 1 \in \mathbb{Q}$ .

La fórmula de 3.4.1. tiene ahora sentido, y

$$\left[ R_0, \omega \right] = \sum_{i=0}^{\infty} ( v_p(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)}) v^{(0)}(m_i).$$

Establecemos el convenio de que la serie anterior vale  $(1, 0)$  si es divergente.

### Definición

Se llama *número de intersección* entre el anillo de valoración  $R_0$  y el germen  $\omega$ , al valor de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$  :

$$N(R_0, \omega) = \begin{cases} n^*(R_0, \omega) & \text{si } (R_0, \omega) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \\ (1, 0) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo,  $f$  la curva asociada a  $v$  biyectivamente (Cap. 1),  $n = e(f)$  y  $*$ , el producto

$$\begin{array}{ccc} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \\ n^*(a, b) & & (a, nb) \end{array}$$

Si  $v^* = n * v^{(0)}$  se tiene:

$$N \left[ R_v, \omega \right] = \sum_{i=0}^{\infty} ( v_p(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)} ) v^*(m_i)$$

**Teorema 3.4.A-D.1**

Sea  $v = v^*$  una valoración A-D, normalizada como antes. Sea D [ Cap. 1 ] su desarrollo de Hamburger-Noether. Entonces los números :

i)  $(\omega, f)_p$

ii)  $\omega(x(t), y(t)) =$

$$= \text{ord}_t \left[ a(x(t), y(t)) \frac{\partial}{\partial t} x(t) + b(x(t), y(t)) \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right]$$

( $\omega$  como en 3.3.1.)

donde,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  es la parametrización obtenida del desarrollo Hamburger-Noether de  $v$  con  $z_s = t$ .

iii)  $N(R_v, \omega)$ .

Tienen la misma información.

Son identificados  $(1, 0)$  con  $\infty$  y los elementos  $(0, b)$  con los números racionales  $b$ .

**Demostración**

La parametrización dada por el desarrollo Hamburger-Noether de  $v$  y la de  $f$  coinciden en sistemas de parámetros adecuados, luego:

$$(\omega, f)_p = \omega(x(t), y(t))$$

Si  $\tilde{v}$  es una valoración divisorial, normalizada como en la definición 3.4.E.1., asociada a una familia de puntos de  $v$  suficientemente grande, se tiene  $\tilde{v}(m) = v(m) = e(f)$  y por 3.3.2.,

$$(\omega, f)_p = v(m_0) (v(\omega) + \epsilon^{(0)}) + (\omega^{(1)}, f^{(1)})_{p_1}$$

Iterando el proceso, se concluye,

$$(\omega, f)_p = N(R_v, \omega)$$

### Nota 3.4.A-D.2

El hecho determinante de que la primera proyección de  $(R_{\nu}, \omega)$  (o de  $N(R_{\nu}, \omega)$ ) sea nula, es que  $f$  no sea separatriz de  $\omega$ . Si  $f$  no es separatriz para  $i \gg 0$ ,  $v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)} = 0$ , pues por el teorema de desingularización,  $P_i$  no será singular fuerte de  $\omega^{(i)}$ , tampoco corte de dos divisores, ya que,  $\nu$  es de tipo A-D y los  $P_i$  son libres para  $i \gg 0$ , y  $P_i$  no es simple, pues si lo fueran todos, debería  $f$  de ser una separatriz. En suma, la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)}) \nu^{(0)}(m_j)$$

es finita, pues es una suma finita de valores en  $0 \oplus \mathbb{Q}$ .

Si  $f$  es separatriz, todos los  $P_i$  son libres y simples de  $\omega^{(i)}$  para  $i \gg 0$ , luego,  $v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)} = 1$ , y como  $\sum_{j=0}^{\infty} \nu^{(0)}(m_j)$  es divergente, pues es  $\nu^{(0)}(m_j)$  constante para  $j \gg 0$ . En conclusión, la serie anterior vale  $(1, 0)$ , ya que es divergente.

### Teorema 3.4.A-D. 2.

En las condiciones anteriores, supongamos que  $f$  no es una separatriz, luego,  $\omega \wedge df = \psi \eta$  con  $\eta$  base de  $\Omega_{X,P}^2$ . Si  $\psi$  representa también la curva asociada a  $\psi$ , y  $c$  es el grado del conductor del cierre integro de  $f$ , se tiene:

$$(\psi, f) = N(R_{\nu}, \omega) + c.$$

Siendo  $(\psi, f)$  la multiplicidad de intersección de las curvas  $\psi = 0$  y  $f = 0$ .

### Demostración

El valor  $(\psi, f)$  no depende de los representantes de la curva y foliación elegidos, pues si cambiamos la ecuación de  $f$  por otra  $u f$ , siendo  $u$  una unidad de  $R$ , se tiene,

$$\omega \wedge d(u f) = u \omega \wedge df + f \omega \wedge du = u \psi \eta.$$

Luego,  $\psi' = u\psi$  y lógicamente,  $(\psi', f) = (\psi, f)$ .

Analogamente, si el representante del germen  $\omega$ , lo cambiamos por otro representante reducido  $\omega'$ , está claro que,

$$\omega' = u\omega \quad \text{y} \quad \omega \wedge df = \psi \eta ; \quad \omega' \wedge df = u\psi \eta$$

Fijemos  $\{x, y\}$  un sistema de parámetros de  $R$  y veamos la evolución de  $(\psi, f)$  por transformaciones cuadráticas. Con la notación habitual,  $\{x', y'\}$  será el sistema regular de parámetros de  $R_1$  y,  $x = x'$ ;  $y = x' y'$  el cambio de coordenadas. En el sistema de parámetros anterior,  $\omega \wedge df = \psi \eta = \psi (dx \wedge dy)$ .

$$\begin{aligned} Y, \quad \pi_1^* (\omega \wedge df) &= \pi_1^* \omega \wedge d \pi_1^* f = \\ &= x_1^{\nu_P(\omega^{(0)}) + \epsilon^{(0)}} \omega^{(1)}(x', y') \wedge x'^{\epsilon(f)} df^{(1)} + f^{(1)} e(f) x'^{\epsilon(f)-1} dx' = \\ &= x_1^{\nu_P(\omega^{(0)}) + \epsilon^{(0)} + \epsilon(f)} \omega^{(1)} \wedge df^{(1)} + f^{(1)} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1^* (\psi dx \wedge dy) &= \pi_1^* (\psi) dx' \wedge (y' dx' + x' dy') = \\ &= x' \pi_1^* (\psi) dx' \wedge dy'. \end{aligned}$$

Si  $\omega^{(1)} \wedge df^{(1)} = \psi^{(1)} dx' \wedge dy'$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \pi_1^* (\omega \wedge df) &= x_1^{\nu_P(\omega^{(0)}) + \epsilon^{(0)} + \epsilon(f)} \psi^{(1)} dx' \wedge dy' + \\ &+ f^{(1)}(\dots) dx' \wedge dy'. \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } x_1^{\nu_P(\omega^{(0)}) + \epsilon^{(0)} + \epsilon(f)} \psi^{(1)} + f^{(1)}(\dots) = \pi_1^* (\psi) x'.$$

Si consideramos parametrizaciones,  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$  y,  $x' = x'(t) = x'(t)$ ;  $y' = y'(t) = y'(t) / x'(t)$ , para  $f$  y  $f^{(1)}$ , sustituyendo en la anterior igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} e(f)(\nu_P(\omega^{(0)}) + \epsilon^{(0)} + \epsilon(f)) + (\psi^{(1)}, f^{(1)}) &= \\ = e(f) + \text{ord}_1 [\psi(x'(t), x'(t)y'(t))] &= e(f) + (\psi, f) \end{aligned}$$

Es decir:

$$(\psi, f)_P = (\psi^{(1)}, f^{(1)})_{P_1} + (v_P(\omega^{(0)} + \varepsilon^{(0)}) e(f) + e(f)(e(f)-1)).$$

Continuando este procedimiento a lo largo de los puntos infinitamente próximos de  $v$ :

$$(\psi, f)_P = \sum_{i=0}^{\infty} (v_{P_i}(\omega^{(i)} + \varepsilon^{(i)}) e(f^{(i)}) + \sum_{i=0}^{\infty} e(f^{(i)}) (e(f^{(i)}) - 1)).$$

Esta fórmula y [ C ,4.4.5. ] dan el resultado.

Finalizar, observando que en ambas series sólo un número finito de términos es representativo. Pues para  $i \gg 0$  con  $P_i$  no simple (  $f$  no es separatriz ), podemos escribir  $x = 0$ , ecuación de  $f^{(i)}$  y  $\omega^{(i)} = dy$ , para un sistema regular de parámetros de  $R$ , con lo que  $(\psi^{(i)}, f^{(i)}) = 0$ . Pues  $\psi^{(i)} = -1$ .

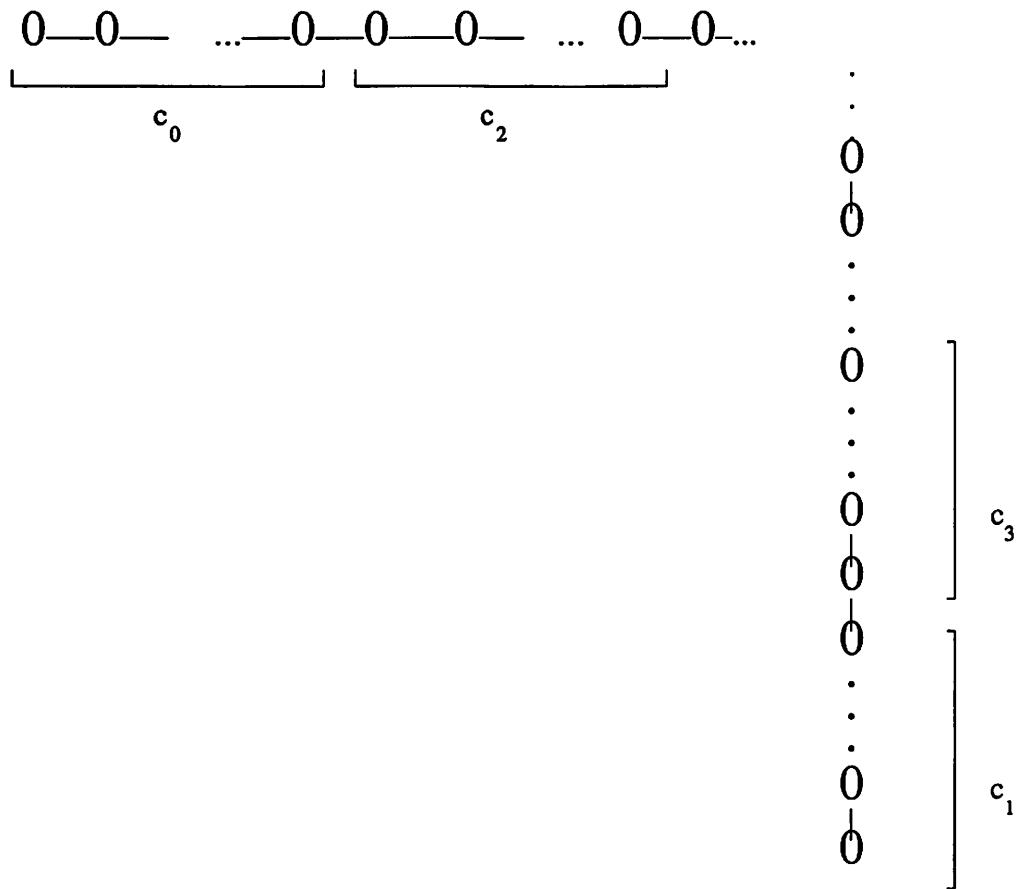
### 3.4.B.

#### Teorema 3.4.B.

La serie  $(R_v, \omega)$  de 3.4.1. es convergente si  $v$  es una valoración de tipo B, luego tiene sentido hablar de *valor de intersección*, que será un número real.

#### Demostración

Considérese el grafo siguiente:



formado por puntos satélites, del último subgrafo  $\Gamma_g$ , del grafo dual de  $v$  ( Ver Cap. I. Valoraciones B ). Sea  $P^*$  un punto infinitamente próximo de  $v$ , tal que, el transformado de  $\omega$  en él esté ya desingularizado y que el grafo correspondiente a puntos infinitamente próximos a partir de  $P^*$  sea el descrito anteriormente.

Póngase  $v^{(i)}$  la normalización de  $v$ , tal que,  $v^{(i)}(m_j) = 1$  con  $P_j = P^*$ . Ahora bien, sea  $\{ x, y \}$  un sistema regular de parámetros de  $m_j$  con  $v^{(i)}(x) = 1$  y  $v^{(i)}(y) = \alpha$ . Y,  $\alpha$  es el desarrollo en fracción continua de  $\{ c_i \}_{i=0}^{\infty}$ :



$$\alpha = [c_0, c_1, \dots, c_i, \dots] = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{c_i + \frac{1}{\ddots}}}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= c_0 + \alpha_1 && \text{para } 0 < \alpha_1 < 1 \\ 1 &= c_1 + \alpha_2 && \text{para } 0 < \alpha_2 < \alpha_1 \\ \dots & && \dots \\ \dots & && \dots \\ \alpha_{i-1} &= c_i + \alpha_{i+1} && \text{para } 0 < \alpha_{i+1} < \alpha_i \\ \dots & && \dots \end{aligned}$$

Lo que implica  $v^{(j)}(m_j) = 1$ ,  $c_0$  veces, o sea,

$$v^{(j)}(m_j) = v^{(j)}(m_{j+1}) = \dots = v^{(j)}(m_{j+c_0-1}) = 1.$$

Analogamente,

$$v^{(j)}(m_{j+c_0}) = v^{(j)}(m_{j+c_0+1}) = \dots = v^{(j)}(m_{j+c_0+c_1-1}) = \alpha_1.$$

Y así sucesivamente, llegando a la igualdad,

$$\sum_{i \geq j} v^{(j)}(m_i) = c_0 + c_1 \alpha_1 + \dots$$

La sucesión de sumas parciales,

$$c_0 + c_1 \alpha_1 + \dots + c_i \alpha_i = \alpha + 1 - \alpha_{i+1} - \alpha_i. \text{ Y la serie convergerá hacia } \alpha + 1, \text{ si } \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0. \text{ Probemos esto.}$$

Si no fuera cierto, existiría un valor  $\varepsilon > 0$  con  $\alpha_i \geq \varepsilon$ , para todo  $i$ .

Por otra parte, sea  $l \in \mathbb{N}$  con  $l \varepsilon > \alpha$ , se tiene,

$$\alpha_{l-1} \geq c_l \alpha_l + \alpha_{l+1} \geq 2\varepsilon$$

Y tambien:

$$\alpha_{i-2} \geq c_{i-1} \alpha_{i-1} + \alpha_i \geq 3\epsilon$$

Siguiendo este proceso, se concluye  $\alpha_1 \geq 1 \epsilon > \alpha$ . Lo que es imposible, ya que,  $\alpha > 1$  y,  $\alpha_1 < 1$ . Luego,  $\sum_{i \geq j} v^{(0)}(m_i) = 1 + \alpha$ .

### 3.4.C.

#### Teorema 3.4.C.

La serie  $(R_{\nu}, \omega)$  de 3.4.1. es convergente, si  $\nu$  es una valoración de tipo C. Tiene sentido, en este caso, hablar de valor de intersección y será un número racional.

#### Demostración

Sea  $P^* = P_j^*$  un punto infinitamente próximo de  $\nu$ , tal que, si  $i > j^*$ ,  $\omega^{(i)}$  está desingularizado y los puntos  $P_i$  no son simples de  $\omega^{(i)}$ . Luego los valores  $v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)}$  se anulan, salvo para aquellos índices  $i$ , tales que,  $P_i$  sea corte de dos divisores, y entonces su valor es 1. Es posible encontrar el índice  $j^*$  anterior, pues si todos los  $P_i$  fueran simples, tendríamos una separatriz cuyo grafo sería el de  $\nu$ , lo que es imposible por hipótesis.

La serie  $(R_{\nu}, \omega)$  será convergente si lo es,

$$\sum_{\substack{P_i \text{ corte de dos divisores} \\ i > j^*}} v(m_i)$$

Bastará con probar que,  $\sum_{P_i \text{ corte de dos divisores}} v^{(0)}(m_i)$  converge.

Sea  $\{x, y\}$  un sistema regular de parámetros de  $m$ , con  $v^{(0)}(x) = 1$  y  $v^{(0)}(y) = p > 1$  ( $v^{(0)}$  es la normalización de  $\nu$ , tal que,  $v^{(0)}(m) = 1$ ). En virtud del desarrollo de Hamburger-Noether de  $\nu$  (Cap.I val. C, y con la misma notación), puede escribirse :

$$\begin{array}{ll}
p = 1 h_0 + \alpha_1 & 0 < \alpha_1 < 1 \\
1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 & 0 < \alpha_2 < \alpha_1 & \text{Del desarrollo} \\
\alpha_1 = \alpha_2 h_2 + \alpha_3 & 0 < \alpha_3 < \alpha_2 & \text{correspondiente} \\
\dots & \dots & \text{a } \Gamma_1 \text{ [3.4.C.1.]} \\
\alpha_{s_1-1} = \alpha_{s_1} k_1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{s_1} = \alpha_{s_1+1} h_{s_1+1} + \alpha_{s_1+2} & 0 < \alpha_{s_1+2} < \alpha_{s_1+1} & \text{Del} \\
\dots & \dots & \text{desa-} \\
\dots & \dots & \text{rrollo} \\
\alpha_{s_2-1} = \alpha_{s_2} k_2 & & \text{de } \Gamma_2
\end{array}$$

[3.4.2.]

$$\begin{array}{ll}
\dots & \dots & \cdot \\
\dots & \dots & \cdot
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{s_{i-1}} = \alpha_{s_{i-1}+1} h_{s_{i-1}+1} + \alpha_{s_{i-1}+2} & 0 < \alpha_{s_{i-1}+2} < \alpha_{s_{i-1}+1} \\
\dots & \dots \\
\alpha_{s_i-1} = \alpha_{s_i} k_i & & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}
\end{array}$$

Los valores de la llave se obtienen del desarrollo correspondiente a  $\Gamma_i$  [3.4.C.i.].

$$\begin{array}{ll}
\dots & \dots \\
\dots & \dots
\end{array}$$

La suma correspondiente a  $\Gamma_1$  ( $P_j \in \Gamma_1$  significa que el divisor obtenido de  $P_j$  está en  $\Gamma_1$ )

$$\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores, } P_j \in \Gamma_1} v^{(0)}(m_j) = (h_1 - 1) \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + k_{s_1} \alpha_{s_1}.$$

( Recordar que son puntos libres los  $h_0$  de multiplicidad 1 y el primero de multiplicidad  $\alpha_1$  ). ( Ver [ C ], 3.3.5. )

Por [3.4.C.1.],  $\sum_{i=1}^{s_1} h_i \alpha_i = 1 - \alpha_1 - \alpha_{s_1}$  (  $h_{s_1} = k_1$  ). Lo que implica:

$$\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores, } P_j \in \Gamma_1} v^{(0)}(m_j) = 1 - \alpha_{s_1}$$

Utilizando [3.4.C.2.],

$$\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores, } P_j \in \Gamma_2} v^{(0)}(m_j) = \alpha_{s_1} - \alpha_{s_2}$$

Y,

$$\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores, } P_j \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} v^{(0)}(m_j) = 1 - \alpha_{s_2}$$

Este proceso y las igualdades [ 3.4.C.i. ] indican:

$$\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores, } P_j \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \dots \Gamma_i} v^{(0)}(m_j) = 1 - \alpha_{s_i}$$

y,  $\sum_{j / P_j \text{ es corte de 2 divisores}} v^{(0)}(m_j)$  converge, ya que, se tiene  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{s_i} = 0$ .

Por reducción al absurdo, si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{s_i} \neq 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  con  $\alpha_{s_i} \geq \varepsilon$ , para todo  $i$ . Además, por [ 3.4.C.i. ] se deduce  $\alpha_{s_{i-1}} \geq 2 \alpha_{s_i}$ . Y si  $n \in \mathbb{N}$ , con  $2^n \varepsilon > p = \alpha_0$ , se concluye,

$$p = \alpha_0 \geq 2 \alpha_{s_0} \geq 2^2 \alpha_{s_2} \geq \dots \geq 2^n \alpha_{s_n} \geq 2^2 \varepsilon > p = \alpha_0$$

lo que es imposible.

Los calculos anteriores se pueden unificar, todos ellos, con ayuda de ecuaciones paramétricas. En efecto, supongamos que  $\omega$  es un germen de foliación en  $P$  y  $\nu$  una valoración centrada en  $P$  dada por ecuaciones paramétricas ( ver 1.7.),

$$x = x(t) \in K' \langle t \rangle$$

$$y = y(t) \in K' \langle t \rangle$$

Para una serie  $z = \sum a_r t^r \in K' \langle t \rangle$  pondremos,  $z' = \sum r a_r t^{r-1} \in K' \langle t \rangle$ , se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4.

El valor  $(R_{\nu}, \omega)$  ( respectivamente  $p_2(R_{\nu}, \omega)$  ) si  $\nu$  es de tipo A ) viene dado por:

$$(R_{\nu}, \omega) = \frac{\text{ord}_t [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]}{\text{mín} \{ \text{ord}_t x, \text{ord}_t y \}}$$

( respectivamente  $p_2(R_{\nu}, \omega)$  ).

En el caso de ser separatriz la curva que define la valoración de tipo A, entonces el segundo miembro es infinito.

Demostración

El resultado es obvio, ya que, el cociente del segundo miembro de la fórmula evoluciona por explosiones como el valor  $(R_{\nu}, \omega)$ .

### 3.5. El proceso de resolución de una foliación en términos valorativos

El propósito de esta sección es obtener información sobre el proceso de resolución de un germen de foliación  $\omega$ , a partir de sus multiplicidades de intersección con valoraciones.

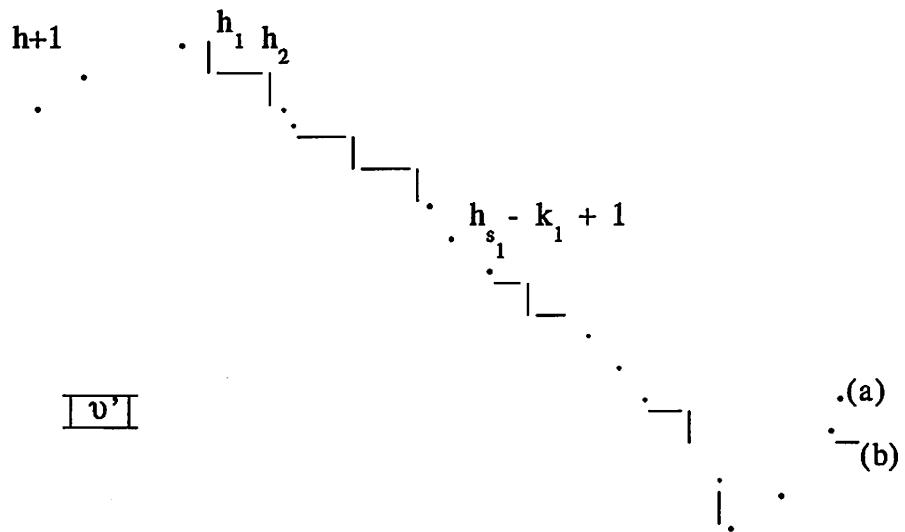
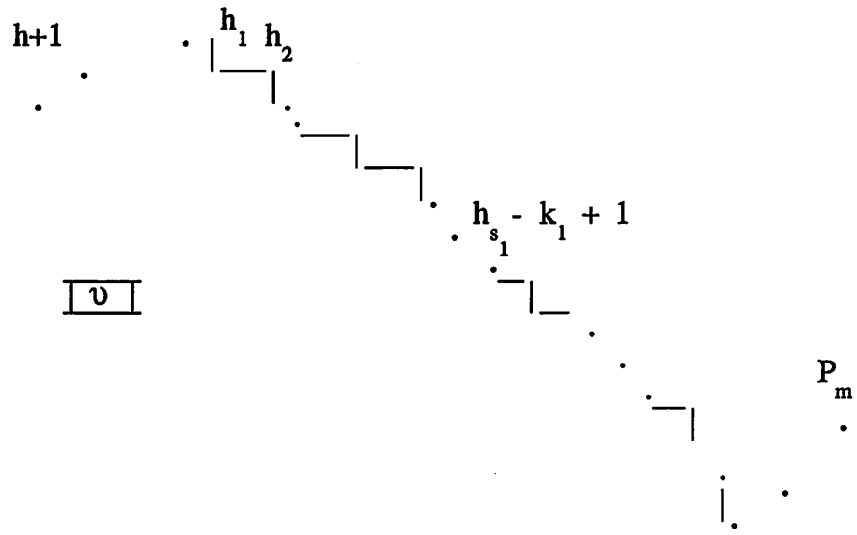
#### 3.5.1.

Consideraremos para ello, pares de valoraciones divisoriales " consecutivas " es decir correspondientes a sucesiones simples finitas  $P_0, \dots, P_m$  y  $P_0, \dots, P_m, P_{m+1}$ , respectivamente, que difieren exactamente en el último punto. Así, si  $\nu$  es la valoración divisorial asociada a  $P_0, \dots, P_m$  y  $\nu'$  la valoración divisorial asociada a  $P_0, \dots, P_m, P_{m+1}$ , diremos entonces, que  $\nu'$  es una valoración consecutiva a  $\nu$ .

Las posibilidades que tenemos para los invariantes discretos asociados a  $\nu$  y  $\nu'$  se expresan con comodidad, en términos del diagrama de Enriques y son las siguientes:

#### 3.5.1.1.

Si  $P_m$  es un punto libre, entonces para  $\nu'$  tenemos dos posibilidades a y b, según que  $P_{m+1}$  sea libre o satélite.



Para el desarrollo de H-N, si

$$z_{s-1} = a_{s k} z_{s g}^k + \dots + U z_{s g}^{k+l}$$

es la última fila del desarrollo H-N para  $v$ , entonces, esta debe sustituirse en  $v'$  por,

$$z_{s-1}^g = a_{s,k}^g z_{s,g}^g + \dots + U_0 z_{s,g}^{k+1} + U z_{s,g}^{k+l+1}$$

en el caso a) y por

$$z_{s-1}^g = a_{s,k}^g z_{s,g}^g + \dots + z_{s,g}^{k+1} z_{s+1}^g$$

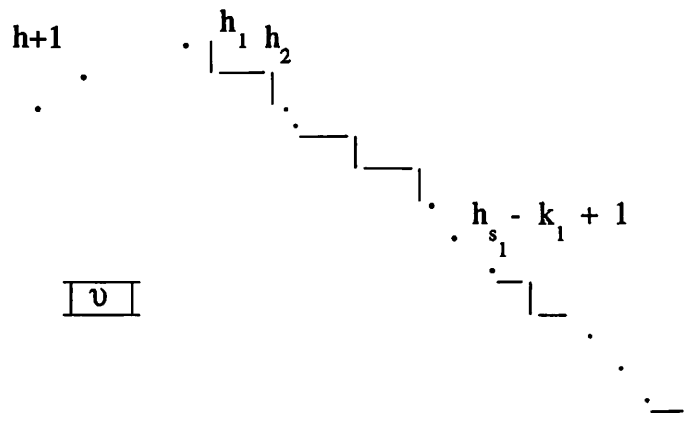
$$z_s^g = U z_{s+1}^g$$

en el caso b).

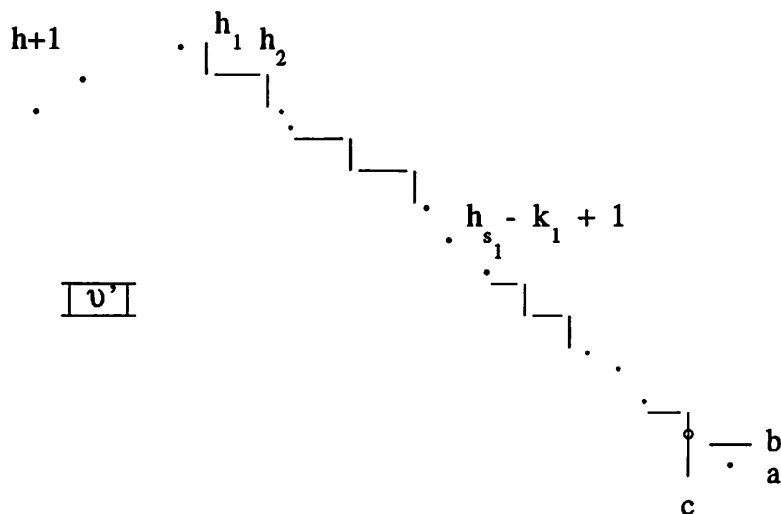
Notemos que si  $m = 0$  sólo se dispondría de  $P_0$  y entonces la posibilidad b) no se daría.

### 3.5.1.2.

Si  $P_m$  es un punto satélite, entonces para  $v'$  hay tres posibilidades a, b y c según que  $P_{m+1}$  sea libre, satélite sobre el divisor excepcional creado por  $P_{m-1}$  o satélite fuera de dicho divisor.







En términos del desarrollo H-N, si

$$z_{s-1}^g = U z_s^g{}^k$$

es la última fila para el desarrollo de  $v$ , entonces para obtener el de  $v'$  debemos sustituirla por,

$$z_{s-1}^g = U_0 z_s^g{}^k + U z_s^g{}^{k+1}$$

en el caso a, por,

$$z_{s-1}^g = U z_s^g{}^{k+1}$$

en el caso c, y por

$$z_{s-1}^g = z_s^g{}^k z_{s+1}^g$$

$$z_s^g = U z_{s+1}^g{}^2$$

en el caso b.

Comparemos, ahora, las multiplicidades de intersección  $(R_v, \omega)$  y  $(R_{v'}, \omega)$ , donde  $\omega$  es un germen de foliación y  $v, v'$  son valoraciones consecutivas.

### 3.5.2.

En las situaciones a y b las relaciones entre los números de intersección  $(R_{\nu}, \omega)$  y  $(R_{\nu'}, \omega)$ , para dos valoraciones divisoriales consecutivas es sencilla de establecer, ya que se tiene,

$$(3.5.2.1.) \quad (R_{\nu'}, \omega) - (R_{\nu}, \omega) = \frac{1}{\nu'(m)} (\text{ord}_{P_i}(\omega) + \epsilon_{P_i}).$$

Estas propiedades se derivan fácilmente de las expresiones de Hamburger-Noether, ya que, en el caso a se tiene  $\nu(m) = \nu'(m)$ , mientras que en el caso b es  $\nu'(m) = 2\nu(m)$ . En el caso c es, sin embargo, más complicado y no hay una relación tan cómoda como las anteriores. La razón está en que cuando se tenga un bloque del estilo,

$$(3.5.2.2.) \quad \begin{aligned} x &= z_1^{h_1} z_2 \\ z_1 &= z_2^{h_2} z_3 \\ &\vdots \\ z_{s-1} &= z_s^k U \end{aligned}$$

para terminar el desarrollo H-N de  $\nu$ , entonces, el bloque final en el desarrollo H-N de  $\nu'$  es

$$(3.5.2.3.) \quad \begin{aligned} x &= z_1^{h_1} z_2 \\ z_1 &= z_2^{h_2} z_3 \\ &\vdots \\ z_{s-1} &= z_s^{k+1} U \end{aligned}$$

Ahora los valores  $\nu(m_{P_i})$  y  $\nu'(m_{P_i})$  se conocen unos en función de otros, pero no es cómoda la expresión. Lo que si se tiene es que para los puntos  $P_i$  representados en bloques anteriores (es decir, no satélites de la última escalera en el diagrama de Enriques) se tendrá,

$$\frac{v(m_{P_i})}{v(m)} = \frac{v'(m_{P_i})}{v'(m)}$$

sin embargo no ocurre así, como muestran las expresiones 3.5.2.2., 3.5.2.3. anteriores para los puntos  $P_i$  de la última escalera.

Las relaciones 3.5.2.1. muestran como los valores  $\text{ord}_P(\omega) + \epsilon_P$  se pueden determinar en función de las multiplicidades de intersección consecutivas en las situaciones a y b. En el caso c son necesarias mas que pares de valoraciones consecutivas, las valoraciones de una sucesión  $v_1, \dots, v_q$ , tales que,  $v_i$  y  $v_{i+1}$  son consecutivas. En general, llamaremos *camino* de valoraciones divisoriales a una tal sucesión y *rama* a un camino para el cual  $v_1$  es la valoración correspondiente al divisor excepcional de la explosión del punto cerrado de Spec R. Es obvio que un camino ( respectivamente rama ) es un dato equivalente a una sucesión simple finita de puntos infinitamente próximos que comienza en un cierto punto infinitamente próximo ( respectivamente que comienza en el punto cerrado de Spec R ).

#### Proposición 3.5.2.4.

Sea  $P_1, P_2, \dots, P_q$  una sucesión simple finita de puntos infinitamente próximos que comienza en el punto infinitamente próximo  $P_1$ ,  $v_1, \dots, v_q$  el camino de valoraciones asociado y sea  $\omega^{(1)}$  un germen de foliación en  $P_1$  de la superficie que contiene a  $P_1$ . Entonces las sucesiones,

$\left\{ v_{P_i}(\omega^{(i)}) + \epsilon^{(i)} \right\}_{1 \leq i \leq n}$  y  $\left\{ (R_{v_i, \omega^{(1)}}) \right\}_{1 \leq i \leq n}$  son datos equivalentes.

#### Demostración

Es obvio que la primera sucesión determina la segunda, ya que los datos  $v(m_{P_i})$  son números asociados al camino considerado.

El recíproco se obtiene a partir de la fórmula,

$$(R_{\mathfrak{v}_q}, \omega^{(1)}) = (R_{\mathfrak{v}_q}, \omega^{(2)}) \frac{\mathfrak{v}_q(m_{P_2})}{\mathfrak{v}_q(m_{P_1})} + (\mathfrak{v}(\omega^{(1)}) + \epsilon_{P_1})$$

Es claro que los valores  $\frac{\mathfrak{v}_q(m_{P_2})}{\mathfrak{v}_q(m_{P_1})}$  dependen sólo del camino de

valoraciones, por tanto el resultado se sigue fácilmente.

### 3.5.2.5. Nota

Si se toman sucesiones asociadas a los bloques de puntos infinitamente próximos satélites, se observa la posibilidad de manejar el caso c como se quería en 3.5.2.3.

### 3.5.3.

Es posible utilizar los resultados anteriores para caracterizar los divisores dicríticos y no dicríticos. En efecto, supongamos que  $\omega$  es un germen de foliación en  $\text{Spec } R$ . Tomemos un punto  $P_2$  general en el divisor excepcional  $L_1$  resultado de explotar  $P_1$ . Entonces  $P_2$  será un punto regular y de aquí  $\mathfrak{v}_{P_2}(\omega^{(2)}) + \epsilon^{(2)} = 0$ . Ahora, sea  $P_3$  el punto del divisor excepcional de la explosión en  $P_2$  en la dirección de  $L_1$ . Entonces el divisor  $L_1$  será dicrítico ( respectivamente no dicrítico ) según que  $P_3$  sea ( respectivamente no sea ) un punto regular ( en el caso no dicrítico será, de hecho, esquina simple ). Así,  $L_1$  es dicrítico ( respectivamente no dicrítico ) según que  $\mathfrak{v}_{P_3}(\omega^{(3)}) + \epsilon^{(3)} = 0$  ( respectivamente = 1 ).

Por otro lado, es claro que conocida una rama que termine en el punto cerrado  $P_1$ , entonces los puntos singulares de  $L_1$  se caracterizarán por la propiedad  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) + \epsilon^{(2)} \geq 1$ . La cuestión está en el caso en que  $L_1$  sea no dicrítico, caracterizar los puntos simples de  $L_1$ . Dichos puntos son aquellos que, siendo singulares pasan por ellos, exactamente, dos separatrices, una el divisor excepcional y otra una separatriz (formal, en general) que es lisa y transversal al divisor excepcional. Para estos puntos, se tiene además  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) = 1$ ,  $\epsilon^{(2)} = 0$ , por tanto bastará caracterizar los puntos simples entre los puntos de  $L_1$  con  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) + \epsilon^{(2)} = 1$  (esto es equivalente a  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) = 1$ ,  $\epsilon^{(2)} = 0$ ).

Sea  $L_1$  no dicrítico y  $P_2 \in L_1$ , si se tiene  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) = 1$ , entonces para que  $P_2$  sea simple en el divisor  $L_2$ , resultado de explotar  $P_2$ , se tendrán 2 puntos simples, uno de ellos la esquina  $L_2 \cap L_3$ . Si denotamos  $P_3$  al otro punto simple, en  $P_3$  se repite la situación y se continua la línea formando  $P_1, \dots, P_n, \dots$ . Si  $P_2$  no fuese simple, entonces la condición  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) = 1$  más el hecho de que el cociente de los autovalores de la parte lineal está en  $\mathbb{Q}^+$  indica que alguno de los  $P_n$  tiene que ser dicrítico. Así se tendrá que  $P_2$  es simple, si y sólo si,  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) + \epsilon^{(2)} = 1$ , además  $L_2$  no es dicrítico y en  $L_2$  hay un único  $P_3$  distinto de la esquina  $L_1 \cap L_2$  con  $v_{P_3}(\omega^{(3)}) + \epsilon^{(3)} = 1$  y así sucesivamente. Alternativamente, para los puntos no simples con  $v_{P_2}(\omega^{(2)}) + \epsilon^{(2)} = 1$  se encontrará un camino  $P_1, P_2, \dots, P_n$  con  $P_n$  dicrítico.

Todo lo anterior se resume en el siguiente resultado.

### 3.5.3.1. Teorema

Sea  $\omega$  un germen de foliación sobre  $\text{Spec } R$ . Entonces la resolución completa de la foliación de  $\omega$  se puede determinar algorítmicamente a partir de las asignaciones  $(R_{\nu}, \omega)$  a todas las valoraciones divisoriales.

### 3.5.3.2. Nota

Un algoritmo para encontrar el proceso de resolución de una foliación ( es decir la combinatoria dada por el árbol de puntos infinitamente próximos con pesos dados por  $(v_p(\omega^{(i)}), \varepsilon^{(i)})$  puede darse sin necesidad de explotar. La idea es la siguiente: Para determinar una rama de valoraciones que intervenga en el proceso de resolución se utilizan desarrollos de Puiseux ( también sería posible desarrollos H-N en la misma forma ). Las observaciones 3.5.1. muestran las posibilidades para una valoración consecutiva a una ya construida de entre ellas hay que elegir las que sugiere el teorema anterior. La relación entre la forma del desarrollo H-N y del desarrollo de Puiseux ( ver [ C ] ) y la facilidad para calcular  $(R_{\nu}, \omega)$  cuando  $R_{\nu}$  está dado por paramétricas ( ver 1.7.8. y 3.4. ),

$$x = t^n$$
$$y = \sum_{i=n}^N a_i t^i + U t^{N+1}$$

nos posibilitará ir calculando sucesivamente las ramas del proceso de resolución. El algoritmo será infinito en el proceso de determinar los puntos simples. Valorativamente, ello se corresponde a las valoraciones A-D que están asociadas a  $\omega$  en 3.3.

### 3.5.3.3. Nota

Las valoraciones asignadas en 3.3. a  $\omega$  se pueden determinar algorítmicamente sin necesidad de explotar. De aquí que la clase de equivalencia discreta de las valoraciones asignadas se podría calcular por un tal algoritmo.

Lo que parece un problema más complicado es caracterizar, en el caso analítico, cuáles de las valoraciones que proceden de puntos simples son de tipo A y cuáles son de tipo D, es decir cuáles dan lugar a separatrices convergentes y cuáles dan lugar a separatrices formales.

## BIBLIOGRAFIA

- [ A ] S.S. Abhyankar, On the valuations centered in a local domain, Amer. J. Math. 78 (1956), 321-348.
- [ B ] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Hermann. Paris (1967).
- [ Ba ] V. Bayer, Semigroup of two irreducible algebroid plane curves. Manuscripta Math. 48 (1985), 207-241.
- [ C ] A. Campillo, Algebroid curves in positive characteristic, Lecture Notes in Mathematics 613 (1980), Springer-Verlag, Berlin and New York.
- [ Ca ] F. Cano, Desingularization of plane vector fields, Trans. of the A.M.S. (1986), 83-93.
- [ Ca-2 ] F. Cano, Desingularization strategies for 3-dimensional vector fields, Lecture Notes in Mathematics 1259, Springer-Verlag. (1987).
- [ Cam ] A. Campillo, Semigrupos de valores de singularidades de curvas analíticamente irreducibles. Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Vol I. pp. 449-452. U. de Salamanca. (1982).
- [ CC ] F. Cano, D. Cerveau, Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrix, Acta Math. 1990.
- [ Cj ] J. Cano, Newton Polygon for differential equations. Workshop in Holomorphic Dynamical Systems. Guanajuato 1991. Mexico.
- [ CLS ] Camacho-Lins-Sad, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, J. off Diff. Geometry 20 (1984), 143-174.
- [ D ] F. Delgado, Invariantes numéricos de las curvas algebroides reducidas. Una descripción explícita, Tesis (1986), Universidad de Valladolid.
- [ De ] F. Delgado, The semigroup of values of a curve singularity with several branches. Manuscripta mathematica 59, 347 - 374. (1987).



- [ G ] X. Gomez-Mont, Sistemas dinámicos holomorfos en superficies, Aportaciones matemáticas 3, Sociedad matemática mexicana. (1989)
- [ Ga ] J. Garcia de la Fuente, Geometria de los sistemas lineales de potencias en dos variables, Tesis, Universidad de Valladolid (1990).
- [ H ] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM, Springer Verlag (1977).
- [ J ] J.P. Jouanolou, Equations de Pfaff algébriques, Lecture Notes in Math. 708, Springer-Verlag (1979).
- [ K ] M. Klughertz, Feuilletages holomorphes a singularité isolée ayant une infinie de courbes intégrales, Tesis, Universidad Paul Sabatier, Toulouse (1988).
- [ M ] H. Matsumura, Commutative algebra, Benjamin Inc. (1970).
- [ R ] M. Raynaud, Anneaux locaux henséliens, Lecture Notes in Mathematics 169.
- [ S-1 ] M. Spivakovsky, Sandwiched singularities of surfaces and the Nash resolution for surfaces, Tesis Harvard (1985).
- [ S-II ] M Spivakovsky, Valuation in function fields, Am. J. of Math. (1989).
- [ Se ] A. Seidenberg, Reduction of singularities of the differential equation  $A dx = B dy$ , Am. J. of Math., 248-269 ( 1968 ).
- [ V ] O. Villamayor, On constructiveness in Hironaka's theorem, An. Sc. Norm. Sup. (1989).
- [ W ] R. Walker, Algebraic Curves, Dover Inc., New York (1962).
- [ Z-S ] O. Zariski and P. Samuel. Commutative Algebra II, Van Nostrand, (1960).

# INDICE

## INTRODUCCION.

### 1. VALORACIONES Y SUS DESARROLLOS HAMBURGER-NOETHER.

1.0. Introducción y preliminares	1
1.1. Expresión Hamburger-Noether asociada a una valoración	4
1.2. Valoraciones y grafos duales asociados	7
1.3. Grafos duales y desarrollos Hamburger-Noether las valoraciones divisoriales	11
1.4. Grafos duales y desarrollos Hamburger-Noether de las valoraciones no divisoriales	25
1.5. Descripción de las valoraciones que dominan a $R$	38
1.6. Expresión explícita de una valoración a partir de su desarrollo Hamburger-Noether	58
1.7. Ecuaciones paramétricas asociadas a una valoración. El algoritmo Hamburger-Noether	61
1.8. La serie de Poincaré asociada a valoraciones divisoriales	72

### 2. EQUIVALENCIA DISCRETA DE FAMILIAS FINITAS DE VALORACIONES

2.1. Equivalencia de sucesiones finitas simples de transformaciones cuadráticas	84
2.2. Equivalencia discreta de sucesiones finitas de transformaciones multicuadráticas	97

---

2.3 Equivalencia discreta de familias finitas de valoraciones divisoriales	114
2.4. El contacto maximal para familias finitas de valoraciones divisoriales	122
2.5. Equivalencia discreta de familias finitas de valoraciones A,D y E	140

### 3. VALORACIONES ASOCIADAS A UN GERMEN DE FOLIACION PLANO.

3.1. Introducción	143
3.2. Equirreducción de foliaciones	150
3.3. Intersección entre curvas y foliaciones	157
3.4. Intersección entre valoraciones y foliaciones	160
3.5. El proceso de resolución de una foliación en términos valorativos	179
BIBLIOGRAFIA	189